

Vypracování demonstračních výukových simulací pro předmět Modelování a identifikace náhodných procesů

Elaboration of educational demo simulations for subject Modelling and
identification of random processes

Tomáš Beck

Bakalářská práce
2011



Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky
akademický rok: 2010/2011

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Tomáš BECK**
Osobní číslo: **A07008**
Studijní program: **B 3902 Inženýrská informatika**
Studijní obor: **Informační a řídicí technologie**

Téma práce: **Vypracování demonstračních výukových simulací pro
předmět Modelování a identifikace náhodných
procesů**

Zásady pro vypracování:

1. Realizujte demonstrační výpočty statistických charakteristik náhodných procesů postihující náhodný proces z hlediska okamžitých hodnot.
2. Realizujte demonstrační výpočty statistických charakteristik náhodných procesů postihující náhodný proces z hlediska rychlosti probíhajících změn.
3. Realizujte simulaci identifikace systému pomocí korelačních metod.
4. Realizujte simulaci identifikace systému pomocí regresních metod.
5. Vypracujte v systému Matlab/Simulink.

Rozsah bakalářské práce:

Rozsah příloh:

Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

1. BOBÁL, V. Identifikace soustav. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, Akademické centrum, 2009, ISBN 978-80-7318-888-7.
2. FIKAR, M. – MIKLEŠ, J. Modelovanie, identifikácia a riadenie procesov II. Bratislava: STU, 2004, ISBN 80-227-2134-4.
3. NELLES, O. Nonlinear system identification. Springer: Verlag, 2001, ISBN 8540673695.
4. NOSKIEVIČ, P. Modelování a identifikace systémů. Ostrava: Montanex, 1999, ISBN 80-7225-030-2.
5. LJUNG, L. System Identification: Theory for the User. MIT Press Cambridge, 1987, ISBN 0-13-881640-9.

Vedoucí bakalářské práce:

doc. Ing. Marek Kubalčík, Ph.D.

Ústav řízení procesů

Datum zadání bakalářské práce:

25. února 2011

Termín odevzdání bakalářské práce:

7. června 2011

Ve Zlíně dne 25. února 2011

prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.
děkan



prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.
ředitel ústavu

ABSTRAKT

Cílem bakalářské práce je seznámení s metodami popisu náhodných procesů a vytvoření demonstračních simulací pro předmět Modelování a identifikace náhodných procesů. Vytvořené programy jsou zaměřeny na demonstraci základních statistických vlastností a na metody identifikace náhodných procesů. Realizace programů byla provedena jako grafické uživatelské rozhraní v programu MATLAB.

Klíčová slova:

Náhodný signál, Statistická charakteristika, Identifikace, Korelační analýza, Metoda nejmenších čtverců, MATLAB, GUI

ABSTRACT

The main purpose of this bachelor thesis is familiarization with description methods of random processes and creation demo simulations for subject Modelling and identification of random processes. Created programs are focused on demonstration of basic statistic features and on identification methods of random processes. Implementation of programs was made as graphic user interface in program MATLAB.

Keywords:

Random signal, statistic characterization, identification, correlation analysis, smallest squares method, MATLAB, GUI

Dovoluji si zde poděkovat vedoucímu této práce panu doc. Ing. Marku Kubalčíkovi, Ph.D, za odborné vedení, cenné rady a čas, který mě v průběhu zpracování této práce věnoval.

Prohlašuji, že

- beru na vědomí, že odevzdáním bakalářské práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb. o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších právních předpisů, bez ohledu na výsledek obhajoby;
- beru na vědomí, že bakalářská práce bude uložena v elektronické podobě v univerzitním informačním systému dostupná k prezenčnímu nahlédnutí, že jeden výtisk bakalářské práce bude uložen v příruční knihovně Fakulty aplikované informatiky Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně a jeden výtisk bude uložen u vedoucího práce;
- byl/a jsem seznámen/a s tím, že na moji bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších právních předpisů, zejm. § 35 odst. 3;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 1 autorského zákona má UTB ve Zlíně právo na uzavření licenční smlouvy o užití školního díla v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 2 a 3 autorského zákona mohu užít své dílo – bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití jen s předchozím písemným souhlasem Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše);
- beru na vědomí, že pokud bylo k vypracování bakalářské práce využito softwaru poskytnutého Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně nebo jinými subjekty pouze ke studijním a výzkumným účelům (tedy pouze k nekomerčnímu využití), nelze výsledky bakalářské práce využít ke komerčním účelům;
- beru na vědomí, že pokud je výstupem bakalářské práce jakýkoliv softwarový produkt, považují se za součást práce rovněž i zdrojové kódy, popř. soubory, ze kterých se projekt skládá. Neodevzdání této součásti může být důvodem k neobhájení práce.

Prohlašuji,

- že jsem na bakalářské práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval. V případě publikace výsledků budu uveden jako spoluautor.
- že odevzdaná verze bakalářské práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG jsou totožné.

Ve Zlíně

.....
podpis diplomanta

OBSAH

| | |
|---|-----------|
| ÚVOD | 8 |
| I TEORETICKÁ ČÁST | 9 |
| 1 ZÁKLADNÍ POJMY | 10 |
| 1.1 NÁHODNÝ JEV | 10 |
| 1.1.1 Relativní četnost..... | 10 |
| 1.2 STŘEDNÍ HODNOTA, ROZPTYL, SMĚRODATNÁ ODCHYLKA | 10 |
| 1.3 NÁHODNÝ PROCES..... | 11 |
| 1.4 HUSTOTA PRAVDĚPODOBNOСТИ, HISTOGRAM ČETNOSTI | 12 |
| 1.5 DISTRIBUČNÍ FUNKCE..... | 13 |
| 1.6 STACIONÁRNOST NÁHODNÉHO PROCESU | 14 |
| 1.7 ERGODIČNOST NÁHODNÉHO PROCESU | 14 |
| 2 KOVARIANCE, KOEFICIENT KORELACE | 17 |
| 2.1 AUTOKORELAČNÍ FUNKCE NÁHODNÉHO PROCESU..... | 18 |
| 2.1.1 Vlastnosti autokorelační funkce | 19 |
| 2.2 AUTOKOVARIANČNÍ FUNKCE..... | 20 |
| 2.3 VZÁJEMNÁ KORELAČNÍ A VZÁJEMNÁ KOVARIANČNÍ FUNKCE..... | 21 |
| 2.3.1 Vlastnosti vzájemné korelační funkce..... | 22 |
| 2.4 KORELAČNÍ ANALÝZA | 22 |
| 2.4.1 Stochastická formulace dynamického systému..... | 22 |
| 2.4.2 Numerický výpočet váhové funkce..... | 23 |
| 3 METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ | 24 |
| 3.1 JEDNORÁZOVÁ METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ | 24 |
| II PRAKTICKÁ ČÁST | 26 |
| 4 HISTOGRAM ČETNOSTI A DISTRIBUČNÍ FUNKCE | 27 |
| 4.1 POPIS PROGRAMU | 27 |
| 5 VÝPOČET KORELAČNÍCH FUNKCÍ A KORELAČNÍ ANALÝZA | 30 |
| 5.1 POPIS PROGRAMU | 30 |
| 6 METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ | 39 |
| 6.1 POPIS PROGRAMU | 39 |
| ZÁVĚR | 45 |
| ZÁVĚR V ANGLIČTINĚ | 46 |
| SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY | 47 |
| SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK | 48 |
| SEZNAM OBRÁZKŮ | 49 |
| SEZNAM PŘÍLOH | 50 |

ÚVOD

Cílem práce je vypracování demonstračních výukových simulací pro předmět modelování a identifikace náhodných procesů.

Demonstrační simulace byly realizovány jako programy v grafickém uživatelském rozhraní, vytvořené v prostředí výpočetního systému MATLAB. Tyto programy jsou zaměřeny na problematiku vyhodnocení a výpočtu základních statistických charakteristik náhodných procesů, korelační funkce a identifikace parametrů modelu pomocí korelační analýzy a metody nejmenších čtverců.

Zmíněné metody identifikace spadají mezi takzvaný empirický postup identifikace systémů. Tento postup vychází ze znalosti vstupních a výstupních veličin objektu a jeho výsledkem je model daného reálného systému. Získaný model poté označujeme jako vstupně-výstupní model identifikovaného systému. V programech vytvořených v této práci, které se zabývají statistickou identifikací, nejprve volíme strukturu identifikovaného modelu a pomocí naměřených vstupních a výstupních dat určíme parametry této struktury.

Vytvořené programy by měly sloužit jako pomůcka při demonstraci statistických charakteristik náhodných signálů a při rychlé kontrole identifikovaných soustav vypočítaných pomocí výše zmíněných metod.

I. TEORETICKÁ ČÁST

1 ZÁKLADNÍ POJMY

1.1 Náhodný jev

Náhodným jevem označujeme každou skutečnost, o které dokážeme po provedení pokusu rozhodnout jestli nastala nebo nenastala. Jevy mohou být vzájemně závislé a nezávislé. Vzájemně nezávislými jevy rozumíme dva nebo více jevů, kdy pravděpodobnost jednoho jevu nezávisí na tom jestli nastal jev druhý. Jevy vzájemně závislé pokud nastoupení jednoho jevu ovlivní pravděpodobnost nastoupení jevu druhého. Absolutní četnost určitého jevu A při provedení N měření při stejných podmínkách označujeme n_A . [1]

1.1.1 Relativní četnost

Je podíl absolutních četností A, a rozsahu souboru měření N. Je definována jako

$$p_A = \frac{n_A}{N} \quad (1)$$

nabývá hodnot v intervalu $0 \leq p_A \leq 1$. Pro soubory dat s menším počtem měření N se budou relativní četnosti v jednotlivých měřeních za stejných podmínek lišit. Všechny statistické charakteristiky vycházejí ze zákona velkých čísel, proto všechny statistické úvahy budou platit jenom pokud vyšetřujeme daný jev ve velkém souboru. Při zvyšování počtu pokusů N bude relativní četnost konvergovat k pravděpodobnosti náhodného jevu. V takovém případě se bude relativní četnost blížit určité konstantní hodnotě kterou nazýváme pravděpodobnost a vyjadřujeme jako

$$P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_A}{N} \quad (2)$$

pravděpodobnost náhodného jevu nabývá hodnot z intervalu $0 \leq P(A) \leq 1$. Hodnota $P(A)=0$ definuje nemožný jev a hodnota $P(A)=1$ jev jistý. [1]

1.2 Střední hodnota, rozptyl, směrodatná odchylka

Z konečného počtu měření s velkým souborem naměřených dat $x(i)$ $i=1,2, \dots,N$ náhodné veličiny X dokážeme odhadnout střední hodnotu μ ze vztahu

$$\hat{\mu} = \bar{x} = E[x] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x(i) \quad (3)$$

Střední hodnota určuje střed rozložení náhodné veličiny.

Ze souboru naměřených dat $x(i)$ děle určujeme rozptyl σ^2 (můžeme se setkat s označením variance nebo disperze)

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [x(i) - \hat{\mu}]^2 \quad (4)$$

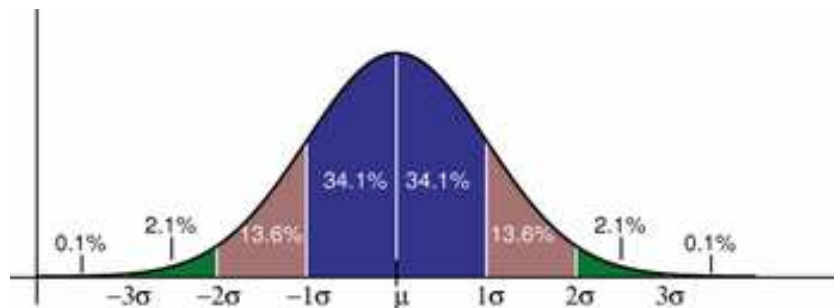
Rozptyl je definován jako střední hodnota kvadrátů odchylek od střední hodnoty.

Střední hodnota a rozptyl pro náhodnou spojitou veličinu z intervalu 0 až T mohou být definovány pomocí integrací. Vztahy pro výpočet těchto funkcí jsou potom

$$\hat{\mu} = \bar{x} = E[x] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (5)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - \hat{\mu}]^2 dt \quad (6)$$

Směrodatná odchylka σ vypovídá o tom jak moc se od sebe liší jednotlivé prvky souboru měřených hodnot. Víme, že při normálním rozdělení $\mu \pm \sigma$ vymezuje interval v grafu, ve kterém se náhodná veličina nachází s pravděpodobností 68 %. Pokud je $\mu \pm 2\sigma$ náhodná veličina se v tomto intervalu bude nacházet s pravděpodobností 95% a pro $\mu \pm 3\sigma$ to bude 99,7%. Směrodatná odchylka je graficky znázorněna na Obr.1. [4]

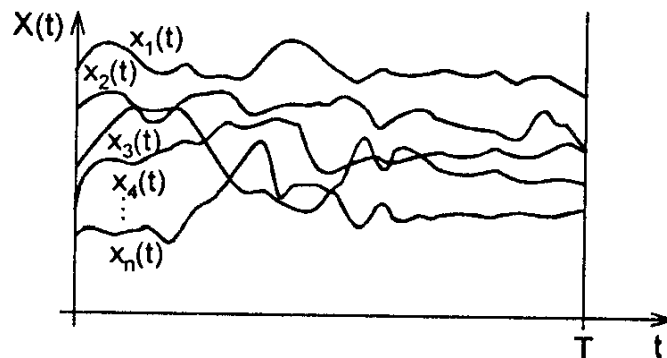


Obr. 1 : Grafické znázornění směrodatné odchylky

1.3 Náhodný proces

Náhodným procesem rozumíme funkci času, která může náhodně nabývat různých hodnot, přičemž není předem známo kterou nabude. Příklad náhodného procesu je zobrazen na Obr.1. Vyhodnocování vlastností náhodného procesu bývá spojeno s vyhodnocováním velkých souborů měření na daném systému za stejných podmínek. Příčiny náhodných změn jsou na sobě nezávislé, proto se okamžité hodnoty průběhů navzájem liší. Příkladem

náhodných procesů mohou být například poruchové signály, šумы v elektrických obvodech nebo kolísání napětí. [1]



Obr. 2: Náhodný proces $X(t)$ s několika jeho realizacemi $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$

Náhodný proces $X(t)$ je představován souborem průběhů. Jednotlivé průběhy náhodné veličiny $x_i(t)$ $i = 1, 2, \dots, n$ nazýváme realizacemi náhodného procesu. Vlastnosti náhodných procesů popisujeme statistickými charakteristikami, tyto charakteristiky dělíme do dvou skupin – charakteristiky prvního a druhého řádu. Statistické charakteristiky prvního řádu postihují pouze okamžité hodnoty náhodných veličin a nedokáží postihnout rychlost náhodných změn v průběhu realizace náhodného procesu. Charakteristiky druhého řádu poté popisují náhodný proces i z hlediska rychlosti probíhajících změn. Jedná se o korelační funkce, kovarianční funkce a o výkonovou spektrální hustotu. [3]

1.4 Hustota pravděpodobnosti, histogram četnosti

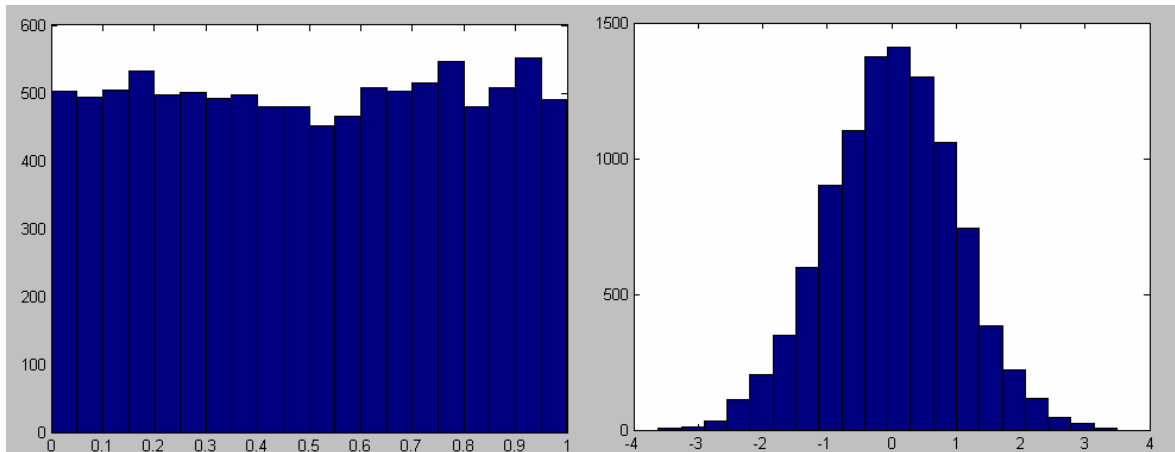
Za předpokladu, že máme k dispozici N hodnot $x(i)$, $i = 1, 2, \dots, N$ náhodné veličiny X , které jsme získali opakovaným měřením určité fyzikální veličiny. Předpis vyjadřující vztah mezi možnými hodnotami náhodné veličiny a jim odpovídajícím pravděpodobnostem nazýváme zákon rozdělení náhodné veličiny. U náhodných procesů má největší význam normální rozdělení. Toto rozdělení lze uvažovat všude tam, kde změny náhodné veličiny způsobuje velký počet nepatrných a vzájemně nezávislých jevů. Hodnoty $x(i)$ tvoří statistický soubor o rozsahu N a každá hodnota je prvkem statistického souboru. Hodnoty $x(i)$ vyneseme na horizontální osu. Soubor rozdělíme na M intervalů $j = 1, 2, \dots, M$ stejné délky a počet prvků v j -tém intervalu označíme m_j . Stanovíme relativní četnosti f_j prvků v jednotlivých intervalech [2]

$$f_j = \frac{m_j}{N} \quad (7)$$

V tomto případě platí také

$$\sum_{j=1}^M f_j = 1 \quad (8)$$

Když nad jednotlivými intervaly sestrojíme obdélníky o výšce f_j získáme histogram četnosti (Obr.3.).



Obr. 3: Příklad histogramů četnosti pro rovnoměrné rozdělení (vlevo) a normální rozdělení (vpravo)

Čím více bychom měli k dispozici naměřených hodnot, tím menší bychom mohli volit intervaly a naše histogramy četnosti by se stále více blížily ke spojitě křivce – hustotě pravděpodobnosti $f(x)$ spojitě náhodné veličiny. Křivky hustoty pravděpodobnosti bychom mohli teoreticky dosáhnout, kdybychom třídili nekonečně velký soubor do nekonečně mnoha intervalů.

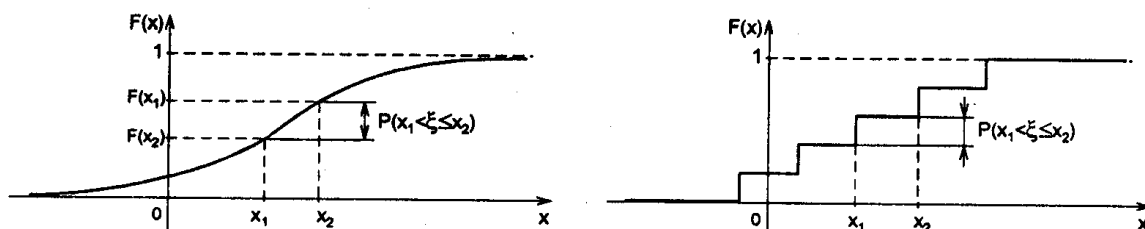
1.5 Distribuční funkce

Přiřadíme-li každému výskytu náhodného jevu reálné číslo ξ , potom dostaneme funkci definovanou pro všechny možné výsledky realizace náhodného procesu. Zápisem $\{\xi \leq x\}$ označíme všechny výsledky, kdy náhodná proměnná ξ je menší nebo rovna x . Množině těchto výsledků bude přiřazena pravděpodobnost [1]

$$P(\xi \leq x) = F(x) \quad (9)$$

Vztah (9) nám říká, že výsledek náhodného jevu – náhodná proměnná ξ je menší nebo rovna hodnotě x . Zavedená funkce $F(x)$ se označuje jako distribuční funkce. Typické

průběhy distribučních funkcí jsou zobrazeny na Obr.4. Distribuční funkce nabývá hodnot z intervalu $0 \leq F(x) \leq 1$, platí že $F(x \rightarrow -\infty) = 0, F(x \rightarrow \infty) = 1$. Dále o této funkci můžeme říci, že je monotónně rostoucí a že může mít spojitý, nebo stupňovitý průběh.



Obr. 4: Typický průběh spojitě distribuční funkce (vlevo) a diskrétní funkce (vpravo)

1.6 Stacionárnost náhodného procesu

Zavedené statistické charakteristiky náhodného procesu jsou obecně proměnné s časem. Jejich experimentální stanovení by vyžadovalo opakované vyšetření velkého počtu realizací náhodného procesu, což je pro praktické aplikace téměř nepřijatelné. Praktické aplikace se zaměřují na analýzu náhodných procesů, které své charakteristiky s časem nemění a označují se jako stacionární náhodné procesy.

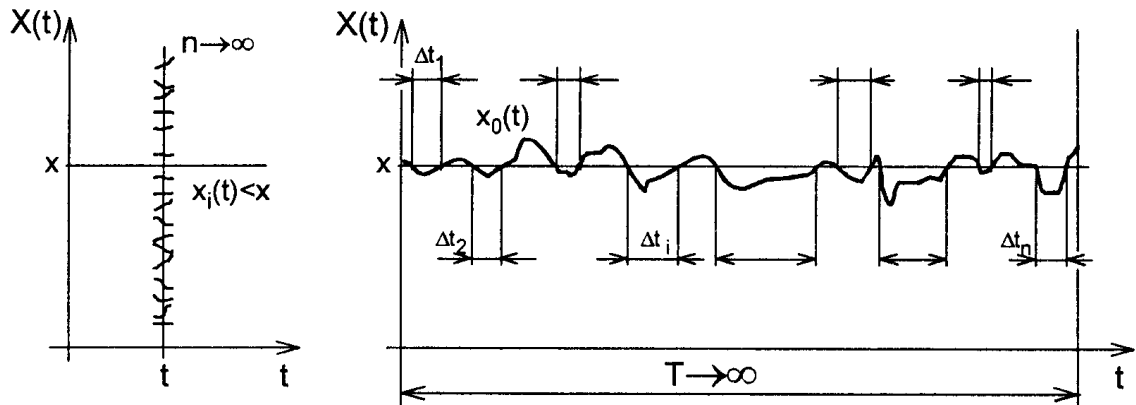
Distribuční funkce, hustoty pravděpodobnosti a další zavedené charakteristiky jsou u těchto procesů závislé na čase, ve kterém byly vyšetřeny. Stačí je tudíž stanovit pouze jednou. Ověření vlastnosti stacionárnosti vyžaduje pouze opakovaně ověřovat střední hodnotu a rozptyl. Pokud vyšetřené hodnoty jsou konstantní, považuje se náhodný proces za stacionární.

Na reálných objektech může být složité vytvoření provozních podmínek potřebných pro vznik stacionárních náhodných jevů, je to však potřebné pro dosažení praktické aplikace.

[1]

1.7 Ergodičnost náhodného procesu

Ergodičnost je vlastnost náhodných procesů, která se projevuje v rovnosti statistických charakteristik získaných ze souboru realizací náhodného procesu a získaných z jedné dostatečně dlouhé realizace tohoto procesu. Tato vlastnost platí u většiny stacionárních procesů, které potom nazýváme stacionární ergodické procesy. [1]



Obr. 5: Vyšetření distribuční funkce pro rostoucí počet realizací náhodného procesu a její vyhodnocení z dostatečně dlouhého průběhu realizace

Označením $F_n(x)$ hodnoty distribuční funkce stanovené ze souboru realizací $x_i(t), i = 1, 2, \dots, n$ v čase t získáme vztah

$$F_n(x) = P\{x_i(t) \leq x\}. \quad (10)$$

Pro rostoucí počet realizací, teoreticky $n \rightarrow \infty$ se bude získaná hodnota blížit pravděpodobnosti, že platí $x_i(t) \leq x$, takže v limitním případě platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = P\{x(t) \leq x\} \quad (11)$$

Hodnoty distribuční funkce můžeme stanovit z průběhu jedné realizace délky T náhodného procesu podle postupu naznačeného na obr. 5. Sečteme-li všechny časové intervaly, pro které platí $x_i(t) \leq x$, hodnota distribuční funkce je potom dána z poměru

$$F_x(x) = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta t_i}{T} \quad (12)$$

Hodnota $F_x(x)$ závisí na délce realizace T .

Podmínka ergodicity požaduje rovnost zjištěných hodnot z n realizací a jedné realizace náhodného procesu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} F_x(x) \quad (13)$$

Ergodický je takový proces, jehož jedna náhodně vybraná realizace $x_0(t)$ vyhovuje uvedenému podmínce. Potom můžeme náhodný proces nahradit jeho jedinou dostatečně

dlouhou realizací. Ergodičnost náhodného procesu většinou nemůžeme prakticky prokázat. Obvykle můžeme zaručit pouze stacionárnost procesu a jeho ergodicitu pak předpokládáme intuitivně. [1]

2 KOVARIANCE, KOEFICIENT KORELACE

Kovariance udává těsnost vazby (stupeň těsnosti lineární závislosti) mezi dvěma náhodnými veličinami X a Y . Lineární závislost znamená, že pokud jedna veličina bude narůstat, tak druhá veličina bude mít tendenci v průměru narůstat nebo klesat. Pokud druhá veličina nemá v průměru tyto tendence, jsou veličiny lineárně nezávislé. Velikost tendence druhé veličiny klesat nebo narůstat (ze statistického hlediska) určuje míru lineární závislosti, kterou udává právě kovariance. Její odhad vypočítáme ze vztahu

$$\hat{C}(X, Y) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [x(k) - \bar{x}][y(k) - \bar{y}] \quad (14)$$

Kovariance téže náhodné veličiny se nazývá autokovariance a je rovna rozptylu

$$\hat{C}(X, X) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [x(k) - \bar{x}]^2 = \hat{\sigma}^2 \quad (15)$$

Pokud jsou dvě náhodné veličiny X a Y lineárně nezávislé, potom je $C(X, Y) = 0$. Je-li $C(X, Y)$ různé od nuly, jedná se o kritérium existence lineární závislosti mezi náhodnými veličinami X a Y . Ze vztahu (15) vyplývá, že kovariance charakterizuje nejen lineární závislost náhodných veličin, ale i jejich rozptyl. Jestliže se tedy jedna z proměnných X, Y odchyluje od střední hodnoty málo, bude výsledná hodnota kovariance malá, přičemž nezáleží na těsnosti vazby mezi X a Y , Z tohoto důvodu se zavádí bezrozměrná charakteristika – koeficient korelace, kterou definujeme jako

$$\hat{r}(X, Y) = \frac{\hat{C}(X, Y)}{\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y} \quad (16)$$

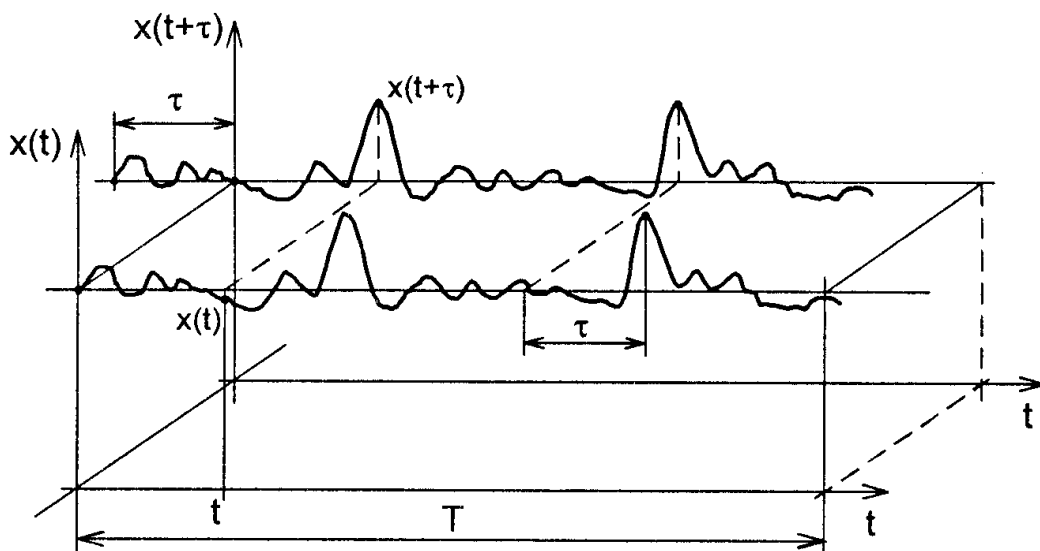
výsledek vztahu (16) nabývá hodnot z intervalu $-1 \leq \hat{r}(X, Y) \leq 1$. Absolutní hodnota koeficientu korelace vyjadřuje stupeň těsnosti lineární závislosti mezi náhodnými veličinami X a Y . Jestliže je koeficient korelace kladný, korelace je kladná, to znamená že při růstu jedné veličiny má druhá veličina tendenci v průměru vzrůstat. Pokud je koeficient korelace, záporný korelace je záporná – při růstu jedné veličiny má druhá tendenci v průměru klesat. Při nulovém koeficientu korelace se náhodné veličiny X a Y mohou nazývat nekorelované. [2]

2.1 Autokorelační funkce náhodného procesu

Dynamické vlastnosti (zákonitosti změn v čase) se charakterizují pomocí korelačních funkcí. V případě kdy vyhodnocujeme jeden náhodný proces mluvíme o autokorelační funkci. Autokorelační funkci náhodného stacionárního a ergodického procesu lze vyhodnotit z jeho jediné realizace a vzájemného časového posunutí $\tau = t_2 - t_1$. Obecně korelační funkce závisí na časových okamžicích t_1, t_2 , u ergodického procesu závisí pouze na τ . [1]

Autokorelační funkci určíme z jedné realizace stacionárního ergodického procesu jako střední hodnotu součinu časově posunutých hodnot

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T-\tau} x(t)x(t+\tau)dt \quad (17)$$



Obr. 6: Výpočet autokorelační funkce – součin časově posunutých hodnot

Ze vzorkovaného signálu $x(k), k = 1, 2, \dots, N$ s dobou $T = N.T_{vz}$ určíme autokorelační funkci pro posunutí τ vyjádřené jako násobek periody vzorkování $\tau = l.T_{vz}$ podle vztahu

$$R_{xx}(\tau) = R_{xx}(l.T_{vz}) = \frac{1}{N-l} \sum_{k=1}^{N-l} x(k)x(k+l) \quad (18)$$

Vztah definuje jeden bod autokorelační funkce pro posunutí $\tau = l.T_{vz}$. Výpočet opakujeme pro různá $\tau = l.T_{vz}$, resp. l , až po τ_{max} , resp. l_{max} , čímž dostaneme průběh autokorelační funkce.

2.1.1 Vlastnosti autokorelační funkce

Pro autokorelační funkci platí, že je vždy sudá

$$R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau) \quad (19)$$

Ze vztahu (19) vyplývá, že pokud v definičních vztazích změním časové posunutí $\tau = t_2 - t_1$ na $-\tau = t_1 - t_2$, bude výsledek vzhledem ke stacionárnosti náhodného procesu stejný. [1]

Další vlastností je, že pro $\tau = 0$ je hodnota autokorelační funkce rovna střední hodnotě druhé mocniny $x(t)$

$$R_{xx}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt \quad (20)$$

Pro $\tau = \infty$ je hodnota autokorelační funkce rovna čtverci střední hodnoty $\bar{x}(t)$

$$R_{xx}(\infty) = \bar{x}(t)^2 \quad (21)$$

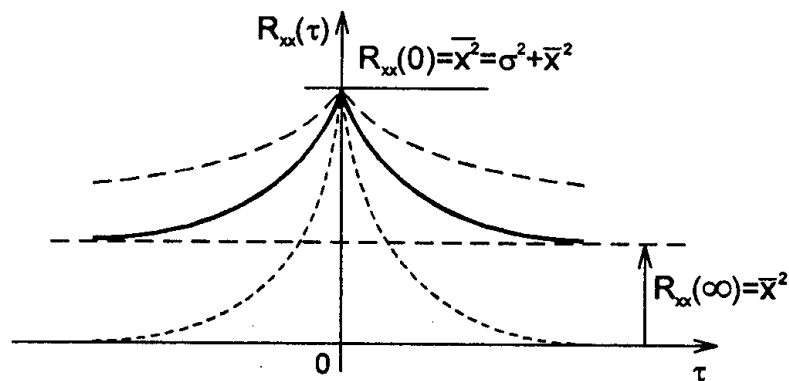
Pro libovolný bod autokorelační funkce platí

$$R_{xx}(\tau) \leq R_{xx}(0) \quad (22)$$

resp. pro střední hodnotu platí

$$E\{x(t) \cdot x(t + \tau)\} \leq E\{x^2(t)\} \quad (23)$$

Z těchto vlastností můžeme sestavit principiální průběh autokorelační funkce, který je zobrazen na Obr. 7.



Obr. 7: Obecný průběh autokorelační funkce

Čím rychleji klesá autokorelační funkce pro rostoucí $|\tau|$, tím menší je statistická souvislost po sobě jdoucích hodnot signálu $x(t)$ a tím širší frekvenční spektrum signál pokrývá. Pozvolnější průběh autokorelační funkce charakterizuje větší statistické souvislosti po sobě jdoucích hodnot signálu, větší setrvačnost systému. [1]

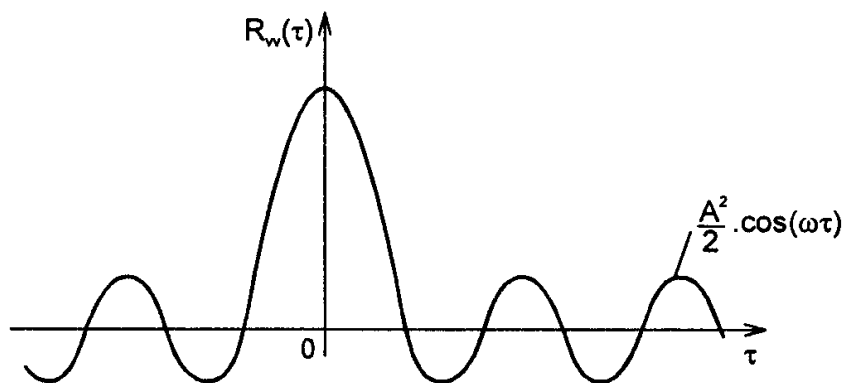
Obsahuje-li signál periodickou složku, vykazuje autokorelační funkce stejnou periodu jako signál

Například pro náhodný signál

$$v(t) = x(t) + A \cos(\omega t + \varphi) \quad (24)$$

Bude po úpravách pro autokorelační funkci vyplývat

$$R_{vv}(\tau) = R_{xx}(\tau) + \frac{A^2}{2} \cos(\omega\tau) \quad (25)$$



Obr. 8: Typický průběh autokorelační funkce ze vztahu (25)

2.2 Autokovarianční funkce

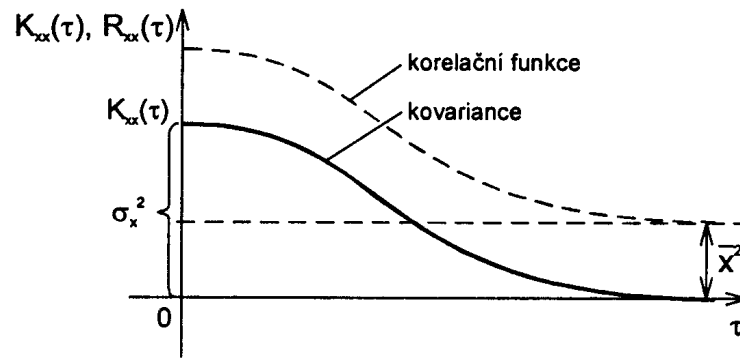
Provedeme-li stejné operace jako při výpočtu autokorelačních funkcí pro odchylky od střední hodnoty, dostaneme autokovarianční funkce. [5]

Pro stacionární náhodný proces $x(t)$ je autokovarianční funkce definována

$$C_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T-\tau} (x(t) - \bar{x})(x(t + \tau) - \bar{x}) dt \quad (26)$$

$$C_{xx}(\tau) = C_{xx}(i.T_{VZ}) = \frac{1}{N-i} \sum_{k=1}^{N-i} (x(k) - \bar{x})(x(k+i) - \bar{x}) \quad (27)$$

Pro $\tau = 0$ je hodnota autokovarianční funkce rovna rozptylu



Obr. 9: Průběh autokorelační a autokovarianční funkce

Autokorelační a autokovarianční funkce jsou totožné, pouze posunuté o kvadrát střední hodnoty, jak můžeme vidět na Obr.9.

2.3 Vzájemná korelační a vzájemná kovarianční funkce

Pomocí vzájemných korelačních a kovariančních funkcí vyjadřujeme statistické souvislosti mezi dvěmi náhodnými veličinami. Tyto funkce vyjadřují statistickou souvislost hodnot jedné náhodné veličiny a hodnot druhé náhodné veličiny posunutých o konstantu τ . Neboli statistické souvislosti hodnot dvou realizací náhodného procesu ve dvou rozdílných časových okamžicích t_1 a t_2 . Pokud tyto charakteristiky uvažujeme pro stacionární ergodické náhodné procesy, jsou tyto charakteristiky časově invariantní funkce, které určíme z jedné dvojice dostatečně dlouhých realizací jako funkci časového posunutí $\tau = t_2 - t_1$. Rozdílem mezi vzájemnou korelační a vzájemnou kovarianční funkcí je to, že vzájemná kovarianční funkce pracuje s centrovanými hodnotami a vzájemná korelační funkce pracuje s necentrovanými hodnotami. [1]

Vzájemná spojitá korelační funkce:

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T-\tau} x(t)y(t + \tau)dt \quad (28)$$

Vzájemná diskrétní korelační funkce:

$$\hat{R}_{xy}(\tau) = \hat{R}_{xy}(iT_{VZ}) = \frac{1}{N-i} \sum_{k=1}^{N-i} x(k)y(k+i) \quad (29)$$

Vzájemná spojitá kovarianční funkce:

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T-\tau} (x(t) - \bar{x})(y(t + \tau) - \bar{y}) dt \quad (30)$$

Vzájemná diskrétní kovarianční funkce:

$$C_{xy}(\tau) = C_{xy}(i.T_{VZ}) = \frac{1}{N-i} \sum_{k=1}^{N-i} (x(k) - \bar{x})(y(k+i) - \bar{y}) \quad (31)$$

2.3.1 Vlastnosti vzájemné korelační funkce

$$I. \quad R_{xy}(\tau) = R_{xy}(-\tau) \quad (32)$$

$$II. \quad R_{xy}(0) = \overline{x(t) \cdot y(t)} \quad (33)$$

Pro $\tau = 0$ se $R_{xy}(0)$ rovná střední hodnotě součinu $x(t)$ a $y(t)$.

$$III. \quad R_{xy}(\infty) = \overline{x(t)} \cdot \overline{y(t)} \quad (34)$$

Pro $\tau \rightarrow \infty$ se R_{xy} rovná součinu středních hodnot $x(t)$ a $y(t)$

$$IV. \quad R_{xy}(\tau) \leq \frac{1}{2} [R_{xx}(0) + R_{yy}(0)] \quad (35)$$

2.4 Korelační analýza

2.4.1 Stochastická formulace dynamického systému

Pokud budeme uvažovat lineární dynamický systém určený přenosem $G(s)$, na výstupu bude kromě signálu $y(t)$ také poruchový signál $v(t)$, který se vstupním signálem nekoreluje. Pokud bude na vstup přiveden stacionární náhodný signál $u(t)$, výstup systému můžeme popsat pomocí konvolutorního integrálu [1]

$$y(t) = \int_0^{\infty} g(\tau) \cdot u(t - \tau) d\tau + v(t). \quad (36)$$

Po rozšíření rovnice o $u(t + \tau^*)$ vypočítáme střední hodnotu výrazů pro obě strany rovnice

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(t + \tau^*) \cdot y(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^{\infty} g(\tau) \cdot u(t + \tau^*) \cdot u(t - \tau) d\tau dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(t + \tau^*) \cdot v(t) dt \quad (37)$$

Po sérii úprav a uplatnění znalostí korelačních funkcí získáme funkci reálného času, kterou nazýváme Wiener-Hopfova rovnice

$$R_{uy}(\tau) = \int_0^{\infty} g(t) \cdot R_{uu}(\tau - t) dt. \quad (38)$$

Rovnice (38) představuje takzvanou stochastickou formulaci dynamického systému. Díky této rovnici můžeme se znalostí korelačních funkcí R_{uu} a R_{uy} určit váhovou funkci $g(\tau)$.

2.4.2 Numerický výpočet váhové funkce

Při numerickém výpočtu váhové funkce nahradíme integraci sumací a použijeme numerickou dekonvoluci. Následnou diskretizací získáme vztah

$$R_{uy}(\tau) \approx \sum_{i=0}^N R_{uu}(\tau - i\Delta t) \cdot g(i\Delta t) \cdot \Delta t. \quad (39)$$

Časové posunutí τ vyjádříme jako násobek přírůstku času Δt , tak můžeme rovnici (39) vyjádřit jako soustavu lineárních algebraických rovnic, ze kterých lze vypočítat neznámé hodnoty váhových funkcí $g(0), g(\Delta t), \dots, g(N\Delta t)$. Po využití vlastností autokorelační funkce (19) a po zkrácení zápisu hodnot váhové funkce soustavu rovnic zapíšeme v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} \frac{R_{uy}(0)}{\Delta t} \\ \frac{R_{uy}(\Delta t)}{\Delta t} \\ \vdots \\ \frac{R_{uy}(N\Delta t)}{\Delta t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{uu}(0) & R_{uu}(\Delta t) & R_{uu}(2\Delta t) & \cdots & R_{uu}(N\Delta t) \\ R_{uu}(\Delta t) & R_{uu}(0) & R_{uu}(\Delta t) & \cdots & R_{uu}[(N-1)\Delta t] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{uu}(N\Delta t) & R_{uu}[(N-1)\Delta t] & \cdots & \cdots & R_{uu}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_N \end{bmatrix} \quad (40)$$

Váhovou funkci získáme poté ze vztahu

$$g = R^{-1} \cdot r. \quad (41)$$

3 METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

Metodou nejmenších čtverců rozumíme odhad parametrů číslcového modelu. Tato metoda spadá mezi statistické metody identifikace. Metoda nejmenších čtverců je vhodná pro vyšetřování jak statických, tak dynamických vlastností systémů. [2]

3.1 Jednorázová metoda nejmenších čtverců

Uvažujme jednorozměrný stochastický proces, který je popsán modelem ARX, a předpokládejme stupeň obou polynomů roven n

$$A(z^{-1})y = B(z^{-1})u + n_s \quad (51)$$

kde je n_s neměřitelná náhodná složka. Regresní model ARX často zapisujeme v kompaktní vektorové formě:

$$y(k) = \Theta^T \phi(k-1) + n_s(k) \quad (52)$$

Kde vektor parametrů nabývá hodnot:

$$\Theta^T = [a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n] \quad (53)$$

Postupným dosazením naměřených hodnot do regresního modelu získáme maticovou rovnici ve formě:

$$y = F\Theta + e \quad (54)$$

kde matice F má rozměr $(N-n, 2n)$ a je ve tvaru

$$\begin{bmatrix} -y(n) & -y(n-1) & \dots & -y(1) & u(n) & u(n-1) & \dots & u(1) \\ -y(n+1) & -y(n) & \dots & -y(2) & u(n+1) & u(n) & \dots & u(2) \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ -y(N-1) & -y(N-2) & \dots & -y(N-n) & u(N-1) & u(N-2) & \dots & u(N-n) \end{bmatrix}. \quad (55)$$

Vektor y nabývá rozměru $(N-n)$ a tvaru:

$$y^T = [y(n+1), y(n+2), \dots, y(N)] \quad (56)$$

Kde je N počet naměřených dat.

Odhad chyby měření e získáme vyjádřením z rovnice (47)

$$\hat{e} = y - F\hat{\Theta} \quad (57)$$

Po několika úpravách získáme základní maticový tvar pro jednorázový odhad parametrů modelu metodou nejmenších čtverců. Tento vztah má tvar:

$$\hat{\Theta} = (F^T \cdot F)^{-1} F^T \cdot y \quad (58)$$

Často používaným modelem pro popis mnoha procesů je soustava druhého řádu. Tomuto spojitému přenosu odpovídá přenos který má v diskrétní verzi tvar:

$$G(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{Y(z)}{U(z)}. \quad (59)$$

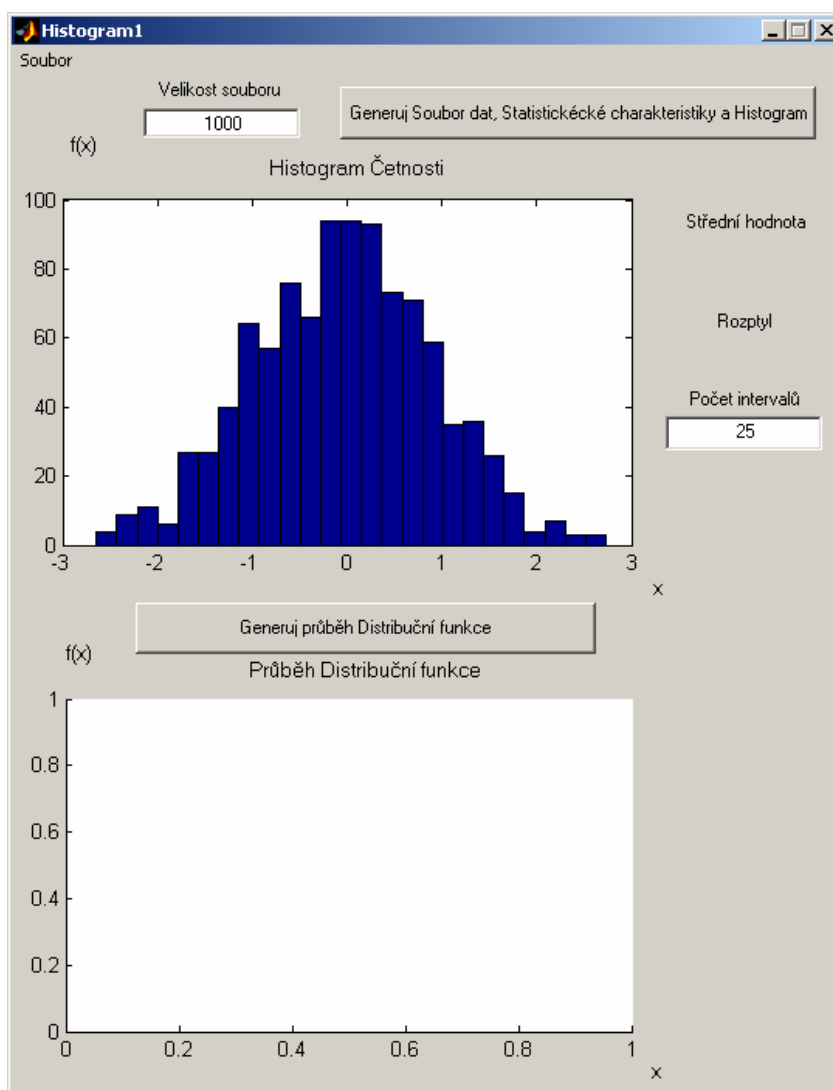
II. PRAKTICKÁ ČÁST

4 HISTOGRAM ČETNOSTI A DISTRIBUČNÍ FUNKCE

V této části mé práce byl vytvořen v MATLABu program, který vykresluje histogram četnosti a distribuční funkci z vygenerovaného souboru náhodných dat na základě velikosti souboru náhodných dat zadávaných uživatelem. Tento program byl realizován jako MATLAB GUI za použití rozhraní GUIDE.

4.1 Popis programu

Program se spouští souborem Histogram1.m. Spuštění tohoto souboru inicializuje hlavní okno programu (Obr. 10).




Obr. 10: Hlavní okno programu po spuštění

Samotné GUI se skládá ze dvou grafů, dvou tlačítek a z objektů pro načtení, vypsání, popis dat a z dialogového menu pro ukončení práce s programem. V prvním grafu je ihned po

inicializaci vykreslí histogram četnosti. Tento Graf se vykreslí pomocí příkazů, které se nachází ve funkci *Histogram1_OpeningFcn*, která se provede pouze jednou a to právě při spouštění programu. Samotný kód pro vykreslení vygeneruje svůj vlastní soubor náhodných dat a vykreslí pro něho histogram četnosti pro 25 intervalů. Velikost souboru náhodných dat i počet intervalů pro vykreslení jsou zadány přímo v kódu, protože potřeba tyto data získat čtením vstupů zadávaných uživatelem při startu programu odpadá.

Jádro programu se nachází ve funkcích, které jsou aktivovány při stisknutí tlačítka. Tyto funkce jsou *pushbutton2_Callback* a *pushbutton3_Callback*.

Funkce *pushbutton2_Callback* se aktivuje při stisku tlačítka „Generuj soubor dat, Statické charakteristiky a Histogram“, zobrazeném na obr.10. Po stisknutí tlačítka se nejprve uloží hodnoty zadané uživatelem do proměnných *VelSouboru* a *PocIntervalu*, které jsou načítány z prvků edit a které určují velikost souboru náhodných dat a počet intervalů histogramu četnosti. Očekává se, že tyto dvě proměnné budou čísla. Protože prvek edit vrací řetězec, tento řetězec se musí převést na číslo a následně otestovat jestli nebyl zadán chybně. Pokud byl zadán chybně hodnota se automaticky vrátí na hodnoty, které jsou nastaveny jako výchozí. Při znalosti těchto proměnných může program pokračovat, dalším krokem je generování souboru náhodných dat o normálním rozdělení o velikosti čísla uloženého v proměnné *VelSouboru*. Tento proces je realizován pomocí příkazu „randn“, který soubor hodnot uložil jako pole o zvoleném počtu náhodných čísel. Program má nyní vygenerován soubor dat, tudíž z něho můžeme vypočítat rozptyl a střední hodnotu. Pro výpočet těchto statistických hodnot bylo použito příkazů „mean“ (pro střední hodnotu) a „var“ (pro rozptyl). Hodnoty byly uloženy do proměnných *StrHod* a *Rozptyl* a vypsány do okna programu (Obr.11).



Střední hodnota
0.00236517

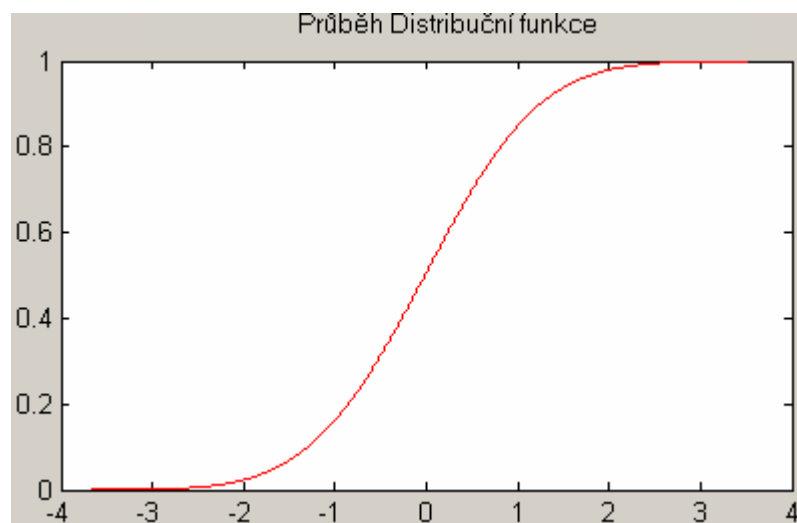
Rozptyl
0.96483

Obr. 11: Příklad Výpisu střední hodnoty a rozptylu

Proměnné i samotná náhodná data musela být uložena kvůli potřebě čtení těchto dat ve funkci která je spouštěna druhým tlačítkem. Funkce *pushbutton2_Callback* na závěr

vykreslí histogram četnosti pomocí příkazu „hist“, který má dva vstupní parametry a to soubor dat a počet intervalů. Histogram četnosti je vykreslen do horního grafu.

Další funkcí je *pushbutton3_Callback*. Tato funkce je aktivována stiskem tlačítkem „Generuj průběh Distribuční funkce“, zobrazeném na obr.10. Tato funkce už podle názvu tlačítka má za úkol vykreslit distribuční funkci pro soubor dat, který byl vygenerován stiskem prvního tlačítka. Funkce musí nejprve načíst hodnoty uložené při stisku předchozího tlačítka, toto je provedeno příkazem „getappdata“. Následně se už může počítat samotná distribuční funkce, která je počítána příkazem „normcdf“, příklad je uveden na Obr.12.



Obr. 12: Příklad vykreslení distribuční funkce

Součástí programu je také položka Konec v dialogovém menu. Po výběru této položky se program dotáže jestli chcete program opravdu zavřít a po potvrzení program ukončí.

Účelem tohoto programu byla jednoduchá demonstrace závislosti velikosti souboru náhodných dat na hodnotách jednotlivých statistických charakteristik. Tento program názorně demonstruje dopad elementu náhody jak na histogramu četnosti, tak na distribuční funkci. Můžeme také sledovat závislosti střední hodnoty resp. rozptylu na tvaru jak histogramu tak distribuční funkce.

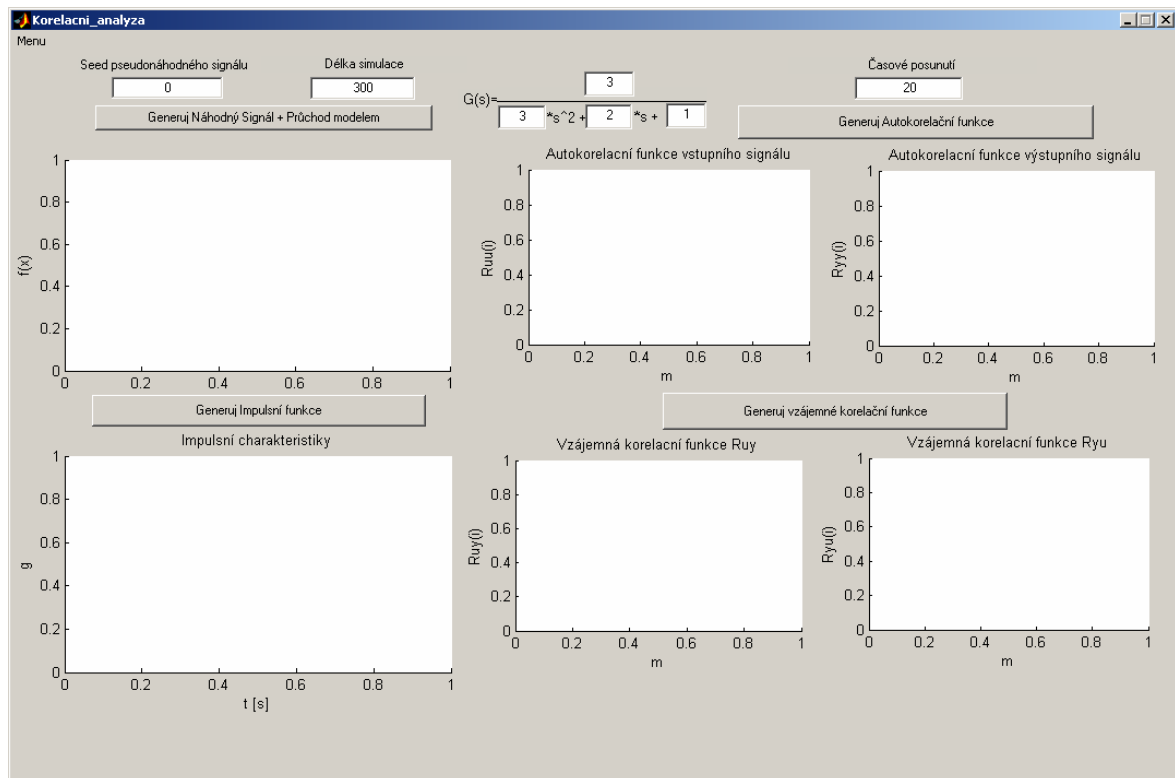
5 VÝPOČET KORELAČNÍCH FUNKCÍ A KORELAČNÍ ANALÝZA

Pro názornou demonstraci těchto metod bylo vytvořeno v MATLABu GUI za použití rozhraní GUIDE. Tento program vygeneruje náhodný signál, který projde soustavou druhého řádu, přičemž si parametry této soustavy volí sám uživatel. Tato část programu je realizována pomocí nástroje MATLABu – Simulink. Po výpočtu vstupního a výstupního signálu se vypočítají autokorelační a vzájemné korelační funkce, ze kterých se následně identifikuje soustava zadaná uživatelem. Samotná identifikace je zpracována pomocí korelační analýzy a výsledek identifikace je impulsní charakteristika, která je vykreslena s reálnou charakteristikou v jednom grafu.

5.1 Popis programu

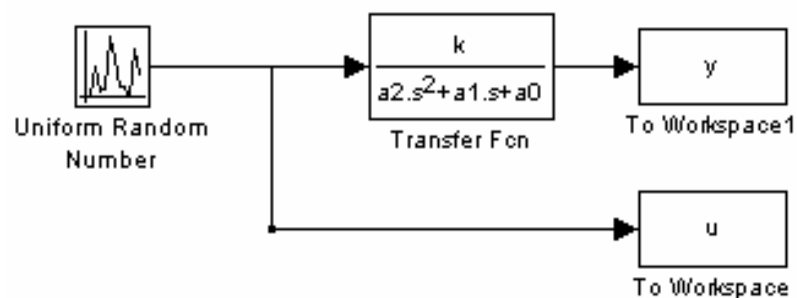
Program se spouští souborem „inicializace.m“, který zajišťuje deklaraci globálních proměnných kvůli nastavení vstupních parametrů uživatelem v Simulinku. Po této deklaraci je souborem inicializace.m spuštěn hlavní soubor „Korelacni_analyza.m“ ve kterém se nachází celé jádro programu.

Při spuštění hlavního souboru inicializačním programem se objeví okno samotného programu, ve kterém jsou jak zadávány uživatelem parametry, tak vykresleny všechny funkce vypočítané programem. Okno programu se skládá s grafů kde jsou vykresleny průběhy vstupu a výstupu vygenerovaných v Simulinku, několik grafů pro vykreslení korelačních funkcí a jeden graf pro porovnání výsledků výpočtu korelační analýzy. Zadávání dat uživatelem je řešeno pomocí modulů edit. Ihned po spuštění okna jsou popsány osy grafů a jejich názvy. Tento proces je realizován ve funkci *Korelacni_analyza_OpeningFcn*, která je spuštěna pouze jednou a to právě pro inicializaci okna.



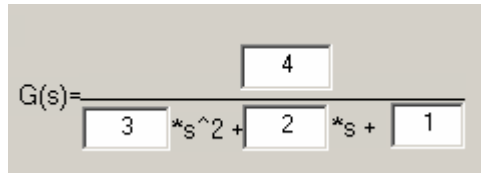
Obr. 13: Okno programu po spuštění

Výpočty a simulace se spouští při stisku daného tlačítka. Jsou realizovány ve funkci, která je spuštěna právě stiskem daného tlačítka. Funkce `pushbutton1_Callback` je volána po stisku tlačítka „Generuj Náhodný Signál + průchod modelem“. Tato funkce má za úkol vygenerovat náhodný signál, který následně projde soustavou 2. řádu, za uživatelem zadaných parametrů. Funkce nejprve načte parametry zadané uživatelem a tyto hodnoty následně testuje kvůli chybnému zadání uživatele. Následně je spuštěno Simulinkové schéma „korel.mdl“, které je zobrazeno na Obr. 14., příkazem „sim“ ve kterém je realizováno generování náhodného signálu a jeho průchod modelem.



Obr. 14: Schéma korel.mdl z programu MATLAB Simulink

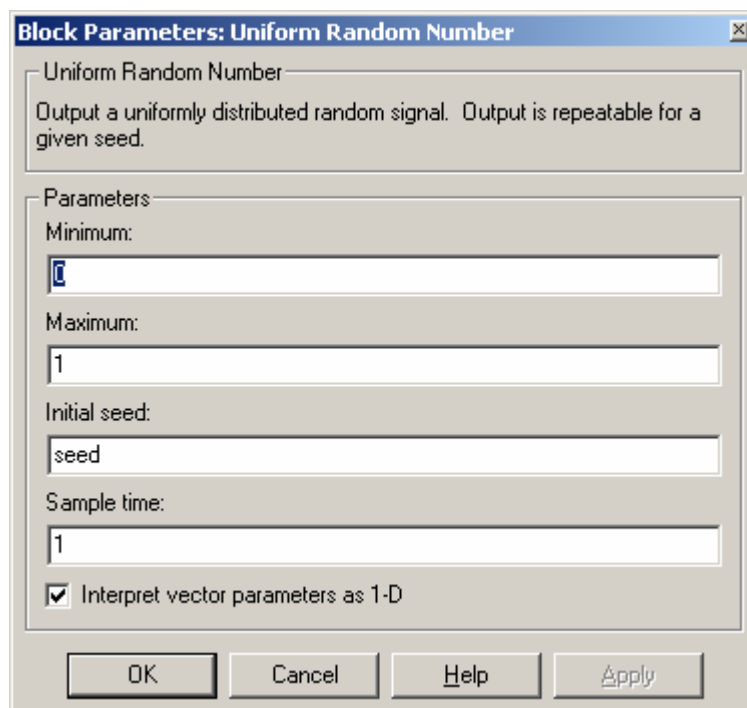
Parametry k , a_2 , a_1 , a_0 , které vidíme v bloku „Transfer Fcn“ na Obr.14, určují koeficienty soustavy druhého řádu. Tyto parametry jsou zadávány uživatelem jako hodnoty v $G(s)$ zobrazené na Obr. 15



$$G(s) = \frac{4}{3s^2 + 2s + 1}$$

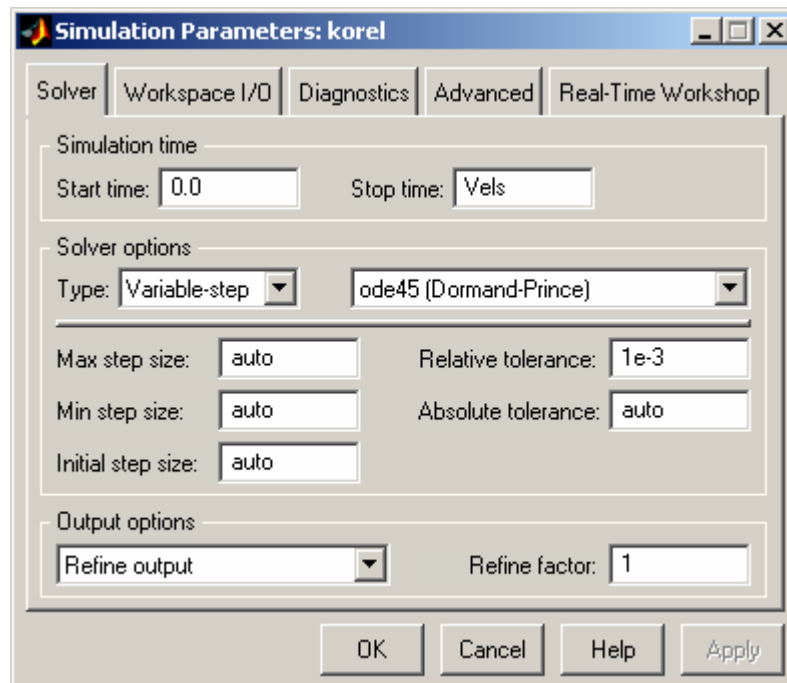
Obr. 15: Zadávání parametrů k , a_2 , a_1 , a_0

Další hodnoty, které jsou zadávány uživatelem jsou seed pseudonáhodného signálu, a délka simulace. Seed pseudonáhodného signálu určuje generování náhodných čísel. Pokud toto číslo bude stejné, generovaný pseudonáhodný signál bude také stejný. Zadávání tohoto čísla je zde umístěno z důvodu možnosti opakovaného výpočtu stejného příkladu za použití stejného signálu. Zadávání seedu v Simulinku je realizováno v bloku „Uniform Random Number“ jako načtení proměnné *seed*, která byla uložena z uživatelského okna před spuštěním Simulinkového schématu. V tomto bloku je pevně zvoleno minimum, maximum a vzorkovací perioda pseudonáhodného signálu Obr. 16.



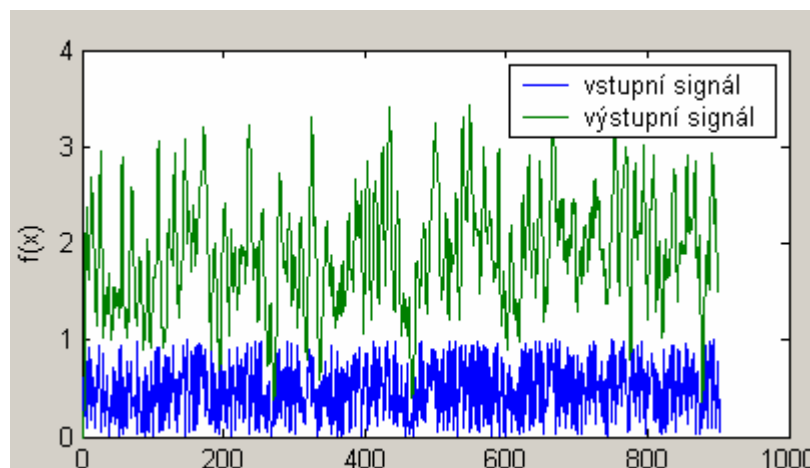
Obr. 16: Parametry bloku Uniform Random Number

Délka simulace je zadávána v menu „Simulation – Simulation Parameters“, zobrazené na Obr.17, jako proměnná *Vels* v nastavení parametru „Stop time“. Tato proměnná je zadávána uživatelem a načítána před spuštěním samotného schématu.



Obr. 17: Parametry Simulace

Následně proběhne samotná simulace a vstup a výstup jsou uloženy do proměnných u a y . Uložení je realizováno bloky „To Workspace“ v Simulinkovém schématu zobrazeném na Obr. 14. Tyto hodnoty jsou následně vykresleny v okně programu v jednom grafu, který je zobrazen na Obr.17. V tomto grafu je vstupní signál vykreslen modře a výstupní signál zeleně. Na tomto grafu je názorně zobrazena závislost zvolených koeficientů soustavy na vstupním signálu.



Obr. 18: Vykreslení vstupního a výstupního signálu

Po vykreslení se proměnné a simulovaná data uloží pomocí příkazu „setappdata“ pro možnost jejich použití v dalších funkcích.

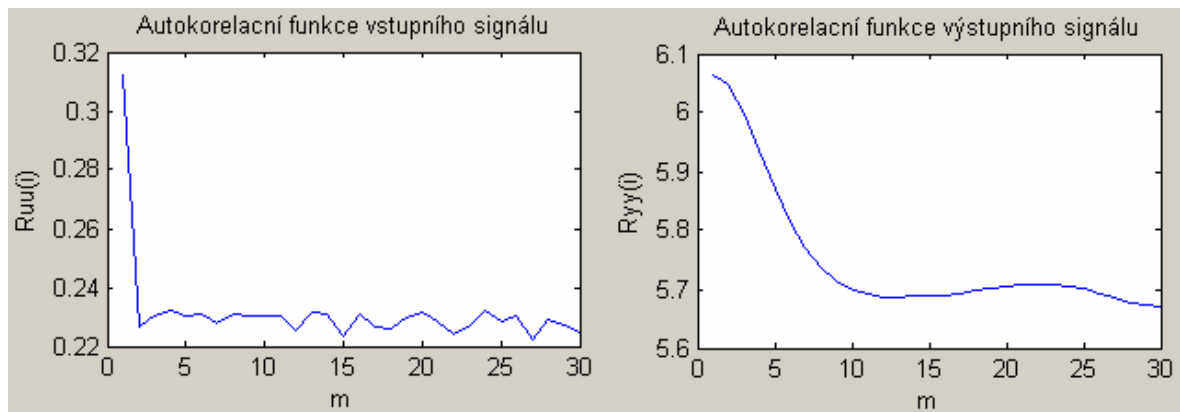
Další funkcí programu je výpočet a následné vykreslení autokorelačních funkcí. Tato část programu je spouštěna stiskem tlačítka „Generuj Autokorelační funkce“. Před generováním autokorelačních funkcí je nutné mít vygenerován náhodný signál, který již prošel filtrem. Proto před stisknutím tlačítka pro autokorelační funkce, je nutné aby již byl generován signál, který generuje funkce *pushbutton1_Callback*, spouštěná stiskem tlačítka „Generuj Náhodný Signál + průchod modelem“, popsaná výše. Po splnění těchto podmínek můžeme pokračovat ve výpočtu autokorelačních funkcí.

Samotný výpočet je obsažen ve funkci *pushbutton3_Callback*. Funkce nejprve načte data uložené předchozí funkcí a časové posunutí, které je zadáváno uživatelem. Poté program přejde k výpočtu korelačních funkcí. Cyklus pro výpočet autokorelační funkce je vychází ze vztahu pro výpočet autokorelační funkce (18), opakované pro různá časová posunutí. Výsledný cyklus je ve tvaru :

```
for i=1:m
    n=data.Vels-i;
    for k=1:n
        pm=pm+(data.u(k)*data.u(k+i-1));
    end
    ruu(i)=pm/(data.Vels-i);
    pm=0;
end
```

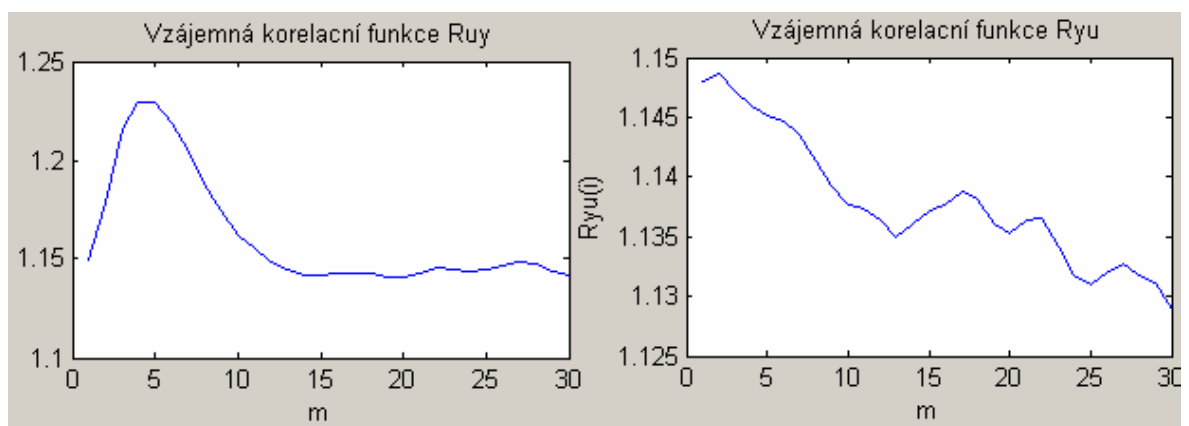
Kde proměnná *m* je časové posunutí, *data.Vels* délka simulace, *data.u* jsou simulované vstupní hodnoty a *ruu* je pole hodnot které obsahuje jednotlivé hodnoty autokorelační funkce. Jako příklad byl uveden cyklus pro výpočet autokorelační funkce vstupního signálu. Součástí funkce *pushbutton3_Callback* je také výpočet autokorelační funkce výstupního signálu. Tato funkce je ale velmi obdobná, pouze jsou místo vstupních simulovaných dat ve funkci použity data výstupní.

Po vypočítání autokorelačních funkcí jsou tyto funkce uloženy pro další funkce a vykresleny do grafů umístěných pod tlačítkem Obr.18.



Obr. 19: Vykreslení autokorelačních funkcí náhodného procesu

Tlačítko „Generuj vzájemné korelační funkce“ po stisku aktivuje funkci `pushbutton4_Callback`. Tato funkce už podle názvu tlačítka, kterým je aktivována, počítá vzájemné korelační funkce náhodného procesu, které následně vykresluje do grafů. Po stisku tlačítka se načtou data uložené jinými funkcemi, a načte se proměnná, která určuje časový posun m . Řešení samotného výpočtu vychází z rovnice pro výpočet vzájemné diskretní korelační funkce (29) a je velmi obdobné jako u výpočtu autokorelačních funkcí. Jediným rozdílem mezi těmito cykly je použití vstupního i výstupního signálu. Výsledkem jsou dvě vzájemné korelační funkce R_{uy} a R_{yu} , které jsou následně vykresleny do grafů umístěných pod tlačítkem a příklad jejich vykreslení je zobrazen na Obr.19.



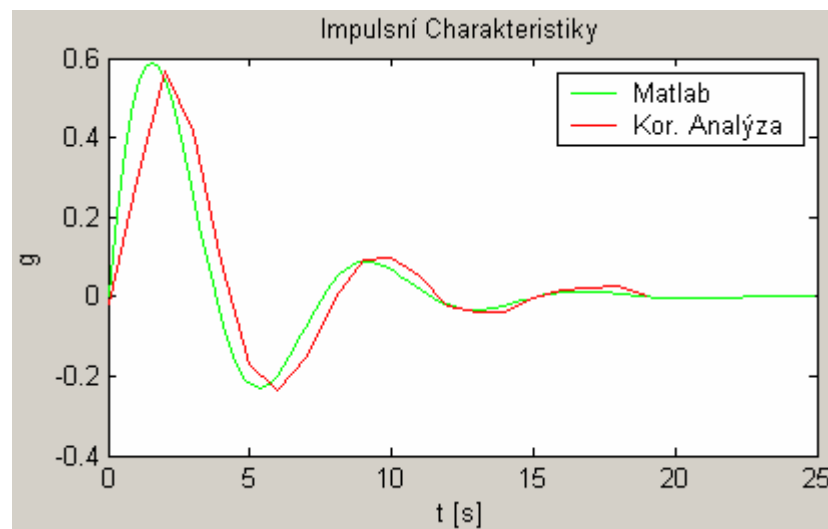
Obr. 20: Vykreslení vzájemných korelačních funkcí náhodného procesu

Poslední funkcí je *pushbutton5_Callback*, která je aktivována při stisku tlačítka „Generuj Impulsní funkce“. V této funkci je obsažen výpočet impulsní funkce pomocí korelační analýzy resp. numerický výpočet váhové funkce. Po načtení dat uložených předchozími funkcemi následuje samotný výpočet. Nejprve byla sestavena podle (40) matice R . Tato matice byla sestavena z hodnot autokorelační funkce vstupního signálu. Sestavení matice bylo v MATLABu realizováno následovně:

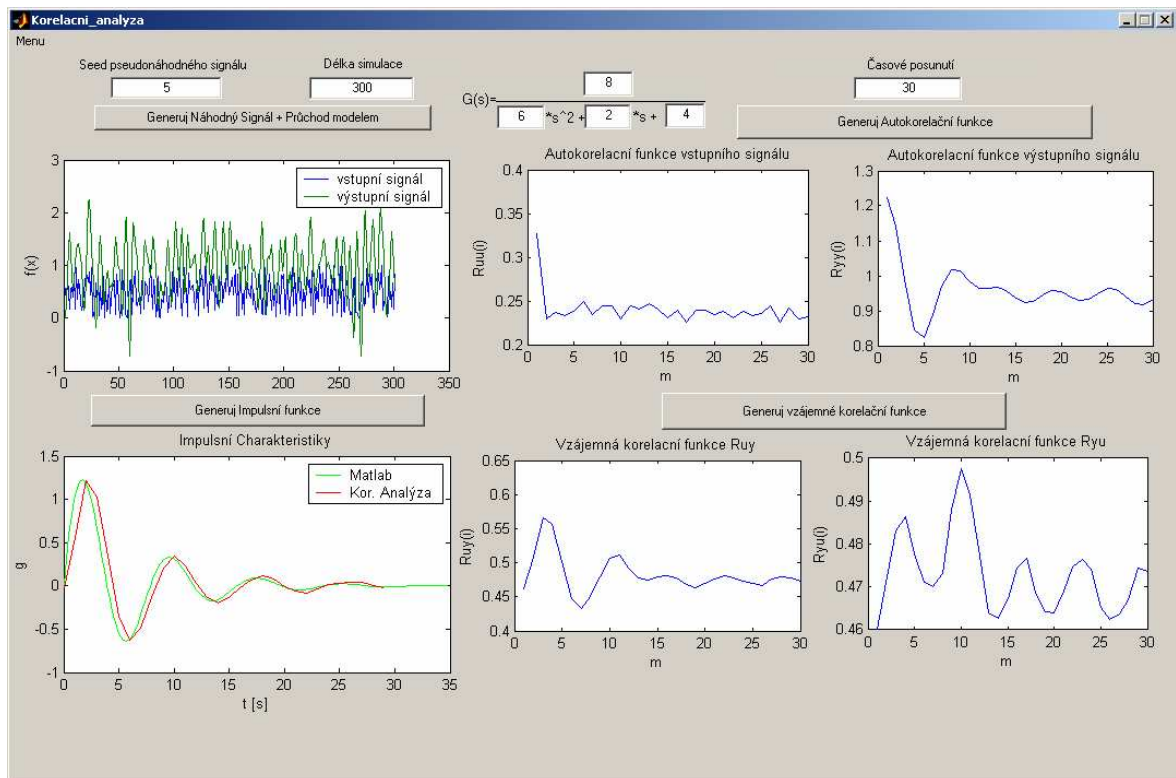
```
for i = 1:data.m
    pmcn = -1*(i-1);
    for j = 1:data.m
        R(i,j) = data.ruu(abs(pmcn)+1);
        pmcn = pmcn+1;
    end
end
```

kde m je časový posun a *data.ruu* jsou hodnoty autokorelační funkce vstupního signálu

Po sestavení matice R funkce sestaví podle (40) matici r , která se skládá z hodnot vzájemné korelační funkce R_{uy} . Při znalosti těchto dvou matic se může vypočítat impulsní funkce podle vztahu (41). Výsledkem bude přibližná impulsní funkce vypočítaná pomocí korelační analýzy. Tato funkce je následně vykreslena v jednom grafu společně s funkcí vypočítanou z uživatelem zadaného přenosu pomocí příkazu *step*. Příklad porovnání těchto funkcí je zobrazen na Obr.20.



Obr. 21: Porovnání impulsních charakteristik



Obr. 22: Okno programu po provedení výpočtů

Na Obr. 21 vidíme příklad okna programu, ve kterém byly vykresleny grafy. Pro vykreslení těchto grafů byly použity následující parametry:

- Seed pseudonáhodného signálu = 5
- Délka simulace = 300
- Přenos byl zadán jako $G(s) = \frac{8}{6s^2 + 2s + 4}$
- Časové posunutí korelačních funkcí $\tau = 30$

Za použití těchto parametrů byly vypočítány a následně vykresleny průběhy vstupního a výstupního signálu, průběhy autokorelačních a vzájemných korelačních funkcí a srovnání impulsních charakteristiky získané pomocí korelační analýzy s reálnou charakteristikou.

Program pro výpočet korelačních funkcí a korelační analýzy v první řadě graficky demonstruje průběh náhodného signálu modelem, který si uživatel sám zadá. Tato skutečnost nám může přiblížit jakou mají závislost koeficienty přenosu na výsledný signál. V druhé části programu, kde se vykreslují autokorelační a vzájemné korelační funkce, může uživatel získat představu o průběhu těchto funkcí při měnění parametrů měření. Poslední část programu demonstruje závislost impulsní funkce vytvořené pomocí korelační

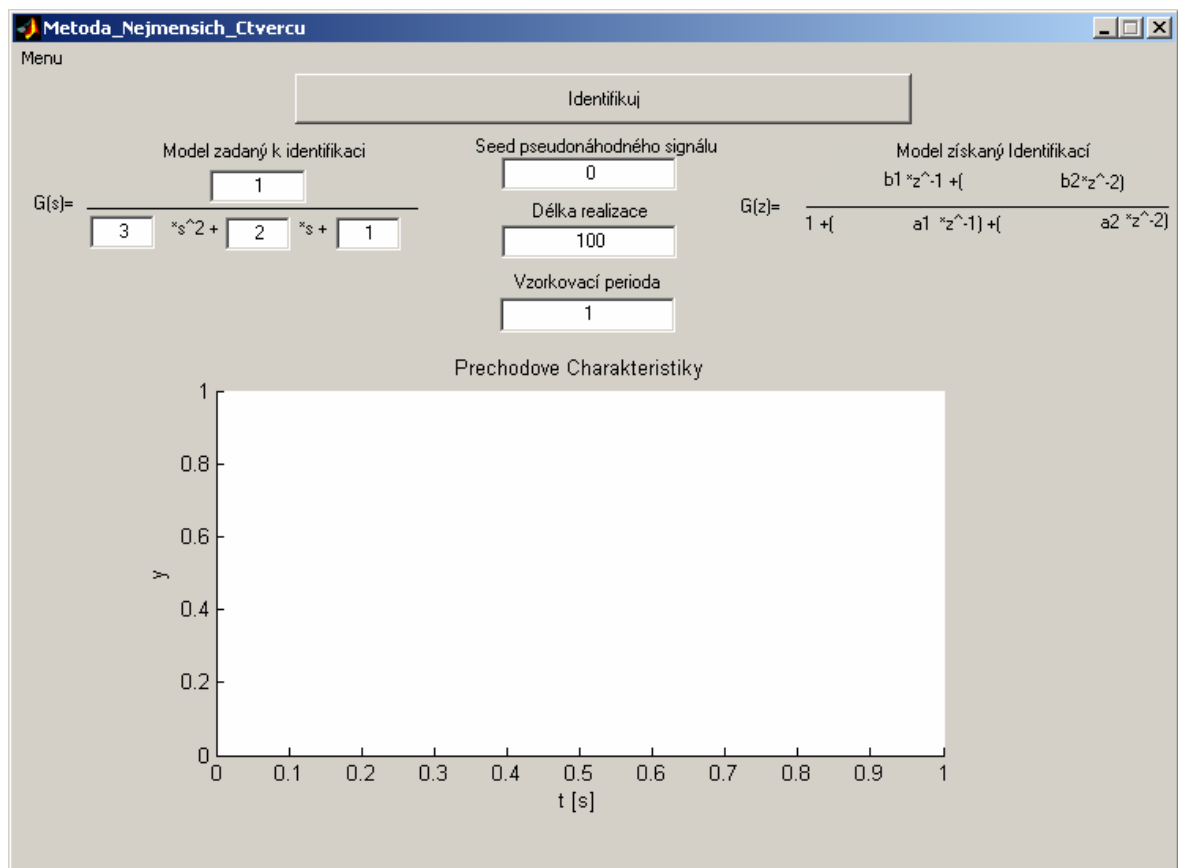
analýzy na zvolených parametrech. Vypočítaná funkce je pro možnost porovnání vykreslena v jednom grafu zároveň s impulsní funkcí vygenerovanou MATLABem.

6 METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

Pro demonstraci odhadu parametrů modelu byl vytvořen program, který jak dané parametry odhaduje, tak vykresluje přechodovou funkci vzniklou odhadem a porovnává ji s přechodovou funkcí generovanou MATLABem. Identifikovaný model je vypsán jako ve formě diskrétního přenosu.

6.1 Popis programu

Spouštění programu zajišťuje soubor „inicializace.m“, který má obdobně jako u předchozího programu za úkol deklarovat globální proměnné, které jsou nutné pro použití v Simulinku jako parametry simulace. Po deklaraci inicializační soubor volá soubor „Metoda_Nejmensich_Ctvercu.m“, který je hlavním souborem programu. Následuje spuštění grafického uživatelského rozhraní, zobrazeném na Obr. 22, ve kterém se zadávají veškeré uživatelské parametry a jsou zobrazeny výsledky výpočtu.

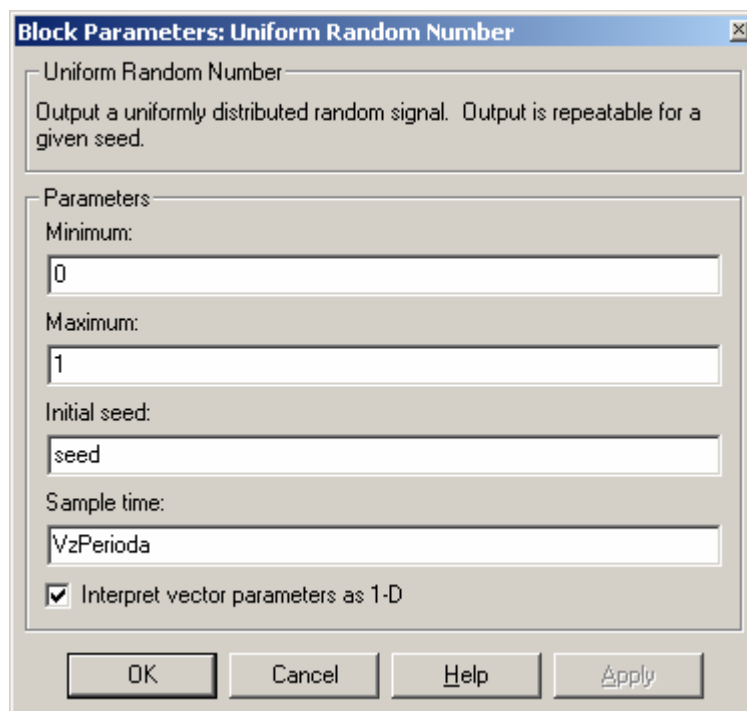


Obr. 23: Okno programu „Metoda_Nejmensich_Ctvercu“ po spuštění

Toto okno se skládá z objektů pro zadávání parametrů uživatelem, které jsou realizovány pomocí editačních oken edit. Tímto způsobem jsou zadávány koeficienty modelu druhého

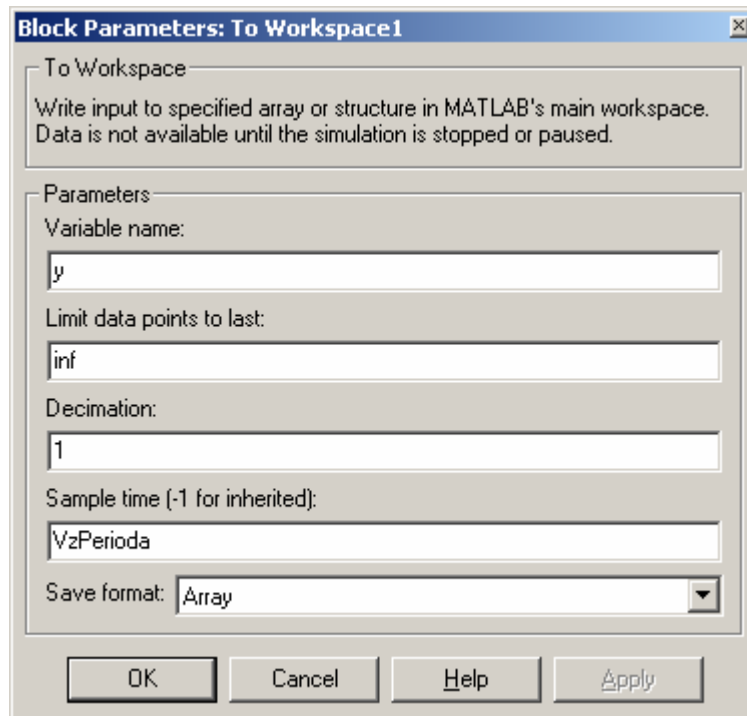
řádu určeného k identifikaci, hodnota seedu pseudonáhodného signálu, délka realizace simulace a vzorkovací perioda. Tyto hodnoty jsou načítány až po stisku tlačítka „Identifikuj“. Dále se zde nachází objekt určený k výpisu diskrétního přenosu získaného identifikaci realizovaný objekty static text. Nepřehlédnutelnou součástí je také graf, ve kterém se srovnává přechodová charakteristika získaná pomocí metody nejmenších čtverců s charakteristikou vypočítanou ze zadaných koeficientů spojitého přenosu pomocí příkazu `step`.

Při stisku tlačítka „Identifikuj“ identifikujeme zadanou soustavu pomocí jednorázové metody nejmenších čtverců a porovnání přechodových charakteristik. Po kliknutí na toto tlačítko se spustí funkce `pushbutton1_Callback`, která nejprve načte hodnoty proměnných zadaných uživatelem a otestuje je kvůli zadání špatného znaku. Při zjištění chyby se hodnota proměnné vrátí na svou původní hodnotu. Funkce po načtení proměnných pokračuje spuštěním Simulinkového schématu „`schema.mdl`“. Schéma je realizováno obdobně jako u předchozího programu, které je zobrazeno na Obr. 14. Rozdílem je nastavení bloku „Uniform Random Number“ je kromě seedu nastavována také perioda vzorkování, zobrazená na Obr. 23, jako proměnná `VzPerioda` v nastavení parametru „Sample time“.



Obr. 24: Nastavení Bloku „Uniform Random Number“

Druhou změnou je nastavení bloku, který ukládá generované data do proměnné y resp. x „To Workspace“, kde musela být změněna také vzorkovací perioda. Nastavení tohoto bloku je zobrazeno na Obr. 24, kde vidíme příklad pro výstupní signál. Ukládání vstupních dat je realizováno obdobně.



Obr. 25: Nastavení Bloku „To Workspace“

Po získání vstupních a výstupních dat program pokračuje v identifikaci parametrů diskrétního modelu pomocí jednorázové metody nejmenších čtverců. Prvním krokem je sestavení matice F . Cyklus pro sestavení je sestaven na základě znalosti vztahu (55). Přepis tohoto vztahu do MATLABu byl realizován následovně:

```
for r=1:length(y)-2
    F(r,1)=(-1)*y(r+2-1);
    F(r,2)=(-1)*y(r+2-2);
    F(r,3)=u(r+2-1);
    F(r,4)=u(r+2-2);
end
```

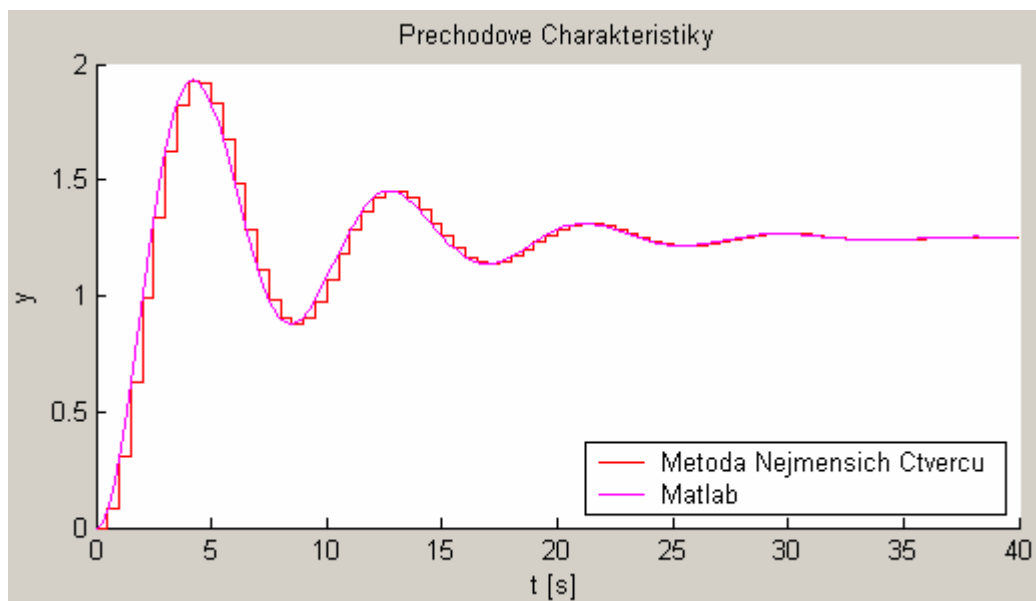
kde y a u jsou vstupní resp. výstupní data. Pro výpočet odhadu koeficientů podle vztahu (58) je nutné upravit vektor výstupních dat tak, aby odpovídal zadané velikosti podle vztahu (56). Model zvolený pro identifikaci je druhého řádu, proto musely být odstraněny

první dvě hodnoty. Program vypočítané koeficienty vypíše do okna programu ve tvaru, který je uveden ve vztahu (59) Obr. 25.

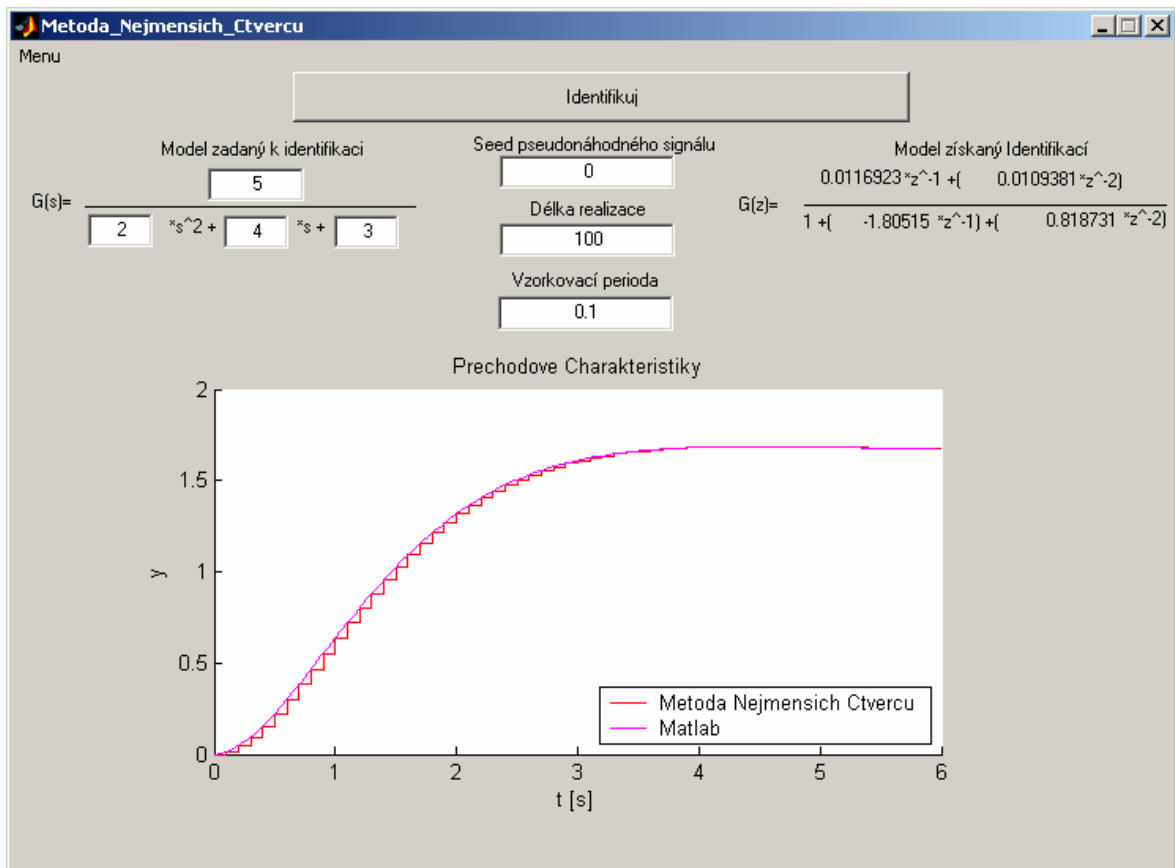
$$G(z) = \frac{0.00512996 * z^{-1} + (0.00392737 * z^{-2})}{1 + (-1.34064 * z^{-1}) + (0.449331 * z^{-2})}$$

Obr. 26: Zobrazení získaného přenosu

Diskrétní přechodová charakteristika ze získaného přenosu je vykreslena do grafu společně se spojitou přechodovou charakteristikou, která byla získána pomocí příkazu *step* z přenosu zadaného uživatelem. Pro výpočet diskrétní přechodové charakteristiky bylo nejprve nutné vytvořit v MATLABu objekt „Transfer Function“ pomocí příkazu *tf*, přičemž jako parametry byly zadány koeficienty získané výpočtem a zadaná vzorkovací perioda. Z takto vytvořené funkce byly vypočítány hodnoty přechodové charakteristiky pomocí příkazu *step*, které byly následně vykresleny pomocí funkce *stairs*. Porovnání přechodových charakteristik je zobrazeno na Obr. 25.



Obr. 27: Porovnání přechodových charakteristik



Obr. 28: Okno programu po identifikaci systému

Parametry zadané u příkladu ukázkového výpočtu, zobrazeném na Obr. 27, jsou následující:

- Seed pseudonáhodného signálu = 0
- Délka simulace = 100
- Přenos byl zadán jako $G(s) = \frac{5}{2s^2 + 4s + 3}$
- Perioda vzorkování $T = 0.1$

Za použití těchto parametrů byl vypočítán tvar diskrétního přenosu pro zvolenou periodu vzorkování pomocí jednorázové metody nejmenších čtverců. Průběh této funkce je vykreslen v grafu společně v grafu s reálnou přechodovou charakteristikou.

Tento program slouží k názorné ukázkě odhadu koeficientů modelu pomocí jednorázové metody nejmenších čtverců. Uživatel může sledovat závislost vypočítané diskrétní přechodové funkce na zvolené periodě vzorkování a na parametrech spojitého přenosu.

Program také porovnáním obou přechodových charakteristik demonstruje vhodnost zvolené periody vzorkování.

ZÁVĚR

Výsledkem této bakalářské práce jsou programy, realizované ve výpočetním systému MATLAB, ve formě grafického uživatelského rozhraní, které demonstrují základní statistické vlastnosti náhodných procesů a metody jejich identifikace. Programy jsou řešeny tak, aby uživateli umožnily jednoduchou a rychlou kontrolu vypočítaných příkladů.

Programy byly řešeny jako grafické uživatelské rozhraní (GUI) v prostředí MATLAB, za použití nástroje GUIDE. Při vypracování těchto programů jsem si prohloubil své zkušenosti s prací v prostředí MATLAB, hlavně vytváření GUI pomocí GUIDE. Volbu vypracování pomocí nástroje GUIDE, namísto vytvoření GUI v MATLAB editoru, zpětně považuji za horší řešení kvůli problémům, které se při psaní programů vyskytly.

První vytvořený program je zaměřen na demonstraci závislosti velikosti souboru náhodných dat na statistických charakteristikách. Kromě vyčíslení směrodatné odchylky a rozptylu je vykreslen i histogram četnosti resp. distribuční funkce. V dalším programu je řešeno vykreslování autokorelačních a vzájemných korelačních funkcí a následná demonstrace výsledku korelační analýzy ve formě impulsní charakteristiky. Tento program je vhodný pro rychlou kontrolu správnosti vypracovaných protokolů nebo jiných příkladů. Poslední program je určen k výpočtu diskrétního přenosu pomocí jednorázové metody nejmenších čtverců a jeho následného porovnání se zadaným spojitým přenosem za použití přechodových charakteristik.

Velkým přínosem pro mě bylo seznámení se s předmětem modelování a identifikace náhodných procesů, se kterým jsem neměl předešlé zkušenosti a který mě přišel velmi zajímavý. Práce na programech a jejich následné ladění mě pomohlo pochopit podstatu řešeného problému, která mě při studiu teoretické části unikala. Při pronikání hloub do problematiky tohoto předmětu jsem dostal několik nápadů jak moji práci rozšířit, resp. modifikovat vytvořené programy a vytvořit komplexní program, který by uživateli poskytl více možností práce s náhodným signálem.

ZÁVĚR V ANGLIČTINĚ

Result of this bachelor thesis are programs, realized in computation system of MATLAB, in form of graphic user interface, which are demonstrating basic features of random processes and their identification methods. The programs are solved in such way, to allow user to simple and fast check of calculated examples.

Programs were solved as graphis user interface (GUI) in MATLAB, with use of tool GUIDE. I have intensified my skills with MATLAB during elaboration those programs, especially creating GUI using tool GUIDE. The choice of elaboration using GUIDE, instead creation of GUI in MATLAB editor, retroactively consider to be worse solution through problems, whitch occurred during writing of those programs.

The first created a program focused on demonstrating the dependence of size random data set on statistical characteristics. In addition to quantifying the standard deviation and variance is plotted as a histogram or distribution function. The next program is solved by plotting the autocorrelation and cross correlation functions and the subsequent demonstration of the result of correlation analysis in the form of an impulse response. This program is suitable for quick checking developed protocols and other examples. The last program is designed to calculate the discrete transfer function using a simple method of least squares and his subsequent comparison with a specified continuous transfer function using transient characteristics.

A major benefit for me was familiar with the subject of modeling and identification of random processes, with whom I had't previous experience and which i find very interesting. Work on programs and their subsequent tuning helped me understand the essence of the problem, which I am studying the theoretical part, elusive. When penetrating deeper into the issue of course I got a few ideas on how to expand my work, resp. modify programs, and create a comprehensive program that would provide more options for working with random signals to user.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] Noskievič, P: Modelování a identifikace systémů, Montanex, 1999
- [2] Bobál, V.: Identifikace systémů, Univerzita Tomáše Bati, 2009
- [3] Fikar, M., Mikleš J.: Modelovanie, identifikácia a riadenie procesov II., STU Bratislava, 2004
- [4] Nelles, O.: Nonlinear system identification, Springer Verlag, 2001
- [5] Ljung, L.: System identification: theory for users, Prentice Hall,

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

| | |
|------------|--|
| u | Vstupní signál |
| y | Výstupní signál |
| μ | Střední hodnota |
| σ^2 | Rozptyl |
| τ | Časové posunutí |
| R_{xx} | Autokorelační funkce |
| R_{xy} | Vzájemná korelační funkce |
| C_{xx} | Autokovarianční funkce |
| C_{xy} | Vzájemná kovarianční funkce |
| g | Váhová funkce |
| Θ | Vektor parametrů |
| $G(s)$ | Přenos ve spojitě verzi |
| $G(z)$ | Přenos v diskrétní verzi |
| GUI | Grafické uživatelské rozhraní |
| GUIDE | Nástroj pro tvorbu grafických uživatelských rozhraní |

SEZNAM OBRÁZKŮ

| | |
|---|----|
| <i>Obr. 1 : Grafické znázornění směrodatné odchylky</i> | 11 |
| <i>Obr. 2: Náhodný proces $X(t)$ s několika jeho realizacemi $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$.....</i> | 12 |
| <i>Obr. 3: Příklad histogramů četnosti pro rovnoměrné rozdělení (vlevo) a normální rozdělení (vpravo).....</i> | 13 |
| <i>Obr. 4: Typický průběh spojité distribuční funkce (vlevo) a diskrétní funkce (vpravo)</i> | 14 |
| <i>Obr. 5: Vyšetření distribuční funkce pro rostoucí počet realizací náhodného procesu a její vyhodnocení z dostatečně dlouhého průběhu realizace</i> | 15 |
| <i>Obr. 6: Výpočet autokorelační funkce – součin časově posunutých hodnot</i> | 18 |
| <i>Obr. 7: Obecný průběh autokorelační funkce</i> | 19 |
| <i>Obr. 8: Typický průběh autokorelační funkce ze vztahu (25)</i> | 20 |
| <i>Obr. 9: Průběh autokorelační a autokovarianční funkce.....</i> | 21 |
| <i>Obr. 10: Hlavní okno programu po spuštění.....</i> | 27 |
| <i>Obr. 11: Příklad Výpisu střední hodnoty a rozptylu</i> | 28 |
| <i>Obr. 12: Příklad vykreslení distribuční funkce</i> | 29 |
| <i>Obr. 13: Okno programu po spuštění.....</i> | 31 |
| <i>Obr. 14: Schéma korel.mdl z programu MATLAB Simulink</i> | 31 |
| <i>Obr. 15: Zadávání parametrů k, a_2, a_1, a_0.....</i> | 32 |
| <i>Obr. 16: Parametry bloku Uniform Random Number</i> | 32 |
| <i>Obr. 17: Parametry Simulace</i> | 33 |
| <i>Obr. 18: Vykreslení vstupního a výstupního signálu.....</i> | 33 |
| <i>Obr. 19: Vykreslení autokorelačních funkcí náhodného procesu</i> | 35 |
| <i>Obr. 20: Vykreslení vzájemných korelačních funkcí náhodného procesu</i> | 35 |
| <i>Obr. 21: Porovnání impulsních charakteristik</i> | 36 |
| <i>Obr. 22: Okno programu po provedení výpočtů.....</i> | 37 |
| <i>Obr. 23: Okno programu „Metoda_Nejmensich_Ctvercu“ po spuštění.....</i> | 39 |
| <i>Obr. 24: Nastavení Bloku „Uniform Random Number“</i> | 40 |
| <i>Obr. 25: Nastavení Bloku „To Workspace“</i> | 41 |
| <i>Obr. 26: Zobrazení získaného přenosu</i> | 42 |
| <i>Obr. 27: Porovnání přechodových charakteristik</i> | 42 |
| <i>Obr. 28: Okno programu po identifikaci systému</i> | 43 |

SEZNAM PŘÍLOH

P1: přenosné médium CD s prací ve formátu PDF, vytvořenými programy a jejich zdrojovými kódy