

Inovace výuky předmětu Matematika II na FAI UTB ve Zlíně elektronickou podporou obsahující ukázky řešení v prostředí Mathematica

Inovation of education of Mathematics II subject on FAI TBU in
Zlin by electronic support containing examples of solving selected
problems in Mathematica environment

Stanislav Talaš



Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

Fakulta aplikované informatiky

akademický rok: 2010/2011

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Stanislav TALAŠ**

Osobní číslo: **A08112**

Studijní program: **B 3902 Inženýrská informatika**

Studijní obor: **Informační a řídicí technologie**

Téma práce: **Inovace výuky předmětu Matematika II na FAI UTB ve Zlíně elektronickou podporou obsahující ukázky řešení vybraných úloh v prostředí Mathematica**

Zásady pro vypracování:

1. Zpracujte příručku obsahující v prostředí Mathematica řešení vybraných nejzákladnějších úloh z předmětu Matematika II.
2. Zařadte do příručky variantní situace grafického zobrazení funkcí dvou proměnných, respektive funkcí tří proměnných definovaných implicitně.
3. Navrhněte do příručky ukázky řešení úloh z diferenciálního počtu funkcí více proměnných.
4. Navrhněte do příručky ukázky řešení úloh z integrálního počtu funkcí více proměnných.
5. Připravte, popřípadě realizujte zpřístupnění vytvořené příručky ve webovém rozhraní.

Rozsah bakalářské práce:

Rozsah příloh:

Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

1. DOBRAKOVÁ, Jana; KOVÁČOVÁ, Monika; ZÁHONOVÁ, Viera. **Mathematica 5.2 :
tréninkové materiály**. Bratislava : Slovenská technická univerzita v Bratislavě,
2008. 277 s. ISBN 80-969562-2-1.
2. ELKAN. **Mathematica [online]**. 2011 [cit. 2011-02-02]. Dostupné z WWW:
[<http://www.mathematica.cz/>].
3. FIALKA, Miloslav. **Diferenciální počet funkcí více proměnných s aplikacemi**. vydání
třetí. [s.l.] : Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2008. 145 s. ISBN
978-80-7318-665-4.
4. FIALKA, Miloslav. **Integrální počet funkcí více proměnných s aplikacemi**. vydání
třetí. [s.l.] : Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2008. 103 s. ISBN
978-80-7318-668-5.
5. CHRAMCOV, Bronislav. **Základy práce v prostředí Mathematica**. Vyd. 2. Zlín :
Univerzita Tomáše Bati, 2006. 122 s. ISBN 80-7318-510-5.
6. Wolfram Research. **Wolfram [online]**. 2011 [cit. 2011-02-01]. Dostupné z WWW:
[<http://www.wolfram.com/>]

Vedoucí bakalářské práce:

RNDr. Miloslav Fialka, CSc.

Ústav matematiky

Datum zadání bakalářské práce:

25. února 2011

Termín odevzdání bakalářské práce:

7. června 2011

Ve Zlíně dne 25. února 2011

prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.

děkan



prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.

ředitel ústavu

ABSTRAKT

Cílem práce je sestavit stručnou elektronickou podporu – příručku obsahující v prostředí Mathematica řešení vybraných nejzákladnějších úloh z předmětu Matematika II pro studenty Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně, Fakulty aplikované informatiky, Fakulty technologické, s reálnou možností využití na Fakultě ekonomiky a managementu i na Fakultě logistiky a krizového řízení.

Do podpory zařadit variantní situace grafického zobrazení funkcí dvou proměnných, resp. funkcí tří proměnných definovaných implicitně, ukázky řešení úloh z diferenciálního a integrálního počtu funkcí více proměnných a připravit, popř. realizovat zpřístupnění vytvořené elektronické podpory ve webovském rozhraní.

Klíčová slova: Mathematica, diferenciální počet, integrální počet.

ABSTRACT

The goal of the thesis is to create a brief electronic support – a manual containing in environment of Mathematica solutions for the selected most basic tasks from Mathematics II for students of Tomas Bata University in Zlin, Faculty of Applied Informatics, Faculty of Technology, with real possibility of utilizing in Faculty of Management and Economics and Faculty of Logistics and Crisis management.

To involve into support variant situations of graphic display of functions of two variables, or functions of three variables defined implicate, demonstrations of solutions of tasks from differential and integral calculus of functions of multiple variables and prepare, or realize accesing of created electronic support on web interface.

Keywords: Mathematica, differential calculus, integral calculus.

Děkuji vedoucímu bakalářské práce RNDr. Miloslavu Fialkovi za pedagogickou a odbornou pomoc během vypracovávání bakalářské práce.

Prohlašuji, že

- beru na vědomí, že odevzdáním bakalářské práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb. o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších právních předpisů, bez ohledu na výsledek obhajoby;
- beru na vědomí, že bakalářská práce bude uložena v elektronické podobě v univerzitním informačním systému dostupná k prezenčnímu nahlédnutí, že jeden výtisk bakalářské práce bude uložen v příruční knihovně Fakulty aplikované informatiky Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně a jeden výtisk bude uložen u vedoucího práce;
- byl/a jsem seznámen/a s tím, že na moji bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších právních předpisů, zejm. § 35 odst. 3;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 1 autorského zákona má UTB ve Zlíně právo na uzavření licenční smlouvy o užití školního díla v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 2 a 3 autorského zákona mohu užít své dílo – bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití jen s předchozím písemným souhlasem Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše);
- beru na vědomí, že pokud bylo k vypracování bakalářské práce využito softwaru poskytnutého Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně nebo jinými subjekty pouze ke studijním a výzkumným účelům (tedy pouze k nekomerčnímu využití), nelze výsledky bakalářské práce využít ke komerčním účelům;
- beru na vědomí, že pokud je výstupem bakalářské práce jakýkoliv softwarový produkt, považují se za součást práce rovněž i zdrojové kódy, popř. soubory, ze kterých se projekt skládá. Neodevzdání této součásti může být důvodem k neobhájení práce.

Prohlašuji,

- že jsem na bakalářské práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval. V případě publikace výsledků budu uveden jako spoluautor.
- že odevzdaná verze bakalářské práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG jsou totožné.

Ve Zlíně

.....
podpis diplomanta

OBSAH

| | |
|--|-----------|
| ÚVOD..... | 9 |
| I TEORETICKÁ ČÁST | 10 |
| 1 SOFTWARE MATHEMATICA | 11 |
| 1.1 VZNIK A VÝVOJ | 11 |
| 1.2 UŽIVATELSKÉ PROSTŘEDÍ..... | 12 |
| 1.3 MATHEMATICA PLAYER | 13 |
| 2 MATEMATICKÉ DEFINICE | 15 |
| 2.1 VEKTOROVÝ SOUČIN | 15 |
| 2.2 PARCIÁLNÍ DERIVACE..... | 15 |
| 2.3 GRADIENT | 16 |
| 2.4 DIVERGENCE | 16 |
| 2.5 LAPLACEŮV OPERÁTOR | 17 |
| 2.6 ROTACE..... | 17 |
| 2.7 TAYLORŮV ROZVOJ | 18 |
| 2.8 RIEMANNŮV INTEGRÁL | 18 |
| II PRAKTICKÁ ČÁST..... | 19 |
| 3 DIFERENCIÁLNÍ POČET FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH | 20 |
| 3.1 VEKTOROVÁ ALGEBRA | 20 |
| 3.1.1 Vzdálenost bodů..... | 20 |
| 3.1.2 Úhel vektorů..... | 20 |
| 3.1.3 Součin vektorů | 22 |
| 3.2 LIMITA POSLOUPNOSTI BODŮ V EUKLIDOVSKÉM PROSTORU | 22 |
| 3.2.1 Limita funkce v bodě | 22 |
| 3.3 DEFINIČNÍ OBOR..... | 23 |
| 3.4 PARCIÁLNÍ DERIVACE..... | 26 |
| 3.4.1 Gradient..... | 28 |
| 3.4.2 Divergence | 29 |
| 3.4.3 Laplaceův operátor..... | 29 |
| 3.4.4 Rotace..... | 29 |
| 3.5 TAYLORŮV ROZVOJ | 30 |
| 3.6 EXTRÉMY FUNKCE..... | 30 |
| 3.7 DERIVACE V BODĚ..... | 33 |
| 4 INTEGRÁLNÍ POČET | 34 |
| 4.1 DVOJNÝ A TROJNÝ INTEGRÁL | 34 |
| 4.1.1 Riemannův dvojný integrál | 34 |
| 4.1.2 Trojný integrál..... | 38 |
| 4.1.3 Transformace souřadnic | 39 |
| 4.2 APLIKACE INTEGRÁLU FUNKCE TŘÍ PROMĚNNÝCH | 42 |
| ZÁVĚR | 43 |
| ZÁVĚR V ANGLIČTINĚ..... | 44 |
| SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY..... | 45 |

| | |
|----------------------|----|
| SEZNAM OBRÁZKŮ | 46 |
| SEZNAM PŘÍLOH..... | 47 |

ÚVOD

Wolfram Mathematica je počítačový program široce využívaný ve vědeckých, technických a matematických kruzích. Cílem této práce je obohatit výuku předmětu Matematika II¹ o možnosti, které tento program nabízí a poskytnout studentům příručku pro jeho využití v oblasti diferenciálního a integrálního počtu více proměnných.

Teoretická část obsahuje úvod do ovládání programu zaměřený na derivace a integrály. Dále obsahuje matematické definice funkcí, které se budou dále využívat v praktické části.

Obsah celé praktické části je seřazen synchronizovaně s matematickými skripty *Diferenciální počet funkcí více proměnných s aplikacemi* a *Integrální počet funkcí více proměnných s aplikacemi* ke zvýšení přehlednosti. V praktické části jsem se snažil popsat možnosti programu v dané problematice s maximálním ohledem na jejich další využití ve výuce. Jednotlivé kapitoly obsahují grafické znázornění popisované problematiky a ukázky řešení tematicky spjatých příkladů.

Pro využití na přednáškách jsem v programu Wolfram Mathematica zpracoval dynamické zobrazení operací vztahujících se k diferenciálnímu i integrálnímu počtu.

Při této práci byl použit software Wolfram Mathematica verze 7.0. Novější verze 8.0 je plně kompatibilní.

¹ Syllabus předmětu Matematika II dostupný na adrese: <<http://portal.utb.cz/stag?urlid=prohlizeni-predmet-syllabus&predmetZkrPrac=AUM&predmetZkrPred=A2MAT&predmetRok=2010&predmetSemestr=LS&formRozvrhZobrazeni=0>>

I. TEORETICKÁ ČÁST

1 SOFTWARE MATHEMATICA

1.1 Vznik a vývoj

Software Wolfram Mathematica byl vyvinut společností Wolfram Research, Inc. K vydání první verze došlo v roce 1988 a zásadně ovlivnilo využívání počítačů v převážně technických odvětvích. Stěžejní byla skutečnost, že v sobě software Mathematica dokázal zahrnout do té doby čistě samostatné sady určené pro řešení specifických úloh. Vznikl tedy jeden produkt, který byl schopný řešit numerické, algebraické, grafické i jiné úlohy [5].

V roce 2007 došlo k velkému pokroku s průlomovou verzí 6.0 přinášející největší rozvoj za celou dosavadní historii. Program přinesl například sjednocení grafiky, textu a ovládání, pokročilé využití externích dat i rozšířené dynamické možnosti, umožňující vytváření interaktivního obsahu mnohem rychleji, než u předchozích verzí. Společně s touto verzí vznikl i *Wolfram Demonstration Project*², sbírka interaktivních zobrazení, které nové verze umožňují, navíc je rozšiřována i samotnými uživateli. Po instalaci volně dostupného programu *Wolfram CDF Player*³ lze ovládat všechny obsah na webu, nebo si může stáhnout zdrojový kód a spouštět jej přímo z disku buď v programu Wolfram CDF Player, nebo *Wolfram Mathematica* 8 [8].

V dalších verzích došlo k rozšíření možností využití programu. Objevily se nové pracovní mechanismy, jako prostředí pro zpracování obrazu, převod programu do jazyka C, interaktivní finanční grafy, vylepšený systém ilustrací a kreslení, nové formáty pro import a export dat, rozšířené možnosti zpracování textu, vizualizace statistiky, integrace externích dynamických knihoven a mnoho dalších [8].

Na programu Wolfram Mathematica je postavena i webová služba Wolfram Alpha⁴ fungující na principu pochopení otázek a jejich následného zodpovězení. Je založen na dynamických výpočtech a velkém množství dat, algoritmů a metod. Výrazným pozitivem této aplikace je, že nevyžaduje přesně danou skladbu příkazů a dokáže zpracovat i mnohá zadání formulovaná v přirozeném jazyce. Pracovní rozhraní je v přehledném stylu internetových vyhledávačů, na jejichž myšlence byl původně založen.

² <<http://demonstrations.wolfram.com/>>

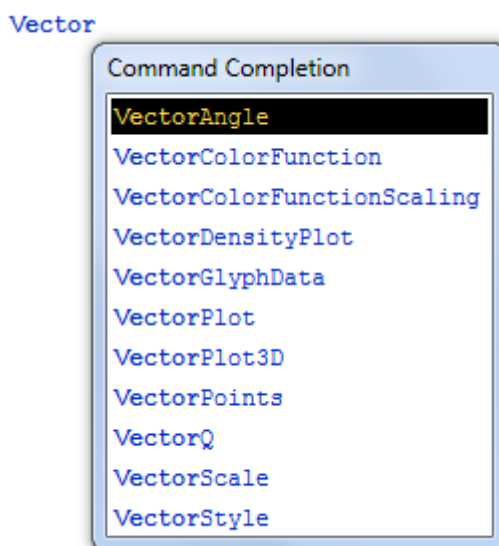
³ <<http://demonstrations.wolfram.com/download-cdf-player.html>>

⁴ <<http://www.wolframalpha.com/>>

1.2 Uživatelské prostředí

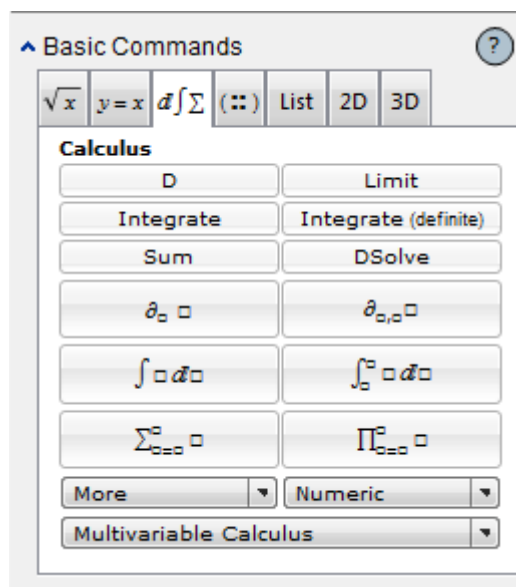
Nejdůležitější částí je *notebook*, je to okno, do kterého se vepisují příkazy a kde se také zobrazují jejich výstupy. Je možné mít otevřen více, než jeden notebook. Příkazy se provádějí pomocí kombinace kláves Shift+enter, nebo klávesou Enter na numerické klávesnici. Parametry funkcí jsou obsaženy v hranatých závorkách a oddělují se čárkou.

Pro další zjednodušení umožňuje Mathematica aktivovat našeptávač příkazů. Pokud se při rozepsaném příkazu stiskne klávesová zkratka Ctrl+K, objeví se v místě kurzoru seznam příkazů, jejichž začátek odpovídá dosud napsané části. Při nahrání balíku funkcí se našeptávač rozšíří o nové příkazy.



Obr. 1. Ukázka našeptávače příkazů.

Mathematica obsahuje několik pracovních palet, kde jsou již předpřipravené některé základní funkce. Paletu obsahující derivace a integrály můžeme najít v nástrojové liště v menu *Palletes*, volbě *Basic Math Assistant* a oddílu *Basic Commands*, případně ve volbě *Classroom assistant* a oddílu *Advanced*, která obsahuje více funkcí pohromadě, ale o to je méně přehledná.



Obr. 2. Paleta základních nástrojů pro derivace a integrace.

$$\partial_{var_1, var_2} expr$$

$$D[expr, \{var_1, order\}, \{var_2, order\}]$$

$$Integrate[expr, \{var_1, lower, upper\}, \{var_2, lower, upper\}]$$

Obr. 3. Ukázka šablony pro derivaci funkce dvou proměnných, několikanásobnou derivaci funkce dvou proměnných a určitý integrál funkce dvou proměnných.

1.3 Mathematica Player

Mathematica Player je volně stažitelný program, umožňující zobrazování obsahu dokumentů typu *notebook*. Je tedy možné otevírat a prohlížet soubory typu NB⁵ bez nutnosti zakoupení licence. Navíc má nižší požadavky na místo na pevném disku oproti běžné verzi Mathematica.

Určitou překážku v jeho potenciální mobilitě a pohotovosti představuje skutečnost, že nemá přenosnou verzi a k použití je potřeba jeho instalace.

⁵ *Mathematica Notebook*

Mathematica Player má i přes své klady řadu omezení. Otevřené dokumenty není možné jakkoliv upravovat, ani v nich spouštět již existující příkazy. Uživatel je prakticky omezen na otáčení 3D grafů, otevírání a zavírání buněk a určitých druhů animací.

Zobrazení a interakce převážné většiny dynamických prvků vyžaduje, aby měl uživatel zakoupenou výrazně rozšířenou verzi *Mathematica Player Pro*, nebo aby soubor obsahující dynamické prvky byl uložen ve speciálním formátu NBP⁶, který lze získat konverzí z klasického Mathematica Notebook souboru. Tato konverze je dostupná pouze ze stránek výrobce, kde každá konverze vyžaduje vyplnění účelu použití konvergovaného souboru, jméno, příjmení a e-mailovou adresu, na kterou bude zaslán odkaz ke stažení konvergovaného souboru. Takto převedený soubor se po uložení jakýchkoliv opět stává klasickým souborem typu NB [8].

⁶ *Mathematica Player Notebook*

2 MATEMATICKÉ DEFINICE

V této kapitole zmíníme matematické vztahy, které se vyskytují v praktické části. Jejich účelem není čtenáře do problematiky uvést, jen mu ji upřesnit. Slouží jako pomůcka k ověření pravidel.

2.1 Vektorový součin

V kartézské soustavě souřadnic $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ lze vektorový součin vektorů $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ symbolicky vyjádřit vektorem ve tvaru determinantu

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \quad (1)$$

tj. (po úpravě) vektorem v polokartézském tvaru

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{k} \quad [3]. \quad (2)$$

Výsledný vektor je závislý na pořadí jednotlivých členů a je kolmý na oba vektory.

Postup výpočtu vektorového součinu v programu Mathematica se nachází v praktické části, v kapitole Součin vektorů.

2.2 Parciální derivace

Nechť funkce $z = f(x, y)$ je definována na oblasti G obsahující bod $A = (x_0, y_0)$.

Má-li funkce $\varphi(x) = f(x, y_0)$ jedné proměnné x , tj. zúžení funkce f na proměnnou x , v bodě x_0 (vlastní) derivaci $\varphi'(x_0)$, nazývá se parciální derivace funkce $f(x, y)$ podle x v bodě A . Je dána limitou

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}. \quad (3)$$

Má-li funkce $\psi(y) = f(x_0, y)$ jedné proměnné y , tj. zúžení funkce f na proměnnou y , v bodě y_0 derivaci $\psi'(y_0)$, nazývá se parciální derivace funkce $f(x, y)$ podle y v bodě A . Je dána limitou

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}. \quad (4)$$

Geometricky parciální derivace představuje směrnici tečny sestrojené v bodě $T = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ke křivce, která je řezem plochy funkce $f(x, y)$ rovinou $y = y_0$. Tedy $f'_x(x_0, y_0) = \tan \alpha$, kde α označuje velikost směrového úhlu tečny [3].

Derivace se používá ke zjištění tvaru funkce a hledání jejích extrémů. Ve fyzice se často používá k formulaci změny v časovém úseku.

Postup výpočtu parciální derivace v programu Mathematica se nachází v praktické části, v kapitole Parciální derivace.

2.3 Gradient

Má-li funkce $f(x, y, z)$ všechny parciální derivace v bodě A vlastní, pak vektor

$$(f'_x(A), f'_y(A), f'_z(A)) \in V_3 \quad (5)$$

se nazývá gradient skalárního pole, nebo gradient funkce f v bodě A [3].

Gradient je vektor znázorňující směr maximálního růstu funkce v daném bodě.

Postup výpočtu gradientu v programu Mathematica se nachází v praktické části, v kapitole Gradient.

2.4 Divergence

Divergence vektorové funkce $\vec{f}(X) = P(X)\vec{i} + Q(X)\vec{j} + R(X)\vec{k}$ v trojrozměrné oblasti je definována pomocí skalárního součinu vzorcem

$$\operatorname{div} \vec{f} = \nabla \cdot \vec{f} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (P, Q, R) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \quad [3]. \quad (6)$$

Divergence popisuje pohyb ve vektorovém poli. Kladná divergence značí počátek vektorové křivky a záporná divergence určuje jejich konec.⁷ Dokáže určovat například zdroj proudění tekutiny nebo tepelné ztráty v místnosti.

Postup výpočtu divergence v programu Mathematica se nachází v praktické části, v kapitole Divergence.

2.5 Laplaceův operátor

Laplaceův operátor pole, neboli laplacián je skalární pole definované jako divergence gradientu pole f

$$\Delta f = \operatorname{div} \nabla f. \quad (7)$$

Obecně lze v n -rozměrném prostoru definovat laplacián jako

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \quad [3]. \quad (8)$$

Laplacián se v praxi využívá například ve fyzice pro výpočty k určení šíření tepla, nebo vlnění.

Postup výpočtu Laplaceova operátoru v programu Mathematica se nachází v praktické části, v kapitole Laplaceův operátor.

2.6 Rotace

Rotace vektorové funkce $\vec{f}(X) = P(X)\vec{i} + Q(X)\vec{j} + R(X)\vec{k}$ v trojrozměrné oblasti je definována pomocí vektorového součinu vzorcem

$$\operatorname{rot} \vec{f} = \nabla \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}. \quad (9)$$

Délka vektoru je dvojnásobkem velikosti úhlové rychlosti této rotace [3].

Postup výpočtu rotace v programu Mathematica se nachází v praktické části, v kapitole Rotace.

⁷ Počátek bývá také označován jako zdroj, nebo zřídlo. Konec naopak jako záporný zdroj, nebo propad.

2.7 Taylorův rozvoj

Funkce, která má v okolí bodu a derivace do $(k+1)$ -ního řádu včetně, může být v okolí tohoto bodu vyjádřena Taylorovým vzorcem

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{df(a)}{1!} + \frac{d^2 f(a)}{2!} + \dots + \frac{d^k f(a)}{k!} + \frac{d^{k+1} f(a)}{(k+1)!}, \\ &= \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!} d^i f(a) + \frac{1}{(k+1)!} d^{k+1} f(a) \end{aligned} \quad (10)$$

kde $(k+1)$ -ní derivace je funkce R_k , tzv. Lagrangeův tvar zbytku v Taylorově vzorci

$$R_k = \frac{d^{k+1} f(a)}{(k+1)!} = \frac{\left((h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n})^{k+1} f(a) \right)}{(k+1)!} \quad [3]. \quad (11)$$

Vzniká Taylorův polynom, který aproximuje funkci v okolí bodu. Čím vyšší je stupeň aproximace, tím větší oblast funkce je aproximována.

Postup výpočtu Taylorova vzorce v programu Mathematica se nachází v praktické části, v kapitole Taylorův rozvoj.

2.8 Riemannův integrál

Pokud je funkce f definovaná a ohraničená na uzavřeném intervalu $[a, b]$, D_n je posloupnost dělení intervalu $[a, b]$ a R_n posloupnost reprezentantů, pak je funkce f riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, b]$, jestliže existuje číslo $I \in \mathbf{R}$ s vlastností

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(f, D_n, R_n) = I \quad (12)$$

pro libovolnou posloupnost dělení D_n , splňující $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(D_n) = 0$ při libovolné volbě reprezentantů R_n , kde $\sigma(f, D_n, R_n)$ je odpovídající integrální součet funkce f . Číslo I nazýváme Riemannův integrál funkce f na intervalu $[a, b]$ a označujeme

$$\int_a^b f(x) dx \quad [6]. \quad (13)$$

Integrál vychází z měření objemu pod funkcí v ohraničené oblasti. Ve vícerozměrném prostoru bývá Riemannův integrál nahrazován obecnějším Lebesgueovým integrálem.

II. PRAKTICKÁ ČÁST

3 DIFERENCIÁLNÍ POČET FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

Tato kapitola rozšiřuje skripta Diferenciální počet funkcí více proměnných s aplikacemi o možnosti softwaru Mathematica. Jednotlivá témata jsou probírána ve stejném pořadí.

3.1 Vektorová algebra

Vektory jsou v Mathematice zadávány do složených závorek, počet jejich rozměrů není omezen. V této oblasti není velká možnost inovace, software může sloužit ke kontrole výpočtů, případně vizualizaci vektorů, která ovšem ve dvourozměrném prostoru značně ztrácí na přehlednosti.

3.1.1 Vzdálenost bodů

Ke zjištění vzdálenosti dvou bodů v Euklidovské soustavě souřadnic se používá příkaz `EuclideanDistance`, jehož parametry jsou souřadnice bodů.

```
In[3]:= EuclideanDistance[{1, 0, 2, 0}, {-1, 2, 1, 0}]  
Out[3]= 3
```

Je možné nastavit přesnost vzdálenosti na desetinná místa pevným přiřazením počtu desetinných míst k souřadnicím obou bodů⁸.

```
In[2]:= EuclideanDistance[N[{2, 1, 3, 5}, 10], N[{4, 6, 7, 1}, 10]]  
Out[2]= 7.81024968
```

Mathematica sice dokáže vykreslovat body v trojrozměrném prostoru, ale protože neumí přidat mřížku dovnitř zobrazovací krychle, ale jen na její povrch⁹, vypovídající hodnota zobrazení nemá velký význam.

3.1.2 Úhel vektorů

Mathematica obsahuje přímý příkaz pro výpočet úhlu dvou vektorů `VectorAngle`. Parametry jsou souřadnice obou vektorů.

⁸ Přesnost výsledné hodnoty si můžete zjistit příkazem `Precision` s výsledkem jako parametr.

⁹ Parametr `FaceGrids→All`.

```
In[126]:= VectorAngle[{1, 3}, {2, 1}]
```

```
Out[126]:=  $\frac{\pi}{4}$ 
```

Pokud chceme výslednou hodnotu ve stupních, je třeba mírně rozšířit příkaz o převod na numerickou hodnotu příkazem `N`, kterou dále převedeme na stupně vynásobením 180 a vydělením π .

```
In[137]:= VectorAngle[{2, 1, 3}, {-1, 3, 2}]
```

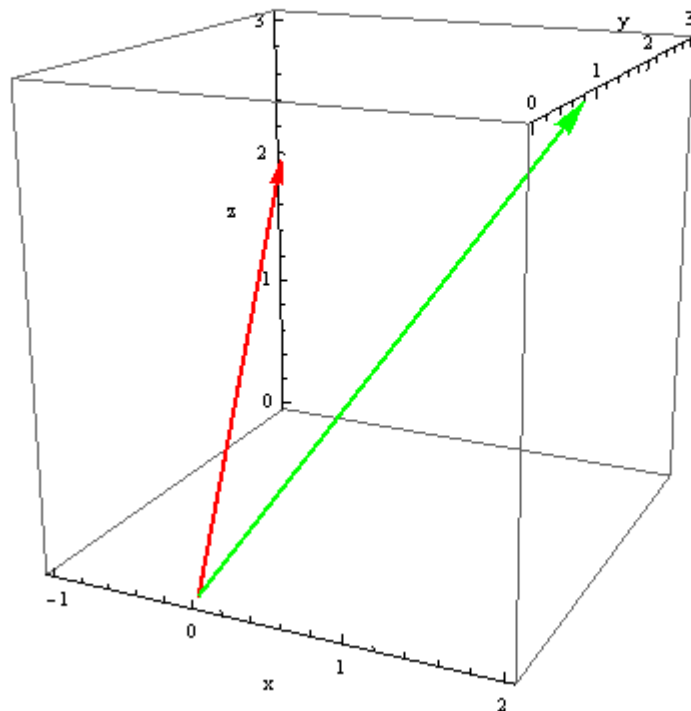
```
Out[137]:=  $\frac{\pi}{3}$ 
```

```
In[138]:= N[VectorAngle[{2, 1, 3}, {-1, 3, 2}]] * 180 / Pi
```

```
Out[138]:= 60.
```

Pro přesnější představu jak jsou vektory situovány je lze vykreslit ve funkci `Graphics3D` jako šipky, neboli `Arrow`. Určitou nevýhodou je nutnost manuálního nastavení přítomnosti os a jejich polohy, bez nichž výsledný obraz ztrácí vypovídající hodnotu.

```
Graphics3D[{Thick, Green, Arrow[{0, 0, 0}, {2, 1, 3}]}, Red,  
  Arrow[{0, 0, 0}, {-1, 3, 2}]], Axes -> True,  
  AxesEdge -> {{-1, -1}, {1, 1}, {-1, 1}}, AxesLabel -> {"x", "y", "z"}
```



Obr. 4. Grafické znázornění vektorů pomocí funkce `Graphics3D`.

3.1.3 Součin vektorů

Skalární součin vektorů se určí vložením tečky mezi dva vektory, které mohou být definovány předem, nebo zapsány přímo.

```
In[17]:= a = {2, -1, 1};
In[18]:= b = {-1, 2, 0};
In[19]:= a.b
Out[19]= -4

In[20]:= {1, 0, 2} . {-1, 2, 1}
Out[20]= 1
```

Vektorový součin se provádí příkazem `Cross`. Do příkazu se vkládají pouze vektory.

```
In[9]:= Cross[{2, -1, 1}, {-1, 2, 0}]
Out[9]= {-2, -1, 3}
```

Teoretický popis vektorového součinu se nachází v teoretické části, v kapitole Vektorový součin.

3.2 Limita posloupnosti bodů v Euklidovském prostoru

3.2.1 Limita funkce v bodě

Program Mathematica počítá limitu funkce jedné reálné proměnné příkazem `Limit`, kde prvním parametrem je počítaná funkce a druhým je proměnná s nulovým bodem oddělené šipkou, která se vytvoří ze znaku mínus případně pomlčky a znaku „je větší než“ ($>$).

```
In[1]:= Limit[f[x], x -> x0] // TraditionalForm
Out[1]/TraditionalForm=

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

```

Můžeme nastavit i směr, ze kterého se k nulovému bodu blížíme nastavením možnosti `Direction` s hodnotou 1, pro blížení zleva, nebo -1 pro blížení zprava. Pokud tuto možnost nenastavíme, počítá se jako limita jdoucí zprava.

```
In[27]:= Limit[1 / x, x → 0]
```

```
Out[27]= ∞
```

```
In[28]:= Limit[1 / x, x → 0, Direction → 1]
```

```
Out[28]= -∞
```

Pokud chceme nastavit nulový bod na nekonečno, použijeme na jeho místě `Infinity`.

```
In[16]:= Limit[ $\frac{\text{Sin}[x]}{x}$ , x → Infinity]
```

```
Out[16]= 0
```

```
In[15]:= Limit[Limit[ $\left(1 + \frac{1}{y}\right)^{\frac{2y^2}{x+y}}$ , x → a], y → Infinity]
```

```
Out[15]=  $e^2$ 
```

V programu Mathematica neexistuje přímý příkaz pro výpočet dvojné limity, proto se používá jen dvojnásobná limita, kde jedna je vnořena do druhé [7].

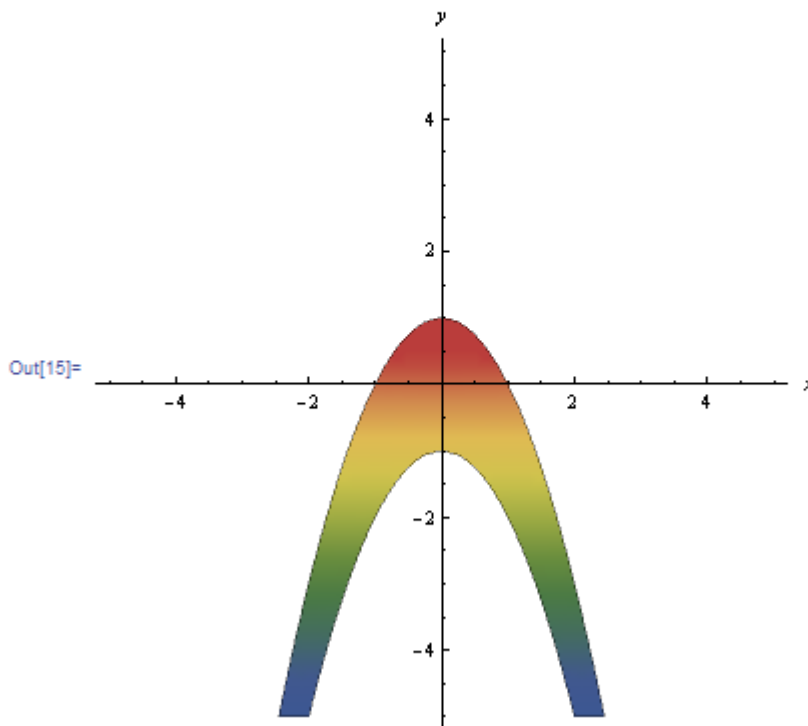
```
In[4]:= Limit[Limit[ $\frac{x+3}{2x-y+7}$ , x → 2], y → 1]
```

```
Out[4]=  $\frac{1}{2}$ 
```

3.3 Definiční obor

Pro číselné určení definičního oboru neexistuje v Mathematice příkaz, ale má grafické prostředky k formulaci takového požadavku. K zobrazení oblasti, ve které je matematická funkce definována se dá použít funkce `RegionPlot`, sloužící k zobrazení oblasti podle zadaných podmínek. Pro omezení na definiční obor vložíme podmínku, aby funkce patřila do reálných čísel v Mathematice značených jako `Reals`. Znak \in zapíšeme jako `\[Element]`, nebo stisknutím klávesy `Escape`, napsáním `elem` a opětovným stisknutím `Escape`. Mathematica potom zobrazí jen oblast, kde je hodnota funkce v oboru reálných čísel.

```
In[15]:= RegionPlot[ $\sqrt{1 - (x^2 + y^2)} \in \text{Reals}$ , {x, -5, 5}, {y, -5, 5},
  ColorFunction -> "DarkRainbow", Axes -> True, Frame -> False,
  AxesLabel -> {x, y}]
```



Obr. 5. Zobrazení definičního oboru funkce dvou proměnných.

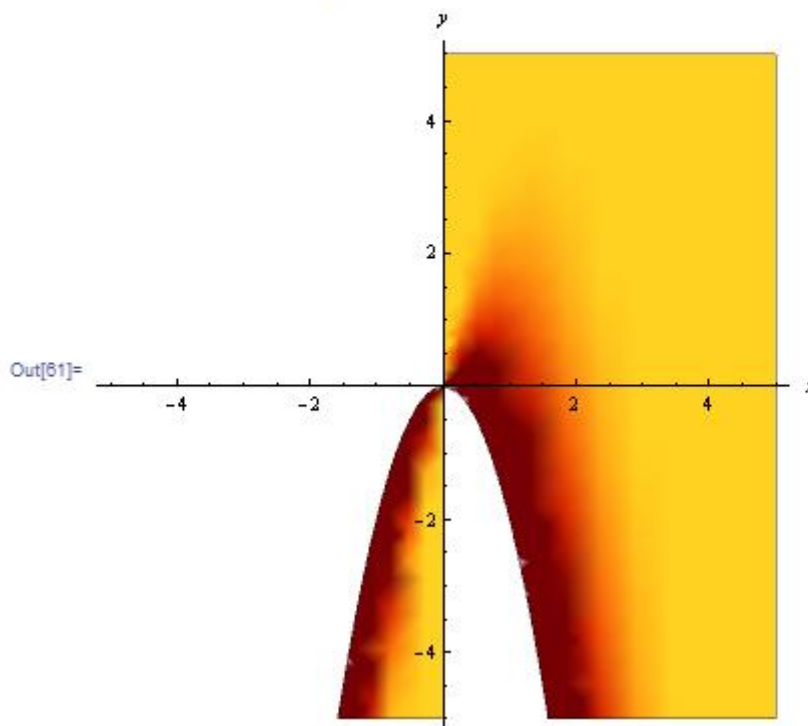
K lepší představě vzhledu definičního oboru funkce lze přidat příkaz `ColorFunction`, která se mění v závislosti na hodnotě funkce. Ve výsledku je potom vidět nejen omezení definičního oboru, ale i přibližný tvar funkce. U komplikovanějších funkcí ovšem nevykazují barevné kombinace vysokou kvalitu. V oblastech strmého růstu jsou přechody často neplynulé a naopak u mírných změn jsou barevné rozdíly jen těžko pozorovatelné. Podle mého úsudku patří k nejkvalitnějším *BlueGreenYellow*, *DarkRainbow*, *SolarColors*, a *TemperatureMap*.¹⁰

¹⁰ Vždy se jedná o gradientní barevné mapy, jejich výpis se získá příkazem `ColorData["Gradients"]`.


```

In[81]:= RegionPlot[Log[x + y / (2 x)] ∈ Reals, {x, -5, 5}, {y, -5, 5},
ColorFunction →
Function[{x, y}, ColorData["SolarColors"][Log[x + y / (2 x)]]],
ColorFunctionScaling → False, Axes → True, Frame → False,
AxesLabel → {x, y}]

```



Obr. 6. Zobrazení definičního oboru funkce dvou proměnných s barevným rozlišením hodnoty funkce.

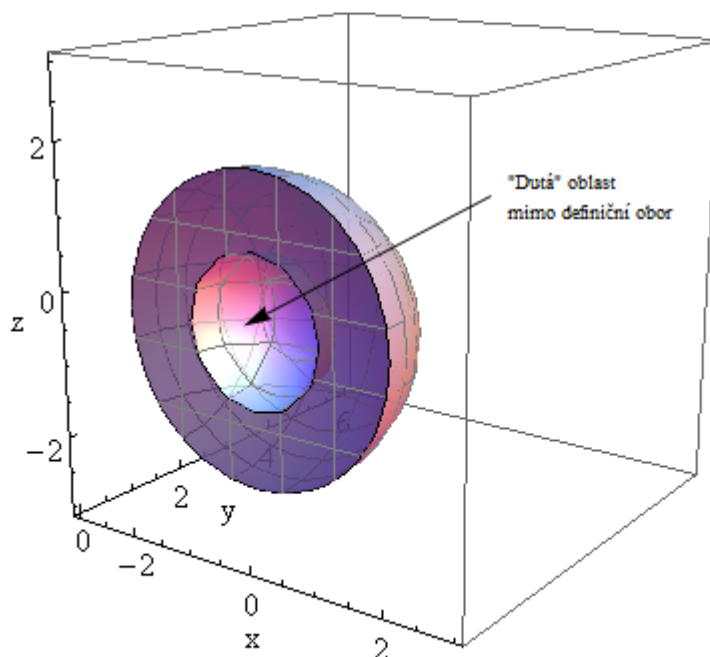
Definiční obory funkcí je možné v omezené míře zobrazovat i pomocí funkce `ContourPlot`, která zobrazuje i vrstevnice. Avšak neumožňuje komplikovaněji určit rozmezí definičního oboru.

Případ tří proměnných vyžaduje použití funkce `RegionPlot3D`, která dokáže se třemi proměnnými pracovat. V trojrozměrném zobrazení se potom ukáže oblast, kde jsou proměnné definovány. Je však důležité neopomenout možné výskyty prázdných oblastí uvnitř funkcí. Ty lze odhalit nastavením průhlednosti `Opacity`, případně i omezením vykreslované oblasti tak, aby byl viditelný průřez funkcí (Obr. 7).

```

In[128]:= RegionPlot3D[ $\left(\frac{\text{Log}[x^2 + y^2 + z^2 - 1]}{\sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}}\right) \in \text{Reals}, \{x, -3, 3\},$ 
 $\{y, 0, 6\}, \{z, -3, 3\}, \text{Mesh} \rightarrow 4, \text{MeshStyle} \rightarrow \text{Gray},$ 
 $\text{PlotStyle} \rightarrow \text{Directive}[\text{LightMagenta}, \text{Opacity}[0.7],$ 
 $\text{Specularity}[\text{White}, 20]], \text{PerformanceGoal} \rightarrow \text{"Quality"},$ 
 $\text{AxesLabel} \rightarrow \{\text{"x"}, \text{"y"}, \text{"z"}\}, \text{AxesEdge} \rightarrow \{\{-1, -1\}, \{-1, -1\}, \{-1, -1\}\},$ 
 $\text{AxesStyle} \rightarrow \text{Directive}[\text{Black}, 16], \text{BoundaryStyle} \rightarrow \text{Black}]$ 

```



Obr. 7. Zobrazení průřezu definičního oboru funkce tří proměnných.

3.4 Parciální derivace

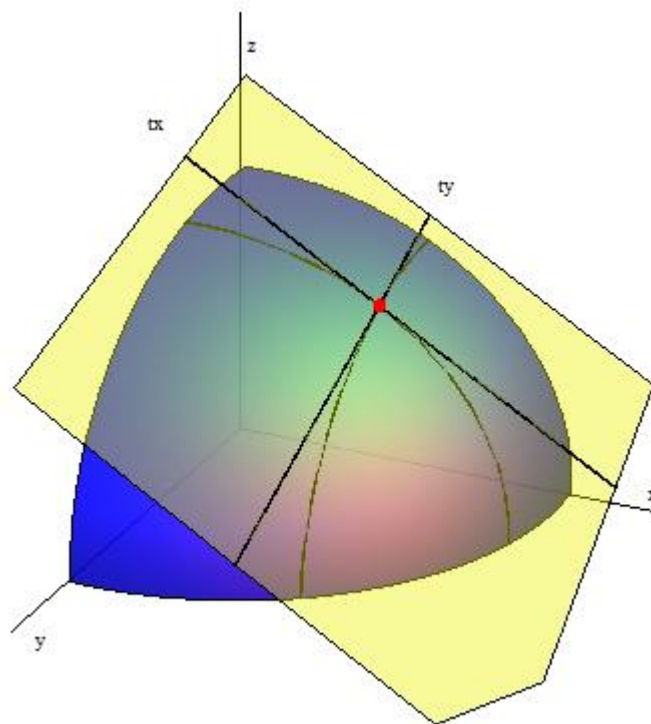
Teoretický popis parciální derivace se nachází v teoretické části, v kapitole Parciální derivace. V programu Mathematica se derivace provádí příkazem `D`, prvním parametrem je funkce, kterou chceme derivovat a za ní následuje jedna, nebo více proměnných v pořadí v jakém chceme derivovat.

```
In[28]:= D[f[x], x]
```

```
Out[28]:= f'[x]
```

```
In[158]:= D[5 x^3 * y^2 - x^2 * y^3, x, x, y, y]
```

```
Out[158]:= 60 x - 12 y
```



Obr. 8. Vizualizace tečné plochy v programu Mathematica pomocí funkce *ContourPlot3D*.

Dlouhý výpis proměnných v případě několikanásobné derivace je možné nahradit počtem derivací za proměnnou ve složené závorce.

```
In[31]:= D[6 x^3 * y^2 - 2 x^2 * y^3 + 3 y^2, {x, 3}, y]
Out[31]= 72 y
```

Mathematica dokáže kombinovat více vnořených příkazů, což nám umožňuje vytvářet komplexnější příklady jako hledání bodů podezřelých z extrému, kde využijeme příkazu *Solve* a první derivaci dáme rovnu nule. Protože pracujeme s funkcemi o více proměnných je potřeba napsat rovnici pro derivaci podle každé z nich.

```
In[26]:= Solve[{D[x^2 + x * y + y^2 - 6 x - 9 y, x] == 0,
                D[x^2 + x * y + y^2 - 6 x - 9 y, y] == 0}, {x, y}]
Out[26]= {{x -> 1, y -> 4}}
```

V prvním parametru funkce máme dvě rovnice ve složených závorkách, kde první je derivace funkce podle x a druhá derivace stejné funkce podle y , druhým parametrem jsou proměnné, jejichž hodnoty chceme určit. Druhý parametr není nutné uvádět, pokud chceme určit hodnoty všech proměnných. V případě, že používáme symbolických koeficientů a

neurčíme žádané proměnné, Mathematica se pokusí vypočítat maximální množství neznámých.

```
In[27]:= Solve[{D[a*x^2 + a*x*y + y^2 - 6*a*x - 9*y, x] == 0,
               D[a*x^2 + a*x*y + y^2 - 6*a*x - 9*y, y] == 0}]
Solve::svars : Equations may not give solutions for all "solve" variables. >>
Out[27]:= {{y -> 9/2, a -> 0}, {y -> -2*(-3 + x), a -> (-3 + 4*x)/x}}
```

3.4.1 Gradient

Teoretický popis gradientu se nachází v teoretické části, v kapitole Gradient. K přístupu k funkci gradientu je potřeba nejdříve nahrát nástroj *Vector Analysis Package*, který je pro tuto operaci, stejně jako mnohé další, nezbytný. Jeho nahrání se provede příkazem `Needs["VectorAnalysis`"]`. Název každého balíku příkazů bývá ukončen zpětným apostrofem¹¹. Navíc je nutné dodržet potřebný formát zadání funkce, kde v kartézské soustavě souřadnic je nutné použít proměnné ve tvaru Xx , Yy a Zz . Funkce má název `Grad`.

```
In[52]:= Needs["VectorAnalysis`"]
In[53]:= Grad[2 Xx^3 + Yy^2 + 3 Zz^2 + 18 Xx*Yy + 6 Zz]
Out[53]:= {6 Xx^2 + 18 Yy, 18 Xx + 2 Yy, 6 + 6 Zz}
```

Pro cylindrické souřadnice se využívají proměnné Rr , $Ttheta$, Zz . Použití cylindrických souřadnic je nutné uvést jako druhý argument gradientu příkazem `Cylindrical`. Obdobně funguje i použití sférických souřadnic s proměnnými Rr , $Ttheta$, $Pphi$ a příkazem `Spherical`.

```
In[58]:= Grad[f[Rr, Ttheta, Zz], Cylindrical]
Out[58]:= {f^(1,0,0)[Rr, Ttheta, Zz], f^(0,1,0)[Rr, Ttheta, Zz]/Rr, f^(0,0,1)[Rr, Ttheta, Zz]}
```

Cylindrické a sférické souřadnice mají využití především v oblastech, kde se pracuje s objekty a jevy kulatých tvarů, například potrubím, nebo gravitačním polem Země.

Více o převodu do jiných souřadnicových systémů je v kapitole Transformace souřadnic v oddílu integrálního počtu.

¹¹ Kombinace kláves Alt + 96. Zpětný apostrof se na české klávesnici nevyskytuje.

3.4.2 Divergence

Teoretický popis divergence se nachází v teoretické části, v kapitole Divergence. Výpočet divergence vektorového pole se provádí jediným příkazem `Div`, který obsahuje gradient pole ve složených závorkách. Pokud je souřadnicový systém jiný, než kartézský, je třeba doplnit jako druhý parametr jeho název. Tato funkce stejně jako gradient vyžaduje nástroj Vector Analysis Package.

```
In[7]:= Div[{Xx^2 + Yy, 1 - Yy, 3 Sin[Zz]}]
Out[7]= -1 + 2 Xx + 3 Cos[Zz]
```

3.4.3 Laplaceův operátor

Teoretický popis Laplaceova operátoru se nachází v teoretické části, v kapitole Laplaceův operátor. K výpočtu laplaciánu slouží funkce `Laplacian` obsahující zkoumanou funkci a název souřadnicového systému, pokud je jiný než základní. K použití funkce je nutný nástroj Vector Analysis Package.

```
In[3]:= Laplacian[Xx^3 + Yy^2 * Zz - Xx * Yy * Zz]
Out[3]= 6 Xx + 2 Zz
```

Laplacián umocněný na druhou, neboli *biharmonický operátor* má vlastní funkci `Biharmonic`.

```
In[10]:= Biharmonic[3 Xx^4 - 6 Yy^3 * Xx - Sin[2 Xx]]
Out[10]= 72 - 16 Sin[2 Xx]
```

3.4.4 Rotace

Teoretický popis rotace se nachází v teoretické části, v kapitole Rotace. Rotace vektorového pole se vypočítá pomocí funkce `Curl`, kde prvním parametrem je Gradient pole a pokud se pracuje v jiných než kartézských souřadnicích, je třeba je uvést v druhém parametru. K použití funkce je potřeba nástroj Vector Analysis Package.

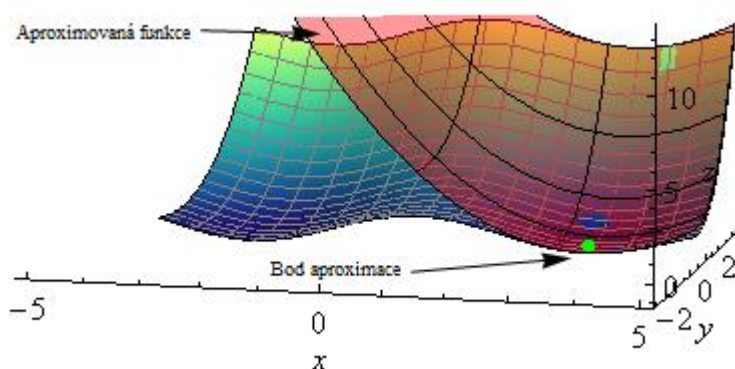
```
In[14]:= Curl[{Xx^3 + 4 Yy^2, -2 Yy^2 + 6 Zz, Xx + 3 Sin[Zz]}]
Out[14]= {-6, -1, -8 Yy}
```

3.5 Taylorův rozvoj

Teoretický popis Taylorova rozvoje se nachází v teoretické části, v kapitole Taylorův rozvoj. Funkce `Series`. Obsahuje minimálně dva parametry, prvním je funkce, kterou chceme aproximovat a za ní následuje trojice údajů ve složené závorce pro každou využitou proměnnou. Těmito údaji je jednak proměnná, které se týkají, dále bod, v němž se aproximuje a poslední je stupeň aproximace.

```
In[89]:= Series[x2 - 2 x + 3 y, {x, 0, 3}, {y, 0, 3}]
```

```
Out[89]:= (3 y + O[y]4) - 2 x + x2 + O[x]4
```



Obr. 9. Aproximace funkce Taylorovým rozvojem třetího stupně.

3.6 Extrémy funkce

Příkazy `FindMaximum` a `FindMinimum` umožňují hledání lokálních extrémů zadaných funkcí. Prvním parametrem příkazu je samotná funkce a druhým je proměnná, eventuálně doplněná o počáteční bod, ze kterého se extrém hledá.

Pokud dojde k nalezení daného extrému, pak je výsledkem operace výpis složený z několika částí. První je funkční hodnota v objeveném extrému, za ním následuje složená závorka, ve které jsou hodnoty všech nezávisle proměnných pro daný extrém.

```
In[27]:= FindMaximum[-x2 - 3 y2 + 5 x - 6 y + 2 x * y, {{x, 1}, {y, 3}}]
```

```
Out[27]:= {6.375, {x -> 2.25, y -> -0.25}}
```

K nalezení globálních extrémů slouží příkazy `Maximize` a `Minimize`. Prvním jejich parametrem je zkoumaná funkce, druhým je proměnná, nebo proměnné, ke kterým se

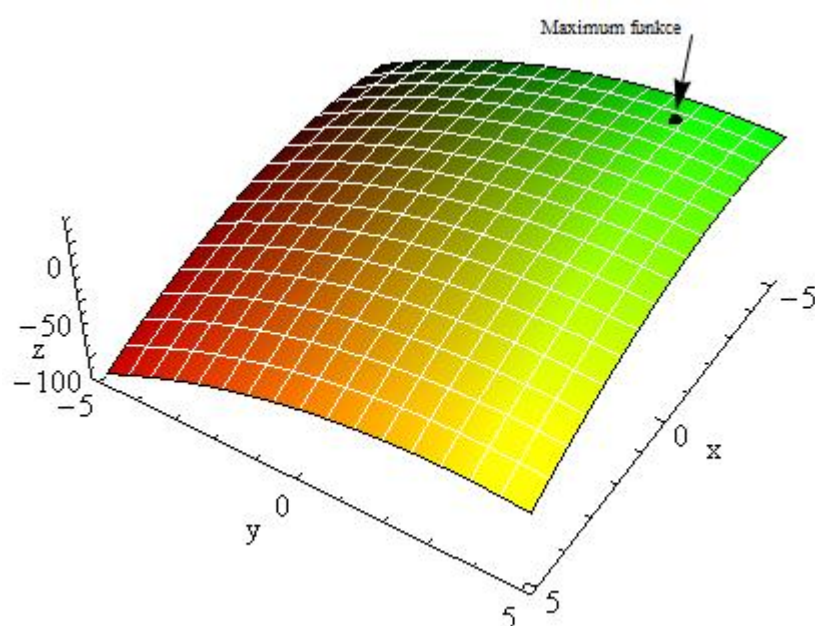
extrém vztahuje a na třetím místě je nepovinný parametr upřesňující číselný obor, do kterého proměnné patří. Pokud není zadán, pak Mathematica předpokládá, že pracuje s reálnými čísly.

```
In[82]:= Minimize[2 y^2 + 2 x - 12 y - 2 y Sqrt[x], {x, y}, Reals]
```

```
Out[82]:= {-24, {x -> 4, y -> 4}}
```

```
In[113]:= Maximize[-x^2 - y^2 - 7 x + 6 y, {x, y}, Integers]
```

```
Out[113]:= {21, {x -> -4, y -> 3}}
```

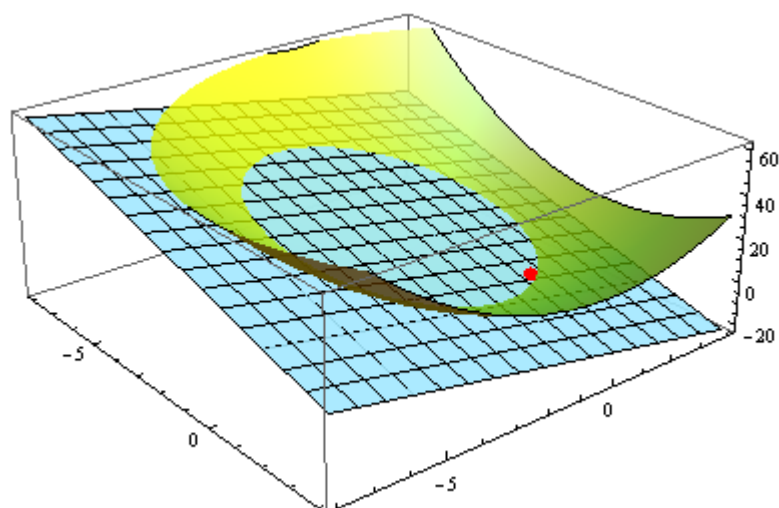


Obr. 10. Maximum funkce, označené bodem.

Rozšířením těchto funkcí je omezení hledaného extrému na určitou oblast definovanou relací (tzv. vazbou). Ta se vepíše do složené závorky společně s původní funkcí. Jde o úlohu na hledání tzv. vázaného extrému.

```
In[54]:= FindMinimum[{-4 x - 3 y + 6, x^2 + y^2 == 1}, {{x, 3}, {y, 1}}]
```

```
Out[54]:= {1., {x -> 0.8, y -> 0.6}}
```

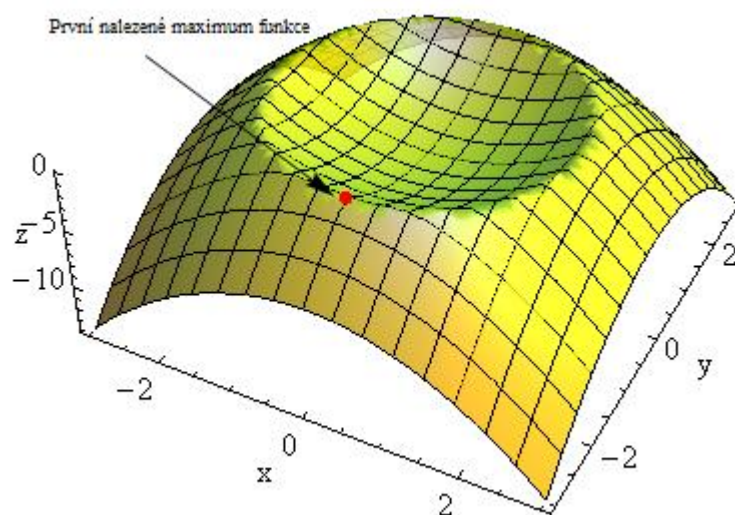



Obr. 11. Minimum funkce omezené kulovou plochou, vyznačené červeným bodem.

Pokud však existuje více bodů se stejnou hodnotou, jako globální extrém, je určen vždy jen jeden bod.

```
In[206]:= Maximize[-Abs[x^2 + y^2 - 4], {x, y}]
```

```
Out[206]:= {0, {x -> 0, y -> -2}}
```

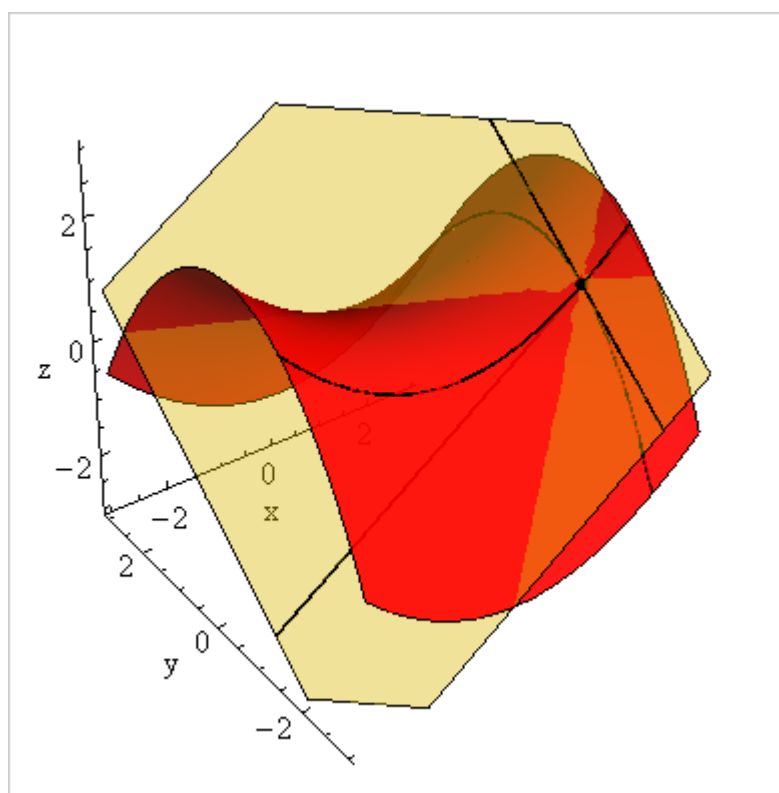


Obr. 12. Jako globální extrém je vždy označen jen jeden bod.

3.7 Derivace v bodě

Součástí této práce je soubor vytvořený v prostředí Mathematica znázorňující polohu a tvar tečné roviny k funkci v bodě, jehož souřadnice je možné upravit. V závislosti na poloze bodu se dynamicky přesouvá i tečná rovina a vypočítává se hodnota směrnic tečen podle os x a y . Na výběr je pět různých funkcí a každá z nich má upravitelné parametry měnící jejich tvar. V případě Gaussova klobouku a rotační kuželové plochy dochází k náročným výpočtům, které způsobují výrazné snížení výkonu. Z toho důvodu je u těchto funkcí možnost snížit kvalitu zobrazované funkce a tím zrychlit odezvu programu.

Prioritním účelem tohoto souboru je jeho využití při přednáškách k demonstraci derivace funkce v určitém bodě.



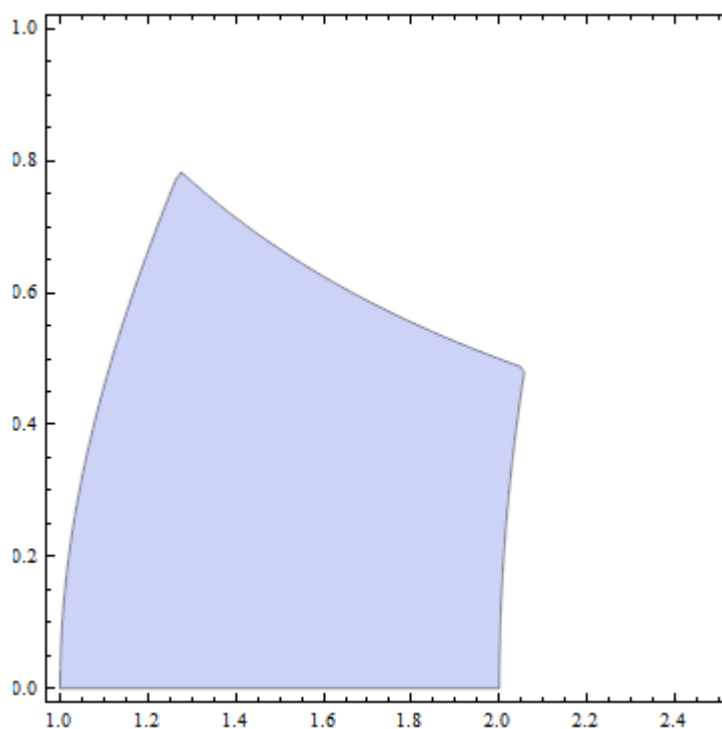
Obr. 13. Zobrazení tečné roviny hyperbolického paraboloidu v příloze *Derivace v bodě*.

4 INTEGRÁLNÍ POČET

Tato kapitola rozšiřuje skripta Integrální počet funkcí více proměnných s aplikacemi o možnosti softwaru Mathematica. Jednotlivá témata jsou probírána ve stejném pořadí.

4.1 Dvojný a trojný integrál

4.1.1 Riemannův dvojný integrál



Obr. 14. Vizualizace ohraničené plochy funkcí *RegionPlot*.

Teoretický popis Riemannova integrálu se nachází v teoretické části, v kapitole Riemannův integrál.

Integrace se provádí příkazem `Integrate`, kde funkce je prvním argumentem a následují proměnné v obráceném pořadí integrace, neboli nejdříve se integruje podle poslední zadané proměnné.

Pokud se jedná o určitý integrál, doplníme každou proměnnou o počátek a konec integrovaného intervalu.

```
In[29]:= Integrate[ $\frac{1}{(x+y)^2}$ , {x, 3, 4}, {y, 1, 2}]
```

```
Out[29]:= Log[ $\frac{25}{24}$ ]
```

```
In[1]:= Integrate[x^2 y * e^{x*y}, {x, 0, 1}, {y, 0, 2}]
```

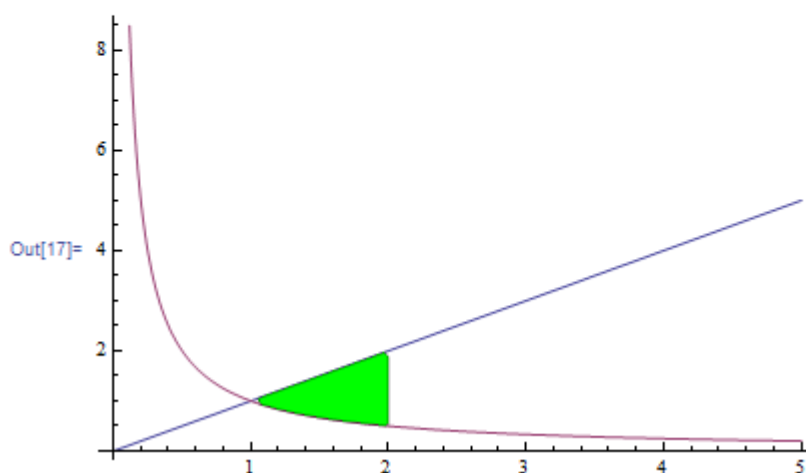
```
Out[1]:= 2
```

Pokud jsou součástí mezí intervalu ostatní proměnné je lepší zapsat příkaz jako integrál v integrálu, jinak hrozí, že Mathematica bude proměnné v mezích považovat za parametry.

```
In[6]:= Integrate[Integrate[(x^2)/(y^2), {y, 1/x, x}], {x, 1, 2}]
```

```
Out[6]:= 9/4
```

```
In[17]:= Show[{Plot[{x, 1/x}, {x, 0, 5}],  
  RegionPlot[1 < x < 2 && 1/x < y < x, {x, 0, 5}, {y, 0, 5},  
  PlotStyle -> Green]}]
```



Obr. 15. Zobrazení integrace pomocí kombinace funkcí *Plot* a *RegionPlot*.

K přímému získání číselného výsledku je určen příkaz *NIntegrate*.

```
In[4]:= NIntegrate[x^y, {x, 0, 1}, {y, 1, 2}]
```

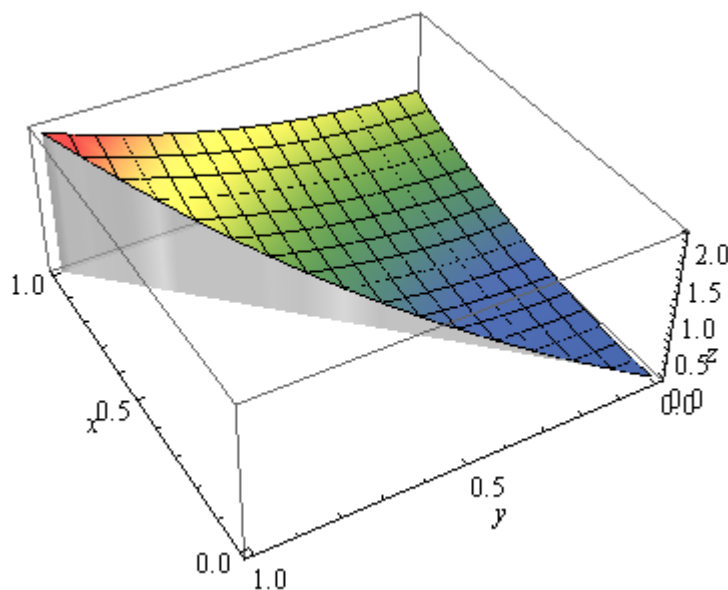
```
Out[4]:= 0.405465
```

K formulaci integrace je možné použít i šablony z pomocné palety základních příkazů v záložce *Calculus Commands*. Příkaz takto připomíná psanou formu a je přehlednější, než příkaz zadaný v programovém kódu.

```
In[2]:= ∫₀¹ ∫₀ˣ (x² + y²) dy dx
```

```
Out[2]:= 1/3
```

Tato forma může být zadána i bez palety pomocí zápisů `\[Integral]` a `\[DifferentialD]`.



Obr. 16. Vizualizace integrálu funkcí Plot3D.

Pokud se v integrované funkci vyskytují symbolické koeficienty, je možné omezit jejich rozsah a tím množství možných výsledků dodatkem `Assumptions` do integrace.

```
In[3]:= Integrate[x^n, {x, 0, 1}]
```

```
Out[3]= If[Re[n] > -1, 1/(1+n), Integrate[x^n, {x, 0, 1}, Assumptions -> Re[n] < -1]]
```

```
In[4]:= Integrate[x^n, {x, 0, 1}, Assumptions -> n > 0]
```

```
Out[4]= 1/(1+n)
```

Příklad: Dvojným integrálem určete obsah množiny, která je ohraničena křivkami $x^2 - y + 2 = 0$, $x + y - 4 = 0$.

```
In[93]:= Integrate[1, {x, -2, 1}, {y, x^2 + 2, 4 - x}]
```

```
Out[93]= 9/2
```

Příklad: Určete náboj $Q(M)$ velmi tenké desky $M = \{(x, y) \in \mathbb{E}_2 \mid x^2 + y^2 \geq a^2 \wedge (x - a)^2 + y^2 \leq a^2\}$ s homogenní hustotou náboje q ($\text{C} \cdot \text{m}^{-2}$) a využijte transformaci i symetrii M .

$$Q(M) = \iint h \, dx \, dy = \iint h \cdot \rho \, d\rho \, d\varphi = 2h \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_a^{2a \cos(\varphi)} \rho \, d\rho.$$

```
In[1]:= Integrate[2 * h * ρ, {φ, 0, Pi / 3}, {ρ, a, 2 a * Cos[φ]}]
```

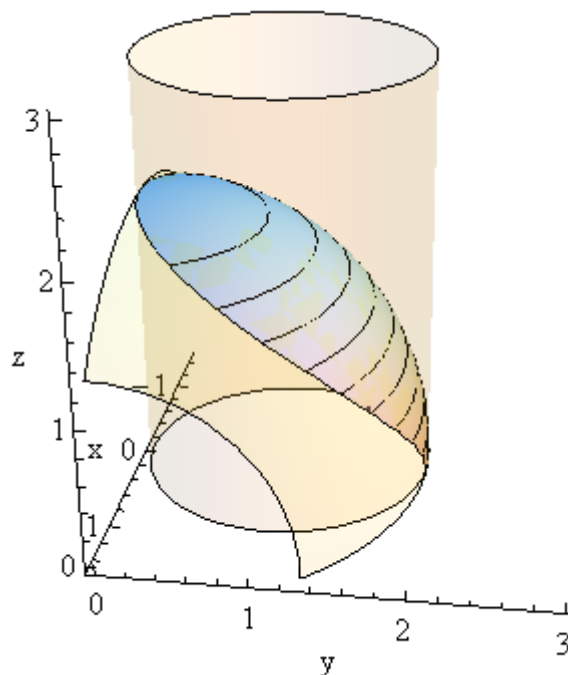
$$\text{Out[1]} = \frac{1}{6} a^2 h (3 \sqrt{3} + 2 \pi)$$

Příklad: Najděte náboj $Q(S)$ na skořepině S s homogenním rozložením hustoty náboje q ($\text{C} \cdot \text{m}^{-2}$), kde S je částí sféry $S: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ležící ve válcovém poloprostoru $x^2 + y^2 \leq R y, z \geq 0, R \geq 0$.

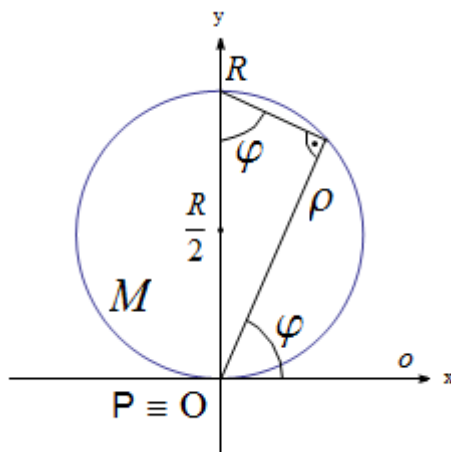
$$\begin{aligned} Q(S) &= \iint q \, dS = \iint q \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} \, dx \, dy = q \cdot \iint \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \right)^2 + \left(-\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \right)^2} \, dx \, dy \\ &= q \iint \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \, dx \, dy = R q \iint \frac{\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \, d\rho \, d\varphi = 2 R q \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{R \sin(\varphi)} \frac{\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \, d\rho \end{aligned}$$

```
In[2]:= Integrate[r * q * \frac{\rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}, {φ, 0, Pi}, {ρ, 0, r * Sin[φ]},
Assumptions -> {r >= 0}]
```

$$\text{Out[2]} = (-2 + \pi) q R^2$$



Obr. 17. Zobrazení části skořepiny S k předchozímu příkladu.



Obr. 18. Názorný popis souřadnic k předchozímu příkladu.

4.1.2 Trojný integrál

Způsob zadávání trojného integrálu se neliší od integrálu dvojného.

```
In[13]:= Integrate[x^2 * y * z, {x, 1, 3}, {y, 0, 2}, {z, 1, 2}]
```

```
Out[13]= 26
```

Při zadávání písemné formy je potřeba brát v úvahu pořadí výpočtu. Diferenciál proměnné první v pořadí odpovídá integrálu nejvíce vnějšímu a je vypočítán poslední, neboli se počítá zleva doprava.

```
In[21]:= Integrate[z^4 * Sin[y]^3, {z, 0, x}, {y, 0, Pi/2}, {x, 0, Pi}]
```

```
Out[21]=  $\frac{2 \pi x^5}{15}$ 
```

U zadání symbolickou formou přes paletu příkazů postupuje Mathematica v klasickém pořadí zprava doleva.

```
In[14]:=  $\int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^x z^4 * \sin[y]^3 dz dy dx$ 
```

```
Out[14]=  $\frac{\pi^6}{45}$ 
```

Příklad: Stanovte objem tělesa určeného podmínkami $-1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, 0 \leq z \leq 1-x^2-y^2$.

```
In[87]:= Integrate[1, {x, -1, 1}, {y, -sqrt[1-x^2], sqrt[1-x^2]}, {z, 0, 1-x^2-y^2}]
```

```
Out[87]=  $\frac{\pi}{2}$ 
```

4.1.3 Transformace souřadnic

Funkce operující se souřadnicovými systémy vyžadují nástroj Vector Analysis Package, jehož nahrání je podrobně popsáno v kapitole Gradient.

Pro nastavení základního systému souřadnic, se kterým bude Mathematica pracovat, slouží příkaz `SetCoordinates` s typem souřadnic jako parametrem. Součástí výstupu jsou názvy os ve formátu používaném v celém balíku Vector Analysis Package. K zjištění aktuálně nastaveného systému se použije příkaz `CoordinateSystem` bez parametrů.

Základní souřadnicové systémy se kterými Mathematica dokáže pracovat jsou kartézské, cylindrické a sférické. Ostatní nejsou v rozsahu předmětu Matematika II. Polární souřadnice v E_2 jsou považovány za speciální případ cylindrických souřadnic v E_3 , kdy $z = 0$.

```
In[38]:= Needs["VectorAnalysis`"]
```

```
In[39]:= SetCoordinates[Cylindrical]
```

```
Out[39]= Cylindrical[Rr, Ttheta, Zz]
```

```
In[40]:= CoordinateSystem
```

```
Out[40]= Cylindrical
```

Užitečným příkazem je `CoordinatesFromCartesian`, který slouží pro převod z kartézských souřadnic bodu do jiných souřadnic. Tato funkce má dva parametry, prvním je trojice bodů z kartézské soustavy souřadnic ve složené závorce a druhým jsou souřadnice, do kterých chceme převádět. Pro korektní výsledek je nutné dodržet správné pořadí. Převod můžeme využít pro následný výpočet integrálu v cylindrických nebo sférických souřadnicích.

```
In[24]:= CoordinatesFromCartesian[{x, y, z}, Cylindrical] // TraditionalForm
Out[24]//TraditionalForm=
```

$$\{\sqrt{x^2 + y^2}, \tan^{-1}(x, y), z\}$$

```
In[25]:= CoordinatesFromCartesian[{x, y, z}, Spherical] // TraditionalForm
Out[25]//TraditionalForm=
```

$$\{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \cos^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right), \tan^{-1}(x, y)\}$$

Mathematica má snahu formovat výsledky do tvarů, maximálně odpovídajících její syntaxi, proto výraz $\tan^{-1}(x, y)$ je ve skutečnosti $\text{ArcTan}\left(\frac{y}{x}\right)$. Některé výsledky transformace je nutné dále zjednodušit.

Jeden příkaz dokáže pracovat jen s jednou množinou souřadnic v jednom zápisu, proto je potřeba převést jednotlivé meze v oddělených příkazech.

```
In[33]:= CoordinatesFromCartesian[{5/2, 5*sqrt(3)/2, 3}, Cylindrical]
Out[33]= {5, pi/3, 3}

In[43]:= CoordinatesFromCartesian[{ -5/2, 3/2, 4}, Spherical]
Out[43]= {7/sqrt(2), ArcCos[4*sqrt(2)/7], pi - ArcTan[3/5]}
```

Využitelnost této funkce je však omezena skutečností, že funguje pouze pro jeden bod. Navíc nedokáže pracovat s proměnnými, ani když jsou definovány formou nástroje Vector Analysis, což považuji za závažný nedostatek. Například zadání $Xx^2 + Yy^2$ překvapivě netransformuje na Rr^2 .

V následujících příkladech použijeme označení ze skript.¹²

¹² Mathematica v případě integrace nevyžaduje specifické značení.


```
In[131]:= Integrate[ $\rho^2 \star \sin[\theta]$ , { $\rho$ , 0, 2}, { $\theta$ , 0,  $\text{Pi}/2$ }, { $\phi$ , 0,  $\text{Pi}/2$ }]
```

```
Out[131]:=  $\frac{4 \pi}{3}$ 
```

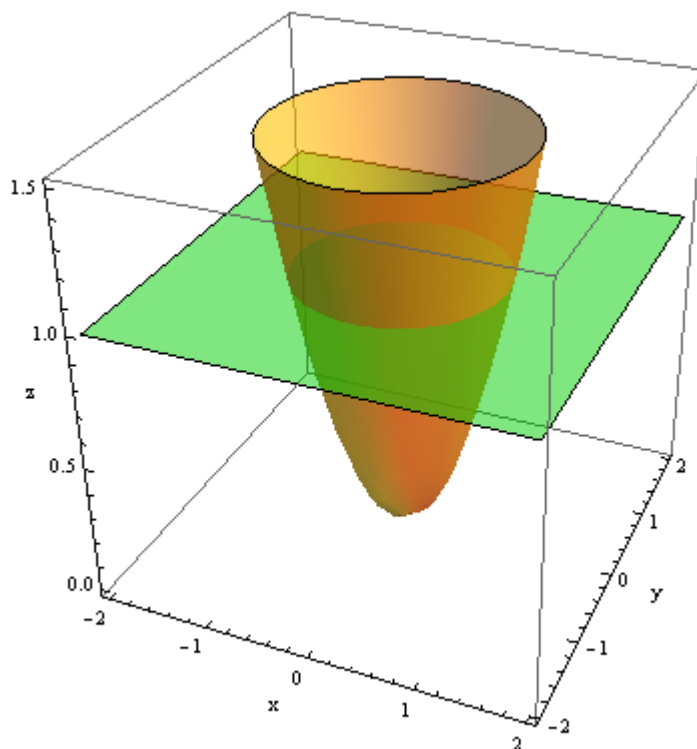
```
In[132]:= Integrate[ $2 \rho$ , { $\phi$ , 0,  $2 \text{Pi}$ }, { $\rho$ ,  $a$ ,  $2 a$ }, { $z$ , 0,  $\sqrt{4 a^2 - \rho^2}$ }]
```

```
Out[132]:=  $4 \sqrt{3} (a^2)^{3/2} \pi$ 
```

Příklad: Stanovte objem tělesa zdola ohraničeného paraboloidem $z = x^2 + y^2$ a zhora rovinou $z = 1$.

```
In[118]:= Integrate[1, { $\rho$ , 0, 1}, { $\phi$ , 0,  $2 \text{Pi}$ }, { $z$ ,  $\rho^2$ , 1}]
```

```
Out[118]:=  $\frac{4 \pi}{3}$ 
```



Obr. 19. Zobrazení situace v předchozím příkladě.

Příklad: Najděte objem tělesa ohraničeného plochami $z = a - 2\sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 0$, $a \in \mathbb{R}^+$.

```
In[106]:= Integrate[1, { $\rho$ , 0, 2}, { $\phi$ , 0,  $\text{Pi}$ }, { $z$ , 0,  $a - 2 \rho$ }]
```

```
Out[106]:=  $-4 \pi + 2 a \pi$ 
```

Pro zpětný převod funguje `CoordinatesToCartesian`, kde druhým parametrem funkce je systém souřadnic, ze kterého souřadnice převádíme.

```
In[35]:= CoordinatesToCartesian[{r,  $\theta$ , z}, Cylindrical]
Out[35]:= {r Cos[ $\theta$ ], r Sin[ $\theta$ ], z}

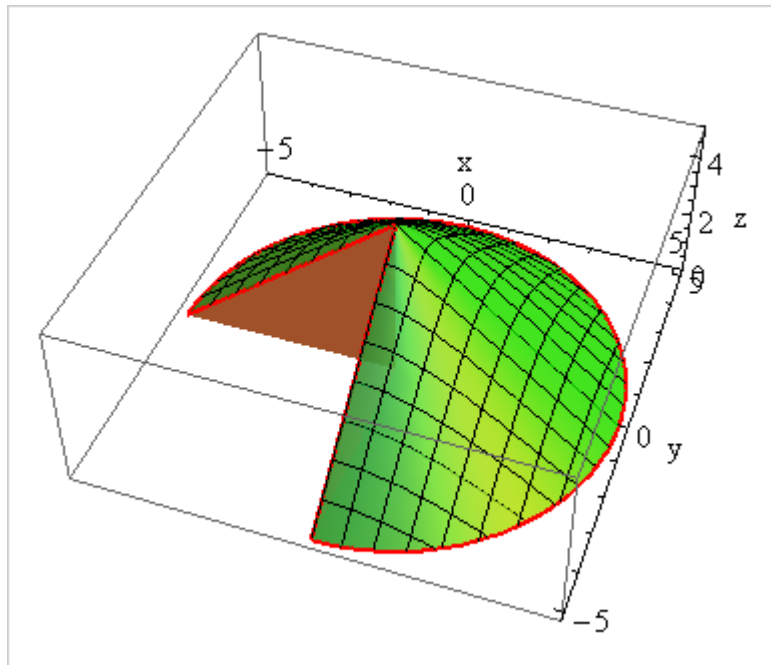
In[36]:= CoordinatesToCartesian[{r,  $\theta$ ,  $\phi$ }, Spherical]
Out[36]:= {r Cos[ $\phi$ ] Sin[ $\theta$ ], r Sin[ $\theta$ ] Sin[ $\phi$ ], r Cos[ $\theta$ ]}
```

4.2 Aplikace integrálu funkce tří proměnných

Součástí této práce je soubor vytvořený v prostředí Mathematica demonstrující vlastnosti a využití integrálního počtu. Zobrazuje trojrozměrné funkce vymezující určitou oblast, která je dále ohraničena. V závislosti na ohraničení oboru integrace, které si může uživatel upravit se vypočítá objem zobrazené oblasti.

Výjimku tvoří oddíl *Rotující těleso*, který obsahuje válec otáčející se kolem osy z . Vzhledem k proměnným parametrům jako je rychlost otáčení, vzdálenost od osy z a hustota tělesa je vypočítána jeho kinetická energie.

Prioritním účelem tohoto souboru je jeho využití při přednáškách k demonstraci integrace funkce.



Obr. 20. Zobrazení zvoleného výřezu kužele v příloze *Integrace funkce tří proměnných*.

ZÁVĚR

Cílem této práce bylo vytvořit příručku pro práci se softwarem Wolfram Mathematica z oblasti diferenciálního a integrálního počtu více proměnných, která by stručně doplnila výuku předmětu Matematika II názornou a interaktivní formou sdělení a přitom zasáhla do fyzikálních aplikací.

V teoretické části se nachází krátký úvod do prostředí programu Wolfram Mathematica, základní rady pro usnadnění práce a souhrnné informace o specifickém softwaru, který z něj vychází. Další součástí jsou definice vybraných matematických funkcí, které se v příručce vyskytují.

Praktická část se přímo zabývá jednotlivými možnostmi softwaru Wolfram Mathematica, jež se dají využít jak ve výuce matematiky, tak v dalším studiu. Příručka postupně ukazuje rozsah použitelnosti ve vektorové algebře, oblasti spjaté s diferenciálním počtem, dvojným a trojným integrálem. Jednotlivé části jsou obohaceny o ukázky výpočtů. Všechny příkazy a ukázky byly vytvořeny ve verzi 7.0. Novější verze 8.0 je plně kompatibilní a dopady změn v oblasti příručky jsou nepatrné.

Významnou součástí bakalářské práce jsou dva soubory vytvořené v programu Wolfram Mathematica. Obsahují manipulovatelné dynamické prvky, které názorně demonstrují vlastnosti diferenciálního a integrálního počtu formou trojrozměrných grafů a animací. Jsou primárně určeny pro využití na přednáškách a seminářích jako interaktivní rozšíření výuky, ale mohou být dále využívány studenty pro větší nadhledu jak v oblasti matematiky, tak v prostředí Wolfram Mathematica. Oba soubory mají přístupný zdrojový kód a jsou uloženy ve formátu NBP, aby byly plně použitelné i pro Wolfram Mathematica Player. Příručka i demonstrační soubory jsou uloženy ve školní webové aplikaci Moodle jako součást kurzu předmětu Matematika II v poslední dostupné verzi 8.0.

ZÁVĚR V ANGLIČTINĚ

The goal of this thesis was to create a handbook for work with the Wolfram Mathematica software in area of differential and integral calculus of several variables, witch would enhance the teaching of the Mathematics II subject in a graphic and interactive way.

The theoretical part contains a brief introduction into environment of Wolfram Mathematica software, basic advices to facilitate the work and summary information about specific software witch is based on it. Another part are definitions of the most important mathematical functions presented in the handbook.

The practical part deals with individual possibilities of the Wolfram Mathematica software with use in teaching of mathematics and further study. The handbook gradually uncovers range of applications in vector algebra, limit of points, area connected with differential calculus, double and triple integral. All instructions and demonstrations were created in version 7.0. The newer version 8.0 is fully compatible.

Important part of bachelor thesis are two files created in Wolfram Mathematica program. They contain variety of manipulable dynamic elements clearly demonstrating use of differential and integral calculus in a form of three-dimensional graphs and animations. They are designed primarily for use during lectures as an interactive teaching extension, but they can also be used by students in order to increase oveview in the area of mathematics as same as of functions in Wolfram Mathematica program. Both files have accessible source code and they are in NBP format in order to be utilized even with Wolfram Mathematica Player. The handbook and demonstration files are loaded in school web application Moodle as a part of course of Mathematics II subject.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] DOBRAKOVÁ, Jana; KOVÁČOVÁ, Monika; ZÁHONOVÁ, Viera. Mathematica 5.2 : tréninkové materiály. Bratislava : Slovenská technická univerzita v Bratislavě, 2008. 277 s. ISBN 80-969562-2-1.
- [2] ELKAN. Mathematica [online]. 2011 [cit. 2011-03-03]. Dostupné z WWW: <<http://www.mathematica.cz/>>.
- [3] FIALKA, Miloslav. Diferenciální počet funkcí více proměnných s aplikacemi. Vydání třetí. [s.l.] : Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2008. 145s. ISBN 978-80-7318-665-4.
- [4] FIALKA, Miloslav. Integrální počet funkcí více proměnných s aplikacemi. Vydání třetí. [s.l.] : Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2008. 103s. ISBN 978-80-7318-668-5.
- [5] CHRAMCOV, Bronislav. Základy práce v prostředí Mathematica. Vyd. 2. Zlín : Univerzita Tomáše Bati, 2006. 122 s. ISBN 80-7318-510-5.
- [6] MAŘÍK, Robert. *Mendelova univerzita v Brně* [online]. 2007 [cit. 2011-04-22]. Riemannův integrál. Dostupné z WWW: <<http://user.mendelu.cz/marik/mat-web/mat-webse10.html>>.
- [7] WITHOFF, Dave; ZELLER, Tom. Re: Limits. In Wolfram Research. Wolfram:Student Support Forum [online]. [s.l.]:[s.n.], 1998 [cit.2011-02-26]. Dostupné z WWW: <<http://forums.wolfram.com/student-support/topics/1441>>.
- [8] Wolfram Research. Wolfram [online]. 2011 [cit. 2011-02-01]. Dostupné z WWW: <<http://www.wolfram.com/>>.

SEZNAM OBRÁZKŮ

| | |
|---|----|
| Obr. 1. Ukázka našeptávače příkazů..... | 12 |
| Obr. 2. Paleta základních nástrojů pro derivace a integrace..... | 13 |
| Obr. 3. Ukázka šablony pro derivaci funkce dvou proměnných, několikanásobnou derivaci funkce dvou proměnných a určitý integrál funkce dvou proměnných..... | 13 |
| Obr. 4. Grafické znázornění vektorů pomocí funkce Graphics3D..... | 21 |
| Obr. 5. Zobrazení definičního oboru funkce dvou proměnných..... | 24 |
| Obr. 6. Zobrazení definičního oboru funkce dvou proměnných s barevným rozlišením hodnoty funkce..... | 25 |
| Obr. 7. Zobrazení průřezu definičního oboru funkce tří proměnných..... | 26 |
| Obr. 8. Vizualizace tečné plochy v programu Mathematica pomocí funkce <i>ContourPlot3D</i> | 27 |
| Obr. 9. Aproximace funkce Taylorovým rozvojem třetího stupně..... | 30 |
| Obr. 10. Maximum funkce, označené bodem..... | 31 |
| Obr. 11. Minimum funkce omezené kulovou plochou, vyznačené červeným bodem..... | 32 |
| Obr. 12. Jako globální extrém je vždy označen jen jeden bod..... | 32 |
| Obr. 13. Zobrazení tečné roviny hyperbolického paraboloidu v příloze <i>Derivace</i> <i>v bodě</i> | 33 |
| Obr. 14. Vizualizace ohraničené plochy funkcí <i>RegionPlot</i> | 34 |
| Obr. 15. Zobrazení integrace pomocí kombinace funkcí <i>Plot</i> a <i>RegionPlot</i> | 35 |
| Obr. 16. Vizualizace integrálu funkcí <i>Plot3D</i> | 36 |
| Obr. 17. Zobrazení části skořepiny S k předchozímu příkladu..... | 37 |
| Obr. 18. Názorný popis souřadnic k předchozímu příkladu..... | 38 |
| Obr. 19. Zobrazení situace v předchozím příkladě..... | 41 |
| Obr. 20. Zobrazení zvoleného výřezu kužele v příloze <i>Integrace funkce tří</i> <i>proměnných</i> | 42 |

SEZNAM PŘÍLOH

Příloha se nachází v elektronické podobě na přiloženém CD. Obsahuje samotnou příručku, soubory Derivace v bodě.nbp a Integrace funkce tří proměnných.nbp.