Inovace výuky předmětu Matematika II na FAI UTB ve Zlíně elektronickou podporou obsahující ukázky řešení v prostředí Mathematica

Inovation of education of Mathematics II subject on FAI TBU in Zlin by electronic support containing examples of solving selected problems in Mathematica environment

Stanislav Talaš

Bakalářská práce
2011

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky

OBSAH

ÚVOD **3**
I TEORETICKÁ ČÁST **4**
1 SOFTWARE MATHEMATICA **5**
1.1 VZNIK A VÝVOJ 5
1.2 UŽIVATELSKÉ PROSTŘEDÍ 6
1.3 MATHEMATICA PLAYER 7
2 MATEMATICKÉ DEFINICE **9**
2.1 VEKTOROVÝ SOUČIN 9
2.2 PARCIÁLNÍ DERIVACE 9
2.3 GRADIENT 10
2.4 DIVERGENCE 10
2.5 LAPLACEŮV OPERÁTOR 11
2.6 ROTACE 11
2.7 TAYLORŮV ROZVOJ 11
2.8 RIEMANNŮV INTEGRÁL 12
II PRAKTICKÁ ČÁST **13**
3 DIFERENCIÁLNÍ POČET FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH **14**
3.1 VEKTOROVÁ ALGEBRA 14
3.1.1 Vzdálenost bodů 14
3.1.2 Úhel vektorů 14
3.1.3 Součin vektorů 16
3.2 LIMITA POSLOUPNOSTI BODŮ V EUKLIDOVSKÉM PROSTORU 16
3.2.1 Limita funkce v bodě 16
3.3 DEFINIČNÍ OBOR 17
3.4 PARCIÁLNÍ DERIVACE 20
3.4.1 Gradient 22
3.4.2 Divergence 23
3.4.3 Laplaceův operátor 23
3.4.4 Rotace 23
3.5 TAYLORŮV ROZVOJ 24
3.6 EXTRÉMY FUNKCE 24
3.7 DERIVACE V BODĚ 27
4 INTEGRÁLNÍ POČET **29**
4.1 DVOJNÝ A TROJNÝ INTEGRÁL 29
4.1.1 Riemannův dvojný integrál 29
4.1.2 Trojný integrál 33
4.1.3 Transformace souřadnic 34
4.2 APLIKACE INTEGRÁLU FUNKCE TŘÍ PROMĚNNÝCH 37
SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY **38**
SEZNAM OBRÁZKŮ **39**

ÚVOD

Wolfram Mathematica je počítačový program široce využívaný ve vědeckých, technických a matematických kruzích. Cílem této práce je obohatit výuku předmětu Matematika II[1] o možnosti, které tento program nabízí a poskytnout studentům příručku pro jeho využití v oblasti diferenciálního a integrálního počtu více proměnných.

Teoretická část obsahuje úvod do ovládání programu zaměřený na derivace a integrály. Dále obsahuje matematické definice funkcí, které se budou dále využívat v praktické části.

Obsah celé praktické části je seřazen synchronizovaně s matematickými skripty *Diferenciální počet funkcí více proměnných s aplikacemi* a *Integrální počet funkcí více proměnných s aplikacemi* ke zvýšení přehlednosti. V praktické části jsem se snažil popsat možnosti programu v dané problematice s maximálním ohledem na jejich další využití ve výuce. Jednotlivé kapitoly obsahují grafické znázornění popisované problematiky a ukázky řešení tematicky spjatých příkladů.

Pro využití na přednáškách jsem v programu Wolfram Mathematica zpracoval dynamické zobrazení operací vztahujících se k diferenciálnímu i integrálnímu počtu.

Při této práci byl použit software Wolfram Mathematica verze 7.0. Novější verze 8.0 je plně kompatibilní.

[1] Sylabus předmětu Matematika II dostupný na adrese: <http://portal.utb.cz/stag?urlid=prohlizeni-predmet-sylabus&predmetZkrPrac=AUM&predmetZkrPred=A2MAT&predmetRok=2010&predmetSemestr=LS&formRozvrhZobrazeni=0>

I. TEORETICKÁ ČÁST

1 SOFTWARE MATHEMATICA

1.1 Vznik a vývoj

Software Wolfram Mathematica byl vyvinut společností Wolfram Research, Inc. K vydání první verze došlo v roce 1988 a zásadně ovlivnilo využívání počítačů v převážně technických odvětvích. Stěžejní byla skutečnost, že v sobě software Mathematica dokázal zahrnout do té doby čistě samostatné sady určené pro řešení specifických úloh. Vznikl tedy jeden produkt, který byl schopný řešit numerické, algebraické, grafické i jiné úlohy [5].

V roce 2007 došlo k velkému pokroku s průlomovou verzí 6.0 přinášející největší rozvoj za celou dosavadní historii. Program přinesl například sjednocení grafiky, textu a ovládání, pokročilé využití externích dat i rozšířené dynamické možnosti, umožňující vytváření interaktivního obsahu mnohem rychleji, než u předchozích verzí. Společně s touto verzí vznikl i *Wolfram Demonstration Project*[2], sbírka interaktivních zobrazení, které nové verze umožňují, navíc je rozšiřována i samotnými uživateli. Po instalaci volně dostupného programu *Wolfram CDF Player*[3] lze ovládat všechen obsah na webu, nebo si může stáhnou zdrojový kód a spouštět jej přímo z disku buď v programu Wolfram CDF Player, nebo *Wolfram Mathematica 8* [8].

V dalších verzích došlo k rozšíření možností využití programu. Objevily se nové pracovní mechanismy, jako prostředí pro zpracování obrazu, převod programu do jazyka C, interaktivní finanční grafy, vylepšený systém ilustrací a kreslení, nové formáty pro import a export dat, rozšířené možnosti zpracování textu, vizualizace statistiky, integrace externích dynamických knihoven a mnoho dalších [8].

Na programu Wolfram Mathematica je postavena i webová služba Wolfram Alpha[4] fungující na principu pochopení otázek a jejich následného zodpovězení. Je založen na dynamických výpočtech a velkém množství dat, algoritmů a metod. Výrazným pozitivem této aplikace je, že nevyžaduje přesně danou skladbu příkazů a dokáže zpracovat i mnohá zadání formulovaná v přirozeném jazyce. Pracovní rozhraní je v přehledném stylu internetových vyhledávačů, na jejichž myšlence byl původně založen.

---

[2] <http://demonstrations.wolfram.com/>

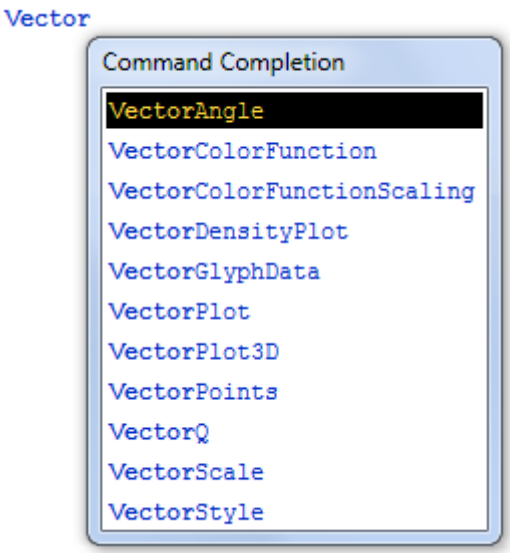
[3] <http://demonstrations.wolfram.com/download-cdf-player.html>

[4] <http://www.wolframalpha.com/>

1.2 Uživatelské prostředí

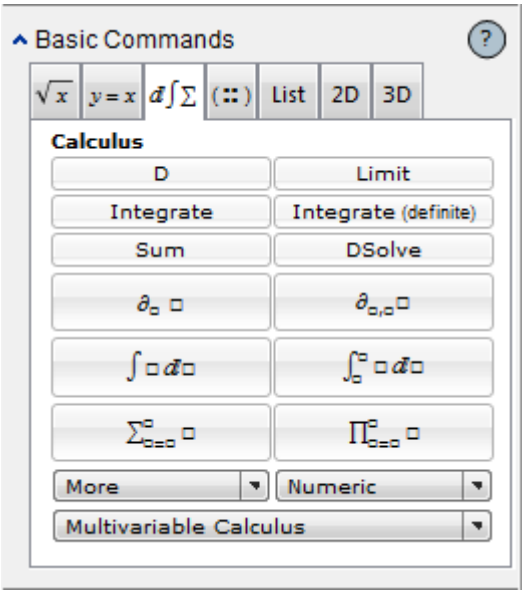
Nejdůležitější částí je *notebook*, je to okno, do kterého se vepisují příkazy a kde se také zobrazují jejich výstupy. Je možné mít otevřen více, než jeden notebook. Příkazy se provádějí pomocí kombinace kláves Shift+enter, nebo klávesou Enter na numerické klávesnici. Parametry funkcí jsou obsaženy v hranatých závorkách a oddělují se čárkou.

Pro další zjednodušení umožňuje Mathematica aktivovat našeptávač příkazů. Pokud se při rozepsaném příkazu stiskne klávesová zkratka Ctrl+K, objeví se v místě kurzoru seznam příkazů, jejichž začátek odpovídá dosud napsané části. Při nahrání balíku funkcí se našeptávač rozšíří o nové příkazy.

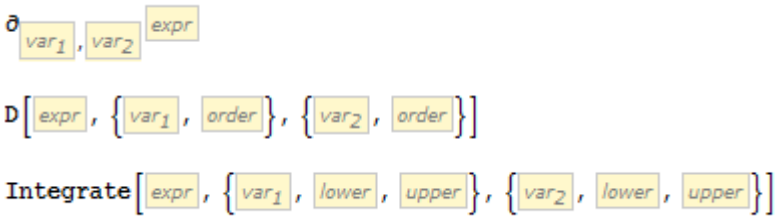


Obr. 1. Ukázka našeptávače příkazů.

Mathematica obsahuje několik pracovních palet, kde jsou již předpřipravené některé základní funkce. Paletu obsahující derivace a integrály můžeme najít v nástrojové liště v menu *Palletes*, volbě *Basic Math Assistant* a oddílu *Basic Commands*, případně ve volbě *Classroom assistant* a oddílu *Advanced*, která obsahuje více funkcí pohromadě, ale o to je méně přehledná.



Obr. 2. Paleta základních nástrojů pro derivace a integrace.



Obr. 3. Ukázka šablony pro derivaci funkce dvou proměnných, několikanásobnou derivaci funkce dvou proměnných a určitý integrál funkce dvou proměnných.

1.3 Mathematica Player

Mathematica Player je volně stažitelný program, umožňující zobrazování obsahu dokumentů typu *notebook*. Je tedy možné otevírat a prohlížet soubory typu NB[5] bez nutnosti zakoupení licence. Navíc má nižší požadavky na místo na pevném disku oproti běžné verzi Mathematica.

Určitou překážku v jeho potenciální mobilitě a pohotovosti představuje skutečnost, že nemá přenosnou verzi a k použití je potřeba jeho instalace.

[5] *Mathematica Notebook*

Mathematica Player má i přes své klady řadu omezení. Otevřené dokumenty není možné jakkoliv upravovat, ani v nich spouštět již existující příkazy. Uživatel je prakticky omezen na otáčení 3D grafů, otevírání a zavírání buněk a určitých druhů animací.

Zobrazení a interakce převážné většiny dynamických prvků vyžaduje, aby měl uživatel zakoupenu výrazně rozšířenou verzi *Mathematica Player Pro*, nebo aby soubor obsahující dynamické prvky byl uložen ve speciálním formátu NBP[6], který lze získat konverzí z klasického Mathematica Notebook souboru. Tato konverze je dostupná pouze ze stránek výrobce, kde každá konverze vyžaduje vyplnění účelu použití konvergovaného souboru, jméno, příjmení a e-mailovou adresu, na kterou bude zaslán odkaz ke stažení konvergovaného souboru. Takto převedený soubor se po uložení jakýchkoliv opět stává klasickým souborem typu NB [8].

[6] *Mathematica Player Notebook*

2 MATEMATICKÉ DEFINICE

V této kapitole zmíníme matematické vztahy, které se vyskytují v praktické části. Jejich účelem není čtenáře do problematiky uvést, jen mu ji upřesnit. Slouží jako pomůcka k ověření pravidel.

2.1 Vektorový součin

V kartézské soustavě souřadnic $\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ lze vektorový součin vektorů $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ symbolicky vyjádřit vektorem ve tvaru determinantu

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}, \tag{1}$$

tj. (po úpravě) vektorem v polokartézském tvaru

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k} \text{ [3].} \tag{2}$$

Výsledný vektor je závislý na pořadí jednotlivých členů a je kolmý na oba vektory.

Postup výpočtu vektorového součinu v programu Mathematica se nachází v praktické části, v kapitole Součin vektorů.

2.2 Parciální derivace

Nechť funkce $z = f(x,y)$ je definována na oblasti G obsahující bod $A = (x_0,y_0)$.

Má-li funkce $\varphi(x) = f(x,y_0)$ jedné proměnné x, tj. zúžení funkce f na proměnnou x, v bodě x_0 (vlastní) derivaci $\varphi'(x_0)$, nazývá se parciální derivace funkce $f(x,y)$ podle x v bodě A. Je dána limitou

$$f'_x(x_0,y_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}. \tag{3}$$

Má-li funkce $\psi(y) = f(x_0,y)$ jedné proměnné y, tj. zúžení funkce f na proměnnou y, v bodě y_0 derivaci $\psi'(y_0)$, nazývá se parciální derivace funkce $f(x,y)$ podle y v bodě A. Je dána limitou

$$f'_y(x_0,y_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}=\lim_{k\to 0}\frac{f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0)}{k}. \tag{4}$$

Geometricky parciální derivace představuje směrnici tečny sestrojené v bodě $T = (x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ ke křivce, která je řezem plochy funkce $f(x,y)$ rovinou $y = y_0$. Tedy $f'_x(x_0, y_0) = \tan\alpha$, kde α označuje velikost směrového úhlu tečny [3].

Derivace se používá ke zjištění tvaru funkce a hledání jejích extrémů. Ve fyzice se často používá k formulaci změny v časovém úseku.

Postup výpočtu parciální derivace v programu Mathematica se nachází v praktické části, v kapitole Parciální derivace.

2.3 Gradient

Má-li funkce $f(x,y,z)$ všechny parciální derivace v bodě A vlastní, pak vektor

$$\left(f'_x(A), f'_y(A), f'_z(A)\right) \in V_3 \tag{5}$$

se nazývá gradient skalárního pole, nebo gradient funkce f v bodě A [3].

Gradient je vektor znázorňující směr maximálního růstu funkce v daném bodě.

Postup výpočtu gradientu v programu Mathematica se nachází v praktické části, v kapitole Gradient.

2.4 Divergence

Divergence vektorové funkce $\vec{f}(X) = P(X)\vec{i} + Q(X)\vec{j} + R(X)\vec{k}$ v trojrozměrné oblasti je definována pomocí skalárního součinu vzorcem

$$\operatorname{div}\vec{f} = \nabla \cdot \vec{f} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (P, Q, R) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \text{ [3].} \tag{6}$$

Divergence popisuje pohyb ve vektorovém poli. Kladná divergence značí počátek vektorové křivky a záporná divergence určuje jejich konec.[7] Dokáže určovat například zdroj proudění tekutiny nebo tepelné ztráty v místnosti.

Postup výpočtu divergence v programu Mathematica se nachází v praktické části, v kapitole Divergence.

[7] Počátek bývá také označován jako zdroj, nebo zřídlo. Konec naopak jako záporný zdroj, nebo propad.

2.5 Laplaceův operátor

Laplaceův operátor pole, neboli laplacián je skalární pole definované jako divergence gradientu pole *f*

$$\Delta f = div \nabla f \,. \tag{7}$$

Obecně lze v *n*-rozměrném prostoru definovat laplacián jako

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \text{ [3].} \tag{8}$$

Laplacián se v praxi využívá například ve fyzice pro výpočty k určení šíření tepla, nebo vlnění.

Postup výpočtu Laplaceova operátoru v programu Mathematica se nachází v praktické části, v kapitole Laplaceův operátor.

2.6 Rotace

Rotace vektorové funkce $\vec{f}(X) = P(X)\vec{i} + Q(X)\vec{j} + R(X)\vec{k}$ v trojrozměrné oblasti je definována pomocí vektorového součinu vzorcem

$$rot\,\vec{f} = \nabla \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)\vec{k} \,. \tag{9}$$

Délka vektoru je dvojnásobkem velikosti úhlové rychlosti této rotace [3].

Postup výpočtu rotace v programu Mathematica se nachází v praktické části, v kapitole Rotace.

2.7 Taylorův rozvoj

Funkce, která má v okolí bodu a derivace do (*k*+1)-ního řádu včetně, může být v okolí tohoto bodu vyjádřena Taylorovým vzorcem

$$f(x) = f(a) + \frac{df(a)}{1!} + \frac{d^2 f(a)}{2!} + \ldots + \frac{d^k f(a)}{k!} + \frac{d^{k+1} f(a)}{(k+1)!} = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} d^i f(a) + \frac{1}{(k+1)!} d^{k+1} f(a), \tag{10}$$

kde (k+1)-ní derivace je funkce R_k, tzv. Lagrangeův tvar zbytku v Taylorově vzorci

$$R_k = \frac{d^{k+1} f(a)}{(k+1)!} = \frac{\left((h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{k+1} f(a)}{(k+1)!} \text{ [3].} \tag{11}$$

Vzniká Taylorův polynom, který aproximuje funkci v okolí bodu. Čím vyšší je stupeň aproximace, tím větší oblast funkce je aproximována.

Postup výpočtu Taylorova vzorce v programu Mathematica se nachází v praktické části, v kapitole Taylorův rozvoj.

2.8 Riemannův integrál

Pokud je funkce f definovaná a ohraničená na uzavřeném intervalu [a, b], D_n je posloupnost dělení intervalu [a, b] a R_n posloupnost reprezentantů, pak je funkce f riemannovsky integrovatelná na intervalu [a, b], jestliže existuje číslo $I \in \mathbf{R}$ s vlastností

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(f, D_n, R_n) = I \tag{12}$$

pro libovolnou posloupnost dělení D_n, splňující $\lim_{n\to\infty} \upsilon(D_n) = 0$ při libovolné volbě reprezentantů R_n, kde $\sigma(f, D_n, R_n)$ je odpovídající integrální součet funkce f. Číslo I nazýváme Riemannův integrál funkce f na intervalu [a, b] a označujeme

$$\int_a^b f(x)dx \text{ [6].} \tag{13}$$

Integrál vychází z měření objemu pod funkcí v ohraničené oblasti. Ve vícerozměrném prostoru bývá Riemannův integrál nahrazován obecnějším Lebesgueovým integrálem.

II. PRAKTICKÁ ČÁST

3 DIFERENCIÁLNÍ POČET FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

Tato kapitola rozšiřuje skripta Diferenciální počet funkcí více proměnných s aplikacemi o možnosti softwaru Mathematica. Jednotlivá témata jsou probírána ve stejném pořadí.

3.1 Vektorová algebra

Vektorová algebra se podrobně probírá ve skriptech Diferenciální počet funkcí více proměnných s aplikacemi v kapitole 1.

Vektory jsou v Mathematice zadávány do složených závorek, počet jejich rozměrů není omezen. V této oblasti není velká možnost inovace, software může sloužit ke kontrole výpočtů, případně vizualizaci vektorů, která ovšem ve dvourozměrném prostoru značně ztrácí na přehlednosti.

3.1.1 Vzdálenost bodů

Ke zjištění vzdálenosti dvou bodů v Euklidovské soustavě souřadnic se používá příkaz `EuclideanDistance`, jehož parametry jsou souřadnice bodů.

```
In[3]:= EuclideanDistance[{1, 0, 2, 0}, {-1, 2, 1, 0}]
Out[3]= 3
```

Je možné nastavit přesnost vzdálenosti na desetinná místa pevným přiřazením počtu desetinných míst k souřadnicím obou bodů[8].

```
In[2]:= EuclideanDistance[N[{2, 1, 3, 5}, 10], N[{4, 6, 7, 1}, 10]]
Out[2]= 7.81024968
```

Mathematica sice dokáže vykreslovat body v trojrozměrném prostoru, ale protože neumí přidat mřížku dovnitř zobrazovací krychle, ale jen na její povrch[9], vypovídající hodnota zobrazení nemá velký význam.

3.1.2 Úhel vektorů

Mathematica obsahuje přímý příkaz pro výpočet úhlu dvou vektorů `VectorAngle`. Parametry jsou souřadnice obou vektorů.

---

[8] Přesnost výsledné hodnoty si můžete zjistit příkazem `Precision` s výsledkem jako parametr.

[9] Parametr `FaceGrids→All`.

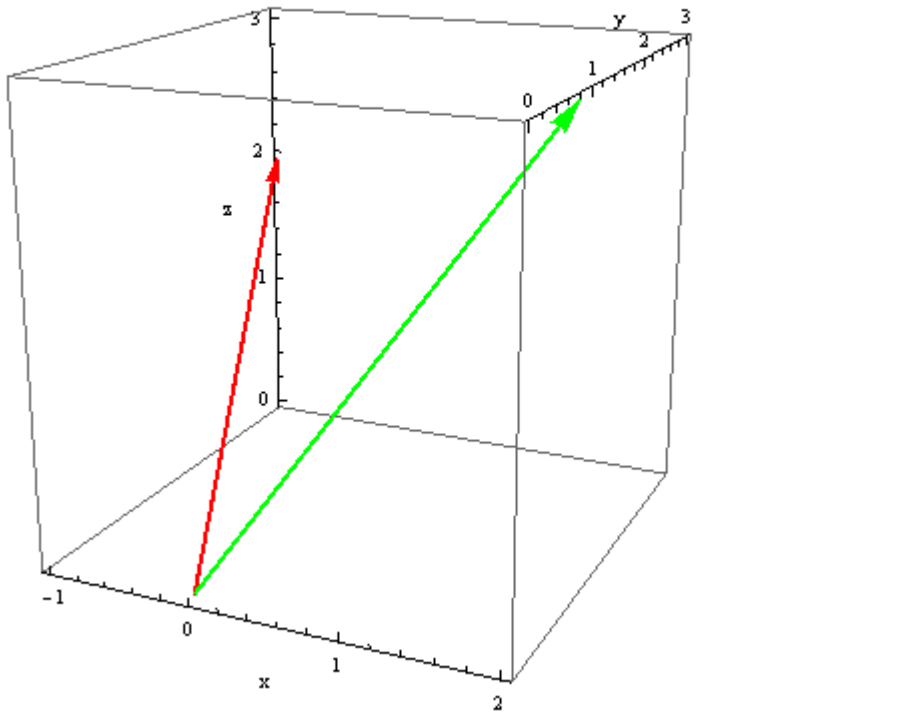
```
In[126]:= VectorAngle[{1, 3}, {2, 1}]
Out[126]= π/4
```

Pokud chceme výslednou hodnotu ve stupních, je třeba mírně rozšířit příkaz o převod na numerickou hodnotu příkazem N, kterou dále převedeme na stupně vynásobením 180 a vydělením π.

```
In[137]:= VectorAngle[{2, 1, 3}, {-1, 3, 2}]
Out[137]= π/3

In[136]:= N[VectorAngle[{2, 1, 3}, {-1, 3, 2}]] * 180 / Pi
Out[136]= 60.
```

Pro přesnější představu jak jsou vektory situovány je lze vykreslit ve funkci `Graphics3D` jako šipky, neboli `Arrow`. Určitou nevýhodou je nutnost manuálního nastavení přítomnosti os a jejich polohy, bez nichž výsledný obraz ztrácí vypovídající hodnotu.

```
Graphics3D[{Thick, Green, Arrow[{{0, 0, 0}, {2, 1, 3}}], Red,
  Arrow[{{0, 0, 0}, {-1, 3, 2}}]}, Axes → True,
 AxesEdge → {{-1, -1}, {1, 1}, {-1, 1}}, AxesLabel → {"x", "y", "z"}]
```



Obr. 4. Grafické znázornění vektorů pomocí funkce Graphics3D.

3.1.3 Součin vektorů

Skalární součin vektorů se určí vložením tečky mezi dva vektory, které můžou být definovány předem, nebo zapsány přímo.

```
In[17]:= a = {2, -1, 1};

In[18]:= b = {-1, 2, 0};

In[19]:= a.b
Out[19]= -4

In[20]:= {1, 0, 2}.{-1, 2, 1}
Out[20]= 1
```

Vektorový součin se provádí příkazem `Cross`. Do příkazu se vkládají pouze vektory.

```
In[9]:= Cross[{2, -1, 1}, {-1, 2, 0}]
Out[9]= {-2, -1, 3}
```

Teoretický popis vektorového součinu se nachází v teoretické části, v kapitole Vektorový součin.

3.2 Limita posloupnosti bodů v Euklidovském prostoru

Limita posloupnosti bodů se podrobně probírá ve skriptech Diferenciální počet funkcí více proměnných s aplikacemi v kapitole 3.

3.2.1 Limita funkce v bodě

Program Mathematica počítá limitu funkce jedné reálné proměnné příkazem `Limit`, kde prvním parametrem je počítaná funkce a druhým je proměnná s nulovým bodem oddělené šipkou, která se vytvoří ze znaku mínus případně pomlčky a znaku „je větší než“ (>).

```
In[1]:= Limit[f[x], x → x0] // TraditionalForm
Out[1]//TraditionalForm=
lim_{x→x0} f(x)
```

Můžeme nastavit i směr, ze kterého se k nulovému bodu blížíme nastavením možnosti `Direction` s hodnotou 1, pro blížení zleva, nebo -1 pro blížení zprava. Pokud tuto možnost nenastavíme, počítá se jako limita jdoucí zprava.

```
In[27]:= Limit[1 / x, x → 0]
Out[27]= ∞

In[28]:= Limit[1 / x, x → 0, Direction → 1]
Out[28]= -∞
```

Pokud chceme nastavit nulový bod na nekonečno, použijeme na jeho místě `Infinity`.

$$\text{In[16]:= } \texttt{Limit}\left[\frac{\texttt{Sin}[x]}{x}, x \to \texttt{Infinity}\right]$$

$$\text{Out[16]= } 0$$

$$\text{In[15]:= } \texttt{Limit}\left[\texttt{Limit}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^{\frac{2y^2}{x+y}}, x \to a\right], y \to \texttt{Infinity}\right]$$

$$\text{Out[15]= } e^2$$

V programu Mathematica neexistuje přímý příkaz pro výpočet dvojné limity, proto se používá jen dvojnásobná limita, kde jedna je vnořena do druhé [7].

$$\text{In[4]:= } \texttt{Limit}\left[\texttt{Limit}\left[\frac{x+3}{2x-y+7}, x \to 2\right], y \to 1\right]$$

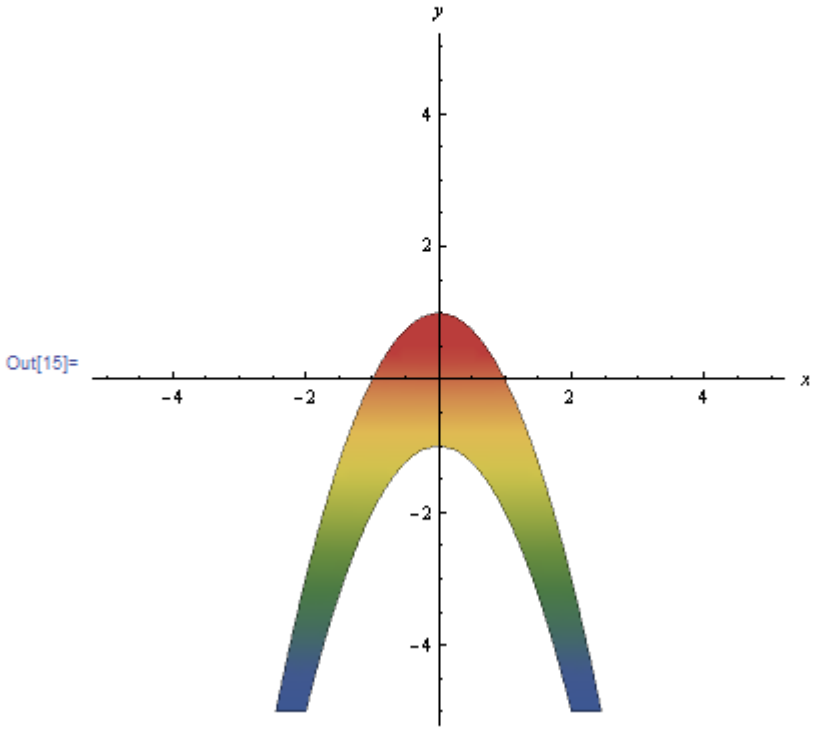
$$\text{Out[4]= } \frac{1}{2}$$

3.3 Definiční obor

Pro číselné určení definičního oboru neexistuje v Mathematice příkaz, ale má grafické prostředky k formulaci takového požadavku. K zobrazení oblasti, ve které je matematická funkce definována se dá použít funkce `RegionPlot`, sloužící k zobrazení oblasti podle zadaných podmínek. Pro omezení na definiční obor vložíme podmínku, aby funkce patřila do reálných čísel v Mathematice značených jako `Reals`. Znak ∈ zapíšeme jako `\[Element]`, nebo stisknutím klávesy Escape, napsáním `elem` a opětovným stisknutím Escape. Mathematica potom zobrazí jen oblast, kde je hodnota funkce v oboru reálných čísel.

```
In[15]:= RegionPlot[Sqrt[1 - (x^2 + y)^2] ∈ Reals, {x, -5, 5}, {y, -5, 5},
  ColorFunction → "DarkRainbow", Axes → True, Frame → False,
  AxesLabel → {x, y}]
```

Out[15]=



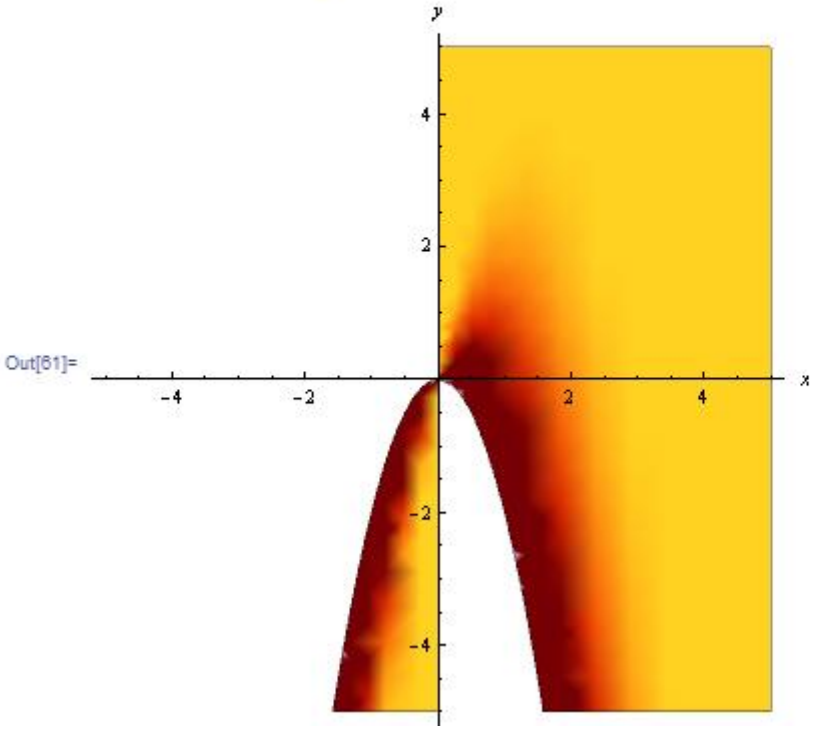
Obr. 5. Zobrazení definičního oboru funkce dvou proměnných.

K lepší představě vzhledu definičního oboru funkce lze přidat příkaz `ColorFunction`, která se mění v závislosti na hodnotě funkce. Ve výsledku je potom vidět nejen omezení definičního oboru, ale i přibližný tvar funkce. U komplikovanějších funkcí ovšem nevykazují barevné kombinace vysokou kvalitu. V oblastech strmého růstu jsou přechody často neplynulé a naopak u mírných změn jsou barevné rozdíly jen těžko pozorovatelné. Podle mého úsudku patří k nejkvalitnějším *BlueGreenYellow*, *DarkRainbow*, *SolarColors*, a *TemperatureMap*.[10]

[10] Vždy se jedná o gradientní barevné mapy, jejich výpis se získá příkazem `ColorData[„Gradients"]`.

```
In[61]:= RegionPlot[Log[x + y / (2 x)] ∈ Reals, {x, -5, 5}, {y, -5, 5},
 ColorFunction →
  Function[{x, y}, ColorData["SolarColors"][Log[x + y / (2 x)]]],
 ColorFunctionScaling → False, Axes → True, Frame → False,
 AxesLabel → {x, y}]
```

Out[61]=

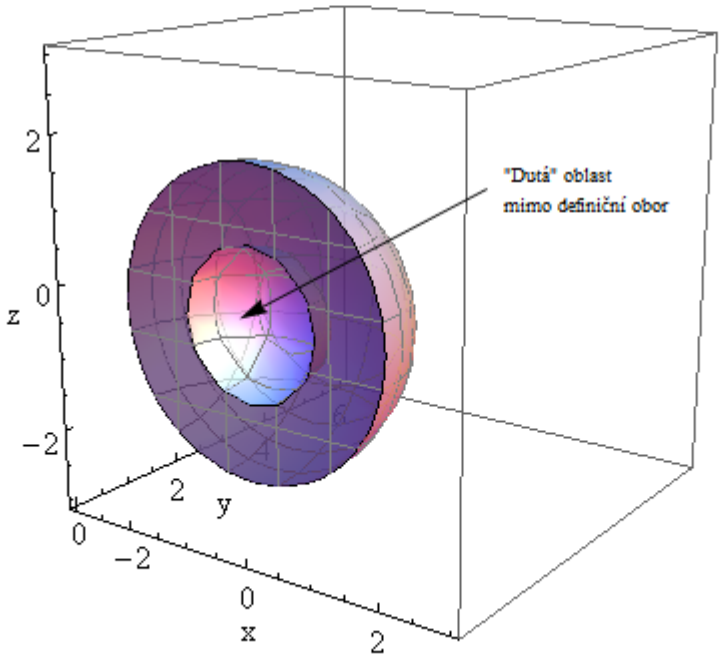


Obr. 6. Zobrazení definičního oboru funkce dvou proměnných s barevným rozlišením hodnoty funkce.

Definiční obory funkcí je možné v omezené míře zobrazovat i pomocí funkce `ContourPlot`, která zobrazuje i vrstevnice. Avšak neumožňuje komplikovaněji určit rozmezí definičního oboru.

Případ tří proměnných vyžaduje použití funkce `RegionPlot3D`, která dokáže se třemi proměnnými pracovat. V trojrozměrném zobrazení se potom ukáže oblast, kde jsou proměnné definovány. Je však důležité neopomenout možné výskyty prázdných oblastí uvnitř funkcí. Ty lze odhalit nastavením průhlednosti `Opacity`, případně i omezením vykreslované oblasti tak, aby byl viditelný průřez funkcí (Obr. 7).

```
In[128]:= RegionPlot3D[(Log[x^2 + y^2 + z^2 - 1])/(√(4 - x^2 - y^2 - z^2)) ∈ Reals, {x, -3, 3},
 {y, 0, 6}, {z, -3, 3}, Mesh → 4, MeshStyle → Gray,
 PlotStyle → Directive[LightMagenta, Opacity[0.7],
   Specularity[White, 20]], PerformanceGoal → "Quality",
 AxesLabel → {"x", "y", "z"}, AxesEdge → {{-1, -1}, {-1, -1}, {-1, -1}},
 AxesStyle → Directive[Black, 16], BoundaryStyle → Black]
```



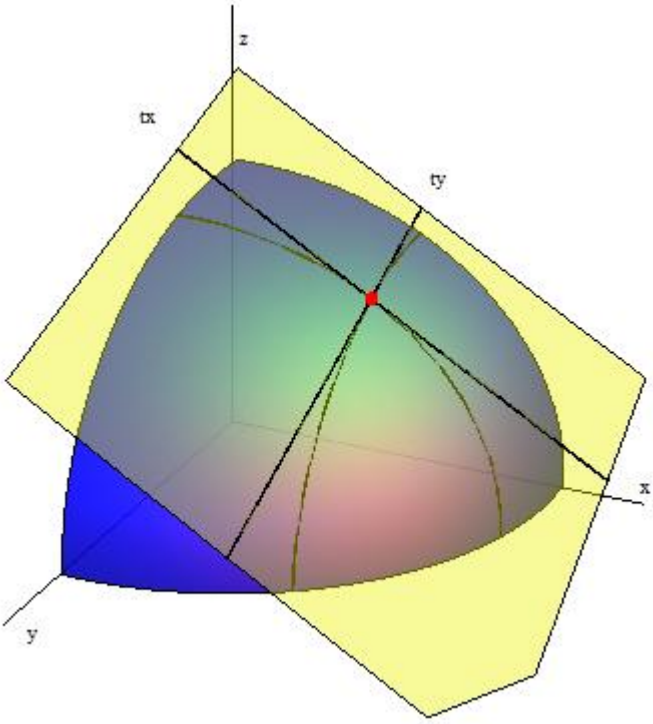
Obr. 7. Zobrazení průřezu definičního oboru funkce tří proměnných.

3.4 Parciální derivace

Parciální derivace se podrobně probírá ve skriptech Diferenciální počet funkcí více proměnných s aplikacemi v kapitole 5.1.

Teoretický popis parciální derivace se nachází v teoretické části, v kapitole Parciální derivace. V programu Mathematica se derivace provádí příkazem `D`, prvním parametrem je funkce, kterou chceme derivovat a za ní následuje jedna, nebo více proměnných v pořadí v jakém chceme derivovat.

```
In[28]:= D[f[x], x]
Out[28]= f'[x]

In[158]:= D[5 x^3 * y^2 - x^2 * y^3, x, x, y, y]
Out[158]= 60 x - 12 y
```



Obr. 8. Vizualizace tečné plochy v programu Mathematica pomocí funkce *ContourPlot3D*.

Dlouhý výpis proměnných v případě několikanásobné derivace je možné nahradit počtem derivací za proměnnou ve složené závorce.

```
In[31]:= D[6 x^3 * y^2 - 2 x^2 * y^3 + 3 y^2, {x, 3}, y]

Out[31]= 72 y
```

Mathematica dokáže kombinovat více vnořených příkazů, což nám umožňuje vytvářet komplexnější příklady jako hledání bodů podezřelých z extrému, kde využijeme příkazu `Solve` a první derivaci dáme rovnu nule. Protože pracujeme s funkcemi o více proměnných je potřeba napsat rovnici pro derivaci podle každé z nich.

```
In[26]:= Solve[{D[x^2 + x * y + y^2 - 6 x - 9 y, x] == 0,
        D[x^2 + x * y + y^2 - 6 x - 9 y, y] == 0}, {x, y}]

Out[26]= {{x → 1, y → 4}}
```

V prvním parametru funkce máme dvě rovnice ve složených závorkách, kde první je derivace funkce podle *x* a druhá derivace stejné funkce podle *y*, druhým parametrem jsou proměnné, jejichž hodnoty chceme určit. Druhý parametr není nutné uvádět, pokud chceme určit hodnoty všech proměnných. V případě, že používáme symbolických koeficientů a

neurčíme žádané proměnné, Mathematica se pokusí vypočítat maximální množství neznámých.

```
In[27]:= Solve[{D[a*x^2 + a*x*y + y^2 - 6 a*x - 9 y, x] == 0,
    D[a*x^2 + a*x*y + y^2 - 6 a*x - 9 y, y] == 0}]
Solve::svars : Equations may not give solutions for all "solve" variables. >>
Out[27]= {{y → 9/2, a → 0}, {y → -2 (-3 + x), a → (-3 + 4 x)/x}}
```

3.4.1 Gradient

Gradient se podrobně probírá ve skriptech Diferenciální počet funkcí více proměnných s aplikacemi v kapitole 5.4.

Teoretický popis gradientu se nachází v teoretické části, v kapitole Gradient. K přístupu k funkci gradientu je potřeba nejdříve nahrát nástroj *Vector Analysis Package*, který je pro tuto operaci, stejně jako mnohé další, nezbytný. Jeho nahrání se provede příkazem `Needs[„VectorAnalysis`"]`. Název každého balíku příkazů bývá ukončen zpětným apostrofem[11]. Navíc je nutné dodržet potřebný formát zadání funkce, kde v kartézské soustavě souřadnic je nutné použít proměnné ve tvaru *Xx*, *Yy* a *Zz*. Funkce má název `Grad`.

```
In[52]:= Needs["VectorAnalysis`"]
In[53]:= Grad[2 Xx^3 + Yy^2 + 3 Zz^2 + 18 Xx*Yy + 6 Zz]
Out[53]= {6 Xx^2 + 18 Yy, 18 Xx + 2 Yy, 6 + 6 Zz}
```

Pro cylindrické souřadnice se využívají proměnné *Rr*, *Ttheta*, *Zz*. Použití cylindrických souřadnic je nutné uvést jako druhý argument gradientu příkazem `Cylindrical`. Obdobně funguje i použití sférických souřadnic s proměnnými *Rr*, *Ttheta*, *Pphi* a příkazem `Spherical`.

```
In[58]:= Grad[f[Rr, Ttheta, Zz], Cylindrical]
Out[58]= {f^(1,0,0)[Rr, Ttheta, Zz], f^(0,1,0)[Rr, Ttheta, Zz]/Rr, f^(0,0,1)[Rr, Ttheta, Zz]}
```

Cylindrické a sférické souřadnice mají využití především v oblastech, kde se pracuje s objekty a jevy kulatých tvarů, například potrubím, nebo gravitačním polem Země.

[11] Kombinace kláves Alt + 96. Zpětný apostrof se na české klávesnici nevyskytuje.

Více o převodu do jiných souřadnicových systémů je v kapitole Transformace souřadnic v oddílu integrálního počtu.

3.4.2 Divergence

Divergence se podrobně probírá ve skriptech Diferenciální počet funkcí více proměnných s aplikacemi v kapitole 5.4.28.

Teoretický popis divergence se nachází v teoretické části, v kapitole Divergence. Výpočet divergence vektorového pole se provádí jediným příkazem `Div`, který obsahuje gradient pole ve složených závorkách. Pokud je souřadnicový systém jiný, než kartézský, je třeba doplnit jako druhý parametr jeho název. Tato funkce stejně jako gradient vyžaduje nástroj Vector Analysis Package.

```
In[7]:= Div[{Xx^2 + Yy, 1 - Yy, 3 Sin[Zz]}]
Out[7]= -1 + 2 Xx + 3 Cos[Zz]
```

3.4.3 Laplaceův operátor

Laplaceův operátor se podrobně probírá ve skriptech Diferenciální počet funkcí více proměnných s aplikacemi v kapitole 5.4.33.

Teoretický popis Laplaceova operátoru se nachází v teoretické části, v kapitole Laplaceův operátor. K výpočtu laplaciánu slouží funkce `Laplacian` obsahující zkoumanou funkci a název souřadnicového systému, pokud je jiný než základní. K použití funkce je nutný nástroj Vector Analysis Package.

```
In[3]:= Laplacian[Xx^3 + Yy^2 * Zz - Xx * Yy * Zz]
Out[3]= 6 Xx + 2 Zz
```

Laplacián umocněný na druhou, neboli *biharmonický operátor* má vlastní funkci `Biharmonic`.

```
In[10]:= Biharmonic[3 Xx^4 - 6 Yy^3 * Xx - Sin[2 Xx]]
Out[10]= 72 - 16 Sin[2 Xx]
```

3.4.4 Rotace

Rotace se podrobně probírá ve skriptech Diferenciální počet funkcí více proměnných s aplikacemi v kapitole 5.4.38.

Teoretický popis rotace se nachází v teoretické části, v kapitole Rotace. Rotace vektorového pole se vypočítá pomocí funkce `Curl`, kde prvním parametrem je Gradient pole a pokud se pracuje v jiných než kartézských souřadnicích, je třeba je uvést v druhém parametru. K použití funkce je potřeba nástroj Vector Analysis Package.

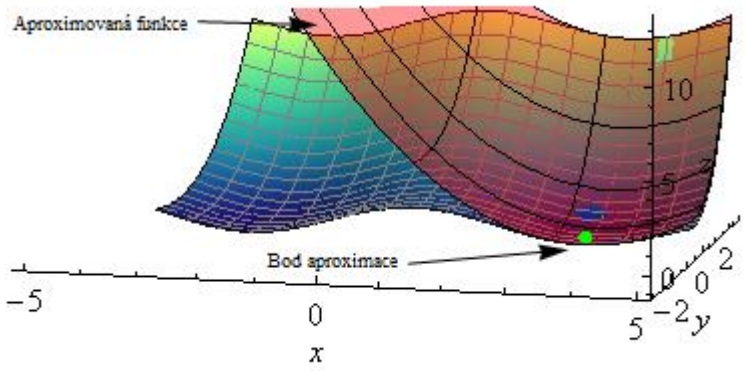
```
In[14]:= Curl[{Xx^3 + 4 Yy^2, -2 Yy^2 + 6 Zz, Xx + 3 Sin[Zz]}]
Out[14]= {-6, -1, -8 Yy}
```

3.5 Taylorův rozvoj

Taylorův rozvoj se podrobně probírá ve skriptech Diferenciální počet funkcí více proměnných s aplikacemi v kapitole 5.6.

Teoretický popis Taylorova rozvoje se nachází v teoretické části, v kapitole Taylorův rozvoj. Funkce `Series`. Obsahuje minimálně dva parametry, prvním je funkce, kterou chceme aproximovat a za ní následuje trojice údajů ve složené závorce pro každou využitou proměnnou. Těmito údaji je jednak proměnná, které se týkají, dále bod, v němž se aproximuje a poslední je stupeň aproximace.

```
In[89]:= Series[x^2 - 2 x + 3 y, {x, 0, 3}, {y, 0, 3}]
Out[89]= (3 y + O[y]^4) - 2 x + x^2 + O[x]^4
```



Obr. 9. Aproximace funkce Taylorovým rozvojem třetího stupně.

3.6 Extrémy funkce

Lokální a globální extrémy funkce se podrobně probírají ve skriptech Diferenciální počet funkcí více proměnných s aplikacemi v kapitole 5.7.

Příkazy `FindMaximum` a `FindMinimum` umožňují hledání lokálních extrémů zadaných funkcí. Prvním parametrem příkazu je samotná funkce a druhým je proměnná, eventuálně doplněná o počáteční bod, ze kterého se extrém hledá.

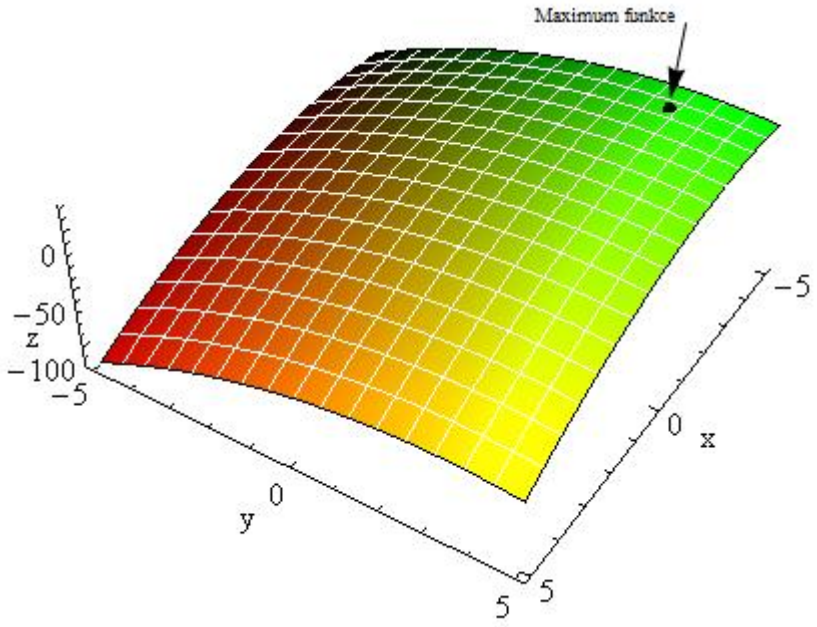
Pokud dojde k nalezení daného extrému, pak je výsledkem operace výpis složený z několika částí. První je funkční hodnota v objeveném extrému, za ním následuje složená závorka, ve které jsou hodnoty všech nezávisle proměnných pro daný extrém.

```
In[27]:= FindMaximum[-x^2 - 3 y^2 + 5 x - 6 y + 2 x * y, {{x, 1}, {y, 3}}]
Out[27]= {6.375, {x → 2.25, y → -0.25}}
```

K nalezení globálních extrémů slouží příkazy `Maximize` a `Minimize`. Prvním jejich parametrem je zkoumaná funkce, druhým je proměnná, nebo proměnné, ke kterým se extrém vztahuje a na třetím místě je nepovinný parametr upřesňující číselný obor, do kterého proměnné patří. Pokud není zadán, pak Mathematica předpokládá, že pracuje s reálnými čísly.

```
In[82]:= Minimize[2 y^2 + 2 x - 12 y - 2 y Sqrt[x], {x, y}, Reals]
Out[82]= {-24, {x → 4, y → 4}}
```

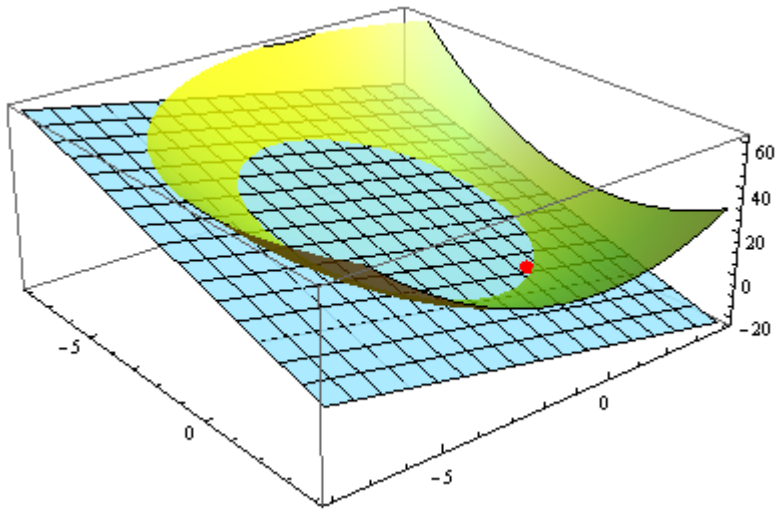
```
In[113]:= Maximize[-x^2 - y^2 - 7 x + 6 y, {x, y}, Integers]
Out[113]= {21, {x → -4, y → 3}}
```



Obr. 10. Maximum funkce, označené bodem.

Rozšířením těchto funkcí je omezení hledaného extrému na určitou oblast definovanou relací (tzv. vazbou). Ta se vepisuje do složené závorky společně s původní funkcí. Jde o úlohu na hledání tzv. vázaného extrému.

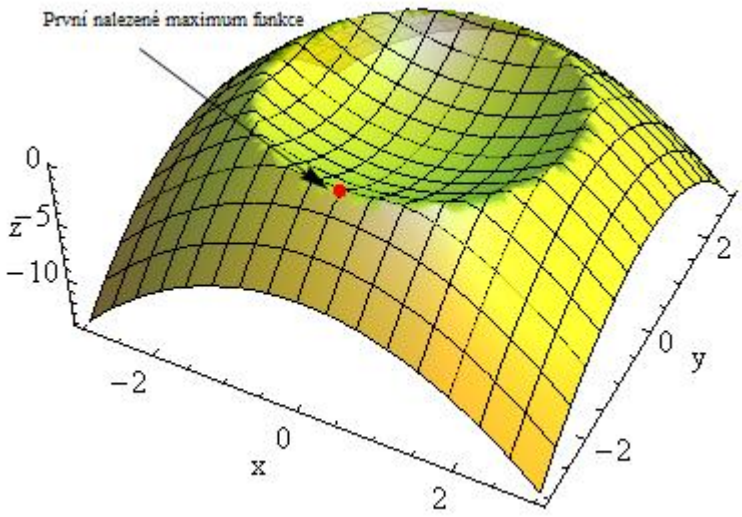
```
In[54]:= FindMinimum[{-4 x - 3 y + 6, x^2 + y^2 == 1}, {{x, 3}, {y, 1}}]
Out[54]= {1., {x → 0.8, y → 0.6}}
```



Obr. 11. Minimum funkce omezené kulovou plochou, vyznačené červeným bodem.

Pokud však existuje více bodů se stejnou hodnotou, jako globální extrém, je určen vždy jen jeden bod.

```
In[206]:= Maximize[-Abs[x^2 + y^2 - 4], {x, y}]
Out[206]= {0, {x → 0, y → -2}}
```

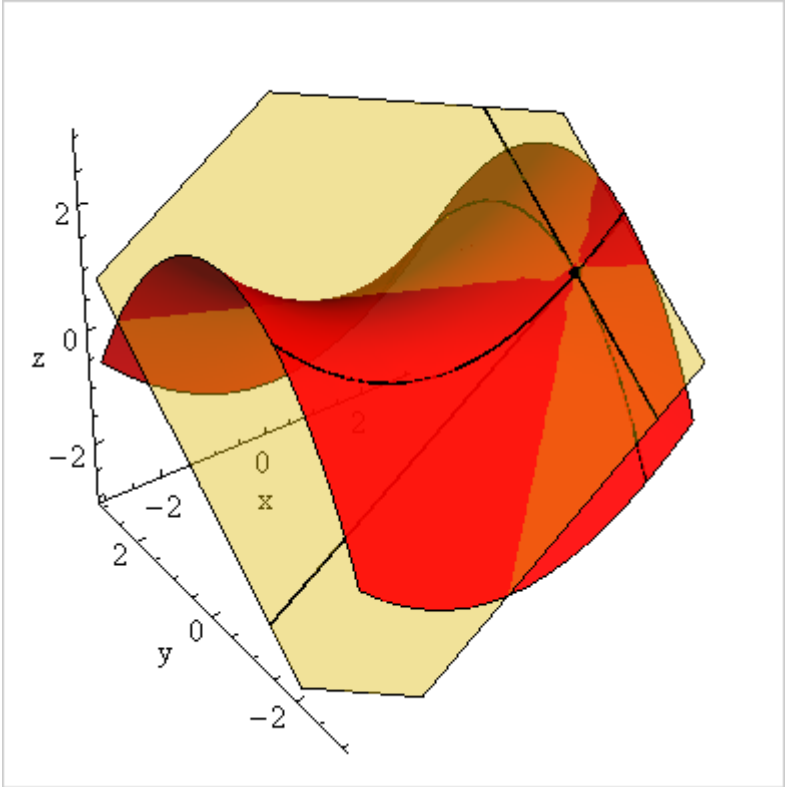


Obr. 12. Jako globální extrém je vždy označen jen jeden bod.

3.7 Derivace v bodě

Součástí této práce je soubor vytvořený v prostředí Mathematica znázorňující polohu a tvar tečné roviny k funkci v bodě, jehož souřadnice je možné upravit. V závislosti na poloze bodu se dynamicky přesouvá i tečná rovina a vypočítává se hodnota směrnic tečen podle os *x* a *y*. Na výběr je pět různých funkcí a každá z nich má upravitelné parametry měnící jejich tvar. V případě Gaussova klobouku a rotační kuželové plochy dochází k náročným výpočtům, které způsobují výrazné snížení výkonu. Z toho důvodu je u těchto funkcí možnost snížit kvalitu zobrazované funkce a tím zrychlit odezvu programu.

Prioritním účelem tohoto souboru je jeho využití při přednáškách k demonstraci derivace funkce v určitém bodě.



Obr. 13. Zobrazení tečné roviny hyperbolického paraboloidu v příloze *Derivace v bodě*.

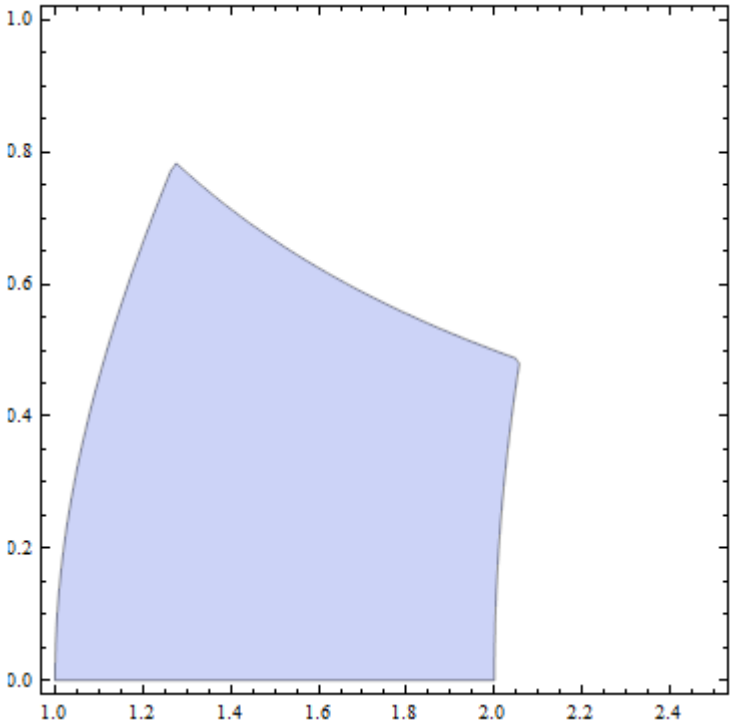
4 INTEGRÁLNÍ POČET

Tato kapitola rozšiřuje skripta Integrální počet funkcí více proměnných s aplikacemi o možnosti softwaru Mathematica. Jednotlivá témata jsou probírána ve stejném pořadí.

4.1 Dvojný a trojný integrál

Riemannův dvojný a trojný integrál se podrobně probírá ve skriptech Integrální počet funkcí více proměnných s aplikacemi v kapitole 1.

4.1.1 Riemannův dvojný integrál



Obr. 14. Vizualizace ohraničené plochy funkcí *RegionPlot*.

Teoretický popis Riemannova integrálu se nachází v teoretické části, v kapitole Riemannův integrál.

Integrace se provádí příkazem `Integrate`, kde funkce je prvním argumentem a následují proměnné v obráceném pořadí integrace, neboli nejdříve se integruje podle poslední zadané proměnné.

Pokud se jedná o určitý integrál, doplníme každou proměnnou o počátek a konec integrovaného intervalu.

```
In[29]:= Integrate[1/(x + y)^2, {x, 3, 4}, {y, 1, 2}]

Out[29]= Log[25/24]
```

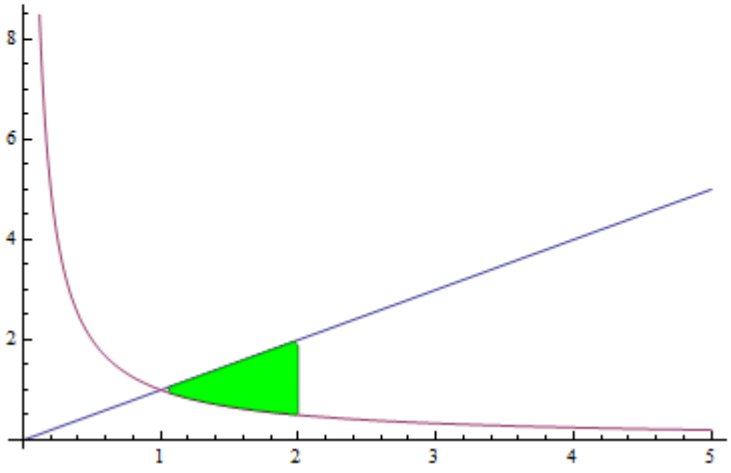
```
In[1]:= Integrate[x^2 y * e^(x*y), {x, 0, 1}, {y, 0, 2}]

Out[1]= 2
```

Pokud jsou součástí mezí intervalu ostatní proměnné je lepší zapsat příkaz jako integrál v integrálu, jinak hrozí, že Mathematica bude proměnné v mezích považovat za parametry.

```
In[6]:= Integrate[Integrate[(x^2) / (y^2), {y, 1 / x, x}], {x, 1, 2}]

Out[6]= 9/4
```

```
In[17]:= Show[{Plot[{x, 1 / x}, {x, 0, 5}],
   RegionPlot[1 < x < 2 && 1 / x < y < x, {x, 0, 5}, {y, 0, 5},
    PlotStyle → Green]}]
```

Out[17]=



Obr. 15. Zobrazení integrace pomocí kombinace funkcí *Plot* a RegionPlot.

K přímému získání číselného výsledku je určen příkaz `NIntegrate`.

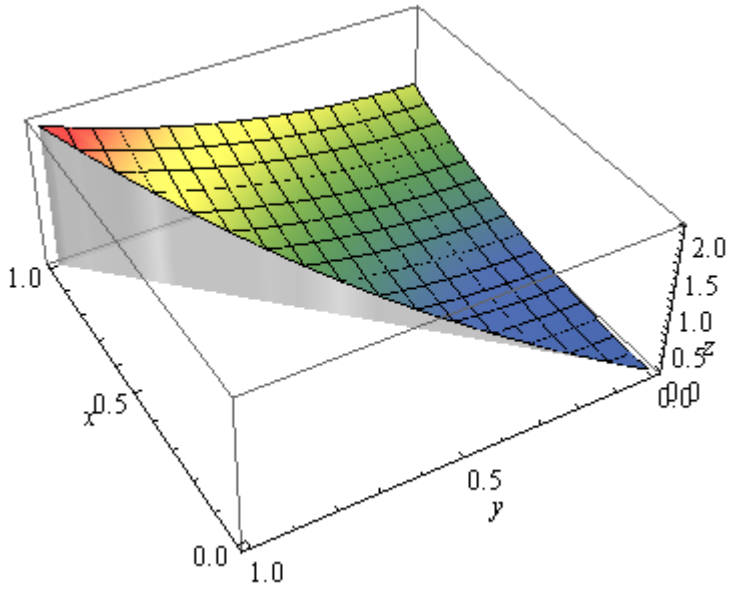
```
In[4]:= NIntegrate[x^y, {x, 0, 1}, {y, 1, 2}]

Out[4]= 0.405465
```

K formulaci integrace je možné použít i šablony z pomocné palety základních příkazů v záložce *Calculus Commands*. Příkaz takto připomíná psanou formu a je přehlednější, než příkaz zadaný v programovém kódu.

In[2]:= $\int_0^1 \int_0^x \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

Out[2]= $\frac{1}{3}$

Tato forma může být zadána i bez palety pomocí zápisů `\[Integral]` a `\[DifferentialD]`.



Obr. 16. Vizualizace integrálu funkcí Plot3D.

Pokud se v integrované funkci vyskytují symbolické koeficienty, je možné omezit jejich rozsah a tím množství možných výsledků dodatkem `Assumptions` do integrace.

```
In[3]:= Integrate[x^n, {x, 0, 1}]
Out[3]= If[Re[n] > -1, 1/(1 + n), Integrate[x^n, {x, 0, 1}, Assumptions → Re[n] ≤ -1]]

In[4]:= Integrate[x^n, {x, 0, 1}, Assumptions -> n > 0]
Out[4]= 1/(1 + n)
```

Příklad: Dvojným integrálem určete obsah množiny, která je ohraničena křivkami $x^2 - y + 2 = 0$, $x + y - 4 = 0$.

```
In[93]:= Integrate[1, {x, -2, 1}, {y, x^2 + 2, 4 - x}]
Out[93]= 9/2
```

Příklad: Určete náboj $Q(M)$ velmi tenké desky $M = \{(x,y) \in \mathbb{E}_2 \mid x^2 + y^2 \geq a^2 \wedge (x-a)^2 + y^2 \leq a^2\}$ s homogenní hustotou náboje $q\ \left(\mathrm{C \cdot m^{-2}}\right)$ a využijte transformaci i symetrii M.

$$Q(M) = \iint h\, dx dy = \iint h \cdot \rho\, d\rho d\varphi = 2h \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_a^{2a\cdot\cos(\varphi)} \rho\, d\rho.$$

```
In[1]:= Integrate[2 * h * ρ, {φ, 0, Pi / 3}, {ρ, a, 2 a * Cos[φ]}]
```

$$\text{Out[1]= } \frac{1}{6}\, a^2\, h \left(3\sqrt{3} + 2\pi\right)$$

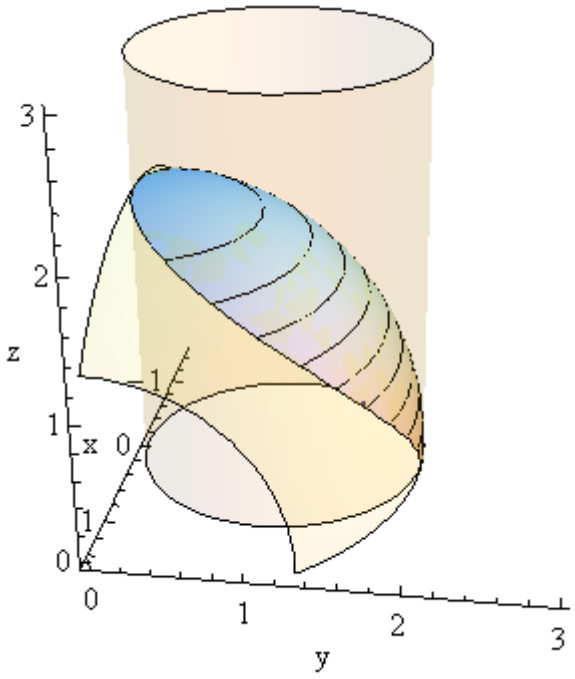
Příklad: Najděte náboj $Q(S)$ na skořepině S s homogenním rozložením hustoty náboje $q\ \left(\mathrm{C \cdot m^{-2}}\right)$, kde S je části sféry $S: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ležící ve válcovém poloprostoru $x^2 + y^2 \leq Ry,\ z \geq 0,\ R \geq 0$.

$$Q(S) = \iint q\, dS = \iint q \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dx dy = q \cdot \iint \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\right)^2 + \left(-\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\right)^2}\, dx dy$$

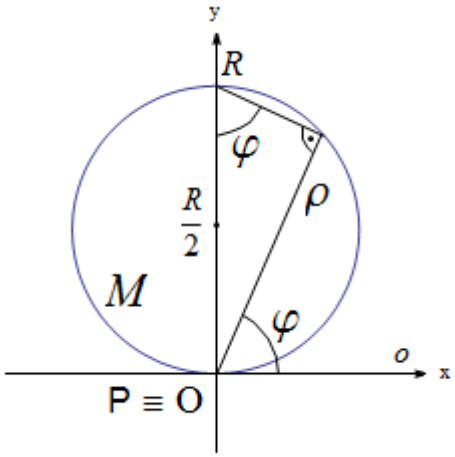
$$= q \iint \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\, dx dy = R_q \iint \frac{\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}}\, d\rho d\rho = 2R_q \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{R\sin(\varphi)} \frac{\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}}\, d\rho$$

```
In[2]:= Integrate[r * q * ρ / Sqrt[r^2 - ρ^2], {φ, 0, Pi}, {ρ, 0, r * Sin[φ]},
          Assumptions → {r ≥ 0}]
```

$$\text{Out[2]= } (-2 + \pi)\, q\, r^2$$



Obr. 17. Zobrazení části skořepiny S k předchozímu příkladu.



Obr. 18. Názorný popis souřadnic k předchozímu příkladu.

4.1.2 Trojný integrál

Způsob zadávání trojného integrálu se neliší od integrálu dvojného.

```
In[13]:= Integrate[x^2 * y * z, {x, 1, 3}, {y, 0, 2}, {z, 1, 2}]
Out[13]= 26
```

Při zadávání písemné formy je potřeba brát v úvahu pořadí výpočtu. Diferenciál proměnné první v pořadí odpovídá integrálu nejvíce vnějšímu a je vypočítán poslední, neboli se počítá zleva doprava.

```
In[21]:= Integrate[z^4 * Sin[y]^3, {z, 0, x}, {y, 0, Pi / 2}, {x, 0, Pi}]
Out[21]= 2 π x^5 / 15
```

U zadání symbolickou formou přes paletu příkazů postupuje Mathematica v klasickém pořadí zprava doleva.

```
In[14]:= ∫_0^π ∫_0^(π/2) ∫_0^x z^4 * Sin[y]^3 dz dy dx
Out[14]= π^6 / 45
```

Příklad: Stanovte objem tělesa určeného podmínkami $-1 \le x \le 1, -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}, 0 \le z \le 1 - x^2 - y^2$.

```
In[87]:= Integrate[1, {x, -1, 1}, {y, -Sqrt[1 - x^2], Sqrt[1 - x^2]}, {z, 0, 1 - x^2 - y^2}]
Out[87]= Pi/2
```

4.1.3 Transformace souřadnic

Transformace vícerozměrných integrálů se podrobně probírají ve skriptech Integrální počet funkcí více proměnných s aplikacemi v kapitole 1.4.

Funkce operující se souřadnicovými systémy vyžadují nástroj Vector Analysis Package, jehož nahrání je podrobně popsáno v kapitole Gradient.

Pro nastavení základního systému souřadnic, se kterým bude Mathematica pracovat, slouží příkaz `SetCoordinates` s typem souřadnic jako parametrem. Součástí výstupu jsou názvy os ve formátu používaném v celém balíku Vector Analysis Package. K zjištění aktuálně nastaveného systému se použije příkaz `CoordinateSystem` bez parametrů.

Základní souřadnicové systémy se kterými Mathematica dokáže pracovat jsou kartézské, cylindrické a sférické. Ostatní nejsou v rozsahu předmětu Matematika II. Polární souřadnice v E_2 jsou považovány za specielní případ cylindrických souřadnic v E_3, kdy $z = 0$.

```
In[38]:= Needs["VectorAnalysis`"]

In[39]:= SetCoordinates[Cylindrical]
Out[39]= Cylindrical[Rr, Ttheta, Zz]

In[40]:= CoordinateSystem
Out[40]= Cylindrical
```

Užitečným příkazem je `CoordinatesFromCartesian`, který slouží pro převod z kartézských souřadnic bodu do jiných souřadnic. Tato funkce má dva parametry, prvním je trojice bodů z kartézské soustavy souřadnic ve složené závorce a druhým jsou souřadnice, do kterých chceme převádět. Pro korektní výsledek je nutné dodržet správné pořadí. Převod můžeme využít pro následný výpočet integrálu v cylindrických nebo sférických souřadnicích.

In[24]:= `CoordinatesFromCartesian[{x, y, z}, Cylindrical] // TraditionalForm`

Out[24]//TraditionalForm=

$$\left\{\sqrt{x^2+y^2}\ ,\ \tan^{-1}(x,\ y),\ z\right\}$$

In[25]:= `CoordinatesFromCartesian[{x, y, z}, Spherical] // TraditionalForm`

Out[25]//TraditionalForm=

$$\left\{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ ,\ \cos^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right),\ \tan^{-1}(x,\ y)\right\}$$

Mathematica má snahu formovat výsledky do tvarů, maximálně odpovídajících její syntaxi, proto výraz $\tan^{-1}(x,y)$ je ve skutečnosti $ArcTan\left(\frac{y}{x}\right)$. Některé výsledky transformace je nutné dále zjednodušit.

Jeden příkaz dokáže pracovat jen s jednou množinou souřadnic v jednom zápisu, proto je potřeba převést jednotlivé meze v oddělených příkazech.

In[33]:= `CoordinatesFromCartesian[{5/2, 5 Sqrt[3]/2, 3}, Cylindrical]`

Out[33]= $\left\{5,\ \frac{\pi}{3},\ 3\right\}$

In[43]:= `CoordinatesFromCartesian[{-5/2, 3/2, 4}, Spherical]`

Out[43]= $\left\{\frac{7}{\sqrt{2}},\ \text{ArcCos}\left[\frac{4\sqrt{2}}{7}\right],\ \pi - \text{ArcTan}\left[\frac{3}{5}\right]\right\}$

Využitelnost této funkce je však omezena skutečností, že funguje pouze pro jeden bod. Navíc nedokáže pracovat s proměnnými, ani když jsou definovány formou nástroje Vector Analysis, což považuji za závažný nedostatek. Například zadání $Xx^2 + Yy^2$ překvapivě netransformuje na Rr^2.

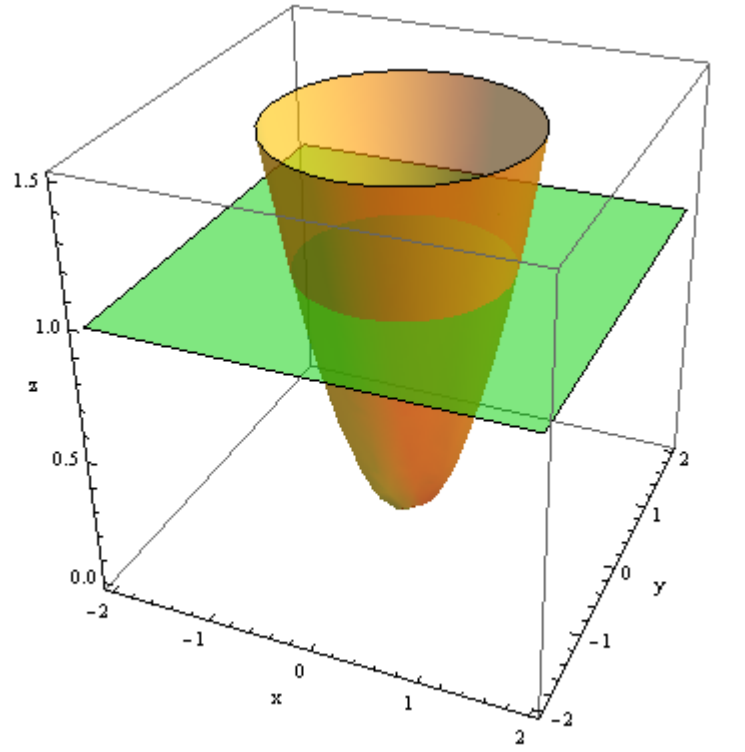
V následujících příkladech použijeme označení ze skript.[12]

[12] Mathematica v případě integrace nevyžaduje specifické značení.

```
In[131]:= Integrate[ρ^2 * Sin[ϑ], {ρ, 0, 2}, {ϑ, 0, Pi / 2}, {ϕ, 0, Pi / 2}]
Out[131]= 4 π / 3

In[132]:= Integrate[2 ρ, {ϕ, 0, 2 Pi}, {ρ, a, 2 a}, {z, 0, Sqrt[4 a^2 - ρ^2]}]
Out[132]= 4 Sqrt[3] (a^2)^(3/2) π
```

Příklad: Stanovte objem tělesa zdola ohraničeného paraboloidem $z = x^2 + y^2$ a zhora rovinou $z = 1$.

```
In[118]:= Integrate[1, {ρ, 0, 1}, {ϕ, 0, 2 Pi}, {z, ρ^2, 1}]
Out[118]= 4 π / 3
```



Obr. 19. Zobrazení situace v předchozím příkladě.

Příklad: Najděte objem tělesa ohraničeného plochami $z = a - 2\sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 0$, $a \in \mathbf{R}^+$.

```
In[106]:= Integrate[1, {ρ, 0, 2}, {ϕ, 0, Pi}, {z, 0, a - 2 ρ}]
Out[106]= -4 π + 2 a π
```

Pro zpětný převod funguje `CoordinatesToCartesian`, kde druhým parametrem funkce je systém souřadnic, ze kterého souřadnice převádíme.

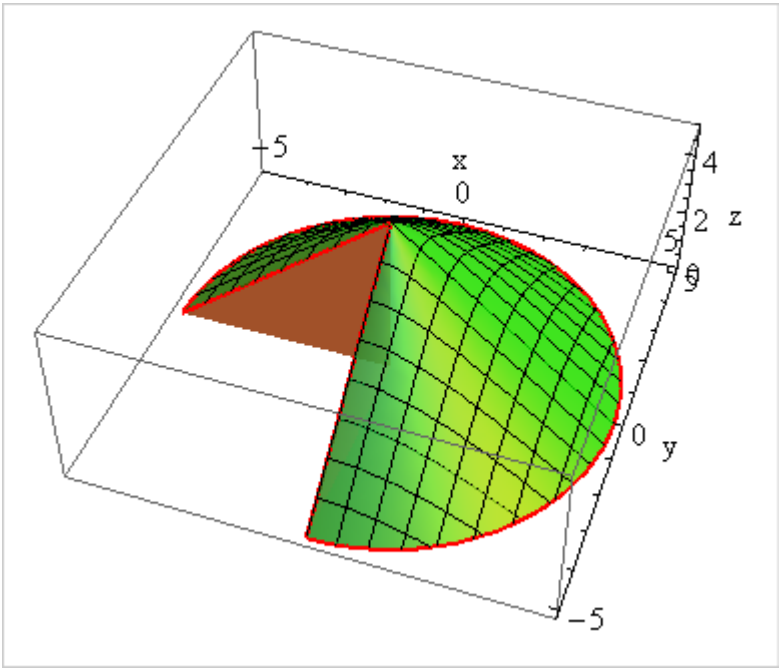
```
In[35]:= CoordinatesToCartesian[{r, ϑ, z}, Cylindrical]
Out[35]= {r Cos[ϑ], r Sin[ϑ], z}

In[36]:= CoordinatesToCartesian[{r, ϑ, ϕ}, Spherical]
Out[36]= {r Cos[ϕ] Sin[ϑ], r Sin[ϑ] Sin[ϕ], r Cos[ϑ]}
```

4.2 Aplikace integrálu funkce tří proměnných

Součástí této práce je soubor vytvořený v prostředí Mathematica demonstrující vlastnosti a využití integrálního počtu. Zobrazuje trojrozměrné funkce vymezující určitou oblast, která je dále ohraničena. V závislosti na ohraničení oboru integrace, které si může uživatel upravit se vypočítá objem zobrazené oblasti.

Výjimku tvoří oddíl *Rotující těleso*, který obsahuje válec otáčející se kolem osy *z*. Vzhledem k proměnným parametrům jako je rychlost otáčení, vzdálenost od osy *z* a hustota tělesa je vypočítána jeho kinetická energie.

Prioritním účelem tohoto souboru je jeho využití při přednáškách k demonstraci integrace funkce.



Obr. 20. Zobrazení zvoleného výřezu kužele v příloze *Integrace funkce tří proměnných*.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

[1] DOBRAKOVOVÁ, Jana; KOVÁČOVÁ, Monika; ZÁHONOVÁ, Viera. Mathematica 5.2 : tréninkové materiály. Bratislava : Slovenská technická univerzita v Bratislavě, 2008. 277 s. ISBN 80-969562-2-1.

[2] ELKAN. Mathematica [online]. 2011 [cit. 2011-03-03]. Dostupné z WWW: <http://www.mathematica.cz/>.

[3] FIALKA, Miloslav. Diferenciální počet funkcí více proměnných s aplikacemi. Vydání třetí. [s.l.] : Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2008. 145s. ISBN 978-80-7318-665-4.

[4] FIALKA, Miloslav. Integrální počet funkcí více proměnných s aplikacemi. Vydání třetí. [s.l.] : Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2008. 103s. ISBN 978-80-7318-668-5.

[5] CHRAMCOV, Bronislav. Základy práce v prostředí Mathematica. Vyd. 2. Zlín : Univerzita Tomáše Bati, 2006. 122 s. ISBN 80-7318-510-5.

[6] MAŘÍK, Robert. *Mendelova univerzita v Brně* [online]. 2007 [cit. 2011-04-22]. Riemannův integrál. Dostupné z WWW: <http://user.mendelu.cz/marik/mat-web/mat-webse10.html>.

[7] WITHOFF, Dave; ZELLER, Tom. Re: Limits. In Wolfram Research. Wolfram:Student Support Forum [online]. [s.l.]:[s.n.], 1998 [cit.2011-02-26]. Dostupné z WWW: <http://forums.wolfram.com/student-support/topics/1441>.

[8] Wolfram Research. Wolfram [online]. 2011 [cit. 2011-02-01]. Dostupné z WWW: <http://www.wolfram.com/>.

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr. 1. Ukázka našeptávače příkazů. 6
Obr. 2. Paleta základních nástrojů pro derivace a integrace. 7
Obr. 3. Ukázka šablony pro derivaci funkce dvou proměnných, několikanásobnou derivaci funkce dvou proměnných a určitý integrál funkce dvou proměnných. 7
Obr. 4. Grafické znázornění vektorů pomocí funkce Graphics3D. 15
Obr. 5. Zobrazení definičního oboru funkce dvou proměnných. 18
Obr. 6. Zobrazení definičního oboru funkce dvou proměnných s barevným rozlišením hodnoty funkce. 19
Obr. 7. Zobrazení průřezu definičního oboru funkce tří proměnných. 20
Obr. 8. Vizualizace tečné plochy v programu Mathematica pomocí funkce *ContourPlot3D*. 21
Obr. 9. Aproximace funkce Taylorovým rozvojem třetího stupně. 24
Obr. 10. Maximum funkce, označené bodem. 26
Obr. 11. Minimum funkce omezené kulovou plochou, vyznačené červeným bodem. 26
Obr. 12. Jako globální extrém je vždy označen jen jeden bod. 27
Obr. 13. Zobrazení tečné roviny hyperbolického paraboloidu v příloze *Derivace v bodě*. 28
Obr. 14. Vizualizace ohraničené plochy funkcí *RegionPlot*. 29
Obr. 15. Zobrazení integrace pomocí kombinace funkcí *Plot* a RegionPlot. 30
Obr. 16. Vizualizace integrálu funkcí Plot3D. 31
Obr. 17. Zobrazení části skořepiny S k předchozímu příkladu. 32
Obr. 18. Názorný popis souřadnic k předchozímu příkladu. 33
Obr. 19. Zobrazení situace v předchozím příkladě. 36
Obr. 20. Zobrazení zvoleného výřezu kužele v příloze *Integrace funkce tří proměnných*. 37