

# Soubor grafů funkcí pro předmět Matematika 1

Graphs of mathematical functions for subject 'Mathematics 1'

Jakub Formánek

---

Bakalářská práce  
2011



Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně  
Fakulta aplikované informatiky

---

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně  
Fakulta aplikované informatiky  
akademický rok: 2010/2011

## ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Jakub FORMÁNEK**  
Osobní číslo: **A08034**  
Studijní program: **B 3902 Inženýrská informatika**  
Studijní obor: **Informační a řídicí technologie**

Téma práce: **Vytvoření souboru grafů funkcí pro podporu výuky  
předmětu Matematika 1 v bakalářském studiu na  
UTB ve Zlíně**

Zásady pro vypracování:

1. Vytvořte soubor grafů základních funkcí jedné proměnné (funkce konstantní, lineární, kvadratická, mocninná, exponenciální, logaritmická, goniometrické, cyklometrické).
2. Rozšiřte soubor o grafy z nich odvozených funkcí a některých složených funkcí.
3. Doplňte k funkcím vlastnosti (definiční obor, obor hodnot, klesající/rostoucí, lokální extrém, konvexní/konkávní, inflexní body, asymptoty).
4. Napište program na vizualizaci grafů uvedených v bodech 1. a 2. s využitím softwaru Wolfram Mathematica.
5. Rozšiřte program o část k vykreslení grafů funkcí s proměnlivým zadáváním parametrů funkcí posuvníkem.
6. Doplňte program o možnost výstupu do souboru formátu pdf.

Rozsah bakalářské práce:

Rozsah příloh:

Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

1. **KŘENEK, Josef, OSTRAVSKÝ Jan**, Diferenciální a integrální počet funkce jedné proměnné s aplikacemi v ekonomii, 2. vydání, , FAI UTB ve Zlíně, 2001, 232 s. ISBN 80-7318-025-1.
2. **FIALKA, Miloslav, CHARVÁTOVÁ Hana**, Matematika I., 1. vydání, , FAI UTB ve Zlíně, 2006, 106 s. ISBN 80-7318-438-9.
3. **CHRAMCOV, Bronislav**, Základy práce v prostředí Mathematica, 2. vydání, FAI UTB ve Zlíně, 2006, 122 s. ISI N 80-7318-510-5.
4. **Mathematica ? ELKAN: Dokumenty [online].** 2011 [cit. 2011-02-02], Dostupné z [www.mathematica.cz/dokumenty.php].
5. **Wolfram Research. Wolfram [online].** 2011 [cit. 2011-02-02], Dostupné z: [www.wolfram.com/].

Vedoucí bakalářské práce: **Mgr. Jaroslav Fišo**  
Ústav matematiky

Datum zadání bakalářské práce: **25. února 2011**

Termín odevzdání bakalářské práce: **7. června 2011**

Ve Zlíně dne 25. února 2011

  
prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.  
*děkan*



  
prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.  
*ředitel ústavu*

## **ABSTRAKT**

Cílem bakalářské práce bylo vytvořit soubor grafů elementárních funkcí, funkcí z nich odvozených a některých složených. K vizualizaci bylo využito možností softwaru Wolfram Mathematica 7. Soubor grafů poslouží jako podpora výuky předmětu Matematika 1 na bakalářském studiu FAI UTB ve Zlíně.

Klíčová slova: elementární funkce, graf, Mathematica, Plot, Manipulate

## **ABSTRACT**

The aim of this bachelor thesis was to create a set of graphs of elementary mathematical functions and derived functions. Options of Wolfram Mathematica 7 software were used for graphical visualization. This set of graphs can be used as a support of “Matematika 1“ course by students at TBU in Zlín.

Keywords: elementary function, graph, Mathematica software, Plot, Manipulate

Touto cestou bych rád poděkoval Mgr. Jaroslavu Fiřovi za poskytnuté rady a připomínky během vypracovávání této práce a čas, který mi věnoval při konzultacích.

**Prohlašuji, že**

- beru na vědomí, že odevzdáním bakalářské práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb. o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších právních předpisů, bez ohledu na výsledek obhajoby;
- beru na vědomí, že bakalářská práce bude uložena v elektronické podobě v univerzitním informačním systému dostupná k prezenčnímu nahlédnutí, že jeden výtisk bakalářské práce bude uložen v příruční knihovně Fakulty aplikované informatiky Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně a jeden výtisk bude uložen u vedoucího práce;
- byl/a jsem seznámen/a s tím, že na moji bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších právních předpisů, zejm. § 35 odst. 3;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 1 autorského zákona má UTB ve Zlíně právo na uzavření licenční smlouvy o užití školního díla v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 2 a 3 autorského zákona mohu užít své dílo – bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití jen s předchozím písemným souhlasem Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše);
- beru na vědomí, že pokud bylo k vypracování bakalářské práce využito softwaru poskytnutého Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně nebo jinými subjekty pouze ke studijním a výzkumným účelům (tedy pouze k nekomerčnímu využití), nelze výsledky bakalářské práce využít ke komerčním účelům;
- beru na vědomí, že pokud je výstupem bakalářské práce jakýkoliv softwarový produkt, považují se za součást práce rovněž i zdrojové kódy, popř. soubory, ze kterých se projekt skládá. Neodevzdání této součásti může být důvodem k neobhájení práce.

**Prohlašuji,**

- že jsem na bakalářské práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval. V případě publikace výsledků budu uveden jako spoluautor.
- že odevzdaná verze bakalářské práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG jsou totožné.

Ve Zlíně

.....  
podpis diplomanta

**OBSAH**

<b>ÚVOD</b> .....	<b>9</b>
<b>I TEORETICKÁ ČÁST</b> .....	<b>10</b>
<b>1 WOLFRAM MATHEMATICA SOFTWARE</b> .....	<b>11</b>
1.1 SPOLEČNOST WOLFRAM RESEARCH.....	11
1.2 PROSTŘEDÍ MATHEMATICA.....	12
1.3 PRÁCE V PROSTŘEDÍ MATHEMATICA.....	13
1.3.1 Palety nástrojů.....	13
1.3.2 Práce s buňkami, provedení a přerušení výpočtu.....	14
1.3.3 Využití předchozích výstupů, středníku a závorek.....	15
1.3.4 Použití nápovědy.....	17
<b>2 FUNKCE</b> .....	<b>18</b>
2.1 REÁLNÁ FUNKCE REÁLNÉ PROMĚNNÉ A JEJÍ VLASTNOSTI.....	18
2.1.1 Definice.....	18
2.1.2 Rostoucí, klesající, monotónní funkce.....	18
2.1.3 Sudá, lichá funkce.....	19
2.1.4 Periodická funkce.....	20
2.1.5 Omezená funkce a extrémy.....	21
2.1.6 Prostá funkce.....	22
2.1.7 Inverzní funkce.....	22
2.1.8 Složená funkce.....	23
2.2 ELEMENTÁRNÍ FUNKCE.....	23
2.2.1 Lineární funkce.....	23
2.2.2 Kvadratická funkce.....	25
2.2.3 Mocninná funkce.....	26
2.2.4 Exponenciální funkce.....	27
2.2.5 Logaritmická funkce.....	28
2.2.6 Goniometrické funkce.....	28
2.2.7 Cyklometrické funkce.....	31
<b>II PRAKTICKÁ ČÁST</b> .....	<b>33</b>
<b>3 POUŽITÉ FUNKCE V MATHEMATICE</b> .....	<b>34</b>
3.1 MATEMATICKÉ FUNKCE.....	34
3.2 VYKRESLENÍ 2D GRAFŮ.....	35
3.2.1 Funkce Plot.....	35
3.2.2 Parametry funkce Plot.....	37
3.3 DALŠÍ POUŽITÉ FUNKCE.....	43
<b>4 VYBRANÉ GRAFY FUNKCÍ ZE SOUBORU GRAFŮ</b> .....	<b>47</b>

4.1	KONSTANTNÍ FUNKCE .....	48
4.2	LINEÁRNÍ FUNKCE .....	49
4.3	KVADRATICKÁ FUNKCE.....	50
4.4	MOCNINNÁ FUNKCE .....	51
4.5	EXPONENCIÁLNÍ FUNKCE .....	52
4.6	LOGARITMICKÁ FUNKCE .....	53
4.7	GONIOMETRICKÉ FUNKCE .....	53
4.8	CYKLOMETRICKÉ FUNKCE.....	55
4.9	DALŠÍ FUNKCE V SOUBORU GRAFŮ .....	56
<b>ZÁVĚR .....</b>		<b>57</b>
<b>ZÁVĚR V ANGLIČTINĚ.....</b>		<b>58</b>
<b>SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY.....</b>		<b>59</b>
<b>SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK .....</b>		<b>60</b>
<b>SEZNAM OBRÁZKŮ .....</b>		<b>61</b>
<b>SEZNAM PŘÍLOH.....</b>		<b>63</b>

## ÚVOD

Matematický pojem „funkce“ byl poprvé použit Gottfriedem Leibnizem kolem roku 1673. Funkce popisuje závislost změny výstupu nebo výstupní hodnoty na změně vstupní hodnoty. S pojmem funkce je také spřízněn Johann Bernoulli, který v roce 1718 vnesl nový pohled na funkci jako na výraz sestavený z proměnných a konstant. Alexis Claude Clairaut a Leonhard Euler přišli jako první s označením  $f(x)$ . Funkcemi se během historie zabývalo mnoho vědců a matematiků, což dalo vzniknout několika různým definicím. Mezi další jména spojená s matematickými funkcemi patří například J. Fourier, Weierstrass, Dirichlet, Boole a další.

Cílem této bakalářské práce je pomocí softwaru Mathematica vytvořit soubor grafů základních matematických funkcí pro podporu výuky předmětu Matematika 1. Studenti budou mít možnost nahlédnout na větší množství grafů funkcí, které se od sebe liší hodnotami jednotlivých parametrů, a uvědomí si tak lépe rozdíly v průběhu funkcí. Pro lepší názornost budou k dispozici také interaktivní grafy s posuvníky.

V teoretické části práce najdeme informace o společnosti Wolfram, stručný popis práce s prostředím Mathematica 7 a kapitole věnovanou funkcím. Zmíníme se nejprve o definici reálné funkce reálné proměnné a jejích vlastnostech. Dále zde uvedeme přehled elementárních funkcí s popisem.

Praktická část je zaměřená na vypracovávání souboru grafů v prostředí Mathematica. Popíšeme zde použité funkce prostředí Mathematica k vykreslování 2D grafů a jednotlivé parametry. V poslední kapitole uvedeme několik názorných příkladů grafů se zdrojovými kódy.

## **I. TEORETICKÁ ČÁST**

## 1 WOLFRAM MATHEMATICA SOFTWARE

### 1.1 Společnost Wolfram Research

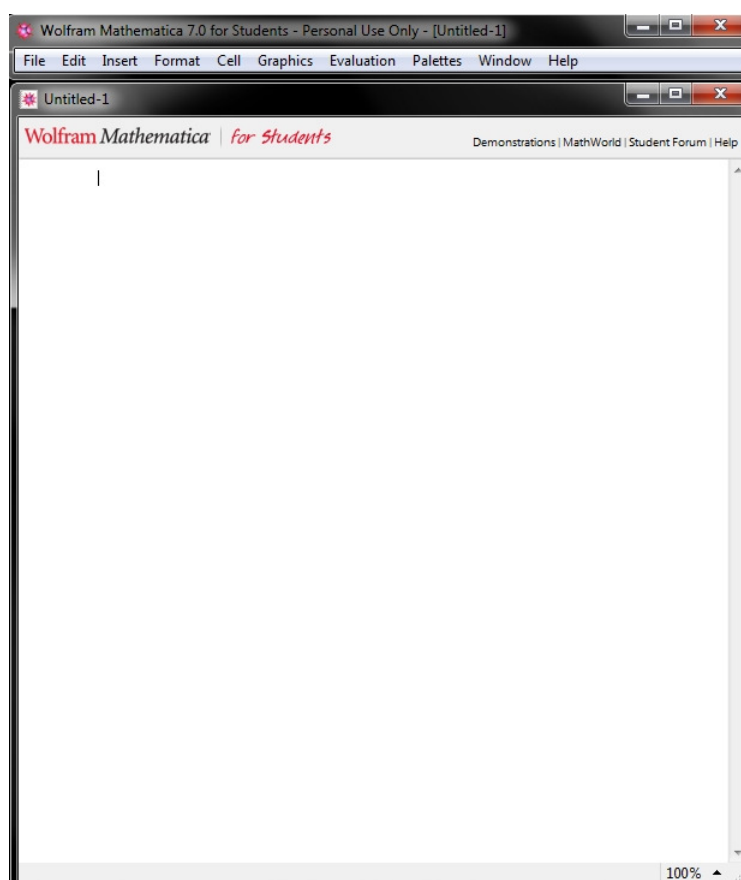
Společnost Wolfram Research byla založena v roce 1987 Stephenem Wolframem. Produkt této společnosti, Mathematica, se řadí mezi nejvýkonější výpočetní softwarové systémy. Jeho příchod znamenal obrovský pokrok ve využívání počítačů nejen v technických oblastech. Dříve existovaly různé nástroje na řešení specifických úloh a problémů, např. numerických, algebraických a grafických. Vize společnosti Wolfram Research byla vytvořit univerzální prostředí, ve kterém by byly veškeré nástroje integrovány, a zjednodušit tak práci při řešení úloh v jednotné formě. Klíčem k této skutečnosti bylo sestavení nového symbolického jazyka, který dokáže manipulovat s širokým spektrem objektů a umožní tak využít veškeré prostředky potřebné v technických oblastech. Nebyla náhoda, že první vydání softwaru Mathematica bylo zařazeno mezi 10 nejdůležitějších nových produktů roku a technickou komunitou označeno za revoluci.

Zpočátku byla Mathematica využívána hlavně ve fyzikální vědě, matematice a inženýrství, postupem času se však její uplatnění rozšířilo do mnoha dalších odvětví, mezi něž můžeme zařadit například biologické a sociální vědy. Komunita společnosti je obrovská a čítá velké množství jak vývojářů a technických profesionálů, tak běžných uživatelů. Software je díky svým možnostem začleněn do vzdělávání na středních a vysokých školách po celém světě. Studentské licence softwaru a množství kurzů navíc zjednodušují přístup k softwaru a rozšiřují tak komunitu o další členy.

O vývoj softwaru se stará tým Wolfram Research vedený už od založení Stephenem Wolframem. Úspěch Mathematicy umožnil týmu zabývat se dlouhodobými cíly spjatými s výzkumem, vývojem, rozšiřováním možností a podporou komunity. K dnešnímu dni je aktuální verze Mathematica 8.[3,5]

## 1.2 Prostředí Mathematica

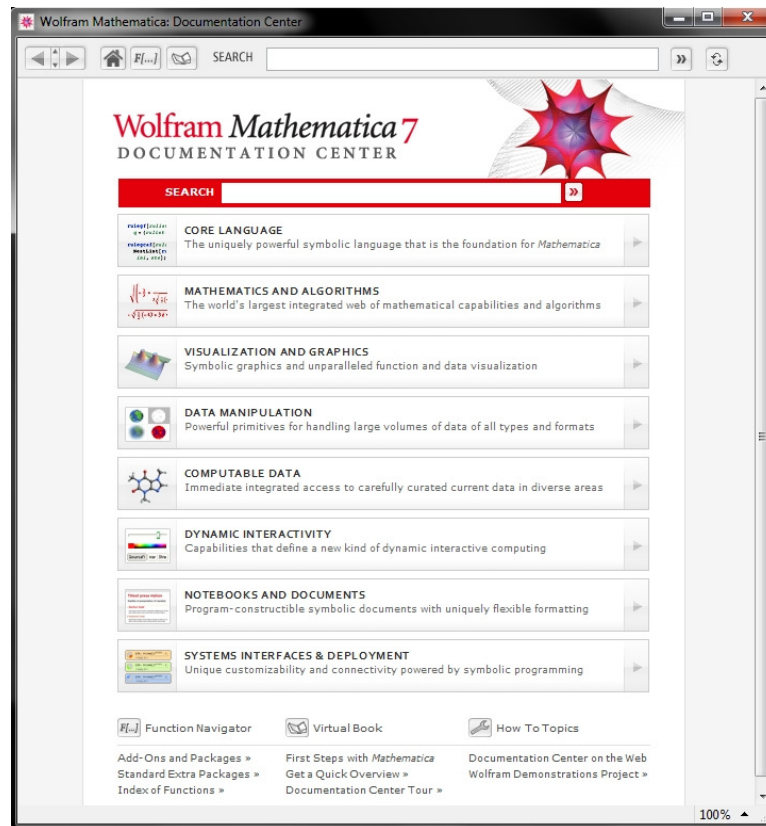
Veškerý zdrojový kód v jazyce Mathematica je sázen do dokumentačního systému s názvem notebook. Do každého notebooku je možné sázet matematické výrazy, grafiku, animace, odkazy a samozřejmě prostý text, který je možno libovolně formátovat a tím zpřehlednit strukturu notebooku. Výsledný soubor má koncovku \*.nb. Mathematica ovšem umožňuje i převod do jiných formátů, mezi nimiž najdeme například PDF, HTML, TeX nebo TXT.



Obr. 1. Prostředí Wolfram Mathematica 7

K dispozici máme dokonale zpracovanou nápovědu ve formě plně indexovaného notebooku s provázanými hypertextovými odkazy a vyhledávacími schopnostmi. Najdeme v ní kompletní dokumentaci všech funkcí softwaru Mathematica s interaktivními příklady, takže uživatel ihned vidí praktické využití, seznámí se s možnostmi a parametry, které je možné nastavovat. Velikou výhodou je možnost editace a vyhodnocení příkladů přímo

v nápovědě. V případě požadovaného výstupu můžeme úsek kódu překopírovat do jiného notebooku. Jakékoliv uživatelské změny v nápovědě nejsou ukládány a po znovunačtení strany vidíme opět původní informaci. [3]

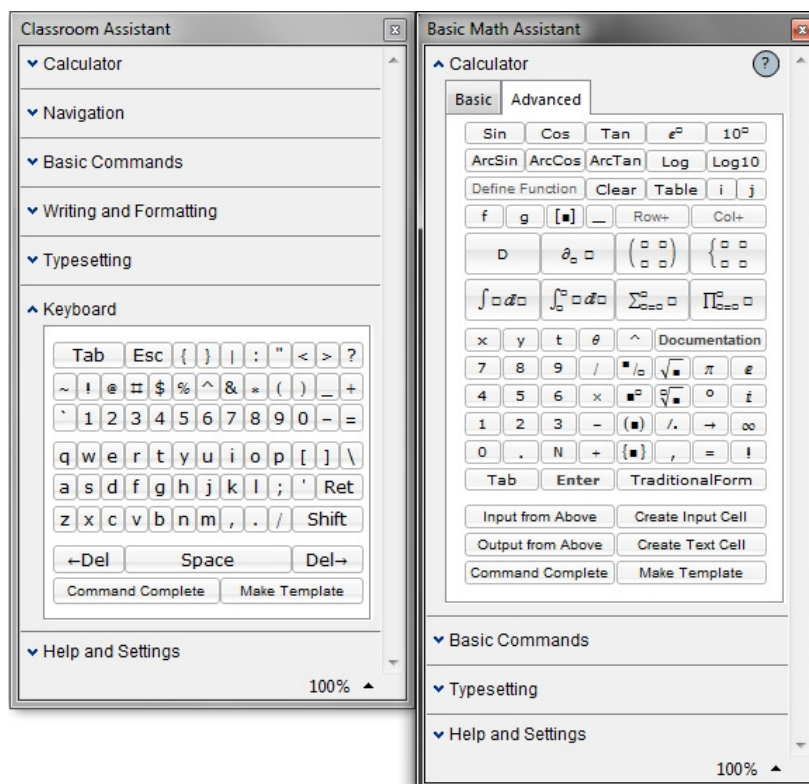


Obr. 2. Nápověda v Mathematice 7

## 1.3 Práce v prostředí Mathematica

### 1.3.1 Palety nástrojů

V Mathematice najdeme několik palet, které můžeme využít k urychlení naší práce. Po rozbalení položky Palettes v hlavním menu se zobrazí nabídka všech dostupných palet. Mezi nimi najdeme například Basic Math Assistant obsahující kalkulačtor, základní matematické operace, funkce a symboly, paletu pro formátování textu a buněk a obsluhu prostředí myši.



Obr. 3. Náhled na panely nástrojů

### 1.3.2 Práce s buňkami, provedení a přerušení výpočtu

Každý notebook v prostředí Mathematica sestává z jednotlivých buněk, do kterých se zapisuje zdrojový kód a následně se může jako celek provést a vyhodnotit. Buňky jsou ohraničené hranatými závorkami na pravé straně notebooku.

V případech, kdy pracujeme s velmi obsáhlým notebookem a mnoha příkazy, můžeme využít buněk k zřehlednění celého souboru. Jednotlivé úseky notebooku můžeme sloučit do jedné buňky, nebo naopak rozdělit do několika menších. Příkazy pro práci s buňkami najdeme v hlavním menu pod položkou Cell. V podmenu Grouping máme na výběr automatické nebo manuální seskupování buněk. V automatickém módu se o seskupování stará prostředí Mathematica, v manuálním je možnost manipulace (seskupování – Group Cells, odskupování – Ungroup Cells) s buňkami přenechána na uživateli.

Výpočty v jednotlivých buňkách se provádí pomocí kombinace kláves SHIFT + ENTER nebo klávesou ENTER na numerické klávesnici. Vstupní výraz (input) v buňce je označen jako **In[n]:=** a výraz na výstupu (output) **Out[n]:=**. Tohoto označení můžeme využít v dalších výpočtech.

Pokud se výpočet některé buňky provádí příliš dlouho a potřebujeme přerušit jeho vykonávání, použijeme kombinaci kláves ALT + čárka.[3]

### 1.3.3 Využití předchozích výstupů, středníku a závorek

Jak bylo zmíněno v předchozí kapitole, označení výstupu **Out[n]:=** můžeme využít v dalším výpočtu. Místo písmena **n** v hranatých závorkách použijeme číslo požadovaného výstupu.



```
Wolfram Mathematica | for Students Demonstrations | MathWorld | Student Forum | Help  
  
In[1]:= Mathematica ]  
Out[1]= Mathematica ]  
  
In[2]:= Out[1] od Wolframu ]  
Out[2]= Mathematica od Wolframu ]
```

Další možností, jak využít výstupů, je pomocí symbolu `%`. Pokud na vstupu zadáme tento symbol, získáme hodnotu předchozího výstupu. V případě, že potřebujeme konkrétní výstup, je možné využít kombinaci `%` a čísla požadovaného výstupu. Posloupnost symbolů zajistí libovolný předchozí výstup např. `%%` (druhý výstup zpět).



```

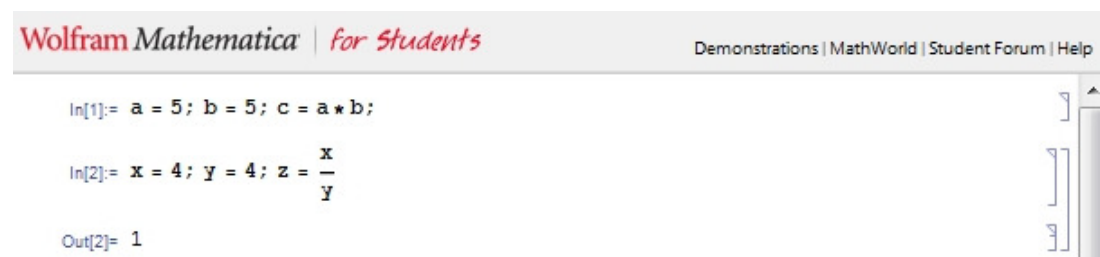
In[3]:= 7 For Students
Out[3]= 7 For Students

In[4]:= %
Out[4]= 7 For Students

In[5]:= %1
Out[5]= Mathematica

```

Přiřazování hodnot proměnným a následné výpočty se provádí v krocích a v několika buňkách. Máme ale také možnost vytvořit sekvenci příkazů v jedné buňce pomocí středníku. Všechny operace přiřazení, výpočtů apod. se provedou po spuštění výpočtu dané buňky. Středník ale také způsobí, že daná operace nebude viditelná na výstupu.



```

Wolfram Mathematica | For Students
Demonstrations | MathWorld | Student Forum | Help

In[1]:= a = 5; b = 5; c = a * b;

In[2]:= x = 4; y = 4; z = x/y
Out[2]= 1

```

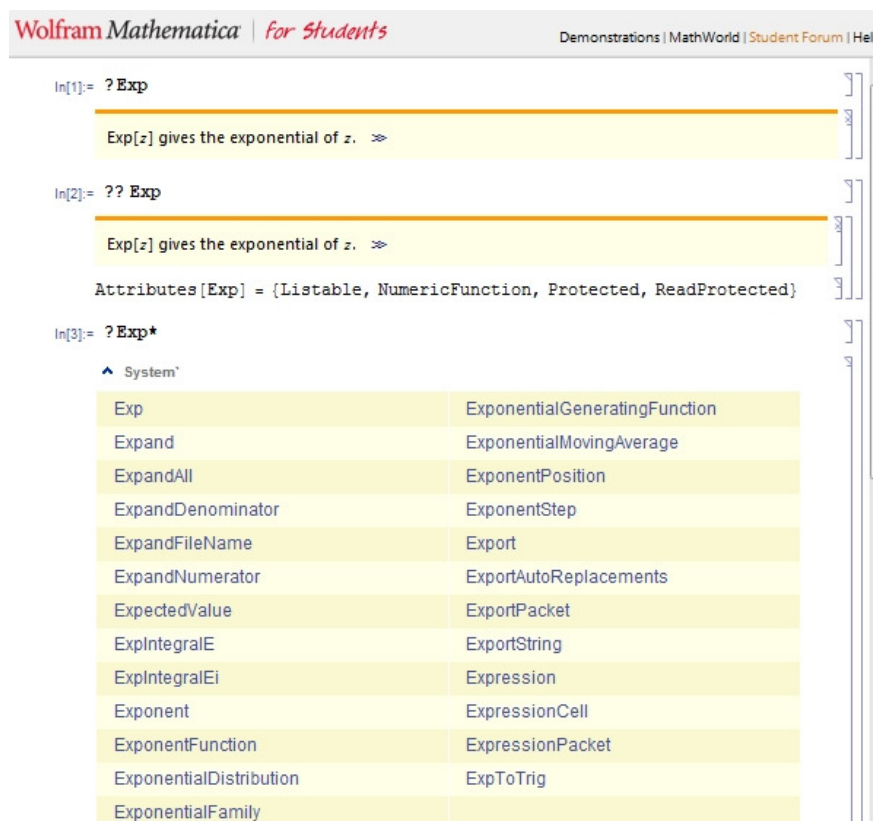
Na příkladu výše vidíme, že za každým příkazem v prvním vstupu je středník. Přiřadili jsme hodnotu do proměnné a, b, provedli výpočet c, ale kvůli středníkům nebyl zobrazen výstup jako tomu je u druhého vstupu.

Mathematica využívá čtyři druhy závorek:

- ( ) – kulaté závorky pro seskupování,
- [ ] – hranaté závorky pro funkce a jejich argumenty,
- { } – složené závorky pro výpisy,
- a [ [ ] ] – dvojité hranaté závorky používané např. u matic.[3]

### 1.3.4 Použití nápovědy

Pokud budeme chtít zobrazit nápovědu k určité funkci, použijeme symbol `?`. Posloupností dvou otazníků se vypíše další informace o funkci. V případě, že hledáme funkci, která začíná určitou skupinou znaků, napíšeme `?` před skupinu a `*` za.



Obr. 4. Použití nápovědy v prostředí Mathematica 7

Další možností, jak se dozvědět informace o funkci, je označení příkazu, kterým funkci voláme např. `Exp`, a stisknutí klávesy F1. Tím se dostaneme do notebooku s nápovědou o dané funkci.[3]

## 2 FUNKCE

### 2.1 Reálná funkce reálné proměnné a její vlastnosti

#### 2.1.1 Definice

Reálnou funkcí jedné reálné proměnné nazýváme každé zobrazení  $f : K \rightarrow R$ , kde  $K \subset R$ . Množina  $K$  se nazývá definiční obor funkce  $f$  značený  $D_f$ . Množina  $f(K) = \{f(x) \in R : x \in K\}$  se nazývá obor hodnot funkce  $f$  a označujeme jej  $H_f$ . Jinými slovy je funkce předpis, který každému číslu z  $D_f$  přiřazuje právě jedno reálné číslo.

Proměnnou  $x$  nazýváme nezávisle proměnnou nebo argument funkce, proměnnou  $y = f(x)$  závisle proměnnou.

Grafem funkce  $f$  v euklidovské rovině  $E_2$  je množina všech bodů  $G_f = \{(x, f(x)) \in E_2\} : x \in D_f$ . [1]

#### 2.1.2 Rostoucí, klesající, monotónní funkce

Funkce  $f$  je na intervalu  $I$  rostoucí, právě když pro všechna  $x_1, x_2$  platí:

$$x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Funkce  $f$  je na intervalu  $I$  klesající, právě když pro všechna  $x_1, x_2$  platí:

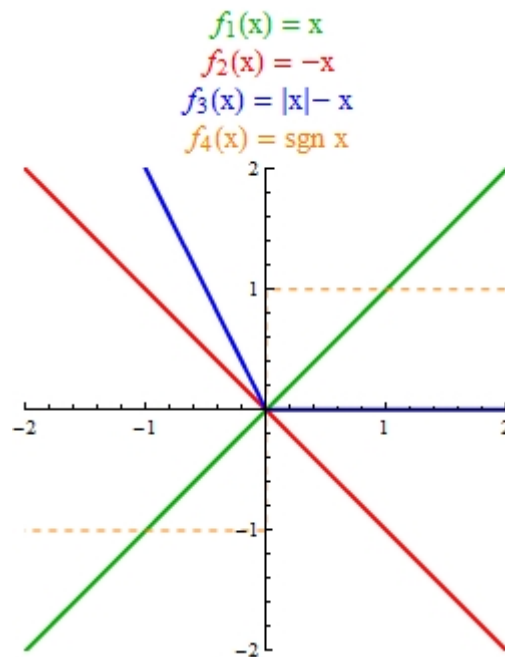
$$x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Funkce  $f$  je na intervalu  $I$  nerostoucí, právě když pro všechna  $x_1, x_2$  platí:

$$x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

Funkce  $f$  je na intervalu  $I$  neklesající, právě když pro všechna  $x_1, x_2$  platí:

$$x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$



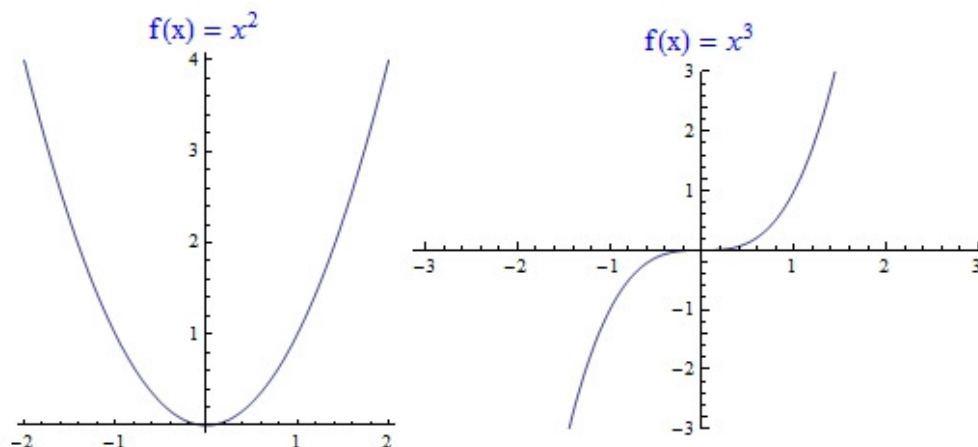
Obr. 5. Příklady rostoucí, klesající, nerostoucí a neklesající funkce

Rostoucí, klesající, nerostoucí a neklesající funkce na intervalu  $I$  se nazývají monotónní funkce na  $I$ . Rostoucí a klesající funkce na intervalu  $I$  nazýváme ryze monotónní na  $I$ . [1]

### 2.1.3 Sudá, lichá funkce

Funkce  $f$  je sudá funkce, právě když pro všechna  $x \in D_f$  a  $-x \in D_f$  platí  $f(x) = f(-x)$ .

Funkce  $f$  je lichá funkce, právě když pro všechna  $x \in D_f$  a  $-x \in D_f$  platí  $f(-x) = -f(x)$ .



Obr. 6. Příklad sudé a liché funkce

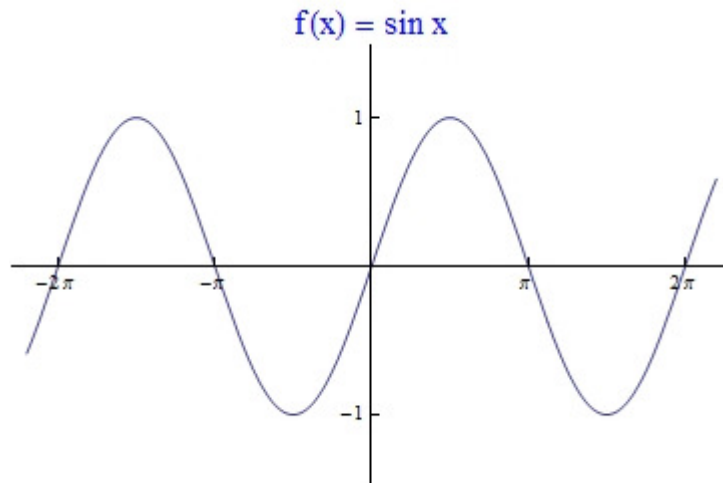
Sudost a lichost funkce lze také snadno vyčíst z grafu. Jeli graf funkce osově souměrný podle osy  $y$ , pak je funkce sudá. Jeli graf středově souměrný podle počátku kartézské soustavy souřadnic, pak je funkce lichá. Pokud graf funkce není osově souměrný podle osy  $y$ , ani středově souměrný podle počátku, funkce není ani sudá, ani lichá.[1]

#### 2.1.4 Periodická funkce

Funkce  $f$  je periodická na definičním oboru  $D_f$ , právě když existuje takové číslo  $T > 0$  a platí

- pro všechna  $x \in D_f$  existují i  $(x+T) \in D_f$ ,
- pro všechna  $x \in D_f$  platí  $f(x) = f(x+T)$ .

Číslo  $T$  se nazývá perioda funkce  $f$ . Typickým příkladem periodické funkce je goniometrické funkce  $\sin x$  s periodou  $2\pi$ . [1,6]



Obr. 7. Příklad periodické funkce

### 2.1.5 Omezená funkce a extrémy

Funkce  $f$  je shora omezená, existuje – li takové reálné číslo  $A$ , že pro každé  $x \in D_f$  platí  $f(x) \leq A$ .

Funkce  $f$  je zdola omezená, existuje – li takové reálné číslo  $B$ , že pro každé  $x \in D_f$  platí  $f(x) \geq B$ .

Funkce  $f$  je omezená, existuje – li takové reálné číslo  $A$  a  $B$ , že pro každé  $x \in D_f$  platí  $f(x) \leq A$  a zároveň  $f(x) \geq B$ .

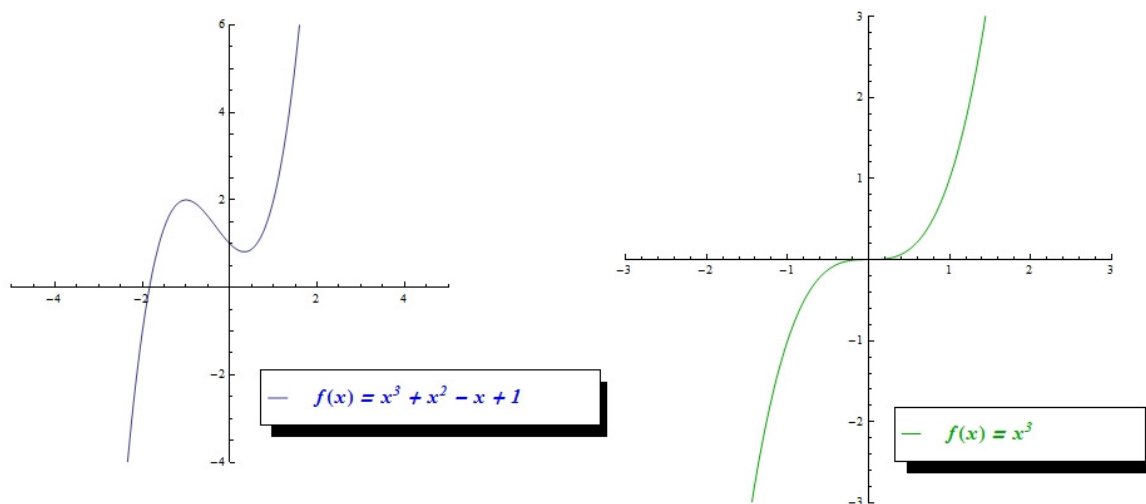
Příkladem může být opět funkce  $\sin x$ , která je omezená shora i zdola – oborem hodnot je interval  $H_f = \langle -1; 1 \rangle$ .

Je – li  $f$  funkce na definičním oboru  $I \subseteq D_f$ ,  $a, b \in I$ , pak má funkce  $f$  na  $I$

- v bodě  $a$  minimum, právě když pro každé  $x \in I$  je  $f(x) \geq f(a)$ .
- v bodě  $b$  maximum, právě když pro každé  $x \in I$  je  $f(x) \leq f(b)$ .

### 2.1.6 Prostá funkce

Funkce  $f$  je prostá na  $D_f$ , právě když pro všechna  $x_1, x_2 \in D_f$  platí  $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ . Jinými slovy funkce  $f$  má pro každé dva různé argumenty různé funkční hodnoty. Každá ryze monotónní funkce je prostá funkce. [1,6]



Obr. 8. Příklad prosté funkce (vpravo), funkce vlevo není prostá

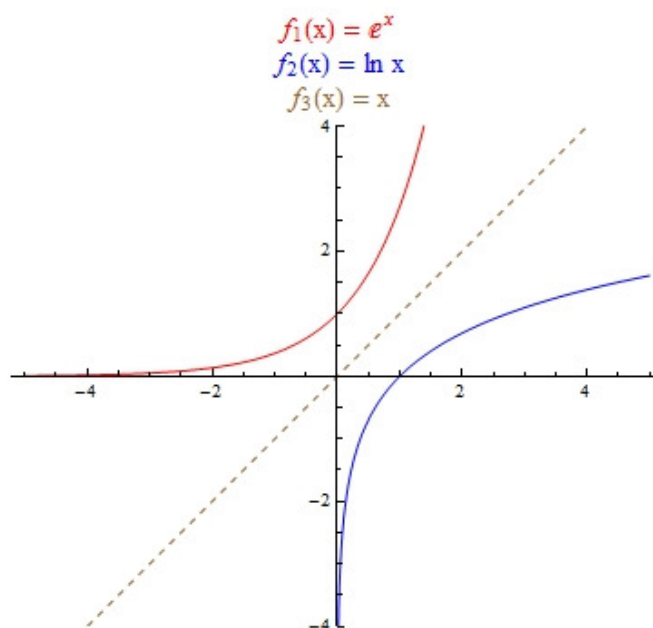
### 2.1.7 Inverzní funkce

Inverzní funkci určujeme vždy k nějaké původní funkci  $f$ . Nutnou podmínkou existence inverzní funkce je, aby původní funkce  $f$  byla prostá.

Inverzní funkce k prosté funkci  $f$  je funkce  $f^{-1}$ , pro kterou platí

- $D_{f^{-1}} = H_f$ ,
- každému  $y \in D_{f^{-1}}$  je přiřazeno  $x \in D_f$  takové, že  $f(x) = y$ .

Graf inverzní funkce  $f^{-1}$  je osově souměrný s původní funkcí  $f$  podle osy  $y = x$ . Jako příklad uvedu exponenciální funkci a k ní inverzní funkci logaritmickou.



Obr. 9. Příklad inverzní funkce

### 2.1.8 Složená funkce

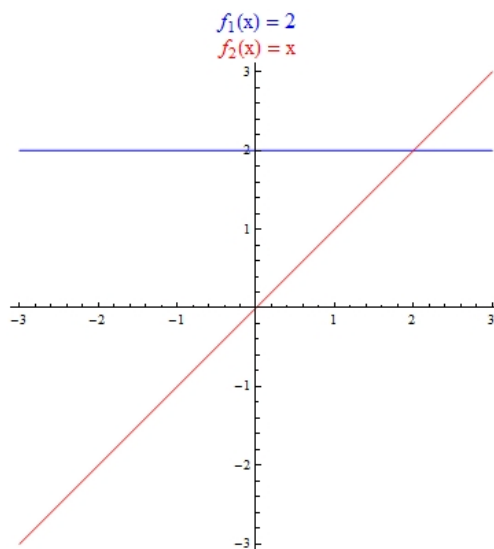
Máme funkci  $f : y = f(u)$  s definičním oborem  $D_f$  a funkci  $g : u = g(x)$  s oborem hodnot  $H_g$ . Jestliže je  $H_g \subset D_f$ , pak funkci  $h : y = f(g(x))$  nazveme **složenou funkcí** (někdy píšeme též  $h = f \circ g$ ). Funkce  $g$  se nazývá vnitřní složka funkce  $f \circ g$  a funkce  $f$  vnější složka funkce  $f \circ g$ . [1, 6]

## 2.2 Elementární funkce

### 2.2.1 Lineární funkce

Lineární funkce je funkce  $f$  s definičním oborem  $D_f = R$  daná předpisem  $f : y = ax + b$ , kde  $a, b \in R$ .

Speciálním případem je konstantní funkce, jejíž koeficient  $a = 0$ . Dostaneme tedy funkci  $f : y = b$ .



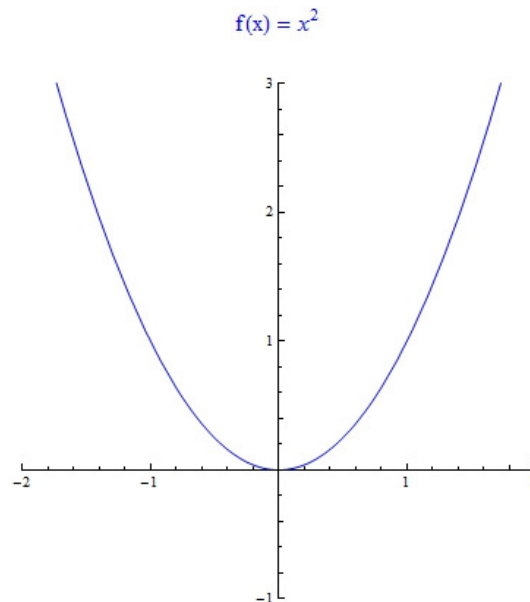
Obr. 10. Příklad konstantní a lineární funkce

Vlastnosti lineární funkce  $f : y = ax + b$ :

- $D_f = \mathbb{R}, H_f = \mathbb{R}$ ,
- rostoucí pro  $a > 0$ , klesající pro  $a < 0$ ,
- není sudá, ani lichá, je prostá, pro  $b = 0$  je funkce lichá,
- není periodická, ani omezená (shora, zdola), grafem je přímka.

### 2.2.2 Kvadratická funkce

Kvadratická funkce je funkce  $f$  s definičním oborem  $D_f = \mathbb{R}$  daná předpisem  $f : y = ax^2 + bx + c$ , kde  $a \in \mathbb{R} - \{0\}$  a  $b, c \in \mathbb{R}$ .



Obr. 11. Příklad kvadratické funkce

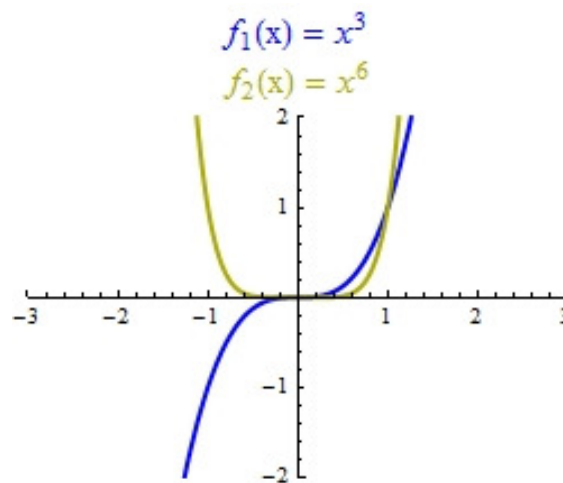
Vlastnosti kvadratické funkce  $f : y = ax^2 + bx + c$  :

- $D_f = \mathbb{R}$ , pro  $a > 0$  je  $H_f = \left\langle \frac{-b^2 + 4ac}{4a}; \infty \right\rangle$ , pro  $a < 0$  je  $H_f = \left\langle -\infty; \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \right\rangle$ ,
- na  $D_f$  není ani rostoucí, ani klesající, pro  $a > 0$  je funkce klesající na  $\left(-\infty; \frac{-b}{2a}\right)$  a rostoucí na  $\left(\frac{-b}{2a}; \infty\right)$ ; pro  $a < 0$  je funkce rostoucí na  $\left(-\infty; \frac{-b}{2a}\right)$  a klesající na  $\left(\frac{-b}{2a}; \infty\right)$ ,
- obecně není ani sudá, ani lichá; pro  $b = 0$  je funkce sudá,
- není prostá, ani periodická,

- pro  $a > 0$  je omezená zdola, pro  $a < 0$  je omezená shora,
- Souřadnice vrcholu paraboly  $V = \left[ -\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a} \right]$ .

### 2.2.3 Mocninná funkce

Mocninná funkce  $f$  s exponentem  $n \in \mathbb{R}$  je funkce ve tvaru  $f : y = x^n$ . Definiční obor a obor hodnot závisí na exponentu.



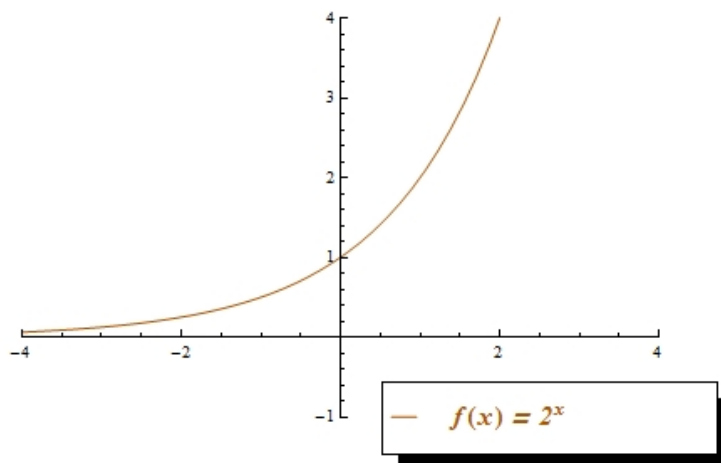
Obr. 12. Příklad mocninných funkcí

Vlastnosti mocninné funkce  $f : y = x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ :

- $D_f = \mathbb{R}$ , pro  $n$  sudé je  $H_f = \langle 0; \infty \rangle$ , pro  $n$  liché je  $H_f = \mathbb{R}$ ,
- pro  $n$  sudé je klesající na  $(-\infty; 0)$ , rostoucí na  $\langle 0; \infty \rangle$ , pro  $n$  liché je rostoucí na celém  $D_f$ ,
- pro  $n$  sudé je funkce sudá, pro  $n$  liché je funkce lichá,
- není periodická, pro  $n$  sudé je funkce zdola omezená, pro  $n$  liché není omezená.

### 2.2.4 Exponenciální funkce

Exponenciální funkce  $f$  o základu  $a$  je funkce na  $D_f = \mathbb{R}$  ve tvaru  $f : y = a^x$ , kde  $a > 0, a \neq 1$ .



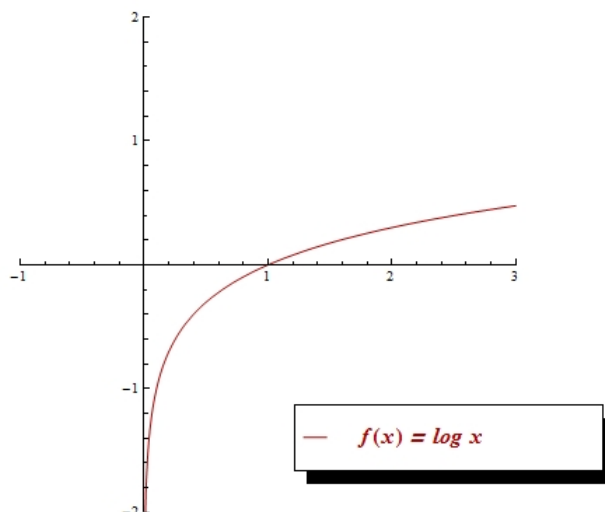
Obr. 13. Příklad exponenciální funkce

Vlastnosti exponenciální funkce  $f : y = a^x$ :

- $D_f = \mathbb{R}, H_f = (0; \infty)$ ,
- pro  $a > 1$  je rostoucí, pro  $a \in (0; 1)$  je klesající,
- není sudá, ani lichá, je prostá, není periodická, je omezená zdola.

### 2.2.5 Logaritmická funkce

Logaritmická funkce  $f$  o základu  $a$  je funkce inverzní k funkci exponenciální a má tvar  $f : y = \log_a x$ , kde  $a > 0, a \neq 1$ .



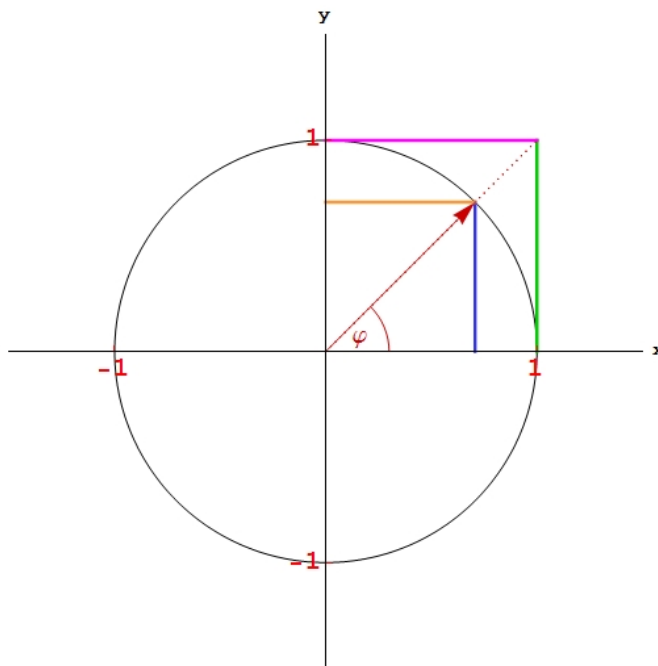
Obr. 14. Příklad logaritmické funkce

Vlastnosti logaritmické funkce  $f : y = \log_a x$ :

- $D_f = (0; \infty)$ ,  $H_f = \mathbb{R}$ ,
- pro  $a > 1$  je rostoucí, pro  $a \in (0; 1)$  je klesající,
- není sudá, ani lichá, je prostá, není periodická, není omezená.

### 2.2.6 Goniometrické funkce

Sestrojíme jednotkovou kružnici (s poloměrem  $r = 1$ ) a středem v počátku kartézské souřadnicové soustavy  $[0,0]$ .



Obr. 15. Jednotková kružnice s vyznačenými goniometrickými funkcemi[8]

Modře je zobrazena funkce sinus. Její hodnota se promítá na osu  $y$ . V pravoúhlém trojúhelníku udává poměr protilehlé odvěsny ku přeponě. Oranžově je zobrazena funkce cosinus, jejíž hodnota se promítá na osu  $x$ . V pravoúhlém trojúhelníku udává poměr přilehlé odvěsny ku přeponě. Zeleně je označena funkce tangens a fialově funkce cotangens. Funkce tangens v pravoúhlém trojúhelníku udává poměr protilehlé odvěsny ku přilehlé, cotangens naopak přilehlé odvěsny ku odvěsně protilehlé.

Vlastnosti funkce sinus  $f : y = \sin x$ :

- $D_f = R$ ,  $H_f = \langle -1; 1 \rangle$ , zdola i shora omezená, lichá, perioda  $2\pi$ ,
- maximum v bodech  $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ , minimum v bodech  $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ , kde  $k \in Z$ ,
- rostoucí na  $\left\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$ , klesající na  $\left\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$ , kde  $k \in Z$ .

Vlastnosti funkce kosinus  $f : y = \cos x$ :

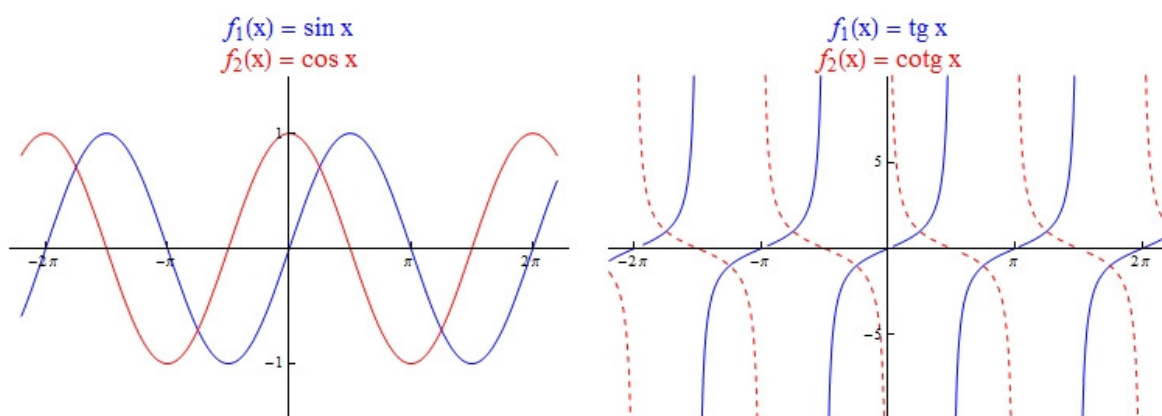
- $D_f = \mathbb{R}$ ,  $H_f = \langle -1; 1 \rangle$ , zdola i shora omezená, sudá, perioda  $2\pi$ ,
- maximum v bodech  $x = 0 + 2k\pi$ , minimum v bodech  $x = \pi + 2k\pi$ , kde  $k \in \mathbb{Z}$ ,
- rostoucí na  $\langle -\pi + 2k\pi; 2k\pi \rangle$ , klesající na  $\langle 2k\pi; \pi + 2k\pi \rangle$ , kde  $k \in \mathbb{Z}$ .

Vlastnosti funkce tangens  $f : y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ :

- $D_f = \mathbb{R} - \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \right\}$ , kde  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $H_f = \mathbb{R}$ , není omezená, je lichá, perioda  $\pi$ ,
- rostoucí na každém intervalu  $\left( -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$ , kde  $k \in \mathbb{Z}$ .

Vlastnosti funkce kotangens  $f : y = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ :

- $D_f = \mathbb{R} - \{k\pi\}$ , kde  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $H_f = \mathbb{R}$ , není omezená, je lichá, perioda  $\pi$ ,
- klesající na každém intervalu  $(k\pi; (k+1)\pi)$ , kde  $k \in \mathbb{Z}$ .
- 



Obr. 16. Goniometrické funkce

### 2.2.7 Cyklometrické funkce

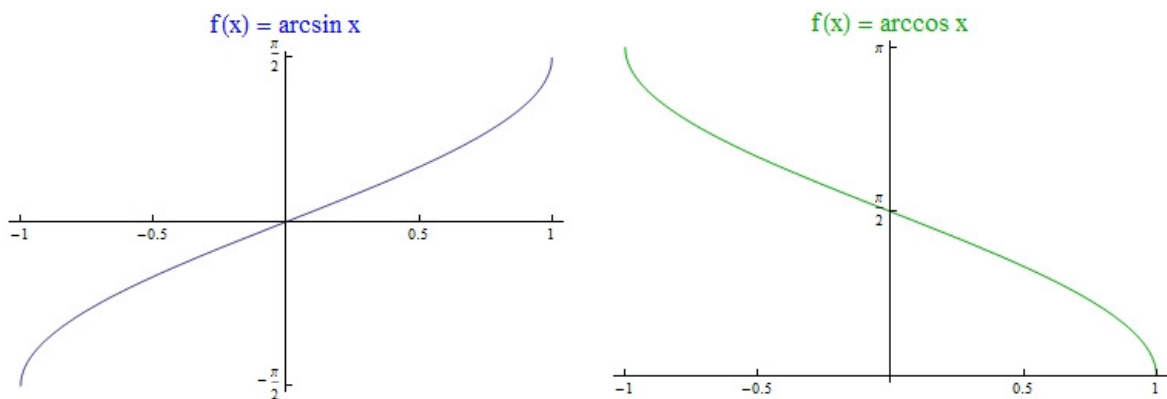
Jelikož goniometrické funkce nejsou prosté na celém svém definičním oboru, musíme se při definici cyklometrických funkcí omezit jen na intervaly, ve kterých jsou goniometrické funkce prosté.

Funkce arcussinus  $y = \arcsin x$  je inverzní funkcí k funkci  $y = \sin x$  s omezeným definičním oborem na  $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$ . Vlastnosti funkce  $y = \arcsin x$ :

- $D_f = \langle -1; 1 \rangle$ ,  $H_f = \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$ , rostoucí.

Funkce arcuskosínus  $y = \arccos x$  je inverzní funkcí k funkci  $y = \cos x$  s omezeným definičním oborem na  $\langle 0; \pi \rangle$ . Vlastnosti funkce  $y = \arccos x$ :

- $D_f = \langle -1; 1 \rangle$ ,  $H_f = \langle 0; \pi \rangle$ , klesající.



Obr. 17. Cyklometrické funkce  $\arcsin x$  a  $\arccos x$

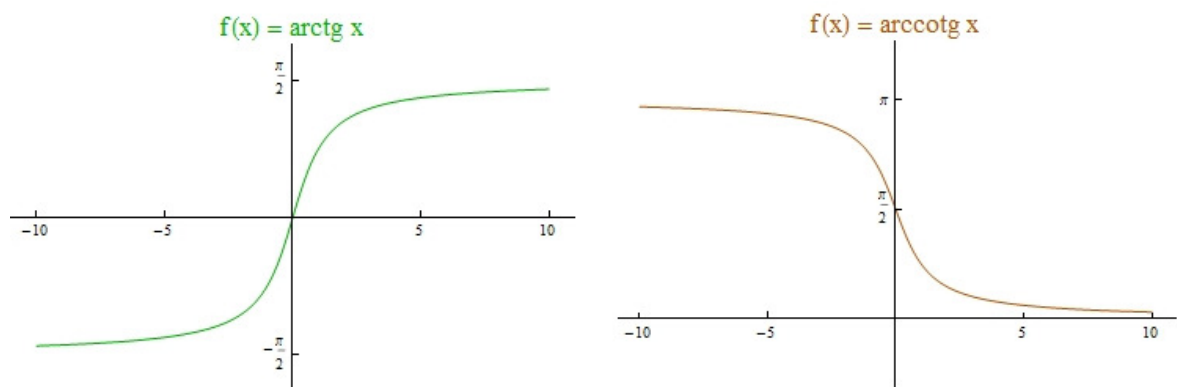
Funkce arcustangens  $y = \arctan x$  je inverzní funkcí k funkci  $y = \operatorname{tg} x$  s omezeným definičním oborem na  $\left( -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$ .

Vlastnosti funkce  $y = \arctan x$  :

- $D_f = (-\infty; \infty)$ ,  $H_f = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ , rostoucí.

Funkce arcuskotangens  $y = \operatorname{arccotg} x$  je inverzní funkcí k funkci  $y = \operatorname{cotg} x$  s omezeným definičním oborem na  $(0; \pi)$ . Vlastnosti funkce  $y = \operatorname{arccotg} x$  :

- $D_f = (-\infty; \infty)$ ,  $H_f = (0; \pi)$ , klesající.



Obr. 18. Cyklometrické funkce  $\operatorname{arctg} x$  a  $\operatorname{arccotg} x$

Při vypracovávání kapitoly 2.2 Elementární funkce bylo využito zdrojů [1, 6, 7, 8].

## **II. PRAKTICKÁ ČÁST**

### 3 POUŽITÉ FUNKCE V MATHEMATICE

#### 3.1 Matematické funkce

Prostředí Mathematica obsahuje velmi mnoho matematických funkcí, mezi nimiž najdeme numerické funkce, funkce pro práci s prvočíslly, s číselnými soustavami, logické funkce a další. Zmíním zde pouze vybrané funkce použité při vypracovávání praktické části bakalářské práce.

Pro výpočet exponenciální funkce v Mathematice je k dispozici příkaz **Exp[x]**. Na výstupu dostaneme obecně  $e^x$ , tedy základem je Eulerovo číslo. Při použití jiného základu tohoto příkazu nevyužijeme.

```
In[3]:= e // N
Out[3]= 2.71828

In[4]:= Exp[4]
Out[4]= e4

In[5]:= Exp[2] // N
Out[5]= 7.38906
```

Výpočet logaritmu uskutečníme použitím příkazů **Log[x]** a **Log[z,x]**. Prvním příkazem spočteme přirozený logaritmus čísla  $x$  ( $\ln x$ ), druhým logaritmus čísla  $x$  o základu  $z$  ( $\log_z x$ ).

```
In[9]:= Log[e]
Out[9]= 1

In[10]:= Log[2, 8]
Out[10]= 3
```

Mezi goniometrické funkce řadíme sinus, cosinus, tangens a cotangens. V Mathematice jsou příkazy vycházející přímo z názvů funkcí – **Sin[x]**, **Cos[x]**, **Tan[x]**, **Cot[x]**. Argumentem goniometrických funkcí je úhel zadávaný v radiánech nebo ve stupních. Stupně je ale potřeba v zápisu označit.

```
In[11]:= Sin[30 °]
Out[11]=  $\frac{1}{2}$ 

In[12]:= Cos[π]
Out[12]= -1
```

Pro cyklometrické funkce arcussinus, arcuscosinus, arcustangens a arcuscotangens využijeme příkazy **ArcSin[x]**, **ArcCos[x]**, **ArcTan[x]** a **ArcCot[x]**. Výsledkem je úhel v radiánech. [3]

```
In[15]:= ArcSin[ $\frac{1}{2}$ ]
Out[15]=  $\frac{\pi}{6}$ 
```

## 3.2 Vykreslení 2D grafů

### 3.2.1 Funkce Plot

Wolfram Mathematica umožňuje vykreslit různé typy grafů. Pro vykreslování 2D grafů využívá funkce **Plot[ ]**. Při zadání funkce Plot do vyhledávání v nápovědě se nám zobrazí tyto informace.

## Plot

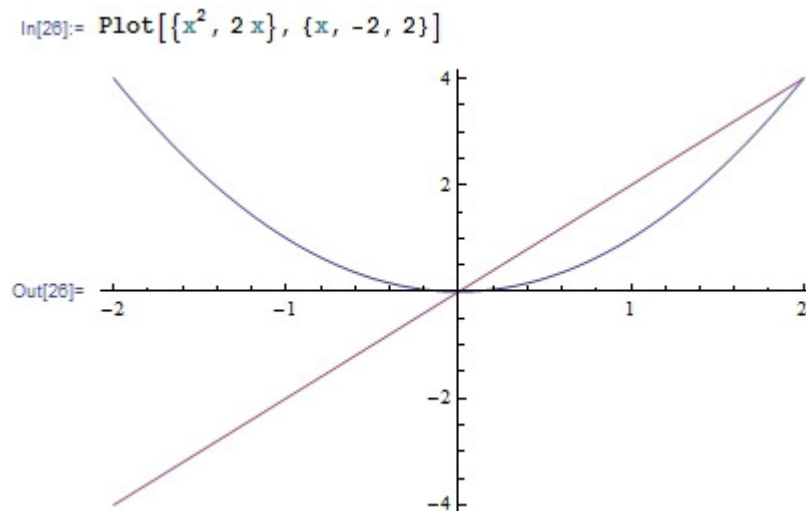
```
Plot[f, {x, xmin, xmax}]  
generates a plot of  $f$  as a function of  $x$  from  $x_{min}$  to  $x_{max}$ .
```

```
Plot[{f1, f2, ...}, {x, xmin, xmax}]  
plots several functions  $f_i$ .
```



### MORE INFORMATION

Na obrázku vidíme, že parametry funkce Plot jsou vykreslovaná funkce  $f$  a nezávislá proměnná, pro kterou je graf vykreslován – v našem případě proměnná  $x$ . Zároveň musí být uvedeny meze, ve kterých se bude graf funkce generovat – dolní mez  $x_{min}$  a horní mez  $x_{max}$ . Funkce Plot také podporuje generování více grafů funkcí najednou. Stačí pouze za argument vykreslované funkce dosadit výčet funkcí ve složených závorkách { }.



Obr. 19. Vykreslení více funkcí v jednom grafu

Vzhled grafů můžeme ovlivňovat zadáváním parametrů, kterých má funkce Plot velké množství. Všechny nalezneme buď v nápovědě funkce Plot v rozbalovacím seznamu Options, nebo s pomocí funkce Options[ ], která po zadání názvu funkce do hranatých závorek vypíše všechny její parametry s výchozím nastavením.

```
In[27]= Options[Plot]
```

```
Out[27]= {AlignmentPoint → Center, AspectRatio →  $\frac{1}{\text{GoldenRatio}}$ , Axes → True, AxesLabel → None,
  AxesOrigin → Automatic, AxesStyle → {}, Background → None, BaselinePosition → Automatic,
  BaseStyle → {}, ClippingStyle → None, ColorFunction → Automatic, ColorFunctionScaling → True,
  ColorOutput → Automatic, ContentSelectable → Automatic, CoordinatesToolOptions → Automatic,
  DisplayFunction → $DisplayFunction, Epilog → {}, Evaluated → Automatic, EvaluationMonitor → None,
  Exclusions → Automatic, ExclusionsStyle → None, Filling → None, FillingStyle → Automatic,
  FormatType → TraditionalForm, Frame → False, FrameLabel → None, FrameStyle → {},
  FrameTicks → Automatic, FrameTicksStyle → {}, GridLines → None, GridLinesStyle → {},
  ImageMargins → 0., ImagePadding → All, ImageSize → Automatic, ImageSizeRaw → Automatic,
  LabelStyle → {}, MaxRecursion → Automatic, Mesh → None, MeshFunctions → {#1 &}, MeshShading → None,
  MeshStyle → Automatic, Method → Automatic, PerformanceGoal → $PerformanceGoal,
  PlotLabel → None, PlotPoints → Automatic, PlotRange → {Full, Automatic},
  PlotRangeClipping → True, PlotRangePadding → Automatic, PlotRegion → Automatic,
  PlotStyle → Automatic, PreserveImageOptions → Automatic, Prolog → {}, RegionFunction → (True &),
  RotateLabel → True, Ticks → Automatic, TicksStyle → {}, WorkingPrecision → MachinePrecision}
```

Pokud chceme vypsat výchozí nastavení pouze konkrétního parametru funkce, napíšeme `Options[funkce, parametr]`, např. `Options[Plot, Axes]`. Máme také možnost měnit výchozí nastavení pomocí funkce `SetOptions[funkce, parametr → změna]`. [3]

```
In[28]= Options[Plot, Axes]
```

```
Out[28]= {Axes → True}
```

```
In[29]= SetOptions[Plot, Axes → False];
Options[Plot, Axes]
```

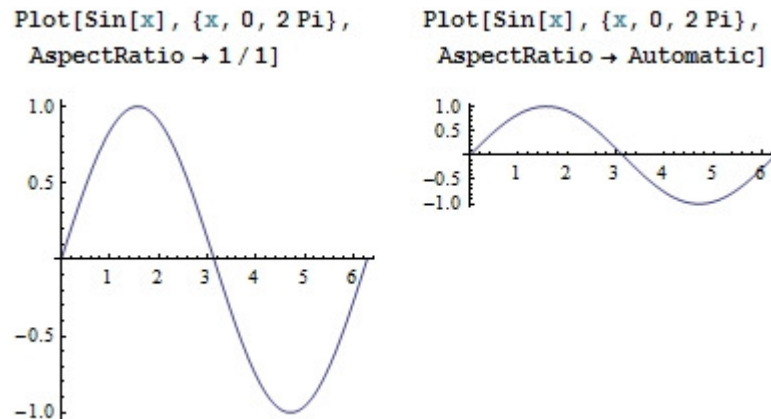
```
Out[30]= {Axes → False}
```

### 3.2.2 Parametry funkce Plot

Nyní rozebereme podrobněji parametry funkce `Plot`, kterých bylo použito při vytváření souboru grafů v prostředí Mathematica.

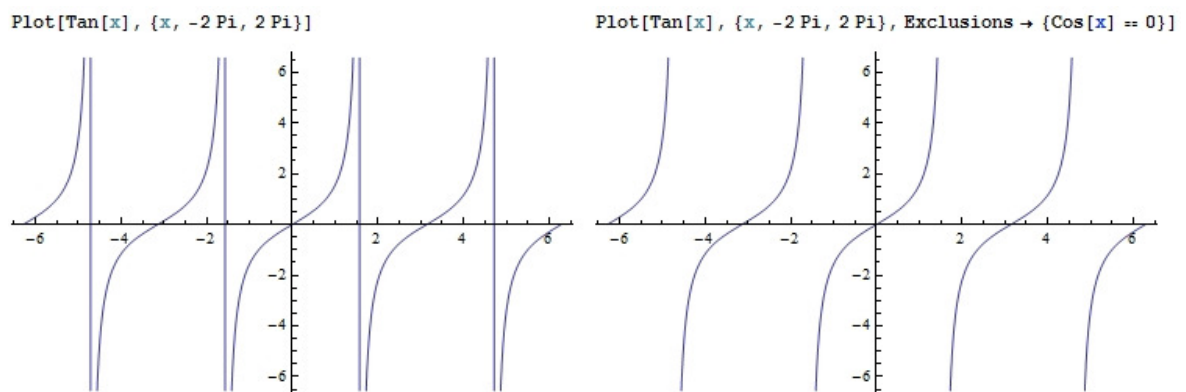
Parametr `AspectRatio` využijeme při nastavování poměru výšky a šířky generovaného grafu. Hodnota tohoto parametru může být:

- $1 / \text{GoldenRatio}$  – výchozí nastavení pro 2D graf,
- *Automatic* – výchozí nastavení pro 3D graf,
- *číslo / číslo* – libovolné nastavení poměru (např.  $1 / 2$ ).



Obr. 20. Vliv parametru AspectRatio

Parametr Exclusions slouží k vynechání určité části oblasti, ve které se generuje funkce. Defaultně je nastaven na hodnotu *None*. Tohoto parametru bylo využito při tvorbě grafů funkce tangens a cotangens, které nejsou definované na celém definičním oboru.

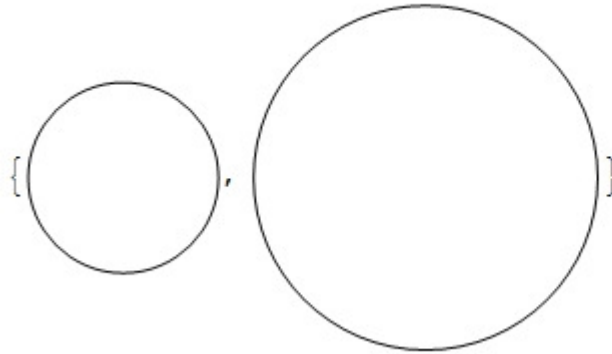


Obr. 21. Ukázka parametru Exclusions

Parametr ImageSize se používá nejen u grafů, ale i u dalších objektů ke změně velikosti. Jeho hodnota je defaultně *Automatic* a velikost závisí na generovaném objektu. Hodnotu lze měnit pomocí:

- symbolických velikostí (*Tiny*, *Small*, ...),
- jedné číselné hodnoty,
- dvou číselných hodnot, z nichž první udává šířku a druhé výšku.

```
Table[Graphics[Circle[], ImageSize -> s], {s, {Tiny, Small}}]
```



Obr. 22. Ukázka parametru ImageSize

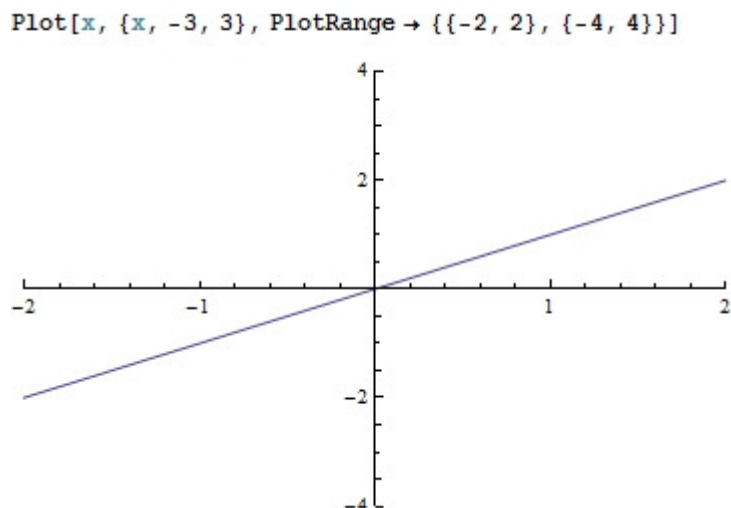
Parametr PlotLabel slouží ke vložení názvu grafu. Možnosti nastavení tohoto parametru jsou:

- *None* – graf bez pojmenování, defaultní nastavení funkce Plot,
- *Popisek, název* – vložení libovolného výrazu, např. textového řetězce

Tento parametr a jeho hodnotu lze vidět u vygenerovaného grafu na obrázku Obr.18. Hodnotou je textový řetězec nastýlovaný pomocí funkce Style[ ], o které se dočteme v kapitole 3.3.

Parametr PlotRange nám poslouží v případech, kdy potřebujeme nadefinovat meze pro jednotlivé osy. Docílíme tak zobrazení grafu pouze na požadovaných intervalech. Možnosti nastavení jsou:

- *All* – v grafu budou zahrnuty všechny body,
- *Automatic* – vynechány budou vzdálené body,
- $\{min, max\}$  – nadefinování dolní a horní meze osy  $y$  ve 2D grafu,
- $\{\{x_{min}, x_{max}\}, \{y_{min}, y_{max}\}\}$  – nadefinování mezí pro osu  $x$  i  $y$ .



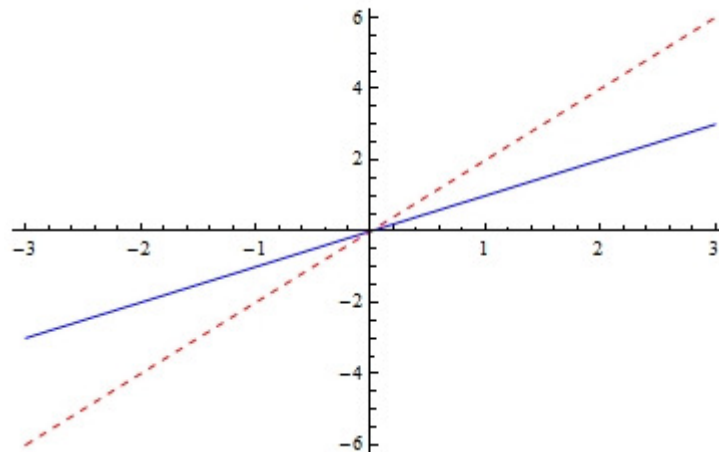
Obr. 23. Ukázka parametru PlotRange

Parametr PlotStyle nastavuje styl křivky – barvu, tloušťku, čárkování. Můžeme ho použít k nastýlování grafu jedné funkce, nebo také pro odlišení více funkcí v jednom grafu. Možnosti nastavení jsou:

- *style* – styl pro všechny body a křivky v grafu,
- $\{style\ a1, style\ a2, \dots\}$  – pro odlišení více křivek v grafu,
- $\{\{style1\}, \{style2\}, \dots\}$  – nastavení více různých stylů.

Poslední možnosti využijeme například v případě, kdy křivka jedné funkce má být modrá a plná a křivka druhé funkce červená a čárkovaná.

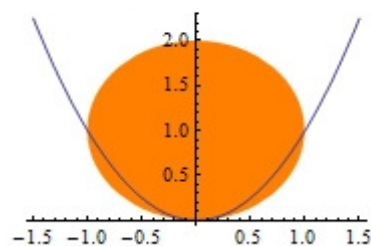
```
Plot[{x, 2 x}, {x, -3, 3}, PlotStyle -> {{Blue}, {Red, Dashed}}]
```



Obr. 24. Parametr PlotStyle

Parametr Prolog se obecně používá u grafických objektů, tedy i u funkce Plot. Umožňuje vykreslit další grafické objekty do původního objektu, který zůstává na popředí. Dalšími grafickými prvky mohou být například čáry, body, geometrické tvary. Této funkci bylo využito při vytváření asymptot v grafech.

```
Plot[x^2, {x, -1.5, 1.5}, Prolog -> {Orange, Disk[{0, 1}, 1]}]
```



Obr. 25. Parametr Prolog

Parametr Ticks slouží pro zobrazení značek měřítka os. Defaultně je při vykreslování grafu nastavena možnost Automatic. Všechny možnosti parametru jsou:

- *None* – graf bez značek měřítka os,
- *Automatic* – značky měřítka jsou vykresleny automaticky při vykreslování grafu,
- $\{\{xtick1, xtick2, \dots\}, \{ytick1, ytick2, \dots\}\}$  – značky pro osu  $x$  a  $y$ ,

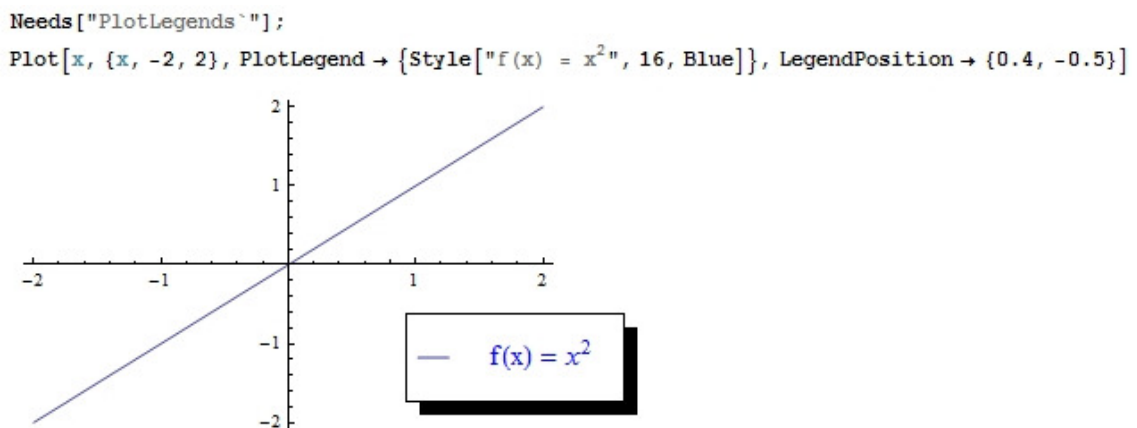
- $\{\{xtick1, xlabel1, \dots\}, \{ytick1, ylabel1, \dots\}\}$  – značky se specifickým názvem pro osu  $x$  a  $y$ .

Tento parametr byl používán hlavně u goniometrických a cyklometrických funkcí, kde figurují hodnoty v násobcích  $\pi$ .

Parametr `PlotLegend` se využívá pro zobrazení legendy popisující jednotlivé křivky u 2D grafů. Před zavoláním parametru `PlotLegend` je potřeba nejprve zavést balíček „`PlotLegends``“. To se provede provedením funkce `Needs[„PlotLegends`“]`.

Za hodnoty v `PlotLegend` dosazujeme textové řetězce. S legendou je možné manipulovat pomocí jejích parametrů, které nalezneme v balíčku `PlotLegends``. Mezi použité parametry patří:

- *LegendSize* – udává velikost legendy,
- *LegendPosition* – udává pozici legendy v zobrazovaném grafu,
- *LegendTextSpace* – specifikuje prostor pro text v rámci legendy.



Obr. 26. Ukázka legendy v grafu

Při vypracovávání kapitoly 3.2.2 Parametry funkce Plot byly využity zdroje [3, 5].

### 3.3 Další použité funkce

Soubor grafů vytvořených v prostředí Mathematica obsahuje kromě staticky vykreslených grafů i objekty s tzv. posuvníky. Díky těmto posuvníkům je možné měnit jednotlivé parametry funkce a pozorovat změny křivky v grafu.

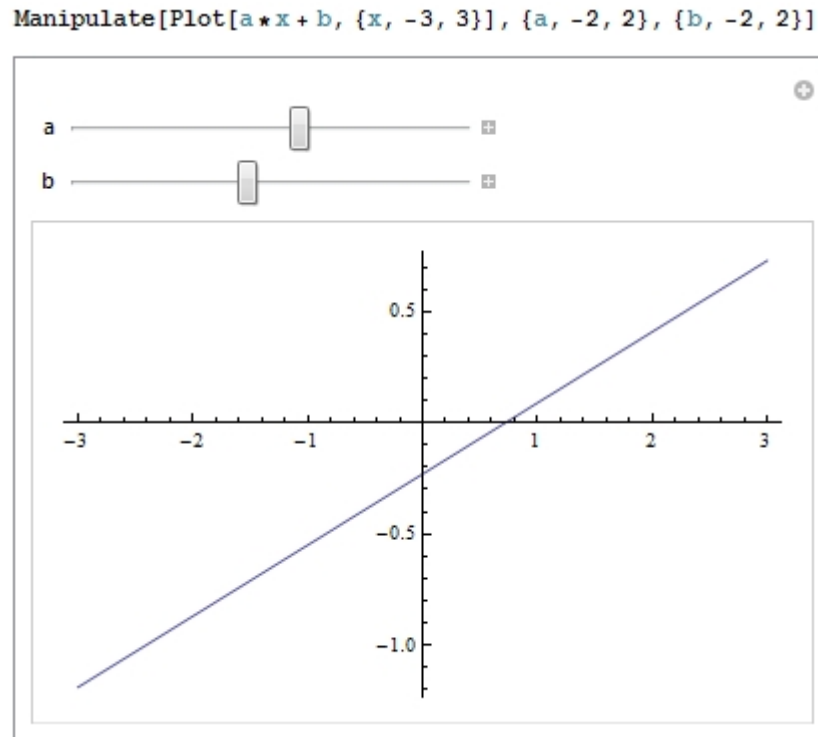
K vytvoření posuvníků bylo využito funkce `Manipulate[ ]`, jejíž argument je měnitelný výraz. Funkci je možné zapsat mnoha způsoby, kterými můžeme docílit například krokování nebo nastavit počáteční hodnotu měněného parametru.

## Manipulate

Updated in 7  
Show changes

<code>Manipulate[expr, {u, u<sub>min</sub>, u<sub>max</sub>}]</code> generates a version of <i>expr</i> with controls added to allow interactive manipulation of the value of <i>u</i> .
<code>Manipulate[expr, {u, u<sub>min</sub>, u<sub>max</sub>, du}]</code> allows the value of <i>u</i> to vary between <i>u<sub>min</sub></i> and <i>u<sub>max</sub></i> in steps <i>du</i> .
<code>Manipulate[expr, {{u, u<sub>init</sub>}, u<sub>min</sub>, u<sub>max</sub>, ...}]</code> takes the initial value of <i>u</i> to be <i>u<sub>init</sub></i> .
<code>Manipulate[expr, {{u, u<sub>init</sub>, u<sub>lbl</sub>}, ...}]</code> labels the controls for <i>u</i> with <i>u<sub>lbl</sub></i> .
<code>Manipulate[expr, {u, {u<sub>1</sub>, u<sub>2</sub>, ...}}]</code> allows <i>u</i> to take on discrete values <i>u<sub>1</sub></i> , <i>u<sub>2</sub></i> , ....
<code>Manipulate[expr, {u, ...}, {v, ...}, ...]</code> provides controls to manipulate each of the <i>u</i> , <i>v</i> , ....

Základní syntaxe funkce je `Manipulate[výraz, {parametr, min.hodnota, max. hodnota}]`. Ve výrazu ovšem může být více měněných parametrů, např. u obecné rovnice lineární funkce  $y = ax + b$ . Při vypracovávání souboru grafů jsem využil většinu možností funkce `Manipulate`. [5]



Obr. 27. Posuvníky pomocí funkce Manipulate

Funkce `Style[ ]` slouží k nastylování výrazů, např. textového řetězce, čehož jsem využíval při vytváření popisků a legend grafů. Zápis funkce je ve tvaru `Style[výraz, styl]`, přičemž stylem může být barva, font písma, velikost apod.

Mezi další použitou funkcí se řadí funkce `Labeled[ ]`. Už z názvu je patrné, že tuto funkci použijeme k vytvoření popisku objektu. Mezi její argumenty patří objekt (v mém případě graf) a popisek. Pozici popisku je možné měnit dodatečnými parametry. Funkci jsem využil při doplňování vlastností matematických funkcí. [5]

```
Labeled[Framed[{a, b, c, d}], "popisek", Left]
```

```
popisek {a, b, c, d}
```

Funkce `Table[ ]` má mnoho možností využitelných pro generování seznamů, výčtů, matic a samotných tabulek. Byla použita pro vygenerování jednoho řádku v tabulkovém přehledu

elementárních funkcí. Vzniklé řádky se následně vložily jako argumenty do funkce `Column[ ]` pro vytvoření celé tabulky.

```
radek1 = Grid[Table[{prvek1, prvek2, prvek3}, {1}], Frame -> All];
Column[{radek1, radek2, radek3, radek4}]
```

prvek1	prvek2	prvek3
--------	--------	--------

```
radek2
radek3
radek4
```

Funkce `Grid[ ]` a doplňující parametr `Frame->All` vykreslí pro přehlednost rámeček kolem každého prvku.

Jeden řádek naplněný různými objekty je možné sestavit pomocí funkce `Row[ ]`. Argumentem je výčet objektů ve složených závorkách a případný separátor. [5]

```
Row[radek1, Button["Tlacitko", Print["Click!"]]]
```

prvek1	prvek2	prvek3	Tlacitko
--------	--------	--------	----------

```
Click!
```

Na příkladu výše můžeme vidět, že do jednoho řádku byl vložen objekt textový řetězec a za něj tlačítko. Tlačítko vygenerujeme funkcí `Button[label, akce]`. Po kliknutí na tlačítko se vyvolá akce nadefinovaná druhým argumentem funkce `Button`. V příkladu se tedy po stisknutí tlačítka vypíše textový řetězec „Click!“.

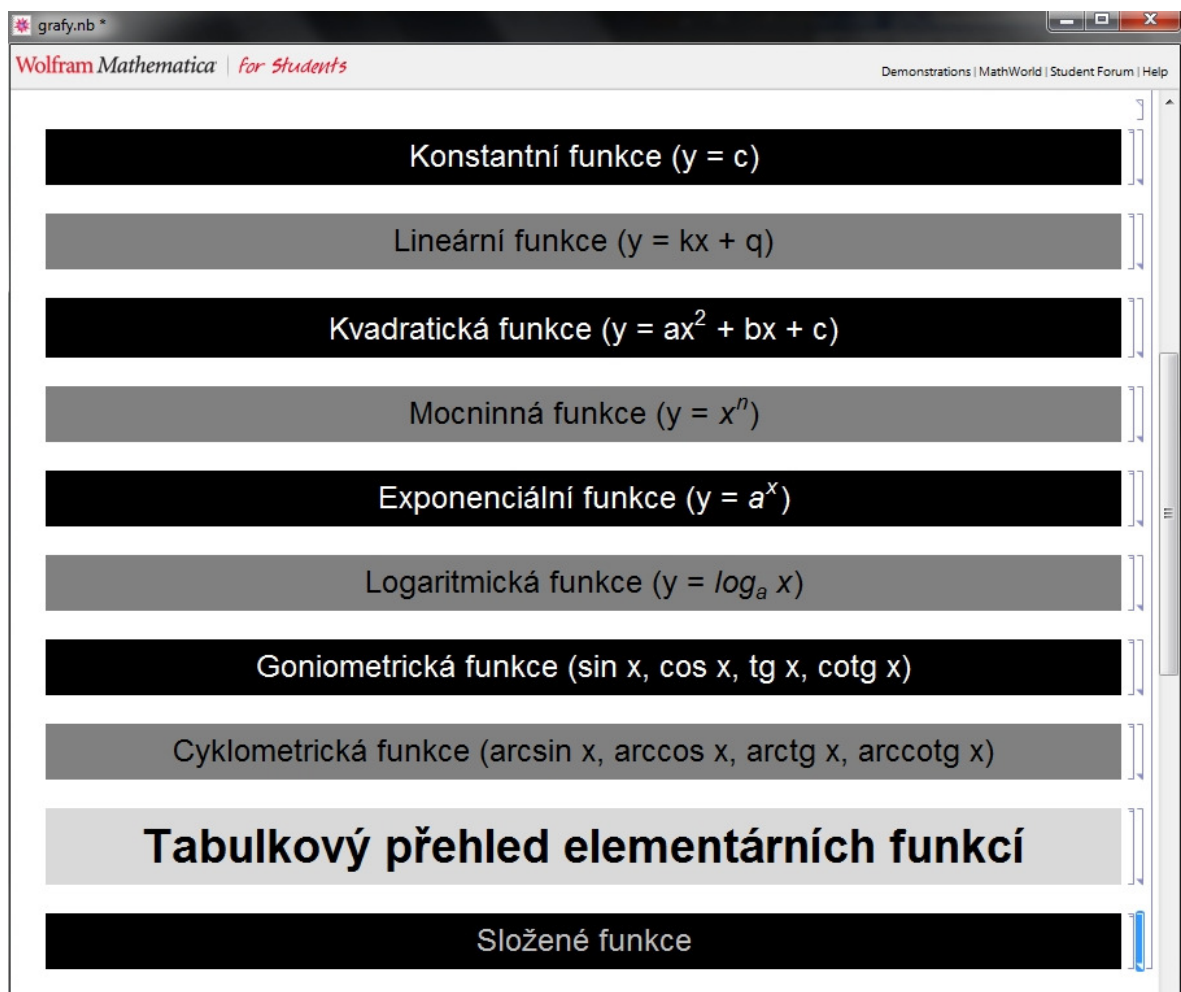
Funkce `Which[ ]` se řadí mezi podmínkové funkce `Mathematicy`. Její výhoda spočívá ve vyhodnocování více podmínek oproti funkci `If[ ]`. Argumenty jsou podmínky a návratové hodnoty, které odpovídají splnění některé z podmínek.

```
a = 1; b = 2;  
Which[a == 2, Print["b = 1"], a == 1, Print["b = 2"]]  
b = 2
```

Poslední použitou funkcí je `Export["file.ext", výraz]`, která exportuje výraz do souboru `file.ext` (např. `graf.pdf`). Za výraz je možné dosadit libovolný objekt (graf, obrázek, ...). [3,5].

## 4 VYBRANÉ GRAFY FUNKCÍ ZE SOUBORU GRAFŮ

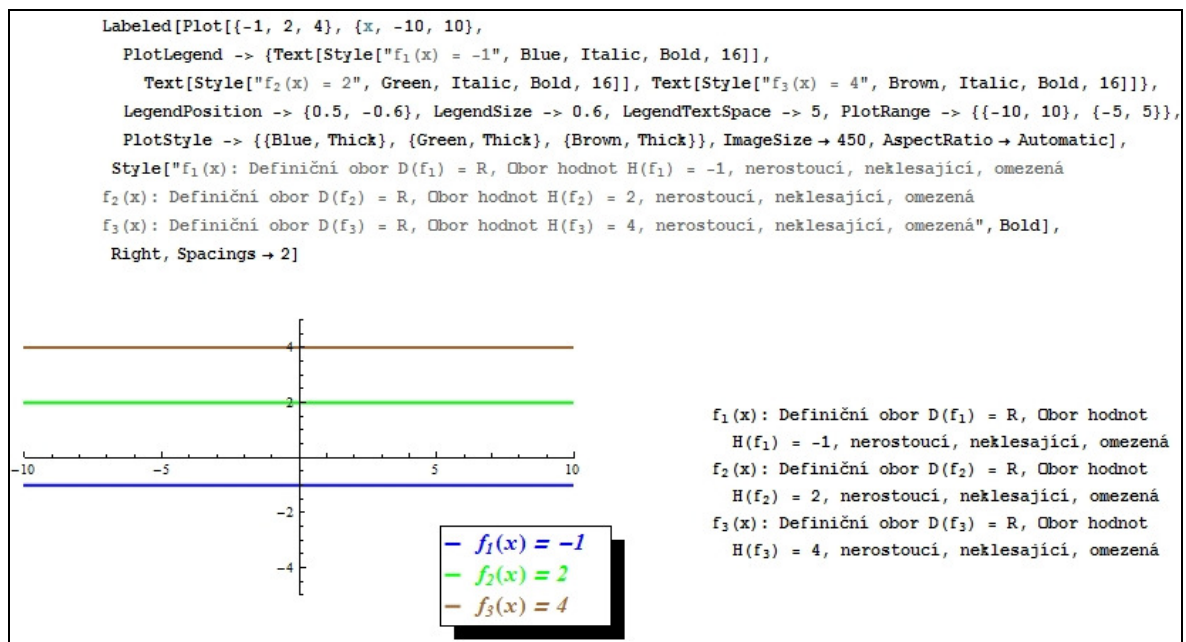
V této kapitole jsou zobrazeny ukázky vybraných grafů ze souboru grafů vytvořených v prostředí Mathematica 7. Soubor grafů je rozčleněn do jednotlivých sekcí dle typu funkcí. Na obrázku Obr. 28. je náhled do souboru s grafy. Každou sekci lze rozbalit a prohlížet vykreslené grafy.



Obr. 28. Náhled na strukturu souboru grafů v prostředí Mathematica

U každého grafu nalezneme zdrojový kód, který po zadání do Mathematicy vykreslí totožný graf. Součástí je také popis vlastností všech zobrazených funkcí.

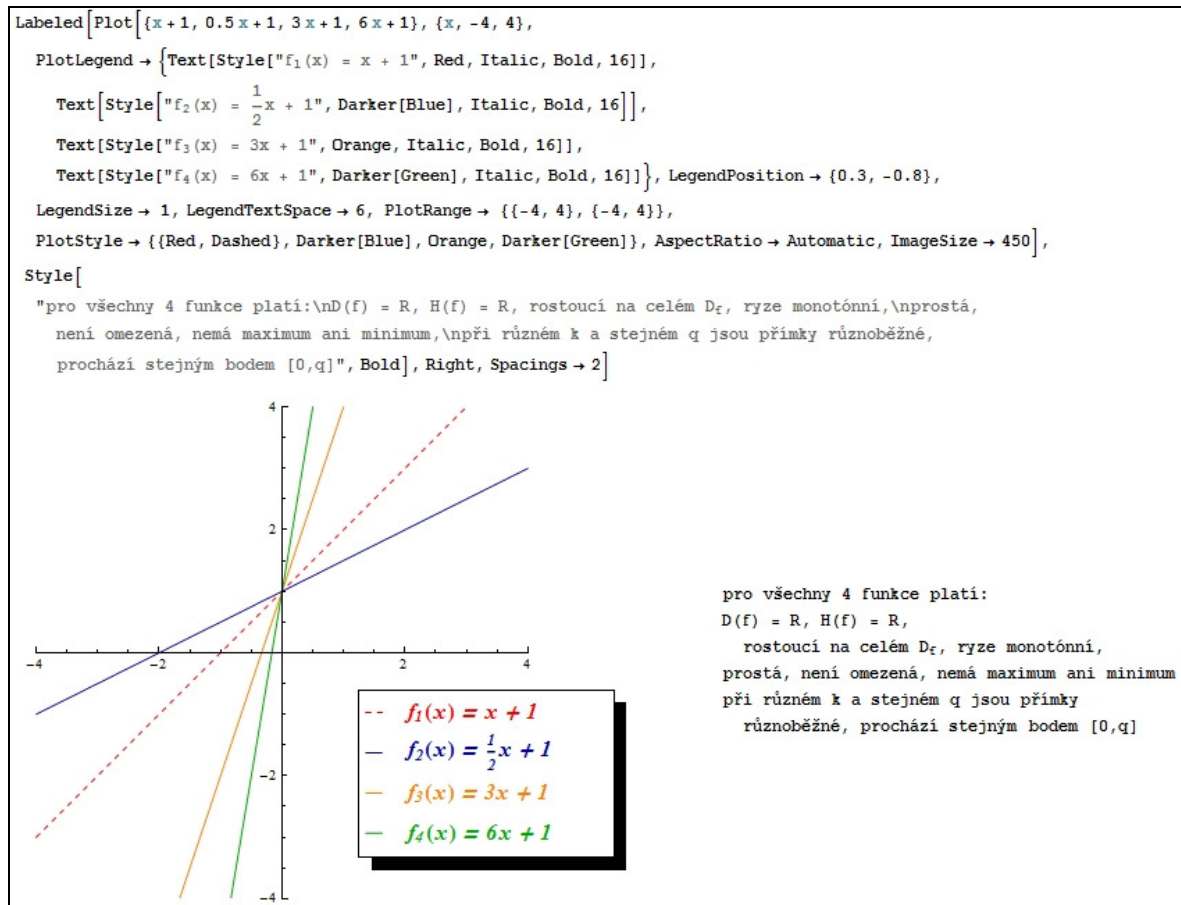
## 4.1 Konstantní funkce



Obr. 29. Ukázka grafu konstantní funkce se zdrojovým kódem

V grafu vidíme tři konstantní funkce  $f : y = c$  s různou hodnotou konstanty  $c$ . Všechny křivky jsou rovnoběžné s osou  $x$ . Graf má nastaven rozsah os, styl křivek, velikost a poměr šířky a výšky. V grafu je zobrazena legenda s nastylovanými popisky funkcí. Vpravo od grafu najdeme vlastnosti každé z křivek. V sekci Konstantní funkce nalezneme také graf s možností změny konstanty pomocí funkce Manipulate.

## 4.2 Lineární funkce

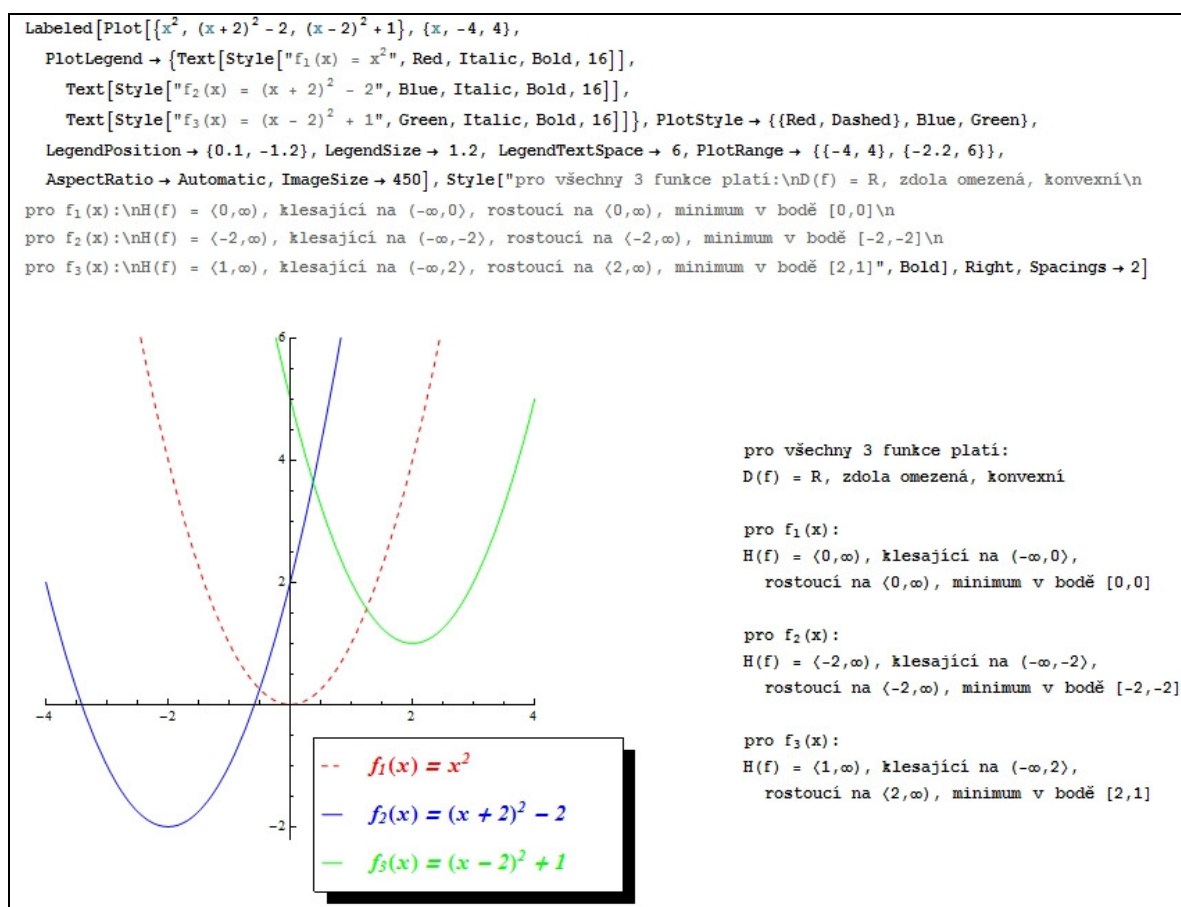


Obr. 30. Ukázka grafu lineární funkce se zdrojovým kódem

V sekci Lineární funkce je vygenerováno několik grafů pro různé hodnoty parametrů funkce  $f: y = kx + q$ . Celá sekce je rozčleněna do dvou podsekcí dle parametru  $q$ :  $q = 0$  a  $q \neq 0$ . V grafech můžeme vidět vliv parametrů na sklon a posun přímky. Názorné jsou grafy přímek se stejnými hodnotami parametru  $k$ , ale různými hodnotami  $q$ , a naopak přímek se stejnými hodnotami  $q$  a různým  $k$  (Obr. 30.). V sekci také nalezneme měnitelné grafy posuvníky ve funkci Manipulate.

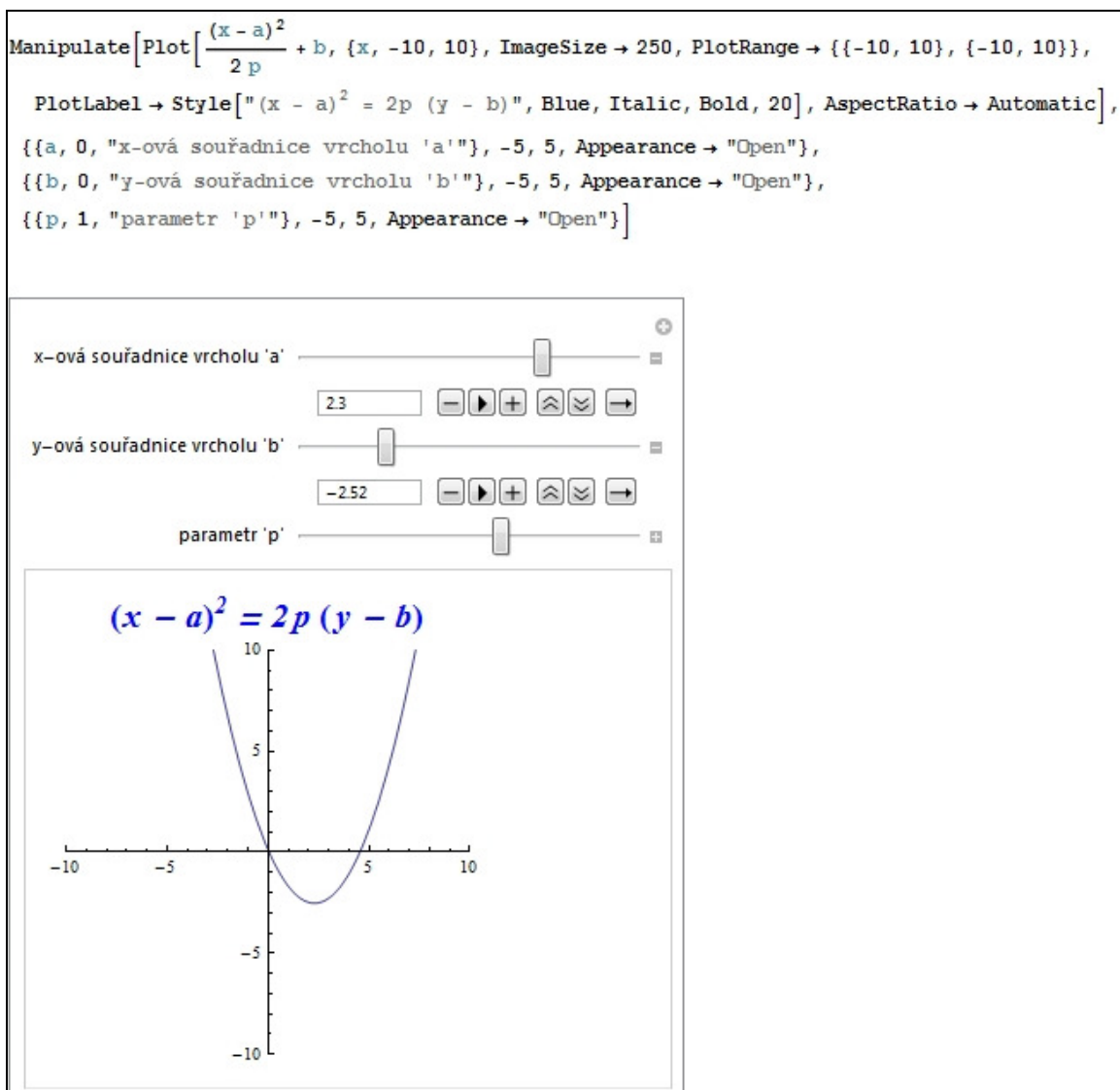
### 4.3 Kvadratická funkce

Sekce kvadratická funkce sestává z pěti podsekcí, jež se od sebe liší nulovostí, resp. nenulovostí parametrů  $b$  a  $c$  při tvaru funkce  $f : y = ax^2 + bx + c$ . Jedna podsekcí je věnována kvadratické funkci ve tvaru  $f : y = (x + a)^2 + c$  zachycující vliv parametru  $a$  na posun po ose  $x$ . V každé podsekcí je uvedeno několik grafů pro znázornění změny a posunu paraboly oproti původní funkci  $y = x^2$ , resp.  $y = -x^2$ . Nechybí zde ani použití funkce `Manipulate` a posuvníků pro editaci a lepší názornost.



Obr. 31. Ukázka grafu kvadratické funkce se zdrojovým kódem

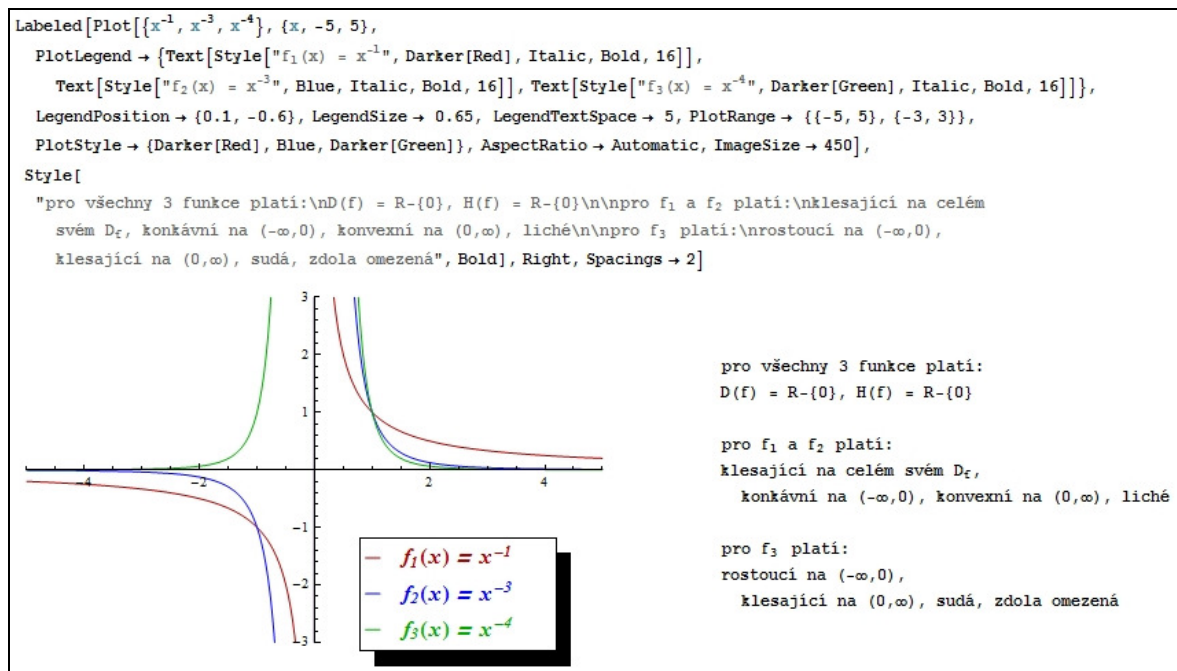
Dále zde nalezneme graf, u kterého je možné měnit souřadnice vrcholu a parametr  $p$  v rovnici paraboly ve vrcholovém tvaru  $(x - a)^2 = 2p(y - b)$ .



Obr. 32. Graf paraboly s rovnicí ve vrcholovém tvaru

#### 4.4 Mocninná funkce

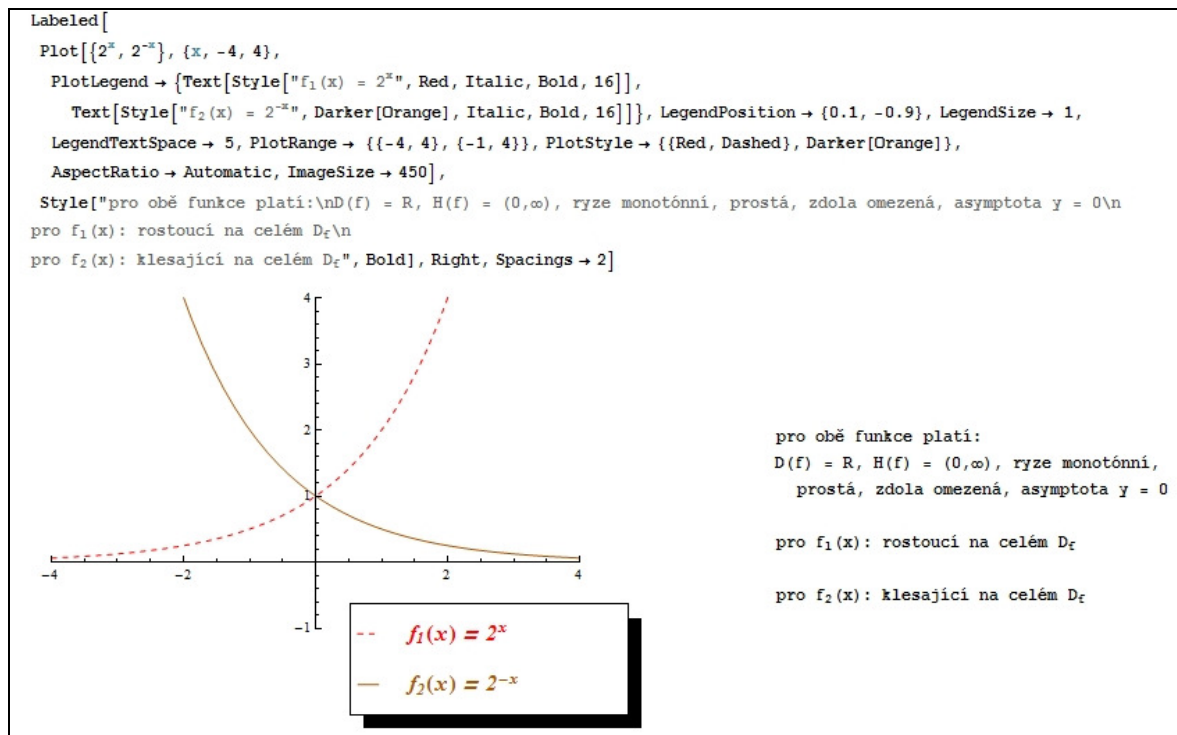
Sekce mocninné funkce obsahuje grafy mocninných funkcí s kladnými a zápornými celočíselnými mocniteli. Součástí jsou grafy s posuny po osách  $x$  a  $y$  a grafy s posuvníky.



Obr. 33. Ukázka grafu mocninné funkce se zdrojovým kódem

### 4.5 Exponenciální funkce

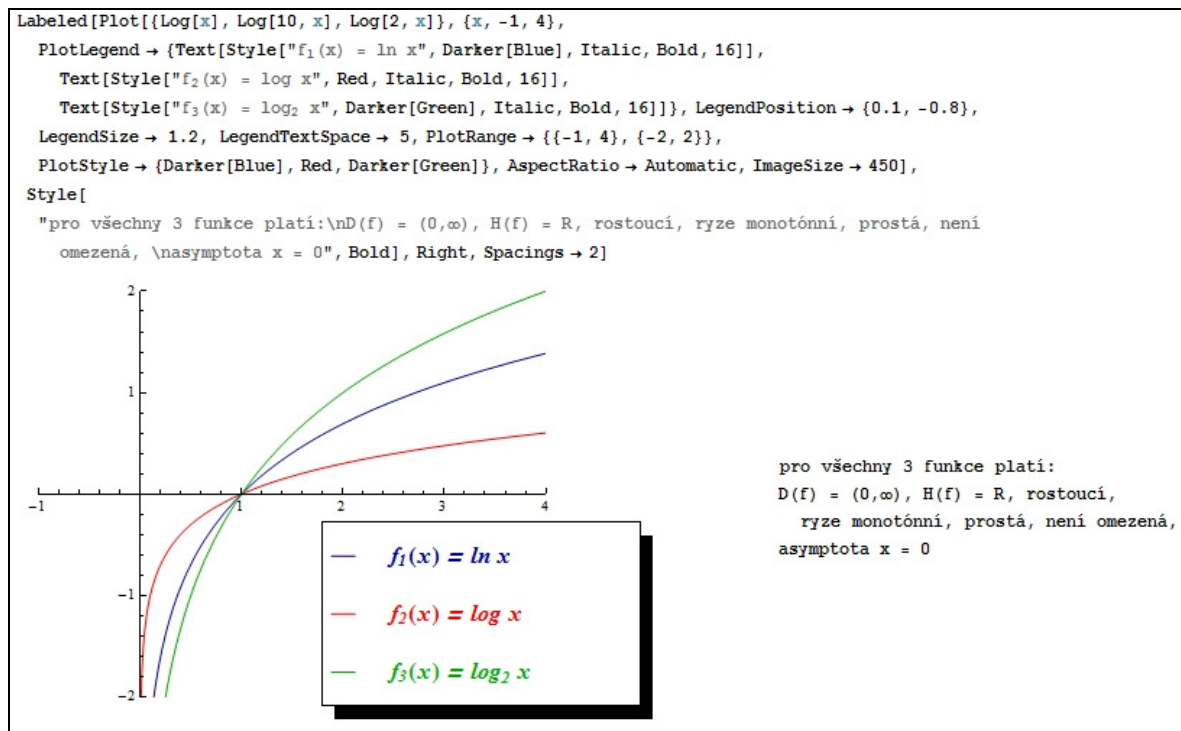
V této sekci souboru najdeme vykreslené převážně základní grafy a jejich porovnání.



Obr. 34. Ukázka grafu exponenciální funkce se zdrojovým kódem

## 4.6 Logaritmická funkce

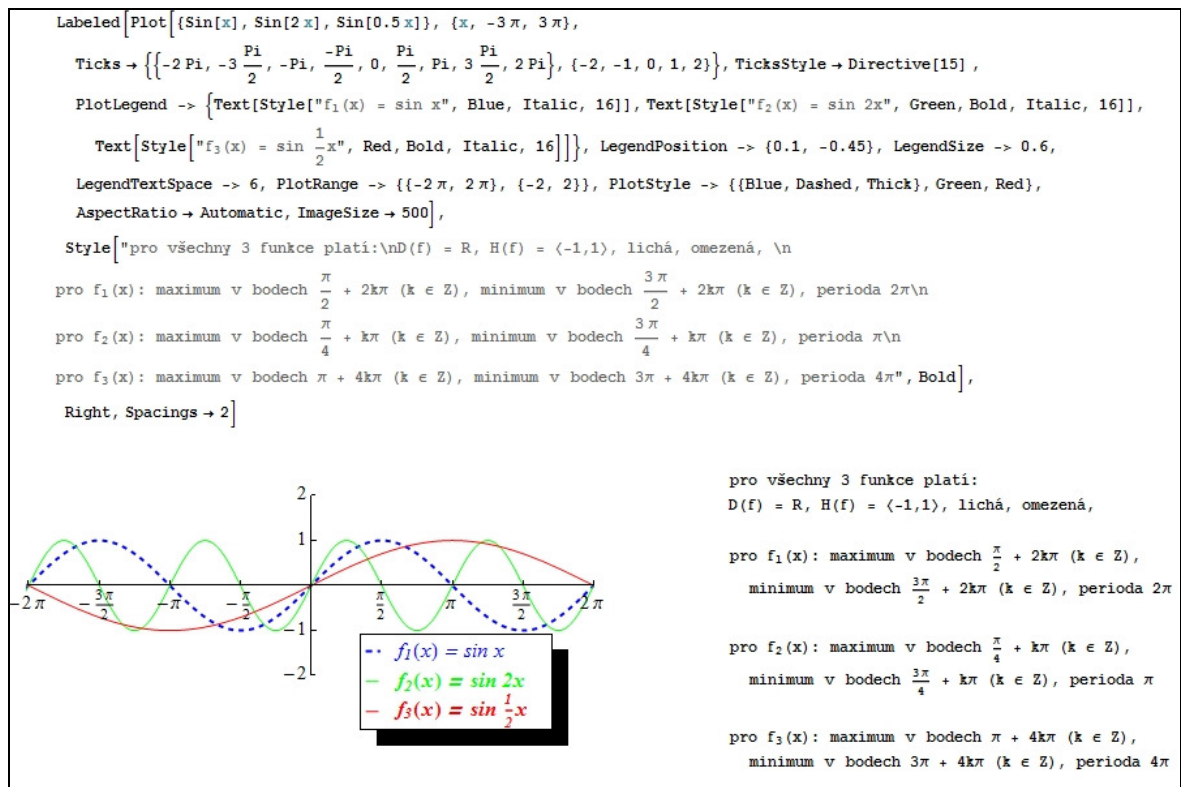
Tato sekce zahrnuje grafy logaritmických funkcí. Nalezneme zde graf dekadického a přirozeného logaritmu, grafy logaritmu s obecným základem  $a$  a srovnání všech zmíněných. Nechybí grafy s posuvníky.



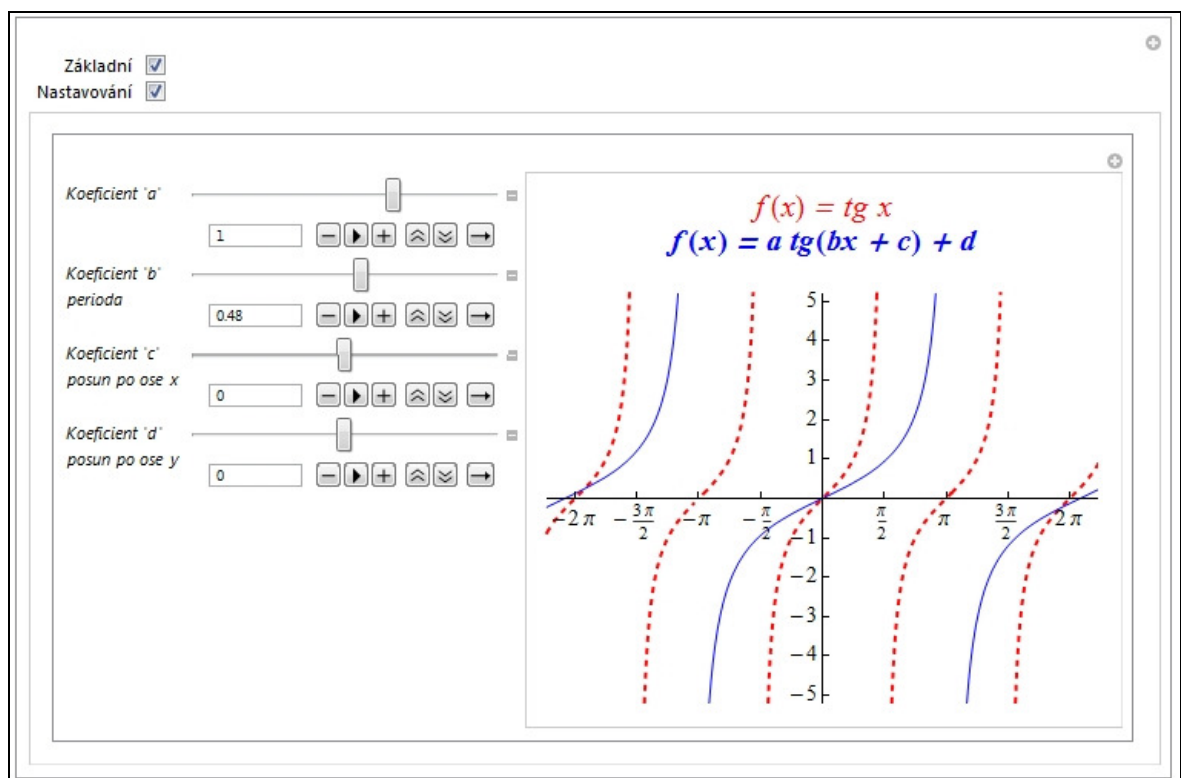
Obr. 35. Ukázka grafu logaritmické funkce se zdrojovým kódem

## 4.7 Goniometrické funkce

Část souboru grafů s goniometrickými funkcemi obsahuje grafy základních tvarů goniometrických funkcí  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \tan x$  a  $y = \cot x$ . Dále grafy funkcí odvozených, tzn. s rozdílnou amplitudou, periodou a s posunem, a také grafy s posuvníky a s možností kombinace zobrazovaných funkcí. Na obrázku Obr.37. je náhled panelu s grafem funkce tangens, u kterého můžeme zvolit zobrazení základního a rozšířeného grafu s nastavováním. Zde bylo využito funkce Which a Manipulate s checkboxy.



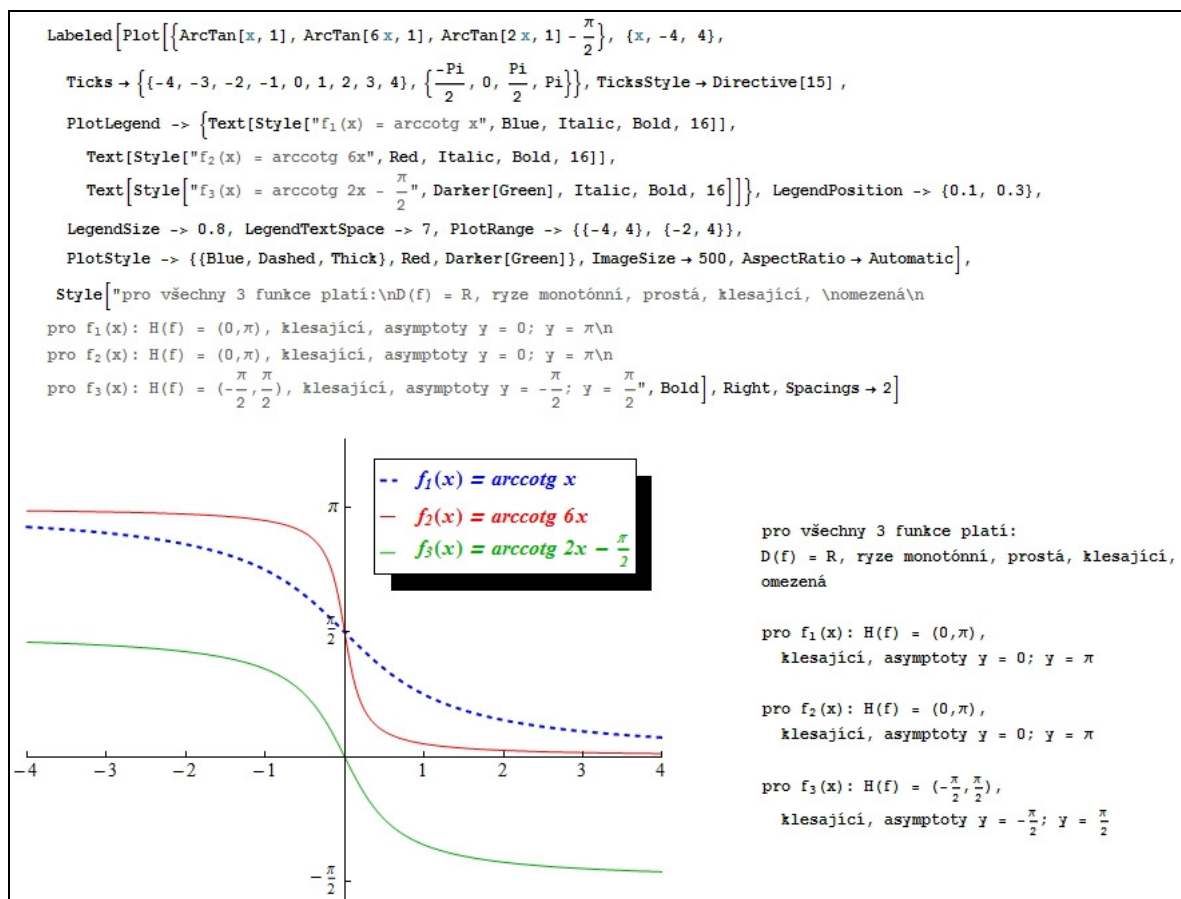
Obr. 36. Ukázka grafu goniometrické funkce sin x se zdrojovým kódem



Obr. 37. Náhled na využití funkce Manipulate u goniometrické funkce tg x

## 4.8 Cyklometrické funkce

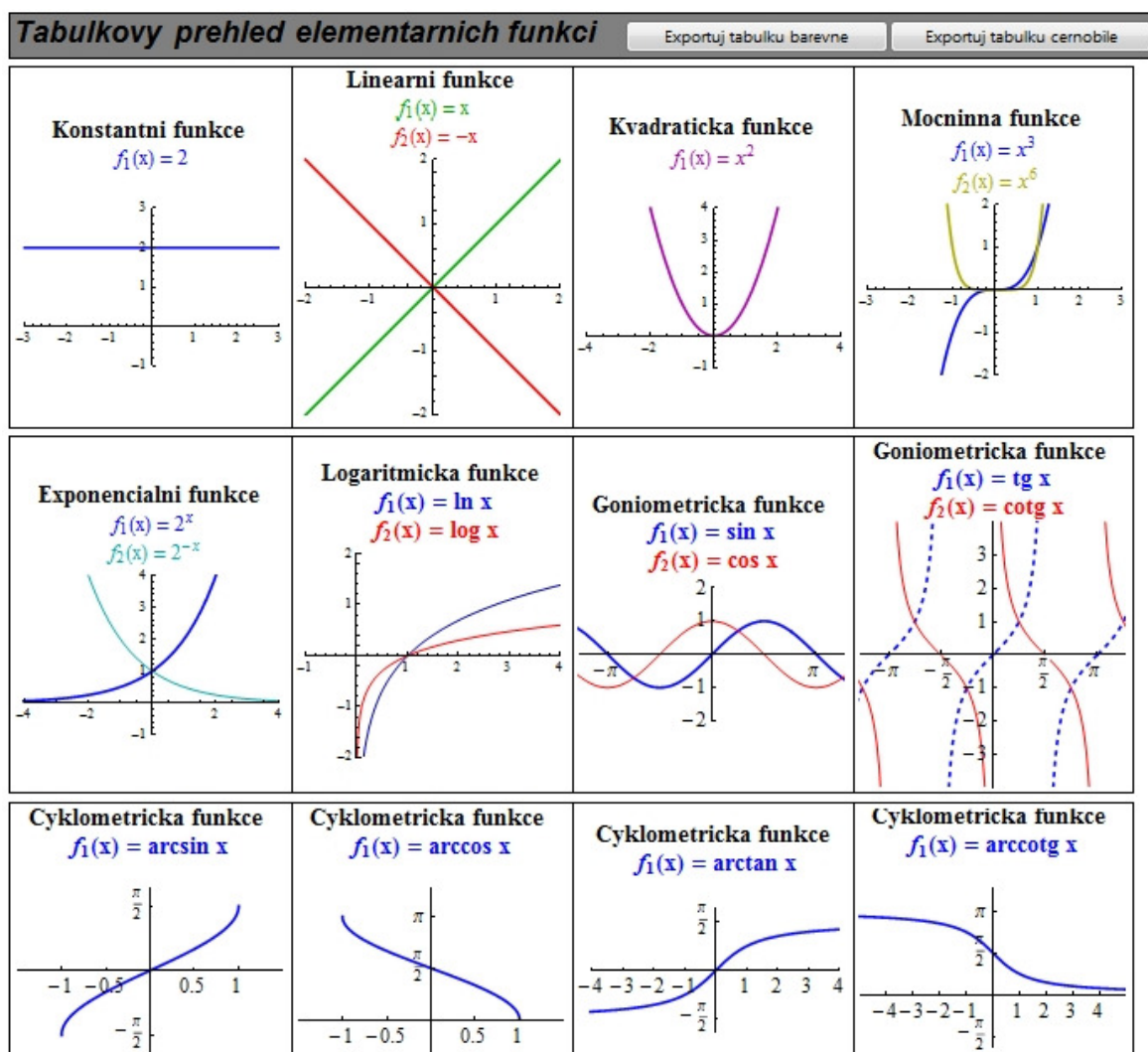
Sekce je tvořena grafy základních a odvozených cyklometrických funkcí  $y = \arcsin x$ ,  $y = \arccos x$ ,  $y = \arctg x$  a  $y = \operatorname{arccotg} x$ . Nalezneme zde statické grafy, ale stejně jako v předchozích kapitolách i grafy s posuvníky pro změnu parametrů. Mathematica má pro vykreslení funkce  $y = \operatorname{arccotg} x$  funkci `ArcCot[x]`, která ovšem graf vykresluje v prvním a třetím kvadrantu. Proto byla použita funkce `ArcTan[ ]`, za jejíž parametr byl dosazen výraz „ $x, 1$ “ – vyjadřující podíl  $\frac{1}{x}$ . Výsledek koresponduje s podobou grafu, se kterou se setkáváme v předmětu Matematika 1.



Obr. 38. Ukázka grafu cyklometrické funkce se zdrojovým kódem

## 4.9 Další funkce v souboru grafů

Dále v souboru grafů najdeme tabulkový přehled všech elementárních funkcí, který je možné exportovat do souboru PDF. Na výběr máme barevný nebo černobílý výstup. Funkci exportu můžeme také využít na konci každé sekce. Ve výstupním souboru PDF pak najdeme několik grafů z dané kapitoly. Poslední sekce v souboru – Složené funkce – obsahuje několik vygenerovaných grafů složených funkcí.



Obr. 39. Náhled na tabulkový přehled funkcí v prostředí Mathematica

## ZÁVĚR

Hlavním cílem této bakalářské práce bylo vytvoření souboru grafů elementárních funkcí v softwaru Mathematica od Wolframu. V úvodních kapitolách práce jsme se seznámili se společností Wolfram a jejich produktem Mathematica. Bylo popsáno samotné prostředí programu a základní práce s ním. Dále jsme se zabývali teorií reálných funkcí reálné proměnné a jejich vlastnostmi. Definice byly doplněny o názorné příklady - vygenerované grafy v Mathematice, sloužící k ilustraci daného problému. V poslední kapitole teoretické části byl uveden výčet všech elementárních funkcí se zaměřením na průběh funkce v základním tvaru. Jsou zde také uvedeny všechny vlastnosti daných funkcí. Praktická část byla věnována převážně tvorbě souboru grafů v Mathematice a objasnění všech souvislostí. Zmínili jsme se o použitých funkcích prostředí Mathematica jednak k vykreslení samotných 2D grafů pomocí funkce Plot, ale také k nastavování všech parametrů a formátování textových řetězců. Nechybělo také seznámení s funkcí Manipulate, které bylo využito při vytváření interaktivních grafů s posuvníky. Závěr práce byl věnován náhledu na soubor grafů a vybrané zástupce ze všech typů elementárních funkcí.

Tato práce může posloužit jako vhodná pomůcka studentům kurzu Matematika 1. Díky většímu množství podobných grafů mohou jednoduše zpozorovat vliv hodnot jednotlivých koeficientů na průběh funkce (strmost, posun, ...). Využít mohou také interaktivních grafů s posuvníky a porovnat vygenerované průběhy se základním grafem dané funkce.

## ZÁVĚR V ANGLIČTINĚ

The main aim of this bachelor thesis was to create a set of graphs of elementary functions in the Wolfram's software Mathematica. We learned something about Wolfram Company and their product Mathematica in the opening chapters of thesis. The program interface and basic work with it was described. We also dealt with the theory of real functions of real variable and their properties. Definitions are accompanied by illustrations of problem - graphs generated in Mathematica. The last chapter of theoretical part of bachelor thesis was given to a list of all elementary functions focusing on their basic form. There are also lists of all properties of functions. The practical part of thesis was primarily devoted to work on the set of graphs in Mathematica and clarification of context. We mentioned about used function in Mathematica for generating 2D charts (function Plot), but also about all parameters a functions for text formating. We wrote about function Manipulate, which was used for creating interactive charts with sliders. Last chapters of thesis were devoted to preview of the set of graphs and to selected representatives of all types of elementary functions.

This work can be used as an appropriate tool for students of "Matematika 1" course, because of bigger number of similar graphs in one place. They can easily observe effects of coefficients of function (slope, etc.). Students can also take advantage of interactive graphs with sliders and compare the generated graph with the basic graph of the function.

**SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY**

- [1] KŘENEK, Josef, OSTRAVSKÝ Jan, Diferenciální a integrální počet funkce jedné proměnné s aplikacemi v ekonomii, 2. vydání, , FAI UTB ve Zlíně, 2001, 232 s., ISBN 80-7318-025-1
- [2] FIALKA, Miloslav, CHARVÁTOVÁ Hana, Matematika I., 1. vydání, , FAI UTB ve Zlíně, 2006, 106 s. ISBN 80-7318-438-9
- [3] CHRAMCOV, Bronislav, Základy práce v prostředí Mathematica, 2. vydání, FAI UTB ve Zlíně, 2006, 122 s. ISBN 80-7318-510-5
- [4] Mathematica ELKAN: Dokumenty [online]. 2011 [cit. 2011-05-16], Dostupné z [www.mathematica.cz/dokumenty.php].
- [5] Wolfram Research. Wolfram [online]. 2011 [cit. 2011-05-06], Dostupné z: [www.wolfram.com/].
- [6] RICHTER, Jaroslav. *Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta* [online]. 2007 [cit. 2011-05-23]. Webové stránky určené pro výuku funkcí na střední škole. Dostupné z WWW: <[http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/jaroslav\\_richter/](http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/jaroslav_richter/)>.
- [7] MOTYČKOVÁ, Marie. *Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta* [online]. 2006 [cit. 2011-05-17]. Využití internetu ve výuce goniometrie na střední škole. Dostupné z WWW: <[http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/motyckova/Stranky\\_s\\_aplety/index.html](http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/motyckova/Stranky_s_aplety/index.html)>.
- [8] REICHL, Jaroslav; VŠETIČKA, Martin. *Mathematica-forum* [online]. 2011 [cit. 2011-05-17]. Materiály. Dostupné z WWW: <<http://www.mathematica-forum.cz/materialy.htm>>.

**SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK**

PDF	Portable Document Format – přenosný formát dokumentů
HTML	HyperText Markup Language – hypertextový značkovací jazyk
TeX	Program pro počítačovou sazbu odborných textů
TXT	Text file – textový soubor
Tzn.	To znamená
Např.	Například

## SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr. 1. Prostředí Wolfram Mathematica 7 .....	12
Obr. 2. Náповěda v Mathematice 7 .....	13
Obr. 3. Náhled na panely nástrojů .....	14
Obr. 4. Použití náповědy v prostředí Mathematica 7 .....	17
Obr. 5. Příklady rostoucí, klesající, nerostoucí a neklesající funkce .....	19
Obr. 6. Příklad sudé a liché funkce .....	20
Obr. 7. Příklad periodické funkce .....	21
Obr. 8. Příklad prosté funkce (vpravo), funkce vlevo není prostá .....	22
Obr. 9. Příklad inverzní funkce .....	23
Obr. 10. Příklad konstantní a lineární funkce .....	24
Obr. 11. Příklad kvadratické funkce .....	25
Obr. 12. Příklad mocninných funkcí .....	26
Obr. 13. Příklad exponenciální funkce .....	27
Obr. 14. Příklad logaritmické funkce .....	28
Obr. 15. Jednotková kružnice s vyznačenými goniometrickými funkcemi[8] .....	29
Obr. 16. Goniometrické funkce .....	30
Obr. 17. Cyklometrické funkce $\arcsin x$ a $\arccos x$ .....	31
Obr. 18. Cyklometrické funkce $\arctg x$ a $\operatorname{arccotg} x$ .....	32
Obr. 19. Vykreslení více funkcí v jednom grafu .....	36
Obr. 20. Vliv parametru AspectRatio .....	38
Obr. 21. Ukázka parametru Exclusions .....	38
Obr. 22. Ukázka parametru ImageSize .....	39
Obr. 23. Ukázka parametru PlotRange .....	40
Obr. 24. Parametr PlotStyle .....	41
Obr. 25. Parametr Prolog .....	41
Obr. 26. Ukázka legendy v grafu .....	42
Obr. 27. Posuvníky pomocí funkce Manipulate .....	44
Obr. 28. Náhled na strukturu souboru grafů v prostředí Mathematica .....	47
Obr. 29. Ukázka grafu konstantní funkce se zdrojovým kódem .....	48
Obr. 30. Ukázka grafu lineární funkce se zdrojovým kódem .....	49
Obr. 31. Ukázka grafu kvadratické funkce se zdrojovým kódem .....	50
Obr. 32. Graf paraboly s rovnicí ve vrcholovém tvaru .....	51

---

Obr. 33. Ukázka grafu mocninné funkce se zdrojovým kódem .....	52
Obr. 34. Ukázka grafu exponenciální funkce se zdrojovým kódem.....	52
Obr. 35. Ukázka grafu logaritmické funkce se zdrojovým kódem.....	53
Obr. 36. Ukázka grafu goniometrické funkce $\sin x$ se zdrojovým kódem.....	54
Obr. 37. Náhled na využití funkce Manipulate u goniometrické funkce $\tan x$ .....	54
Obr. 38. Ukázka grafu cyklometrické funkce se zdrojovým kódem .....	55
Obr. 39. Náhled na tabulkový přehled funkcí v prostředí Mathematica.....	56

## SEZNAM PŘÍLOH

CD s textem bakalářské práce a notebookem grafy.nb.