

# **Diferenciální počet funkce více proměnných sbírka řešených a neřešených příkladů**

Differential calculus of functions of more variables  
collection of solved and unsolved examples

Lucie Vančurová

---

Bakalářská práce  
2011



Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně  
Fakulta aplikované informatiky

---

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně  
Fakulta aplikované informatiky  
akademický rok: 2010/2011

## ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Lucie VANČUROVÁ**  
Osobní číslo: **A08384**  
Studijní program: **B 3902 Inženýrská informatika**  
Studijní obor: **Bezpečnostní technologie, systémy a management**

Téma práce: **Diferenciální počet funkce více proměnných – sbírka řešených a neřešených příkladů**

Zásady pro vypracování:

1. Definujte základní pojmy z teorie diferenciálního počtu funkce více proměnných.
2. Jednotlivé pojmy demonstруйте na řešených příkladech. Zaměřte se zejména na určování definičních oborů funkcí dvou proměnných, výpočet parciálních derivací funkcí zadaných explicitně i implicitně, zjišťování lokálních a globálních extrémů.
3. Ke každému typu úloh uveďte sérii neřešených příkladů i s výsledky k procvičení dané problematiky.
4. Uveďte některé příklady z praxe, v nichž se využívá diferenciálního počtu funkce více proměnných.

Rozsah bakalářské práce:

Rozsah příloh:

Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

1. THOMAS, G. B.; WEIR, M. D.; HASS, J.; GIORDANO, F. R. Thomas Calculus, Media Upgrade (11th Edition). Amazon, 2007. ISBN 0-321-48987-X.
2. MENDELSON, E. Schaums 3000 solved problems in calculus. McGraw-Hill, 1988. ISBN 0-07-041480-7.
3. DOŠLÁ, Z.; DOŠLÝ, O. Diferenciální počet funkcí více proměnných. Brno, 2006. ISBN 80-210-4159-5.
4. OSTRAVSKÝ, J. Diferenciální počet funkce více proměnných. Nekonečné číselné řady. Zlín, 2009. ISBN 978-80-7318-856-6.
5. KOPKA, H.; DALY, P. W. Latex - kompletní průvodce. Brno, 2004. ISBN 80-7226-973-9.
6. TOMICA, R. Cvičení z matematiky II. Brno, 1974.

Vedoucí bakalářské práce:

**Mgr. Lubomír Sedláček, Ph.D.**

Ústav matematiky

Datum zadání bakalářské práce:

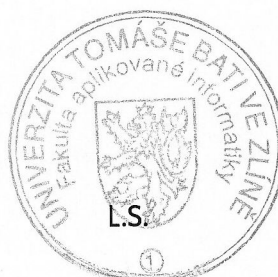
**25. února 2011**

Termín odevzdání bakalářské práce:

**23. května 2011**

Ve Zlíně dne 25. února 2011

prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.  
*děkan*



doc. Mgr. Milan Adámek, Ph.D.  
*ředitel ústavu*

## ABSTRAKT

Cílem bakalářské práce bylo vytvořit sbírku řešených a neřešených příkladů z diferenciálního počtu funkce více proměnných, která by měla sloužit jako studijní opora zejména studentům bakalářského studia na FAI UTB v předmětu Matematika II. Sbíрка obsahuje především řešené příklady, které jim mají pomoci k lepšímu pochopení a zvládnutí dané problematiky.

Klíčová slova: eukleidovský prostor, funkce více proměnných, definiční obor, parciální derivace, stacionární bod, lokální minimum, lokální maximum, implicitní funkce, diferenciál.

## ABSTRACT

The purpose of this bachelor thesis was to create a collection of solved and unsolved examples of differential calculus of functions of more variables, which should serve as a learning aid for bachelor students, studying Mathematics II at the Faculty of Applied Informatics, UTB, Zlín. The collection contains mainly solved examples to better help understand and deal with the issue.

Keywords: euclid space, function of more variables, domain of definition, partial derivate, stationary point, local minimum, local maximum, implicit function, differential.

Na tomto místě bych ráda poděkovala vedoucímu bakalářské práce panu Mgr. Lubomíru Sedláčkovi, Ph.D. za obětavý přístup a veškerý čas, který mi věnoval při konzultacích.

Prohlašuji, že

- beru na vědomí, že odevzdáním bakalářské práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb. o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších právních předpisů, bez ohledu na výsledek obhajoby;
- beru na vědomí, že bakalářská práce bude uložena v elektronické podobě v univerzitním informačním systému dostupná k prezenčnímu nahlédnutí, že jeden výtisk bakalářské práce bude uložen v příruční knihovně Fakulty aplikované informatiky UTB ve Zlíně a jeden výtisk bude uložen u vedoucího práce;
- byl/a jsem seznámen/a s tím, že na moji bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších právních předpisů, zejm. § 35 odst. 3;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 1 autorského zákona má UTB ve Zlíně právo na uzavření licenční smlouvy o užití školního díla v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 2 a 3 autorského zákona mohu užít své dílo -bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití jen s předchozím písemným souhlasem UTB ve Zlíně, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly UTB ve Zlíně na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše);
- beru na vědomí, že pokud bylo k vypracování bakalářské práce využito softwaru poskytnutého UTB ve Zlíně nebo jinými subjekty pouze ke studijním a výzkumným účelům (tedy pouze k nekomerčnímu využití), nelze výsledky bakalářské práce využít ke komerčním účelům;
- beru na vědomí, že pokud je výstupem bakalářské práce jakýkoliv softwarový produkt, považují se za součást práce rovněž i zdrojové kódy, popř. soubory, ze kterých se projekt skládá. Neodevzdání této součásti může být důvodem k neobhájení práce.

Prohlašuji, že

jsem na bakalářské práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval. V případě publikace výsledků budu uveden jako spoluautor.

Ve Zlíně

.....

podpis diplomanta

## Obsah

ÚVOD .....	8
<b>I</b> <b>TEORETICKÁ ČÁST</b> .....	<b>8</b>
1 <b>Metrické prostory</b> .....	<b>10</b>
2 <b>Reálná funkce <math>n</math>-reálných proměnných</b> .....	<b>14</b>
3 <b>Limita a spojitost funkce více proměnných</b> .....	<b>15</b>
4 <b>Parciální derivace</b> .....	<b>17</b>
4.1 <b>PARCIÁLNÍ DERIVACE 1. ŘÁDU</b> .....	17
4.2 <b>PARCIÁLNÍ DERIVACE VYŠŠÍCH ŘÁDŮ</b> .....	19
5 <b>Totální diferenciál</b> .....	<b>20</b>
6 <b>Lokální extrémy</b> .....	<b>21</b>
7 <b>Absolutní (globální) extrémy</b> .....	<b>23</b>
8 <b>Funkce zadaná implicitně</b> .....	<b>24</b>
<b>II</b> <b>PRAKTICKÁ ČÁST</b> .....	<b>24</b>
9 <b>Definiční obory</b> .....	<b>26</b>
9.1 <b>ŘEŠENÉ PŘÍKLADY</b> .....	26
9.1.1 <b>Racionální lomené funkce</b> .....	26
9.1.2 <b>Iracionální funkce</b> .....	27
9.1.3 <b>Logaritmické funkce</b> .....	29
9.1.4 <b>Cyklometrické funkce</b> .....	31
9.2 <b>NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ</b> .....	33
10 <b>Parciální derivace</b> .....	<b>34</b>
10.1 <b>ŘEŠENÉ PŘÍKLADY</b> .....	34
10.2 <b>NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ</b> .....	37
10.3 <b>PARCIÁLNÍ DERIVACE VYŠŠÍCH ŘÁDŮ</b> .....	38
10.3.1 <b>Řešené příklady</b> .....	38
10.3.2 <b>Neřešené příklady k procvičení</b> .....	39
11 <b>Diferenciál funkce</b> .....	<b>40</b>
11.1 <b>ŘEŠENÉ PŘÍKLADY</b> .....	40
11.2 <b>NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ</b> .....	41
12 <b>Výpočet přibližné hodnoty výrazu</b> .....	<b>42</b>
12.1 <b>ŘEŠENÉ PŘÍKLADY</b> .....	42
12.2 <b>NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ</b> .....	43
13 <b>Implicitně zadaná funkce</b> .....	<b>44</b>

---

13.1	IMPLICITNĚ ZADANÁ FUNKCE JEDNÉ PROMĚNNÉ .....	44
13.1.1	Řešené příklady .....	44
13.2	IMPLICITNĚ ZADANÁ FUNKCE DVOU PROMĚNNÝCH .....	45
13.2.1	Řešené příklady .....	45
13.3	NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ .....	46
<b>14</b>	<b>Lokální extrémy .....</b>	<b>47</b>
14.1	ŘEŠENÉ PŘÍKLADY .....	47
14.2	NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ .....	51
<b>15</b>	<b>Globální extrémy .....</b>	<b>52</b>
15.1	ŘEŠENÉ PŘÍKLADY .....	52
15.2	NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ .....	58
<b>16</b>	<b>Aplikace s použitím diferenciálního počtu funkce více proměnných .....</b>	<b>59</b>
	<b>SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY .....</b>	<b>65</b>
	<b>SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK .....</b>	<b>66</b>
	<b>SEZNAM OBRÁZKŮ .....</b>	<b>67</b>

## ÚVOD

Jedním ze základů matematické analýzy je teorie diferenciálního počtu funkce více proměnných. V mnoha technických, přírodovědných a ekonomických oborech se můžeme setkat s veličinami, jejichž hodnoty závisí na větším počtu proměnných. Například rychlost je závislá na čase a dráze, napětí v elektrickém obvodu na hodnotách proudu a odporu, ekonomický zisk na nákladech a ceně, apod. Právě teorie funkce více proměnných popisuje takovéto závislosti.

Práce je rozdělena na teoretickou a praktickou část. V teoretické části jsou vysvětleny základní pojmy diferenciálního počtu funkce více proměnných jako eukleidovský prostor, limita a spojitost funkce, parciální derivace, totální diferenciál, implicitní funkce, lokální a globální extrémy. V praktické části jsou uvedeny řešené příklady s podrobným popisem postupu řešení, což umožňuje snazší pochopení dané problematiky. K jejímu úspěšnému zvládnutí jsou důležité znalosti diferenciálního počtu funkce jedné proměnné (derivace funkce, geometrický význam derivace funkce v bodě a totální diferenciál funkce).

Celá práce je zpracována v sázecím systému  $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ , který umožňuje tvorbu matematických a technických dokumentů ve vysoké typografické kvalitě.

# I. TEORETICKÁ ČÁST

## 1 Metrické prostory

### Definice 1.1

Nechť  $n \in \mathbb{N}$ . **Uspořádanou  $n$ -ticí reálných čísel**  $(x_1, \dots, x_n)$  nazýváme uspořádaný soubor  $n$  reálných čísel  $x_1, \dots, x_n$  kde index  $i$  čísla  $x_i, i = 1, \dots, n$ , znamená, že číslo  $x_i$  je v daném souboru na  $i$ -tém místě. Množinu všech uspořádaných  $n$ -tic reálných čísel  $(x_1, \dots, x_n)$  nazýváme  **$n$  rozměrným reálným prostorem** a značíme symbolem  $\mathbb{R}^n$ . Reálná čísla  $x_1, \dots, x_n$  nazýváme **souřadnicemi** bodu  $X = [x_1, \dots, x_n]$ .

### Definice 1.2

Nechť  $M$  je libovolná neprázdná množina. Reálná funkce  $\varrho$  definovaná na  $M^2$  taková, že pro každé  $X, Y, Z \in M$  platí:

- |  |                                 |
|--|---------------------------------|
| (1) $\varrho(X, Y) \geq 0$                               | <b>axiom nezápornosti</b>       |
| (2) $\varrho(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$            | <b>axiom totožnosti</b>         |
| (3) $\varrho(X, Y) = \varrho(Y, X)$                      | <b>axiom symetrie</b>           |
| (4) $\varrho(X, Z) \leq \varrho(X, Y) + \varrho(Y, Z)$ , | <b>trojúhelníková nerovnost</b> |

se nazývá **metrika** na množině  $M$  a dvojici  $(M, \varrho)$  nazýváme **metrický prostor**. Prvky množiny  $M$  nazýváme **body** metrického prostoru  $(M, \varrho)$ , množinu  $M$  **nosnou množinou** daného prostoru a číslo  $\varrho(X, Y)$  **vzdáleností** bodů  $X, Y$  v metrickém prostoru  $(M, \varrho)$ .

### Poznámka 1.1

Na množině  $\mathbb{R}^n$  můžeme definovat různé druhy metrik, např. diskrétní, součtová, maximální, eukleidovská, atd.

### Definice 1.3

Nechť  $n \in \mathbb{N}$ . Dvojici  $\mathbb{E}_n = (\mathbb{R}^n, \varrho)$  nazýváme  **$n$  rozměrným eukleidovským prostorem**, jestliže pro každé dva body tohoto prostoru  $X = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$ ,  $Y = [y_1, \dots, y_n] \in \mathbb{R}^n$  je definována jejich metrika  $\varrho: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  vztahem:

$$\varrho(X, Y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}. \quad (1)$$

Metrika  $\varrho$  se v tomto případě nazývá **eukleidovská metrika**.

**Definice 1.4**

Je dáno reálné číslo  $\delta > 0$  a libovolný bod  $A = [a_1, \dots, a_n] \in \mathbb{E}_n$ . **Okolím  $\mathcal{O}(A)$  bodu  $A$**  nazýváme množinu

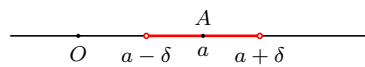
$$\mathcal{O}(A) = \{X \in \mathbb{E}_n; \varrho(X, A) < \delta\},$$

kde  $\varrho$  je metrika v  $\mathbb{E}_n$ .

**Ryzím okolím bodu  $A$**  rozumíme množinu  $\mathcal{O}(A) \setminus \{A\}$ .

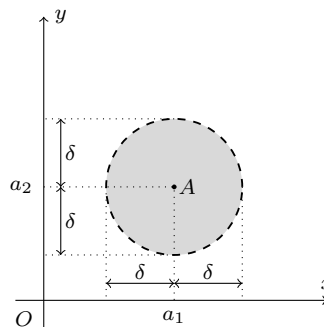
**Příklad 1.1** Okolí bodu  $A$  v eukleidovské metrice  $\varrho_e$ :

(1) Okolí bodu  $A \in \mathbb{E}_1$  je otevřený interval.



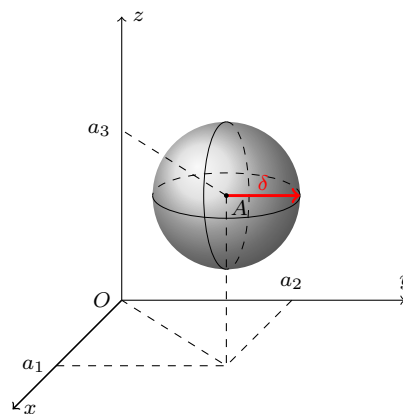
Obrázek 1. Okolí bodu v  $\mathbb{E}_1$

(2) Okolí bodu  $A \in \mathbb{E}_2$  je otevřený kruh (kruh bez bodů ležících na jeho hranici, jíž je kružnice).



Obrázek 2. Okolí bodu v  $\mathbb{E}_2$

(3) Okolí bodu  $A \in \mathbb{E}_3$  je otevřená koule (koule bez bodů tvořící její povrch).



Obrázek 3. Okolí bodu v  $\mathbb{E}_3$

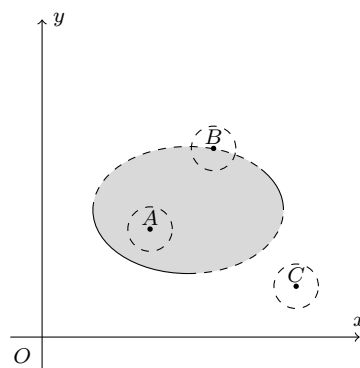
**Definice 1.5**

Uvažujme množinu  $M \subset \mathbb{E}_n$ . Bod  $A$  se nazývá:

- (1) **vnitřní bod** množiny  $M$ , jestliže alespoň jedno jeho okolí je podmnožinou množiny  $M$ ,
- (2) **hraniční bod** množiny  $M$ , jestliže každé jeho okolí obsahuje alespoň jeden bod množiny  $M$  a současně alespoň jeden bod, který do množiny  $M$  nepatří,
- (3) **vnější bod** množiny  $M$ , jestliže alespoň jedno jeho okolí neobsahuje žádný bod množiny  $M$ .

Množina vnitřních bodů množiny  $M$  se nazývá **vnitřek** množiny  $M$  a značí se obvykle  $M^\circ$ .

Množina hraničních bodů množiny  $M$  se nazývá **hranice** množiny  $M$  a značí se obvykle  $h(M)$ .



Obrázek 4. Vnitřní, hraniční a vnější bod množiny  $M$

**Definice 1.6**

Množina  $M \subset \mathbb{E}_n$  se nazývá:

- (1) **otevřená** v  $\mathbb{E}_n$ , jestliže každý bod této množiny je jejím vnitřním bodem,
- (2) **uzavřená** v  $\mathbb{E}_n$ , jestliže obsahuje celou svou hranici,
- (3) **omezená** v  $\mathbb{E}_n$ , jestliže existuje koule s konečným poloměrem  $R$  taková, že  $M$  leží uvnitř této koule,
- (4) **kompaktní** v  $\mathbb{E}_n$ , jestliže je současně omezená a uzavřená.

**Definice 1.7**

Množina  $M \subset \mathbb{E}_n$  se nazývá **souvislá** v  $\mathbb{E}_n$ , jestliže každé dva její body lze spojit lomenou čarou ( křivka složená z konečného počtu úseček), která celá leží v  $M$  (tj. každý její bod patří do  $M$ ).

Otevřená souvislá množina se nazývá **oblast**, uzavřená souvislá množina potom **uzavřená oblast**.

## 2 Reálná funkce $n$ -reálných proměnných

Z hlediska historie počátek diferenciálního počtu funkce více proměnných spadá do druhé poloviny 18. století a je spojen se jmény francouzských matematiků J. L. Lagrange a A. M. Legendra a Švýcara L. Eulera.

### Definice 2.1

Nechť  $M \subseteq \mathbb{E}_n, n \geq 1, M \neq \emptyset$ . Zobrazení  $f : M \rightarrow \mathbb{E}_1$  se nazývá **reálná funkce  $n$  reálných proměnných** a množina  $M$  se nazývá **definiční obor** této funkce a značí se  $\mathbf{D}_f$ .

### Poznámka 2.1

- (1) Z předchozí definice vyplývá, že ke každému bodu  $X = [x_1, \dots, x_n] \in M$  je přiřazeno právě jedno reálné číslo  $y \in \mathbb{R}$ .
- (2) Reálné číslo  $y$  značíme  $f(x_1, \dots, x_n)$  nebo  $f(X)$  a nazýváme jej **funkční hodnotou** v bodě  $X = [x_1, \dots, x_n]$ .
- (3) Množinu  $N = f(M)$  hodnot  $y$ , které jsou přiřazeny jednotlivým bodům  $X \in M$ , nazýváme **obor hodnot** funkce  $f(X)$  a značíme  $\mathbf{H}_f$ .
- (4) Funkci dvou proměnných budeme místo  $y = f(x_1, x_2)$  zapisovat ve tvaru  $z = f(x, y)$  a funkci tří proměnných místo  $y = f(x_1, x_2, x_3)$  ve tvaru  $u = f(x, y, z)$ .

### Definice 2.2

Nechť  $f$  je funkce  $n$  proměnných definovaná na množině  $M \subseteq \mathbb{E}_n, n \geq 2$ . **Grafem  $G$  funkce  $f$**  nazýváme množinu bodů

$$G_f = \{[x_1, x_2, \dots, y] \in \mathbb{E}_{n+1}; [x_1, x_2, \dots, x_n] \in M, y = f(x_1, \dots, x_n)\}.$$

### 3 Limita a spojitost funkce více proměnných

Limity funkce jsou jedním ze základních pojmů diferenciálního počtu. Jde o lokální vlastnost funkce, která popisuje chování funkce v ryzím okolí bodu, v němž limitu určujeme. To znamená, že limita nezávisí na funkční hodnotě funkce v tomto bodě.

#### Definice 3.1

Řekneme, že funkce  $f(X)$  má v bodě  $X_0 \in \mathbb{E}_n$  **limitu** rovnou  $L \in \mathbb{R}^*$  (množinu všech reálných čísel  $\mathbb{R}$  spolu s nevlastními body  $+\infty, -\infty$  budeme označovat  $\mathbb{R}^*$ ), jestliže pro každé okolí  $\mathcal{O}(L)$  bodu  $L$  existuje ryzí okolí  $\mathcal{O}(X_0)$  bodu  $X_0$  takové, že pro každý bod  $X \in \mathcal{O}(X_0) \cap D_f$  platí  $f(X) \in \mathcal{O}(L)$ . Píšeme

$$\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = L.$$

#### Poznámka 3.1

Pro funkci dvou proměnných  $z = f(x, y)$  zapisujeme limitu v bodě  $[x_0, y_0]$  ve tvaru

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L.$$

#### Poznámka 3.2

Rozdíl mezi limitou funkce jedné proměnné a více proměnných spočívá v tom, že u funkce jedné proměnné se k limitnímu bodu můžeme blížit pouze po přímce, kdežto u funkce více proměnných je těchto možností nekonečně mnoho (k danému bodu se můžeme blížit po přímkách, parabolách atd.). Aby v daném bodě existovala limita, nesmí záležet na cestě, po které se k danému bodu blížíme. Pokud tedy dostaneme pro různé cesty různé hodnoty limity, znamená to, že v daném bodě limita neexistuje.

Jestliže  $L \in \mathbb{R}$ , nazývá se tato limita **vlastní**, v případě, že  $L = \pm\infty$ , mluvíme o limitě **nevlastní**. Bod  $X_0$  se nazývá **limitní bod**.

#### Definice 3.2

Řekneme, že funkce  $f$  je **spojitá v bodě**  $X_0 \in \mathbb{E}_n$ , jestliže:

- existuje  $f(X_0)$ , tj. funkce  $f$  je v bodě  $X_0$  definována,
- existuje vlastní  $\lim_{X \rightarrow X_0} f(X)$ , tj. funkce  $f$  má v bodě  $X_0$  vlastní limitu,
- platí  $\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = f(X_0)$ .

#### Poznámka 3.2

Pro funkci dvou proměnných dostáváme

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

**Definice 3.3**

Řekneme, že funkce  $f$  je **spojitá na množině**  $M \subseteq \mathbb{E}_2$ , jestliže pro každý bod  $[x_0, y_0] \in M$  platí

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

## 4 Parciální derivace

Dalším základním pojmem diferenciálního počtu je derivace funkce. Pro zavedení tohoto pojmu pro funkci více proměnných je důležité připomenout definici a geometrický význam derivace funkce jedné proměnné.

Derivace funkce  $f : R \rightarrow R$  v bodě  $x_0$  je limita  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ .

Derivace funkce v bodě udává směrnici tečny ke křivce  $y = f(x)$  v bodě  $[x_0, f(x_0)]$ .

Má-li funkce derivaci v bodě  $x_0$ , je v tomto bodě spojitá a existuje také limita funkce.

### 4.1 Parciální derivace 1. řádu

#### Definice 4.1.1

Nechť funkce  $f : \mathbb{E}_2 \rightarrow \mathbb{E}_1$  je definována v okolí bodu  $[x_0, y_0]$ .

1. Má-li funkce  $g(x) = f(x, y_0)$  jedné proměnné  $x$  v bodě  $x_0$  derivaci  $g'(x_0)$ , nazýváme ji parciální derivací podle  $x$  funkce  $f(x, y)$  v bodě  $[x_0, y_0]$  a značíme ji  $f'_x(x_0, y_0)$ .

$$\text{Platí tedy } f'_x(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

2. Má-li funkce  $h(y) = f(x_0, y)$  jedné proměnné  $y$  v bodě  $y_0$  derivaci  $h'(y_0)$  nazýváme ji parciální derivací podle  $y$  funkce  $f(x, y)$  v bodě  $[x_0, y_0]$  a značíme ji  $f'_y(x_0, y_0)$ .

$$\text{Platí tedy } f'_y(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

#### Poznámka 4.1.1

1. Má-li funkce  $z = f(x, y)$  parciální derivace ve všech bodech množiny  $M \subset D_f$ , jsou tyto derivace funkcemi proměnných  $x, y$ . Označujeme je  $f'_x(x, y), f'_y(x, y), z'_x, z'_y, \frac{\partial}{\partial x} f(x, y), \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ .
2. Parciální derivace funkce  $n$  proměnných se definují analogicky. Nechť  $z = f(x_1, \dots, x_n)$  je funkce  $n$  proměnných a bod  $A = [a_1, \dots, a_n] \in \mathbb{E}_n$ . Položme  $g_i(x_i) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$ . Má-li funkce  $g_i(x_i)$  derivaci v bodě  $A$  podle proměnné  $x_i$ , nazývá se tato derivace **parciální derivace funkce  $f$  podle proměnné  $x_i$  v bodě  $A$**  a značí se  $f'_{x_i}(A)$ , příp.  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(A)$ .

To znamená, že

$$\begin{aligned} f'_{x_i}(A) &= \lim_{x_i \rightarrow a_i} \frac{g_i(x_i) - g_i(a_i)}{x_i - a_i} = \\ &= \lim_{x_i \rightarrow a_i} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)}{x_i - a_i}. \end{aligned}$$

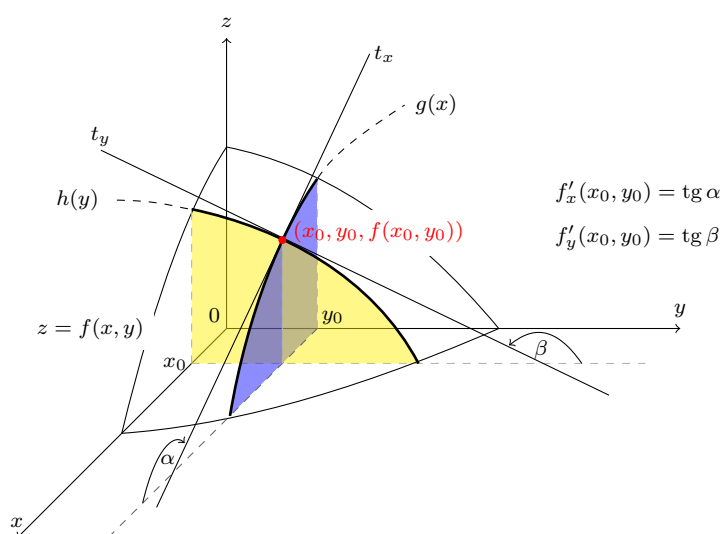
Parciální derivace  $f'_{x_i}$  funkce  $n$  proměnných je tedy definována jako obyčejná derivace podle jedné proměnné  $x_i$ .

#### Poznámka 4.1.2

#### Geometrický význam parciálních derivací.

Uvažujme funkci  $z = f(x, y)$  definovanou na oblasti  $M$  a zvolme bod  $[x_0, y_0] \in M$ .

1. Bodem  $[0, y_0, 0]$  veďme rovinu rovnoběžnou se souřadnou rovinou  $\varrho_{xz}$ . Její rovnice bude  $y = y_0$ . Průsečnicí této roviny s grafem funkce  $z = f(x, y)$  je křivka  $g(x)$ . Sestrojíme-li tečnu  $t_x$  k této křivce v bodě  $[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$  (v rovině  $y = y_0$ ), pak směrnice této tečny je rovna parciální derivaci  $f'_x(x_0, y_0)$ . Pro tuto směrnici platí  $f'_x(x_0, y_0) = \operatorname{tg} \alpha$ , kde  $\alpha$  je úhel, který svírá tato tečna s kladným směrem osy  $x$ .
2. Analogicky, rovina rovnoběžná se souřadnou rovinou  $\varrho_{yz}$  a procházející bodem  $[x_0, 0, 0]$  má rovnici  $x = x_0$ . Průsečnicí této roviny s grafem funkce  $z = f(x, y)$  je křivka  $h(y)$ . Tečna  $t_y$  sestavená k této křivce v bodě  $[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$  (v rovině  $x = x_0$ ) má směrnici, která je rovna parciální derivaci  $f'_y(x_0, y_0)$ . Pro tuto směrnici platí  $f'_y(x_0, y_0) = \operatorname{tg} \beta$ , kde  $\beta$  je úhel, který svírá tato tečna s kladným směrem osy  $y$ .



Obrázek 5. Geometrický význam parciálních derivací

## 4.2 Parciální derivace vyšších řádů

### Definice 4.2.1

Nechť  $[x_0, y_0] \in D_{f'_x}$ . Existuje-li parciální derivace funkce  $f'_x(x, y)$  podle proměnné  $x$  v bodě  $[x_0, y_0]$ , nazýváme tuto derivaci **parciální derivací 2. řádu podle  $x$**  funkce  $f$  v bodě  $[x_0, y_0]$  a značíme  $f''_{xx}(x_0, y_0)$ , příp.  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$ . Existuje-li parciální derivace funkce  $f'_x(x, y)$  podle proměnné  $y$  v bodě  $[x_0, y_0]$ , nazýváme tuto derivaci **smíšenou parciální derivací 2. řádu** funkce  $f$  v bodě  $[x_0, y_0]$  a značíme  $f''_{xy}(x_0, y_0)$ , příp.  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$ .

Obdobně definujeme parciální derivace 2. řádu  $f''_{yx}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$

a  $f''_{yy}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$ .

### Poznámka 4.2.1

1. Má-li funkce  $z = f(x, y)$  na množině  $M \subseteq D_f$  parciální derivace  $f'_x, f'_y$  a pokud existují na množině  $N \subseteq M$  parciální derivace funkcí  $f'_x, f'_y$  podle  $x$ , příp. podle  $y$ , pak je značíme

$$\begin{aligned} f''_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = z''_{xx} \\ f''_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = z''_{xy} \\ f''_{yx} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = z''_{yx} \\ f''_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = z''_{yy} \end{aligned}$$

2. Parciální derivace  $k$ -tého řádu ( $k \geq 3$ ) definujeme jako parciální derivace derivací  $(k - 1)$ -tého řádu.

## 5 Totální diferenciál

### Věta 5.1

Nechť funkce  $z = f(x, y)$  má definované a spojitě parciální derivace v okolí bodu  $[x_0, y_0]$ . Pak platí:

1. funkce  $z = f(x, y)$  je v bodě  $[x_0, y_0]$  spojitá,
2. rovina o rovnici

$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

je tečná rovina ke grafu funkce  $z = f(x, y)$  v bodě  $[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$ ,

### Poznámka 5.1

Normála grafu funkce  $z = f(x, y)$  v bodě  $T = [x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$  je přímka  $n$  kolmá k tečné rovině grafu v bodě dotyku  $T$ . Směrový vektor této normály je roven normálovému vektoru tečné roviny, takže parametrické vyjádření normály, kde  $t \in \mathbb{R}$  je

$$\begin{aligned}x &= x_0 + f'_x(x_0, y_0) \cdot t, \\y &= y_0 + f'_y(x_0, y_0) \cdot t, \\z &= f(x_0, y_0) - t.\end{aligned}$$

### Definice 5.1

Má-li funkce  $z = f(x, y)$  v bodě  $[x_0, y_0]$  a v jeho okolí spojitě parciální derivace  $f'_x(x_0, y_0)$  a  $f'_y(x_0, y_0)$ , nazýváme **totálním (úplným) diferenciálem** funkce  $f(x, y)$  v bodě  $[x_0, y_0]$  výraz:

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy.$$

### Poznámka 5.2

1. Přírůstky  $dx, dy$  zapisujeme také ve tvaru  $dx = x - x_0, dy = y - y_0$ .
2. Je-li funkce  $f$  hladká (má na  $M$  spojitě všechny parciální derivace) v každém bodě množiny  $M$ , má v každém bodě této množiny diferenciál. Píšeme

$$df(x, y) = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy.$$

3. Diferenciál se používá k přibližnému výpočtu funkčních hodnot.

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0).$$

## 6 Lokální extrémy

Důležitou částí diferenciálního počtu je vyšetřování extrémů funkcí. V každodenním životě se s nimi setkáváme téměř na každém kroku. Například při každém ekonomickém rozhodování se řídíme požadavkem minimálních nákladů a maximálního zisku. Také přírodovědné děje probíhají tak, že zkoumané veličiny nabývají největších nebo nejmenších hodnot (vykonaná práce, spotřebová energie).

Při vyšetřování lokálních extrémů studujeme danou funkci pouze lokálně, tj. v okolí nějakého bodu.

### Definice 6.1

Řekneme, že funkce  $f : \mathbb{E}_n \rightarrow \mathbb{E}_1$  má v bodě  $X_0 \in \mathbb{E}_n$  **lokální maximum (minimum)**, jestliže existuje okolí  $\mathcal{O}(X_0)$  bodu  $X_0$  takové, že pro každý bod  $X \in \mathcal{O}(X_0)$  platí

$$\begin{aligned} f(X) &\leq f(X_0) \quad \text{pro lokální maximum,} \\ f(X) &\geq f(X_0) \quad \text{pro lokální minimum.} \end{aligned}$$

Jsou-li nerovnosti v těchto vztazích ostré, mluvíme o **ostrých lokálních maximech a minimech**. (Ostrá) lokální maxima a minima se nazývají **(ostré) lokální extrémy**.

### Definice 6.2

Nechť  $f : \mathbb{E}_n \rightarrow \mathbb{E}_1$ . Řekneme, že bod  $X_0 \in \mathbb{E}_n$  je **stacionární bod** funkce  $f$ , jestliže v bodě  $X_0$  existují všechny parciální derivace funkce  $f$  a platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

### Věta 6.1 (Nutná podmínka existence lokálního extrému)

Nechť funkce  $f : \mathbb{E}_n \rightarrow \mathbb{E}_1$  má v bodě  $X_0 \in \mathbb{E}_n$  lokální extrém a v tomto bodě existují všechny parciální derivace funkce  $f$ . Pak je bod  $X_0$  jejím stacionárním bodem.

### Věta 6.2 (Postačující podmínka existence lokálního extrému)

Nechť funkce  $f : \mathbb{E}_2 \rightarrow \mathbb{E}_1$  má v bodě  $[x_0, y_0]$  a nějakém jeho okolí spojitě parciální derivace druhého řádu a nechť  $[x_0, y_0]$  je její stacionární bod. Označme symbolem  $H$  následující determinant

$$H(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}.$$

Nastane právě jeden z následujících případů.

- Je-li  $H(x_0, y_0) > 0$  a  $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ , pak má funkce  $f$  v bodě  $[x_0, y_0]$  **ostré lokální minimum**.
- Je-li  $H(x_0, y_0) > 0$  a  $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ , pak má funkce  $f$  v bodě  $[x_0, y_0]$  **ostré lokální maximum**.
- Je-li  $H(x_0, y_0) < 0$ , pak nemá funkce  $f$  v bodě  $[x_0, y_0]$  lokální extrém.
- Je-li  $H(x_0, y_0) = 0$ , pak nelze rozhodnout o existenci a kvalitě lokálního extrému pomocí druhých derivací.

**Poznámka 6.1**

Determinant uvedený v předchozí větě se nazývá **Hessův determinant** nebo-li **Hessián**.

## 7 Absolutní (globální) extrémů

Hledáme-li největší a nejmenší hodnotu funkce v dané oblasti, hledáme tzv. absolutní extrémů funkce (globální extrémů).

**Definice 7.1**

Nechť  $f : \mathbb{E}_n \rightarrow \mathbb{E}_1, M \subset D_f$ . Řekneme, že bod  $X_0 \in M$  je bodem absolutního maxima (minima) funkce  $f$  na  $M$ , jestliže pro každý bod  $X \in M$  platí:

$$f(X) \leq f(X_0) \quad \text{pro absolutní maximum,}$$

$$f(X) \geq f(X_0) \quad \text{pro absolutní minimum.}$$

Jsou-li nerovnosti v těchto vztazích ostré, mluvíme o ostrých absolutních maximech a minimech. Absolutní maxima a minima nazýváme absolutní (globální) extrémů.

## 8 Funkce zadaná implicitně

### Definice 8.1

Nechť  $F$  je funkce tří proměnných, tj.  $F : \mathbb{E}_3 \rightarrow \mathbb{E}_1$ ,

$M = \{[x, y, z] \in D_f; F(x, y, z) = 0\}$  a necht' pro bod  $[x_0, y_0, z_0] \in D_f$  platí  $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ .

Jestliže existuje okolí  $\mathcal{U}(x_0, y_0, z_0)$  bodu  $[x_0, y_0, z_0]$ ,  $\mathcal{U}(x_0, y_0, z_0) \subseteq D_f$  takové, že množina  $M \cap \mathcal{U}$  je totožná s grafem funkce  $z = f(x, y)$ , pak řekneme, že funkce  $f$  je v okolí bodu  $[x_0, y_0, z_0]$  **implicitně definována (určena)** rovnicí  $F(x, y, z) = 0$ .

### Věta 8.1 (Postačující podmínka pro existenci funkce zadané implicitně)

Nechť funkce  $F : \mathbb{E}_3 \rightarrow \mathbb{E}_1$  je definována a spojitá na množině

$$\mathcal{R} = \{[x, y, z] \in D_f : |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta, |z - z_0| < \delta\}$$

a necht'  $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ .

Dále necht' funkce  $F$  má spojitou parciální derivaci  $F'_z(x, y, z)$  v bodě  $[x_0, y_0, z_0]$  a platí  $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ .

Pak existuje okolí bodu  $[x_0, y_0, z_0]$ , v němž je rovností  $F(x, y, z) = 0$  implicitně definována právě jedna spojitá funkce  $z = f(x, y)$ .

Má-li navíc funkce  $F$  v bodě  $[x_0, y_0, z_0]$  spojitě parciální derivace  $F'_x, F'_y$ , má implicitně určená funkce  $f$  v bodě  $[x_0, y_0, z_0]$ , parciální derivace a platí

$$f'_x(x_0, y_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)},$$

$$f'_y(x_0, y_0) = -\frac{F'_y(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

*Při vypracování teoretické části bylo použito zdrojů [1],[5],[10],[11].*

## II. PRAKTICKÁ ČÁST

## 9 Definiční obory

**Postup při vyšetřování definičního oboru funkce  $z = f(x, y)$ :**

1. popíšeme definiční obor systémem nerovností,
2. určíme geometrické oblasti, odpovídající těmto nerovnostem,
3. definiční obor graficky znázorníme.

### 9.1 Řešené příklady

#### 9.1.1 Racionální lomené funkce

Racionální lomené funkce  $R(x, y) = \frac{P_m(x, y)}{Q_n(x, y)}$  mají definiční obor celou rovinu  $xy$  mimo bodů, pro které je funkce ve jmenovateli rovna nule, tedy  $Q_n(x, y) = 0$ .

**Př. 9.1.1.1** Určete a v rovině  $xy$  graficky znázorněte definiční obor funkce

$$f(x, y) = \frac{x + y}{9x^2 + 16y^2 - 144}.$$

Řešení

Platí podmínka

$$9x^2 + 16y^2 - 144 \neq 0.$$

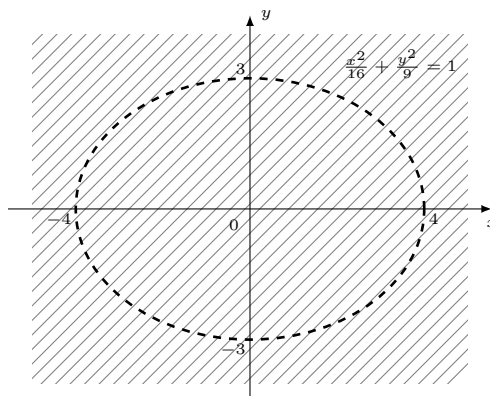
Úpravou dostaneme

$$\begin{aligned} 9x^2 + 16y^2 &\neq 144, \\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} &\neq 1. \end{aligned}$$

Získali jsme středovou rovnici elipsy se středem  $S = [0, 0]$  a poloosami  $a = 4$ ,  $b = 3$ .

Definiční obor funkce  $f$  je množina

$$D_f = \left\{ [x, y] \in \mathbb{E}_2 : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} \neq 1 \right\}.$$



Obrázek 6. Definiční obor funkce  $f(x, y) = \frac{x+y}{9x^2+16y^2-144}$

### 9.1.2 Iracionální funkce

Iracionální funkce  $z = \sqrt[n]{f(x, y)}$  jsou definovány pro body  $[x, y]$ , pro které platí, že argument sudé odmocniny je vždy nezáporný, tedy  $f(x, y) \geq 0$ .

**Př. 9.1.2.1** Určete a v rovině  $xy$  graficky znázorněte definiční obor funkce

$$f(x, y) = \sqrt[4]{(9 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4)}.$$

Řešení

Musí být splněna podmínka

$$(9 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4) \geq 0.$$

Platí tedy

$$[(9 - x^2 - y^2 \geq 0) \wedge (x^2 + y^2 - 4 \geq 0)] \vee [(9 - x^2 - y^2 \leq 0) \wedge (x^2 + y^2 - 4 \leq 0)].$$

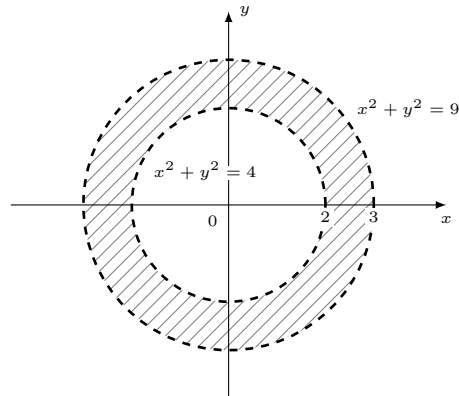
Úpravou dostaneme

$$[(x^2 + y^2 \leq 9) \wedge (x^2 + y^2 \geq 4)] \vee [(x^2 + y^2 \geq 9) \wedge (x^2 + y^2 \leq 4)].$$

Rovnice  $x^2 + y^2 = 9$  je rovnicí kružnice se středem v bodě  $S = [0, 0]$  a poloměrem  $r = 3$  a kružnice  $x^2 + y^2 = 4$  má střed v bodě  $S = [0, 0]$  a poloměr  $r = 2$ .

Definiční obor funkce  $f$  je množina

$$D_f = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}.$$



Obrázek 7. Definiční obor funkce  $f(x, y) = \sqrt[4]{(9 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4)}$

**Př. 9.1.2.2** Určete a v rovině  $xy$  graficky znázorněte definiční obor funkce

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{6x - x^2 - y^2}{x^2 - y^2}}.$$

Řešení

Platí podmínky

$$\frac{6x - x^2 - y^2}{x^2 - y^2} \geq 0 \quad \wedge \quad x^2 - y^2 \neq 0.$$

To nastane, právě když

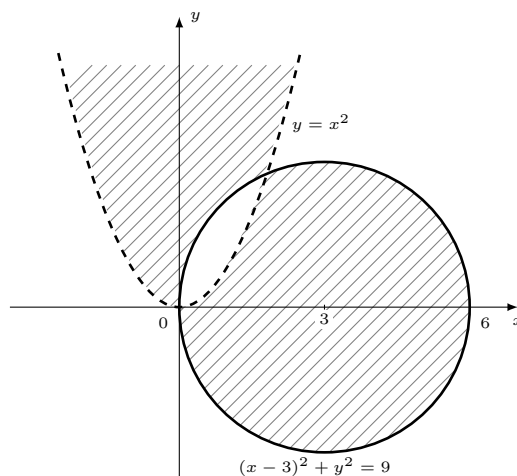
$$[(6x - x^2 - y^2 \geq 0) \wedge (x^2 - y > 0)] \vee [(6x - x^2 - y^2 \leq 0) \wedge (x^2 - y < 0)].$$

Úpravou a doplněním na úplný čtverec dostaneme

$$[(x - 3)^2 + y^2 \leq 9 \wedge y < x^2] \vee [(x - 3)^2 + y^2 \geq 9 \wedge y > x^2].$$

Definiční obor funkce  $f$  je množina

$$D_f = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : [(x - 3)^2 + y^2 \leq 9 \wedge y < x^2] \vee [(x - 3)^2 + y^2 \geq 9 \wedge y > x^2]\}.$$



Obrázek 8. Definiční obor funkce  $f(x, y) = \sqrt{\frac{6x - x^2 - y^2}{x^2 - y}}$

### 9.1.3 Logaritmické funkce

Logaritmické funkce  $z = \log_a f(x, y)$  jsou definovány pro body  $[x, y]$ , pro které platí, že argument logaritmu je vždy kladný, tedy  $f(x, y) > 0$ .

**Př. 9.1.3.1** Určete a v rovině  $xy$  graficky znázorněte definiční obor funkce

$$f(x, y) = \ln [\sin(x + y)].$$

Řešení

Musí být splněna podmínka

$$\sin(x + y) > 0.$$

Platí

$$(x + y) \in (0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi),$$

$$k \in \mathbb{Z},$$

$$x + y \neq 0 + 2k\pi,$$

$$x + y \neq \pi + 2k\pi,$$

$$k = 1 : x + y \neq 2\pi \Rightarrow y \neq 2\pi - x \quad \wedge \quad x + y \neq 3\pi \Rightarrow y \neq 3\pi - x,$$

$$k = 2 : x + y \neq 4\pi \Rightarrow y \neq 4\pi - x \quad \wedge \quad x + y \neq 5\pi \Rightarrow y \neq 5\pi - x,$$

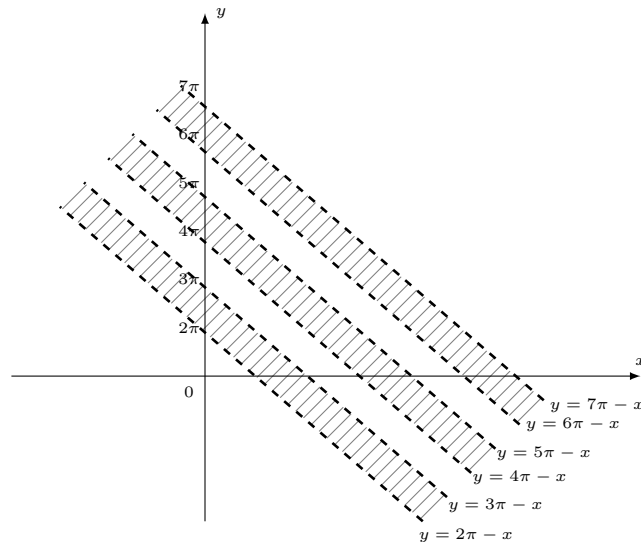
$$k = 3 : x + y \neq 6\pi \Rightarrow y \neq 6\pi - x \quad \wedge \quad x + y \neq 7\pi \Rightarrow y \neq 7\pi - x,$$

$\vdots$

$$2k\pi < x + y < \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow -x + 2k\pi < y < -x + (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Definiční obor funkce  $f$  je množina

$$D_f = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : -x + 2k\pi < y < -x + (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$



Obrázek 9. Definiční obor funkce  $f(x, y) = \ln[\sin(x + y)]$

**Př. 9.1.3.2** Určete a v rovině  $xy$  graficky znázorněte definiční obor funkce

$$f(x, y) = \ln[x \ln(y - x)].$$

Řešení

Musí být splněny podmínky

$$[x \ln(y - x)] > 0 \quad \wedge \quad (y - x) > 0.$$

Součin  $[x \ln(y - x)] > 0$  je kladný, právě když

$$[x > 0 \wedge \ln(y - x) > 0] \vee [x < 0 \wedge \ln(y - x) < 0].$$

Odkud dostaneme

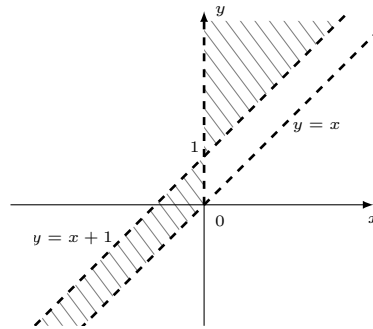
$$[x > 0 \wedge \ln(y - x) > \ln 1] \vee [x < 0 \wedge \ln(y - x) < \ln 1].$$

Odlogaritmováním a úpravou dostáváme

$$(x > 0 \wedge y > x + 1) \vee (x < 0 \wedge y < x + 1).$$

Definiční obor funkce  $f$  je množina

$$D_f = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : (x > 0 \wedge y > x + 1) \vee (x < 0 \wedge y > x \wedge y < x + 1)\}.$$



Obrázek 10. Definiční obor funkce  $f(x, y) = \ln[x \ln(y - x)]$

#### 9.1.4 Cyklometrické funkce

Cyklometrické funkce  $z = \arcsin f(x, y)$ ,  $z = \arccos f(x, y)$  jsou definovány pro body  $[x, y]$ , které jsou omezeny nerovnostmi  $-1 \leq f(x, y) \leq 1$ .

**Př. 9.1.4.1** Určete a v rovině  $xy$  graficky znázorněte definiční obor funkce

$$f(x, y) = \arccos \frac{x}{x + y}.$$

Řešení

Platí nerovnosti

$$-1 \leq \frac{x}{x + y} \leq 1 \quad \wedge \quad y \neq -x.$$

Dostáváme dva předpoklady:

a)  $x + y > 0$ , tedy  $x > -y$

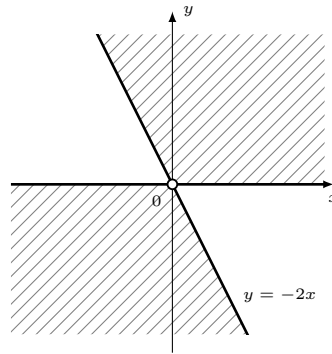
$$\begin{aligned} -x - y \leq x & \quad \wedge \quad x \leq x + y, \\ y \geq -2x & \quad \wedge \quad y \geq 0, \end{aligned}$$

b)  $x + y < 0$ , tedy  $x < -y$

$$\begin{aligned} -x - y \geq x & \quad \wedge \quad x \geq x + y, \\ y \leq -2x & \quad \wedge \quad y \leq 0. \end{aligned}$$

Definiční obor funkce  $f$  je množina

$$D_f = \left\{ [x, y] \in \mathbb{E}_2 : -1 \leq \frac{x}{x+y} \leq 1 \wedge y \neq -x \right\}.$$

Obrázek 11. Definiční obor funkce  $f(x, y) = \arccos \frac{x}{x+y}$ .

**Př. 9.1.4.2** Určete a v rovině  $xy$  graficky znázorněte definiční obor funkce

$$f(x, y) = \arcsin \frac{x}{y^2} + \arccos(1 - y).$$

Řešení

Platí nerovnosti

$$-1 \leq \frac{x}{y^2} \leq 1 \quad \wedge \quad -1 \leq (1 - y) \leq 1 \quad \wedge \quad y \neq 0.$$

Z první nerovnosti úpravou dostáváme

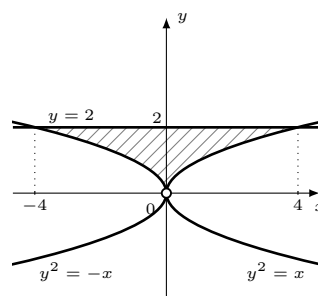
$$\begin{aligned} -1 &\leq \frac{x}{y^2} \quad \wedge \quad \frac{x}{y^2} \leq 1, \\ y^2 &\geq -x \quad \wedge \quad y^2 \geq x. \end{aligned}$$

Z druhé nerovnosti dostáváme

$$\begin{aligned} -1 &\leq 1 - y \quad \wedge \quad 1 - y \leq 1, \\ y &\leq 2 \quad \wedge \quad y \geq 0. \end{aligned}$$

Definiční obor funkce  $f$  je množina

$$D_f = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : y^2 \geq -x \wedge y^2 \geq x \wedge y \leq 2 \wedge y > 0\}.$$

Obrázek 12. Definiční obor funkce  $f(x, y) = \arcsin \frac{x}{y^2} + \arccos(1 - y)$

## 9.2 Neřešené příklady k procvičení

Určete a v rovině  $xy$  graficky znázorněte definiční obor dané funkce:

$$1. f(x, y) = \frac{x^2 + y^2 + 1}{x^2 - y^2} \quad [D_f = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : y \neq x; y \neq -x\}]$$

$$2. f(x, y) = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}} \quad [D_f = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x \leq x^2 + y^2 < 2x\}]$$

$$3. f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{y^2 - 1} \quad [D_f = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : |x| \leq 1; |y| \geq 1\}]$$

$$4. f(x, y) = \ln(y^2 - 4x + 8) \quad [D_f = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : y^2 > 4(x - 2)\}]$$

$$5. f(x, y) = \ln(x^2 - y) + \sqrt{x - 2y + 4} \quad [D_f = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : y < x^2 \wedge y < \frac{1}{2}x + 2\}]$$

$$6. f(x, y) = \sqrt{\sin(\pi(x^2 + y^2))} \quad [D_f = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : 2k \leq x^2 + y^2 \leq 2k + 1\}]$$

$$7. f(x, y) = \arcsin(2y(1 + x^2) - 1) \quad [D_f = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : 0 \leq y \leq \frac{1}{1+x^2}\}]$$

$$8. f(x, y) = \frac{\sqrt{y - 2x^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)} \quad [D_f = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : y \geq 2x^2 \wedge x^2 + y^2 < 1\}]$$

## 10 Parciální derivace

### Postup při výpočtu parciální derivace:

1. všechny proměnné kromě té, podle které derivujeme, považujeme za konstanty,
2. pro počítání parciálních derivací platí obvyklá pravidla pro derivování.

### 10.1 Řešené příklady

**Př. 10.1.1** Vypočítejte první parciální derivace funkce

$$f(x, y) = 5x^3y^2 - x^2y^3 + 4x^2y^2 - y^4.$$

Řešení

Při derivaci podle proměnné  $x$  považujeme proměnnou  $y$  za konstantu, tedy

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 15x^2y^2 - 2xy^3 + 8xy^2.$$

Při derivaci podle proměnné  $y$  považujeme proměnnou  $x$  za konstantu, tedy

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 10x^3y - 3x^2y^2 + 8x^2y - 4y^3.$$

**Př. 10.1.2** Vypočítejte první parciální derivace funkce

$$f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Řešení

Derivujeme pomocí vzorce pro derivaci podílu

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x \cdot \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x}{(\sqrt{x^2 + y^2})^2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} = \frac{\frac{x^2 + y^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} = \\ &= \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot (x^2 + y^2)} = \frac{y^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{-x \cdot \frac{1}{2} (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y}{\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2} = \frac{-\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} = -\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot (x^2 + y^2)} = -\frac{xy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}$$

**Př. 10.1.3** Vypočítejte první parciální derivace funkce

$$f(x, y) = e^{-\frac{x}{y}}.$$

Řešení

Podle proměnné  $x$  i  $y$  derivujeme jako složenou funkci

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = e^{-\frac{x}{y}} \cdot \left(-\frac{1}{y}\right) = -\frac{e^{-\frac{x}{y}}}{y},$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = e^{-\frac{x}{y}} \cdot (-x) \cdot (-1)y^{-2} = \frac{x}{y^2} \cdot e^{-\frac{x}{y}}.$$

**Př. 10.1.4** Vypočítejte první parciální derivace funkce

$$f(x, y) = x \cdot e^{\frac{x+1}{xy}}.$$

Řešení

Při derivaci podle proměnné  $x$  použijeme vzorec pro derivaci součinu, proměnnou  $y$  považujeme za konstantu

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = e^{\frac{x+1}{xy}} + x \cdot e^{\frac{x+1}{xy}} \cdot \frac{xy - (x+1) \cdot y}{(xy)^2} = e^{\frac{x+1}{xy}} + x \cdot e^{\frac{x+1}{xy}} \cdot \frac{-y}{x^2 y^2} = e^{\frac{x+1}{xy}} \cdot \left(1 - \frac{1}{xy}\right).$$

Podle proměnné  $y$  derivujeme jako složenou funkci, proměnnou  $x$  považujeme za konstantu

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = x \cdot e^{\frac{x+1}{xy}} \cdot \frac{-(x+1)x}{x^2 y^2} = e^{\frac{x+1}{xy}} \cdot \left(-\frac{x+1}{y^2}\right).$$

**Př. 10.1.5** Vypočítejte první parciální derivace funkce

$$f(x, y) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

Řešení

Derivujeme podle vzorce  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$  jako složenou funkci

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \left[ 1 + \frac{1}{2} (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x \right] = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \left( 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{\underline{\underline{\sqrt{x^2 + y^2}}}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \left[ \frac{1}{2} (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y \right] = \frac{\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} = \\ &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot (x + \sqrt{x^2 + y^2})} = \frac{y}{\underline{\underline{x\sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2}}}.\end{aligned}$$

**Př. 10.1.6** Vypočítejte první parciální derivace funkce

$$f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x - y}{x + y}.$$

Řešení

Derivujeme podle vzorce  $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}$  jako složenou funkci

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2} \cdot \frac{(x+y) - (x-y)}{(x+y)^2} = \frac{1}{\frac{(x+y)^2 + (x-y)^2}{(x+y)^2}} \cdot \frac{x+y-x+y}{(x+y)^2} = \\ &= \frac{(x+y)^2}{x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2xy + y^2} \cdot \frac{2y}{(x+y)^2} = \frac{y}{\underline{\underline{x^2 + y^2}}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2} \cdot \frac{-(x+y) - (x-y)}{(x+y)^2} = \frac{1}{\frac{(x+y)^2 + (x-y)^2}{(x+y)^2}} \cdot \frac{-x-y-x+y}{(x+y)^2} = \\ &= \frac{(x+y)^2}{x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2xy + y^2} \cdot \frac{-2x}{(x+y)^2} = \frac{-x}{\underline{\underline{x^2 + y^2}}}.\end{aligned}$$

**Př. 10.1.7** Vypočítejte první parciální derivace funkce

$$f(x, y) = (x)^{x^y}.$$

Řešení

Platí:  $u(x, y)^{v(x, y)} = e^{v(x, y) \cdot \ln u(x, y)}.$

Derivujeme tedy  $f(x, y) = e^{x^y \cdot \ln x}$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = e^{x^y \cdot \ln x} \cdot \left( y \cdot x^{y-1} \cdot \ln x + x^y \cdot \frac{1}{x} \right),$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = e^{x^y \cdot \ln x} \cdot (x^y \cdot \ln x \cdot \ln x).$$

**Př. 10.1.8** Vypočítejte první parciální derivace funkce

$$f(x, y) = \ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}.$$

Řešení

Derivujeme podle vzorce  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$  jako složenou funkci, úpravami dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}} \cdot \frac{\left[ \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x - 1 \right] \cdot (\sqrt{x^2 + y^2} + x) - (\sqrt{x^2 + y^2} - x) \cdot \left[ \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x + 1 \right]}{(\sqrt{x^2 + y^2} + x)^2} = \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{\sqrt{x^2 + y^2} - x} \cdot \frac{\left( \frac{x - \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \cdot (\sqrt{x^2 + y^2} + x) - (\sqrt{x^2 + y^2} - x) \cdot \left( \frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)}{(\sqrt{x^2 + y^2} + x)^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2} - x} \cdot \frac{\frac{x^2 - (\sqrt{x^2 + y^2})^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x^2 - (\sqrt{x^2 + y^2})^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2} + x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2} - x} \cdot \frac{-2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2} + x} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2} - x} \cdot \frac{-2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2} + x} = \frac{-2y^2}{(x^2 + y^2 - x^2) \cdot \sqrt{x^2 + y^2}} = \underline{\underline{\frac{-2}{\sqrt{x^2 + y^2}}}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}} \cdot \frac{\left[ \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y \right] \cdot (\sqrt{x^2 + y^2} + x) - (\sqrt{x^2 + y^2} - x) \cdot \left[ \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y \right]}{(\sqrt{x^2 + y^2} + x)^2} = \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{\sqrt{x^2 + y^2} - x} \cdot \frac{\frac{y\sqrt{x^2 + y^2} + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y\sqrt{x^2 + y^2} + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2} + x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2} - x} \cdot \frac{\frac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2} + x} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2} - x} \cdot \frac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2} + x} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2 - x^2) \cdot \sqrt{x^2 + y^2}} = \underline{\underline{\frac{2x}{y\sqrt{x^2 + y^2}}}}. \end{aligned}$$

## 10.2 Neřešené příklady k procvičení

Vypočítejte první parciální derivace dané funkce:

$$1. f(x, y) = \frac{x-y}{x+y} \quad \left[ f'_x = \frac{2y}{(x+y)^2}, f'_y = \frac{-2x}{(x+y)^2} \right]$$

$$2. f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \quad \left[ f'_x = \frac{x^4 + 3x^2x^2 - 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}, f'_y = \frac{y^4 + 3x^2x^2 - 2x^3y}{(x^2 + y^2)^2} \right]$$

$$3. f(x, y) = e^{\frac{x}{y}} + x^y \quad \left[ f'_x = e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y} + yx^{y-1}, f'_y = e^{\frac{x}{y}} \left( -\frac{x}{y} \right) + \ln x \cdot x^y \right]$$

$$4. f(x, y) = \ln \left( \sqrt{\frac{x^2}{x+y}} \right) \quad \left[ f'_x = \frac{x+2y}{2x(x+y)}, f'_y = -\frac{1}{2(x+y)} \right]$$

$$5. f(x, y) = e^x \ln(3 - y^2) \quad \left[ f'_x = e^x \ln(3 - y^2), f'_y = \frac{2e^x y}{-3 + y^2} \right]$$

$$6. f(x, y) = \sqrt{1 - \left( \frac{x+y}{xy} \right)^2} + \arcsin \frac{x+y}{xy} \quad \left[ f'_x = -\frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{xy-x-y}{xy+x+y}}, f'_y = -\frac{1}{y^2} \sqrt{\frac{xy-x-y}{xy+x+y}} \right]$$

## 10.3 Parciální derivace vyšších řádů

## 10.3.1 Řešené příklady

Př. 10.3.1.1 Vypočítejte první a druhé parciální derivace funkce

$$f(x, y) = \frac{\cos x^2}{y}.$$

Řešení

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= \frac{-\sin x^2 \cdot 2x \cdot y}{y^2} = \underline{\underline{\frac{-2x \cdot \sin x^2}{y}}} \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= \underline{\underline{-\frac{\cos x^2}{y^2}}} \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} &= \frac{(-2 \sin x^2 - 2x \cos x^2 \cdot 2x) 2y}{y^2} = \underline{\underline{-\frac{2 \sin x^2 + 4x^2 \cos x^2}{y}}} \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} &= \frac{2y \cos x^2}{y^4} = \underline{\underline{\frac{2 \cos x^2}{y^3}}} \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} &= \underline{\underline{\frac{2x \sin x^2}{y^2}}}\end{aligned}$$

Př. 10.3.1.2 Vypočítejte první a druhé parciální derivace funkce

$$f(x, y) = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}.$$

Řešení

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= \sqrt{y} + y \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) x^{-\frac{4}{3}} = \underline{\underline{\sqrt{y} - \frac{y}{3\sqrt[3]{x^4}}}} \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= x \cdot \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \underline{\underline{\frac{x}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}}} \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} &= -\frac{1}{3} y \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) x^{-\frac{7}{3}} = \underline{\underline{\frac{4y}{9\sqrt[3]{x^7}}}} \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} &= \frac{1}{2} x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) y^{-\frac{3}{2}} = \underline{\underline{-\frac{x}{4\sqrt{y^3}}}} \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3x\sqrt[3]{x}} = \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{y}} - \frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}}}\end{aligned}$$

**10.3.2 Neřešené příklady k procvičení**

Vypočítejte první a druhé parciální derivace funkce:

1.  $f(x, y) = \ln(x + y^2)$

$$\left[ f'_x = \frac{1}{x+y^2}, f'_y = \frac{2y}{x+y^2}, f''_{xx} = -\frac{1}{(x+y^2)^2}, f''_{xy} = -\frac{2y}{(x+y^2)^2}, f''_{yy} = \frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2} \right]$$

2.  $f(x, y) = xy + \frac{x}{y}$

$$\left[ f'_x = y + \frac{1}{y}, f'_y = x - \frac{x}{y^2}, f''_{xx} = 0, f''_{xy} = 1 - \frac{1}{y^2}, f''_{yy} = \frac{2x}{y^3} \right]$$

3.  $f(x, y) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\left[ f'_x = \frac{|y|}{x^2+y^2}, f'_y = \frac{-x|y|}{y(x^2+y^2)}, f''_{xx} = \frac{-2x|y|}{(x^2+y^2)^2}, f''_{xy} = \frac{|y|(x^2-y^2)}{y(x^2+y^2)^2}, f''_{yy} = \frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2} \right]$$

4.  $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$

$$\left[ f'_x = \frac{1}{1+x^2}, f'_y = \frac{1}{1+y^2}, f''_{xx} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, f''_{xy} = 0, f''_{yy} = \frac{-2y}{(1+y^2)^2} \right]$$

## 11 Diferenciál funkce

K výpočtu diferenciálu funkce  $z = f(x, y)$  v bodě  $[x_0, y_0]$  použijeme vzorec:

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy.$$

### 11.1 Řešené příklady

**Př. 11.1.1** Vypočítejte hodnotu diferenciálu zadané funkce v daném bodě a pro dané přírůstky  $dx, dy$

$$f(x, y) = x + y - \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{v bodě } [3, 4]; \quad dx = 0,1; \quad dy = 0,2.$$

Řešení

Spočítáme parciální derivace funkce v bodě  $[3, 4]$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 1 - \frac{1}{2} (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\frac{\partial f(3, 4)}{\partial x} = \underline{0,4},$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 1 - \frac{1}{2} (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y = 1 - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\frac{\partial f(3, 4)}{\partial y} = \underline{0,2}.$$

Platí tedy

$$df(3, 4) = 0,4 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,2 = \underline{\underline{0,08}}.$$

**Př. 11.1.2** Vypočítejte hodnotu diferenciálu zadané funkce v daném bodě a pro dané přírůstky  $dx, dy$

$$f(x, y) = \arctg \frac{x+y}{1-xy} \quad \text{v bodě } [1, 2]; \quad dx = 0,02; \quad dy = 0,01.$$

Řešení

Spočítáme parciální derivace funkce v bodě  $[1, 2]$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2} \cdot \frac{(1-xy) - (x+y) \cdot (-y)}{(1-xy)^2} = \frac{1}{\frac{(1-xy)^2 + (x+y)^2}{(1-xy)^2}} \cdot \frac{1-xy+xy+y^2}{(1-xy)^2} = \\ &= \frac{(1-xy)^2}{1-2xy+x^2y^2+x^2+2xy+y^2} \cdot \frac{1+y^2}{(1-xy)^2} = \frac{1+y^2}{(1+x^2)+y^2(1+x^2)} = \underline{\underline{\frac{1}{1+x^2}}}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f(1, 2)}{\partial x} = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2} \cdot \frac{(1-xy) - (x+y) \cdot (-x)}{(1-xy)^2} = \frac{1}{\frac{(1-xy)^2 + (x+y)^2}{(1-xy)^2}} \cdot \frac{1-xy+x^2+xy}{(1-xy)^2} = \\ &= \frac{(1-xy)^2}{1-2xy+x^2y^2+x^2+2xy+y^2} \cdot \frac{1+x^2}{(1-xy)^2} = \frac{1+x^2}{(1+x^2)+y^2(1+x^2)} = \frac{1}{1+y^2}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f(1, 2)}{\partial x} = \frac{1}{5}.$$

Platí tedy

$$df(1, 2) = \frac{1}{2} \cdot 0,02 + \frac{1}{5} \cdot 0,01 = \underline{\underline{0,012}}.$$

## 11.2 Neřešené příklady k procvičení

Vypočítejte hodnotu diferenciálu zadané funkce v daném bodě a pro dané přírůstky:

1.  $f(x, y) = e^{xy}$  v bodě  $[1, 2]$  pro  $dx = -0,1$ ,  $dy = 0,1$   $[-0,739]$
2.  $f(x, y) = \arctg \frac{x}{y}$  v bodě  $[1, 3]$  pro  $dx = 0,01$ ,  $dy = -0,05$   $[0,008]$
3.  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{xy}$  v bodě  $[2, 2]$  pro  $dx = 0,03$ ,  $dy = 0,01$   $[0,02]$

## 12 Výpočet přibližné hodnoty výrazu

K výpočtu přibližné hodnoty výrazu použijeme vzorec:

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0).$$

### 12.1 Řešené příklady

**Př. 12.1.1** Vypočítejte přibližnou hodnotu výrazu

$$\ln(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1).$$

Řešení

K výpočtu využijeme funkční hodnotu a parciální derivace funkce

$$f(x, y) = \ln(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1) \text{ v bodě } [1, 1] \text{ a přírůstky } dx = 0,03, dy = -0,02.$$

Vypočítáme hodnotu funkce a parciální derivace v bodě  $[1, 1]$

$$f(1, 1) = \underline{0},$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1} \cdot \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}, \quad \frac{\partial f(1, 1)}{\partial x} = \underline{\frac{1}{3}},$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1} \cdot \frac{1}{4}y^{-\frac{3}{4}}, \quad \frac{\partial f(1, 1)}{\partial y} = \underline{\frac{1}{4}}.$$

Platí tedy

$$\ln(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1) \approx 0 + \frac{1}{3} \cdot 0,03 - \frac{1}{4} \cdot 0,02 = \underline{\underline{0,005}}.$$

**Př. 12.1.2** Vypočítejte přibližnou hodnotu výrazu

$$2,98 \operatorname{tg} 44^\circ \cdot \ln(\sqrt{3,99} - 1).$$

Řešení

K výpočtu použijeme funkci

$$f(x, y, z) = x \cdot \operatorname{tg} y \cdot \ln(\sqrt{z} - 1) \text{ v bodě } [3, \frac{\pi}{4}, 4] \text{ a s přírůstky } dx = -0,02, dy = \frac{\pi}{180}, dz = -0,01.$$

Vypočítáme hodnotu funkce a parciální derivace v bodě  $[3, \frac{\pi}{4}, 4]$

$$f\left(3, \frac{\pi}{4}, 4\right) = 0,$$

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = \operatorname{tg} y \cdot \ln(\sqrt{z} - 1), \quad \frac{\partial f(3, \frac{\pi}{4}, 4)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} = \frac{x \cdot \ln(\sqrt{z} - 1)}{\cos^2 x}, \quad \frac{\partial f(3, \frac{\pi}{4}, 4)}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} = \frac{x \cdot \operatorname{tg} y}{2\sqrt{z} \cdot (\sqrt{z} - 1)}, \quad \frac{\partial f(3, \frac{\pi}{4}, 4)}{\partial z} = \frac{3}{4}.$$

Platí tedy

$$2,98 \operatorname{tg} 44^\circ \cdot \ln(\sqrt{3,99} - 1) \approx 0 + 0 \cdot (-0,02) + 0 \cdot \frac{\pi}{180} + \frac{3}{4} \cdot (-0,01) = \underline{\underline{-0,0075}}.$$

## 12.2 Neřešené příklady k procvičení

Vypočítejte přibližnou hodnotu výrazu:

1.  $\sqrt{2,98^2 + 4,05^2}$  [4,948]
2.  $1,002 \cdot 2,003^2 \cdot 3,004^3$  [108,97]
3.  $0,97^{2,01}$  [0,94]

### 13 Implicitně zadaná funkce

#### 13.1 Implicitně zadaná funkce jedné proměnné

##### 13.1.1 Řešené příklady

**Př. 13.1.1.1** Určete první a druhé parciální derivace podle  $x$  funkce dané implicitně

$$x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1 = 0.$$

Řešení

a) Podle vzorce  $y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y}$ .

Pro parciální derivace funkce  $F(x, y) = x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1$  platí

$$F'_x = 2x - y + 1, \quad F'_y = -x + 4y - 1.$$

Dosazením do vzorce dostáváme

$$y' = \frac{y - 2x - 1}{4y - x - 1}.$$

b) Derivací dané rovnice  $x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1 = 0$  podle  $x$ , kde  $y = y(x)$ .

$$2x - y - xy' + 4yy' + 1 - y' = 0.$$

Vyjádřením  $y'$  dostáváme

$$y' = \frac{y - 2x - 1}{4y - x - 1}.$$

Pro určení druhé derivace použijeme rovnici první derivace  $2x - y - xy' + 4yy' + 1 - y' = 0$ , kterou znovu zderivujeme podle  $x$

$$2 - y' - xy'' - y' + 4(y')^2 + 4yy'' - y'' = 0.$$

Vyjádřením  $y''$  dostáváme

$$y'' = \frac{4(y')^2 - 2y' - 2}{4y - x - 1}.$$

**Př. 13.1.1.2** Najděte rovnici tečny ke grafu funkce dané implicitně rovnicí

$$e^{xy} + \sin y + y^2 = 1 \text{ v bodě } [2, 0].$$

Řešení

Pro rovnici tečny ke grafu funkce  $y = y(x)$  v bodě  $[x_0, y_0]$  platí vztah

$$y - y_0 = y'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Derivací rovnice  $e^{xy} + \sin y + y^2 = 1$  určíme  $y'$

$$ye^{xy} + xy'e^{xy} + \cos yy' + 2yy' = 0, \quad y' = \frac{ye^{xy}}{xe^{xy} + \cos y + 2y}.$$

Vypočítáme hodnotu derivace v bodě  $[2, 0]$

$$y'(2, 0) = 0.$$

Dosazením do rovnice tečny dostáváme

$$\underline{\underline{y = 0.}}$$

**Př. 13.1.1.3** Najděte rovnici normály ke grafu funkce dané implicitně rovnicí

$$x^5 + y^5 - 2xy = 0 \text{ v bodě } [1, 1].$$

Řešení

Pro rovnici normály ke grafu funkce  $y = y(x)$  v bodě  $[x_0, y_0]$  platí vztah

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)} \cdot (x - x_0).$$

Derivací rovnice  $x^5 + y^5 - 2xy = 0$  určíme  $y'$

$$5x^4 + 5y^5y' - 2y - 2xy' = 0, \\ y' = \frac{2y - 5x^4}{5y^4 - 2x}.$$

Vypočítáme hodnotu derivace v bodě  $[1, 1]$

$$y'(1, 1) = -1.$$

Dosazením do rovnice normály dostáváme

$$\underline{\underline{y = x.}}$$

**13.2 Implicitně zadaná funkce dvou proměnných****13.2.1 Řešené příklady**

**Př. 13.2.1.1** Najděte rovnici tečné roviny funkce dané implicitně

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - x - y - z = 0 \text{ v bodě } [1, 0, 1].$$

Řešení

Uřídíme hodnotu parciální derivace  $z'_x$  v daném bodě  $[1, 0, 1]$

$$\begin{aligned} z'_x &= 3x^2 + 3z^2 \cdot z'_x - 3y(z + x \cdot z'_x) - 1 - z'_x = 0, \\ 3x^2 + 3z^2 \cdot z'_x - 3yz - 3xyz'_x - 1 - z'_x &= 0, \\ z'_x(3z^2 - 3xy - 1) &= 3yz + 1 - 3x^2, \end{aligned}$$

$$z'_x = \frac{3yz + 1 - 3x^2}{3z^2 - 3xy - 1}, \quad z'_x(1, 0, 1) = \underline{\underline{-1}}.$$

Uřídíme hodnotu parciální derivace  $z'_y$  v daném bodě  $[1, 0, 1]$

$$\begin{aligned} z'_y &= 3y^2 + 3z^2 \cdot z'_y - 3x(z + y \cdot z'_y) - 1 - z'_y = 0, \\ 3y^2 + 3z^2 \cdot z'_y - 3xz - 3xyz'_y - 1 - z'_y &= 0, \\ z'_y(3z^2 - 3xy - 1) &= 3xz + 1 - 3y^2, \end{aligned}$$

$$z'_y = \frac{3xz + 1 - 3y^2}{3z^2 - 3xy - 1}, \quad z'_y(1, 0, 1) = \underline{\underline{2}}.$$

Dosazením do rovnice tečné roviny

$$\tau : z - z_0 = z'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + z'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

dostaneme

$$\begin{aligned} z - 1 &= -1(x - 1) + 2(y - 0), \\ z - 1 &= -x + 1 + 2y, \\ \underline{\underline{\tau : x - 2y + z = 0.}} \end{aligned}$$

**13.3 Neřešené příklady k procvičení**

- Uřídíte první a druhé parciální derivaci podle  $x$  funkce dané implicitně rovnicí  
 $x + y - e^{x-y} = 0$ 

$$\left[ y' = \frac{e^{x-y} - 1}{e^{x-y} + 1}, \quad y'' = \frac{e^{x-y}(1 - y')^2}{e^{x-y} + 1} \right]$$
- Uřídíte první a druhé parciální derivace podle  $x$  funkce dané implicitně rovnicí  
 $x^3 + y^3 - 2xy = 0$ 

$$\left[ y' = \frac{2y - 3x^2}{3y^2 - 2x}, \quad y'' = \frac{4y' - 6x - 6y(y')^2}{3y^2 - 2x} \right]$$
- Uřídíte rovnici tečné roviny v bodě  $[1, 1, 1]$  k ploše  
 $x^2 + y^2 - 3xz + x + y - z = 0$ 

$$[\tau : 3y - 4z + 1 = 0]$$

## 14 Lokální extrémy

**Postup při hledání lokálních extrémů funkce  $f(x, y)$ :**

1. určíme definiční obor dané funkce,
2. vypočítáme parciální derivace  $f'_x, f'_y$  a položíme je rovny nule,
3. pomocí soustavy rovnic najdeme stacionární body,
4. vypočítáme parciální derivace  $f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy}$  a hodnoty těchto derivací ve stacionárních bodech,
5. pomocí Hessiánu ve stacionárních bodech rozhodneme o existenci a druhu lokálních extrémů,
6. vyšetříme chování funkce v okolí stacionárních bodů, ve kterých je hodnota Hessiánu nulová, a v okolí bodů, v nichž parciální derivace  $f'_x, f'_y$  nejsou definovány.

## 14.1 Řešené příklady

**Př. 14.1.1** Stanovte lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2 + 5x + 2y.$$

Řešení

Stanovíme definiční obor funkce

$$D_f = \mathbb{E}_2.$$

Spočítáme parciální derivace

$$f'_x = 2x + 2y + 5, \quad f'_y = 2x + 6y + 2.$$

Parciální derivace položíme rovny nule, vznikne soustava dvou rovnic o dvou neznámých

$$2x + 2y + 5 = 0 \quad / \cdot (-1)$$

$$2x + 6y + 2 = 0$$

$$4y = 3$$

$$y = \frac{3}{4}$$

Dosazením do první rovnice dostáváme

$$2x + 2 \cdot \frac{3}{4} + 5 = 0, \text{ odkud } x = -\frac{13}{4}.$$

Vyřešením soustavy získáváme tedy stacionární bod  $P = \left[-\frac{13}{4}, \frac{3}{4}\right]$ .

Spočítáme druhé parciální derivace v bodě  $P = \left[-\frac{13}{4}, \frac{3}{4}\right]$

$$f''_{xx} = 2, \quad f''_{xy} = 2, \quad f''_{yy} = 6,$$

$$f''_{xx} \left(-\frac{13}{4}, \frac{3}{4}\right) = 2, \quad f''_{xy} \left(-\frac{13}{4}, \frac{3}{4}\right) = 2, \quad f''_{yy} \left(-\frac{13}{4}, \frac{3}{4}\right) = 6,$$

$$H \left(-\frac{13}{4}, \frac{3}{4}\right) = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 4 = 8.$$

Platí

$$f''_{xx} \left(-\frac{13}{4}, \frac{3}{4}\right) > 0 \quad \wedge \quad H \left(-\frac{13}{4}, \frac{3}{4}\right) > 0.$$

Z výše uvedené podmínky vyplývá

$$P = \left[-\frac{13}{4}, \frac{3}{4}\right] \text{ je lokální minimum, } f \left(-\frac{13}{4}, \frac{3}{4}\right) = -7,375.$$

**Př. 14.1.2** Stanovte lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = x \cdot y + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}.$$

Řešení

Uurčíme definiční obor

$$D_f = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x \neq 0 \vee y \neq 0\}.$$

Spočítáme parciální derivace

$$f'_x = y - 50x^{-2}, \quad f'_y = x - 20y^{-2}.$$

Vyřešíme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} y - \frac{50}{x^2} &= 0 \\ x - \frac{20}{y^2} &= 0 \Rightarrow x = \frac{20}{y^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y - 50 \left(\frac{y^2}{20}\right)^2 &= 0 \\ y - \frac{y^4}{8} &= 0 \\ y \cdot (8 - y^3) &= 0 \end{aligned}$$

$$y_1 = 0 \Rightarrow \text{nemá řešení}$$

$$y_2 = 2, x_2 = 5 \Rightarrow P = [5, 2].$$

Spočítáme druhé parciální derivace v bodě  $P = [5, 2]$

$$f''_{xx} = 100x^{-3}, \quad f''_{xy} = 1, \quad f''_{yy} = 40y^{-3},$$

$$f''_{xx}(5, 2) = \frac{4}{5}, \quad f''_{xy}(5, 2) = 1, \quad f''_{yy}(5, 2) = 5.$$

Sestavíme a vypočítáme Hessián

$$H(5, 2) = \begin{vmatrix} \frac{4}{5} & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3.$$

Platí

$$f''_{xx}(5, 2) > 0 \quad \wedge \quad H(5, 2) > 0.$$

Z výše uvedené podmínky vyplývá

$$P = [5, 2] \text{ je lokální minimum, } f(5, 2) = 30.$$

**Př. 14.1.3** Stanovte lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = 3 + (x^2 + y) \cdot e^y.$$

Řešení

Uurčíme definiční obor

$$D_f = \mathbb{E}_2.$$

Spočítáme parciální derivace

$$f'_x = 2x \cdot e^y, \quad f'_y = x^2 e^y + e^y + y \cdot e^y.$$

Vyřešíme soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcl} 2x \cdot e^y & = & 0 \quad / : e^y \quad \Rightarrow x = 0 \\ x^2 e^y + e^y + y \cdot e^y & = & 0 \\ \hline e^y + y e^y & = & 0 \\ e^y \cdot (1 + y) & = & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$y = -1 \quad \Rightarrow P = [0, -1].$$

Spočítáme druhé parciální derivace v bodě  $P = [0, -1]$

$$f''_{xx} = 2e^y, \quad f''_{xy} = 2x \cdot e^y, \quad f''_{yy} = x^2 e^y + e^y + e^y + ye^y,$$

$$f''_{xx}(0, -1) = 2e^{-1}, \quad f''_{xy}(0, -1) = 0, \quad f''_{yy}(0, -1) = e^{-1}.$$

Sestavíme a vypočítáme Hessián v bodě  $P = [0, -1]$

$$H(0, -1) = \begin{vmatrix} 2e^{-1} & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{vmatrix} = (2e^{-1} \cdot e^{-1}) - 0 = 2e^{-2}.$$

Platí

$$f''_{xx}(0, -1) > 0 \quad \wedge \quad H(0, -1) > 0$$

Z výše uvedené podmínky vyplývá

$$P = [0, -1] \text{ je lokální minimum, } f(0, -1) = 2,632.$$

**Př. 14.1.4** Stanovte lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = 3 \cdot \ln \frac{x}{6} + 2 \ln y + \ln(12 - x - y).$$

Řešení

Uurčíme definiční obor

$$D_f = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x > 0 \quad \wedge \quad 0 < y < 12 - x\}.$$

Spočítáme parciální derivace

$$f'_x = \frac{3}{x} - \frac{1}{12 - x - y}, \quad f'_y = \frac{2}{y} - \frac{1}{12 - x - y}.$$

Vyřešíme soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcl} 3 \cdot (12 - x - y) - x & = & 0 \\ 2 \cdot (12 - x - y) - y & = & 0 \\ \hline -4x - 3y & = & -36 \quad / \cdot (-1) \\ -2x - 3y & = & -24 \\ \hline x & = & 6 \end{array}$$

Dosazením do první rovnice dostáváme

$$3 \cdot (12 - 6 - y) - 6 = 0, \text{ odkud } y = 4.$$

Dostáváme tedy stacionární bod  $P = [6, 4]$ .

Spočítáme druhé parciální derivace v bodě  $P = [6, 4]$

$$f''_{xx} = -\frac{3}{x^2} - \frac{1}{(12-x-y)^2}, \quad f''_{xy} = -\frac{1}{(12-x-y)^2}, \quad f''_{yy} = -\frac{2}{y^2} - \frac{1}{(12-x-y)^2},$$

$$f''_{xx}(6, 4) = -\frac{1}{3}, \quad f''_{xy}(6, 4) = -\frac{1}{4}, \quad f''_{yy}(6, 4) = -\frac{3}{8}.$$

Sestavíme a vypočítáme Hessián

$$H(6, 4) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{3}{8} \end{vmatrix} = \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{1}{16}.$$

Platí

$$f''_{xx}(6, 4) < 0 \quad \wedge \quad H(6, 4) > 0.$$

Z výše uvedené podmínky vyplývá

$$P = [6, 4] \text{ je lokální maximum, } f(6, 4) = 5 \ln 2.$$

## 14.2 Neřešené příklady k procvičení

Stanovte lokální extrémů dané funkce:

1.  $f(x, y) = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$  [lokmax  $f(x, y) = f(0, 0) = 10$ ]
2.  $f(x, y) = 9 - (x - 5)^2 + (y - 4)^2$  [lokální extrémů neexistují]
3.  $f(x, y) = e^{2x} \cdot (x + y^2 + 2y)$  [lokmin  $f(x, y) = f(\frac{1}{2}, -1) = -\frac{e}{2}$ ]
4.  $f(x, y) = x \cdot \sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$  [lokmax  $f(x, y) = f(4, 4) = 15$ ]
5.  $f(x, y) = 3 + (x^2 + y) \cdot e^y$  [lokmin  $f(x, y) = f(0, -1) = 3 - \frac{1}{e}$ ]

## 15 Globální extrémy

### Postup při hledání absolutních extrémů funkce dvou proměnných:

1. určíme definiční obor a graficky znázorníme množinu  $M$ ,
2. určíme stacionární body uvnitř množiny,
3. vyšetříme funkce na hranici množiny, tj. dosazení rovnice křivky, která tvoří část hranice, do funkce (vyšetřujeme tedy extrémy vzniklé funkce jedné proměnné),
4. zjistíme funkční hodnoty ve všech takto nalezených bodech a z nich vybereme maximální a minimální číselné hodnoty.

### 15.1 Řešené příklady

**Př. 15.1.1** Stanovte globální extrémy funkce

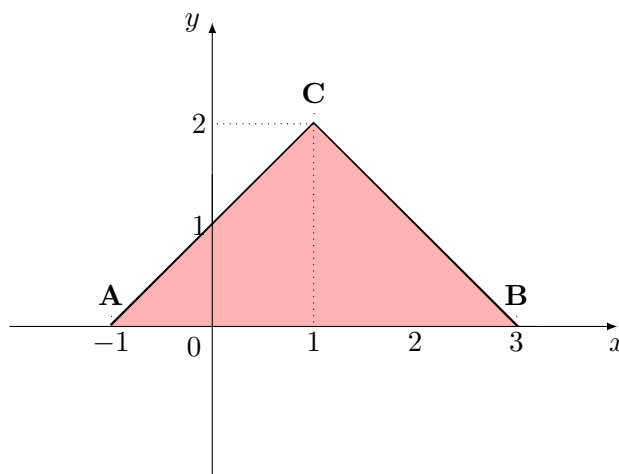
$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - x - y \text{ na trojúhelníku } ABC \text{ o vrcholech}$$

$$A = [-1, 0], B = [1, 2], C = [3, 0].$$

*Řešení*

Uurčíme definiční obor a graficky znázorníme trojúhelník ABC

$$D_f = \mathbb{E}_2.$$



Obrázek 13. Trojúhelník ABC

Spočítáme první parciální derivace

$$f'_x = 2x - y - 1, \quad f'_y = 2y - x - 1.$$

Uřídíme stacionární body uvnitř trojúhelníku řešením soustavy

$$\begin{array}{rcl} 2x - y - 1 & = & 0 \\ 2y - x - 1 & = & 0 \quad / \cdot 2 \\ \hline 2x - y - 1 & = & 0 \\ -2x + 4y - 2 & = & 0 \\ \hline 3y & = & 3 \\ y & = & 1 \Rightarrow P_1 = [1, 1]. \end{array}$$

Z grafického znázornění je zřejmé, že bod  $P_1[1, 1]$  leží uvnitř trojúhelníku ABC.

Dosazovací metodou stanovíme stacionární body na hranici trojúhelníku  
- úsečky AB, BC, CA.

a) Pro úsečku AB platí:

$$y = 0 \quad \wedge \quad x \in \langle -1, 3 \rangle.$$

Zkoumáme podezřelé body funkce  $f(x, 0) = x^2 - x = h_1(x)$ .

Řešíme rovnici  $h_1'(x) = 2x - 1 = 0$ , odkud  $x = \frac{1}{2}$ .

Dosazením do rovnice úsečky dostaneme  $y = 0$ .

Jediným podezřelým bodem úsečky AB je tedy bod  $P_2 = [\frac{1}{2}, 0]$ .

b) Pro úsečku BC platí:

$$y = 3 - x \quad \wedge \quad x \in \langle 1, 3 \rangle.$$

Zkoumáme podezřelé body funkce

$$\begin{aligned} f(x, 3-x) &= x^2 + (3-x)^2 - x(3-x) - x - (3-x) = x^2 + 9 - 6x + x^2 - 3x + x^2 - x - 3 + x = \\ &= 3x^2 - 9x + 6 = h_2(x). \end{aligned}$$

Řešíme rovnici  $h_2'(x) = 6x - 9 = 0$ , odkud  $x = \frac{3}{2}$ .

Dosazením do rovnice úsečky dostaneme  $y = \frac{3}{2}$ .

Jediným podezřelým bodem úsečky BC je tedy bod  $P_3 = [\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$ .

c) Pro úsečku CA platí:

$$y = x + 1 \quad \wedge \quad x \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Zkoumáme podezřelé body funkce

$$f(x, x+1) = x^2 + (x+1)^2 - x(x+1) - x - (x+1) = x^2 + x^2 + 2x + 1 - x^2 - x - x - x - 1 = \\ = x^2 - x = h_3(x).$$

Řešíme rovnici  $h'_3(x) = 2x - 1 = 0$ , odkud  $x = \frac{1}{2}$ .

Dosazením do rovnice úsečky dostaneme  $y = \frac{3}{2}$ .

Jediným podezřelým bodem úsečky CA je tedy bod  $P_4 = [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ .

Stanovíme funkční hodnoty funkce  $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - x - y$  v podezřelých bodech a ve stacionárních bodech trojúhelníku ABC

$$f(P_1) = f(1, 1) = -1,$$

$$f(P_2) = f(\frac{1}{2}, 0) = -\frac{1}{4},$$

$$f(P_3) = f(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) = -\frac{3}{4},$$

$$f(P_4) = f(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) = -\frac{1}{4},$$

$$f(A) = f(-1, 0) = 2,$$

$$f(B) = f(3, 0) = 6,$$

$$f(C) = f(1, 2) = 0.$$

Globální minimum nastává tedy v bodě  $P_1 = [1, 1]$ ,  $f(1, 1) = -1$  a globální maximum v bodě  $B = [3, 0]$ ,  $f(3, 0) = 6$ .

**Př. 15.1.2** Stanovte globální extrémy funkce

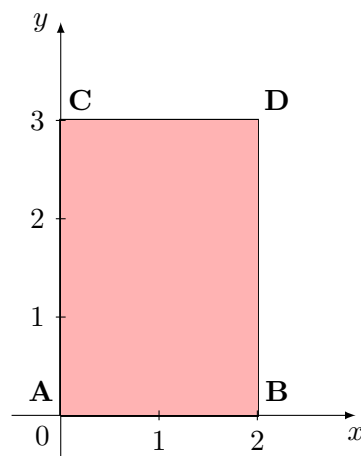
$f(x, y) = y^2 + 2xy - 4x - 6y$  na obdélníku ABCD o vrcholech

$A = [0, 0]$ ,  $B = [2, 0]$ ,  $C = [0, 3]$ ,  $D = [2, 3]$ .

*Řešení*

Uřídíme definiční obor a graficky znázorníme trojúhelník ABC

$$D_f = \mathbb{E}_2.$$



Obrázek 14. Obdélník ABCD

Spočítáme parciální derivace dané funkce

$$f'_x = 2y - 4, \quad f'_y = 2y + 2x - 6.$$

Řešením soustavy určíme stacionární body uvnitř obdélníku ABCD

$$\begin{aligned} 2y - 4 &= 0 &\Rightarrow y &= 2, \\ 2y + 2x - 6 &= 0 &\Rightarrow x &= 1. \end{aligned}$$

Řešením soustavy je bod  $P_1 = [1, 2]$ , který leží uvnitř obdélníku ABCD.

Dosazovací metodou stanovíme stacionární body na hranici obdélníku - úsečky AB, AC, BD, CD.

a) Pro úsečku AB platí:

$$y = 0 \quad \wedge \quad x \in \langle 0, 2 \rangle.$$

Zkoumáme podezřelé body funkce

$$\begin{aligned} f(x, 0) &= -4x = h_1(x), \\ h'_1(x) &= -4 \Rightarrow \text{na úsečce AB neexistují žádné podezřelé body.} \end{aligned}$$

b) Pro úsečku AC platí:

$$x = 0 \quad \wedge \quad y \in \langle 0, 3 \rangle.$$

Zkoumáme podezřelé body funkce

$$\begin{aligned} f(0, y) &= y^2 - 6y = h_2(x), \\ h'_2(x) &= 2y - 6 = 0, \text{ odkud } y = 3. \end{aligned}$$

Jediným podezřelým bodem úsečky AC je bod  $P_2 = [0, 3]$ .

c) Pro úsečku BD platí:

$$x = 2 \quad \wedge \quad y \in \langle 0, 3 \rangle.$$

Zkoumáme podezřelé body funkce

$$\begin{aligned} f(2, y) &= y^2 + 4y - 8 - 6y = y^2 - 2y - 8 = h_3(x), \\ h'_3(x) &= 2y - 2 = 0, \text{ odkud } y = 1. \end{aligned}$$

Jediným podezřelým bodem úsečky BD je bod  $P_3 = [2, 1]$ .

d) Pro úsečku CD platí:

$$y = 3 \quad \wedge \quad x \in \langle 0, 2 \rangle.$$

Zkoumáme podezřelé body funkce

$$f(x, 3) = 9 + 6x - 4x - 18 = 2x - 9 = h_4(x),$$

$$h_4'(x) = 2 \Rightarrow \text{na úsečce CD neexistují žádné podezřelé body.}$$

Stanovíme funkční hodnoty funkce  $f(x, y) = y^2 + 2xy - 4x - 6y$  v podezřelých bodech a ve vrcholech obdélníku ABCD

$$f(P_1) = f(1, 2) = -8,$$

$$f(P_2) = f(0, 3) = -9,$$

$$f(P_3) = f(2, 1) = -9,$$

$$f(A) = f(0, 0) = 0,$$

$$f(B) = f(2, 0) = -8,$$

$$f(C) = f(0, 3) = -9,$$

$$f(D) = f(2, 3) = -5.$$

Globální minimum nastává tedy v bodech  $P_2 = C = [0, 3]$ ,  $f(0, 3) = -9$ ,  $P_3 = [2, 1]$ ,  $f(2, 1) = -9$  a globální maximum v bodě  $A = [0, 0]$ ,  $f(0, 0) = 0$ .

**Př. 15.1.3** Stanovte globální extrémy funkce

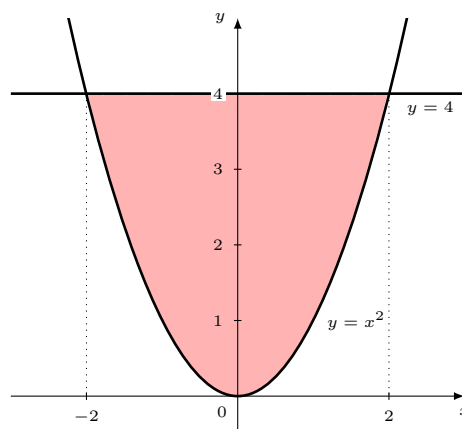
$$f(x, y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy \text{ na množině } M \text{ omezené } y = x^2 \wedge y = 4.$$

Řešení

Uřídíme definiční obor a graficky znázorníme množinu  $M$

$$D_f = \mathbb{E}_2.$$

Průsečíkem paraboly a přímky získáme body A,B - dosadíme  $y = 4$  do  $y = x^2$  a dostaneme  $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$ , tedy  $A = [-2, 4]$ ,  $B = [2, 4]$ .



Obrázek 15. Množina  $M$

Spočítáme parciální derivace dané funkce

$$f'_x = 6x^2 + 8x - 2y, \quad f'_y = 2y - 2x.$$

Řešením soustavy určíme stacionární body uvnitř dané množiny

$$\begin{array}{rcl} 6x^2 + 8x - 2y & = & 0 \\ 2y - 2x & = & 0 \Rightarrow y = x \end{array}$$


---

$$\begin{array}{rcl} 6x^2 + 6x & = & 0 \quad / : 6 \\ x^2 + x & = & 0 \\ x \cdot (x + 1) & = & 0 \end{array}$$


---

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 0 \Rightarrow y_1 = 0 \\ x_2 & = & -1 \Rightarrow y_2 = -1 \end{array}$$

Řešením jsou dva body  $P_1 = [0, 0]$ ,  $P_2 = [-1, -1]$ .

Z grafického znázornění je zřejmé, že bod  $P_1 = [0, 0]$  leží na dané množině. Bod  $P_2 = [-1, -1]$  neleží na množině  $\Rightarrow$  není extrém.

Dosazovací metodou stanovíme stacionární body na hranici dané množiny - hranici tvoří přímka  $y = 4$  a parabola  $y = x^2$ .

a) Pro přímku  $y = 4$  platí:

$$y = 4 \quad \wedge \quad x \in \langle -2, 2 \rangle.$$

Zkoumáme podezřelé body funkce

$$f(x, 4) = 2x^3 + 4x^2 + 16 - 8x = h_1(x).$$

Řešíme kvadratickou rovnici

$$h'_1(x) = 6x^2 + 8x - 8 = 0, \text{ odkud dostáváme dva body } x_1 = -2, x_2 = \frac{2}{3}.$$

Na přímce  $y = 4$  dostáváme tedy dva podezřelé body  $P_3 = [-2, 4]$ ,  $P_4 = \left[\frac{2}{3}, 4\right]$ .

b) Pro parabolu  $y = x^2$  platí:

$$y = x^2 \quad \wedge \quad x \in \langle -2, 2 \rangle.$$

Zkoumáme podezřelé body funkce

$$f(x, x^2) = 2x^3 + 4x^2 + x^4 - 2x^3 = x^4 + 4x^2 = h_2(x).$$

Řešíme rovnici

$h'_2(x) = 4x^3 + 8x = 0$ , odkud dostáváme  $x_1 = 0, x_2^2 = -2 \Rightarrow$  nemá řešení.  
Jediným podezřelým bodem paraboly je bod  $P_5 = [0, 0]$ .

Stanovíme funkční hodnoty funkce  $f(x, y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$  v podezřelých bodech a v hraničních bodech množiny

$$\begin{aligned} f(P_1) &= f(0, 0) = 0, \\ f(P_3) &= f(-2, 4) = 32, \\ f(P_4) &= f\left(\frac{2}{3}, 4\right) = 13.04, \\ f(P_5) &= f(0, 0) = 0, \\ f(A) &= f(-2, 4) = 32, \\ f(B) &= f(2, 4) = 32. \end{aligned}$$

Globální minimum na množině  $M$  nastává v bodech  $P_1 = P_5 = [0, 0], f(0, 0) = 0$ ,  
globální maximum nastává v bodech  $P_3 = A = [-2, 4], f(-2, 4) = 32$ ,  
 $B = [2, 4], f(2, 4) = 32$ .

## 15.2 Neřešené příklady k procvičení

Stanovte globální extrémy funkcí definovaných na daných množinách:

1.  $f(x, y) = x^2 - y^2$  na kruhu  $x^2 + y^2 \leq 4$   
[MAX  $f(x, y) = f(2, 0) = f(-2, 0) = 4$ , MIN  $f(x, y) = f(0, 2) = f(0, -2) = -4$ ]
2.  $f(x, y) = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$  na množině  $x \geq 0, y \geq 0, y \leq -x + 3$   
[MAX  $f(x, y) = f(0, 0) = -1$ , MIN  $f(x, y) = f(0, 3) = -19$ ]
3.  $f(x, y) = x - 2y + 5$  na trojúhelníku vymezeném přímkami  $y = x + 1, y = 3 - x, x = 0$   
[MAX  $f(x, y) = f(0, 1) = 3$ , MIN  $f(x, y) = f(0, 3) = -1$ ]

Vybrané příklady jsou čerpány ze zdrojů [1],[6],[9],[10],[11],[12],[13].

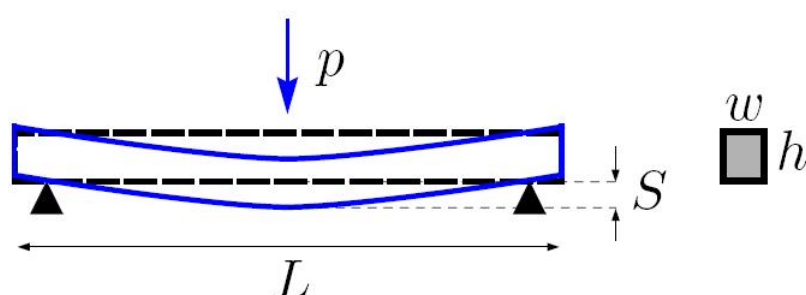
## 16 Aplikace s použitím diferenciálního počtu funkce více proměnných

## Př. 16.1

Nosník z materiálu o materiálové konstantě  $C$  je zatížen silou  $p$ . Délka nosníku je  $L$ , výška  $h$  a šířka  $w$ . Silovým působením se nosník prohne o

$$S = C \frac{pL^2}{wh^3}.$$

Užitím parciálních derivací vyjádřete rychlost změny prohnutí nosníku v závislosti na výšce  $h$  a šířce  $w$ .



Obrázek 16. Nosník

Řešení

Jednotky jednotlivých veličin jsou:  $p = 2$  kN,  $L = 1$  m,  $w = h = 10$  cm,  $C = 5000$ . Jednotky veličiny  $C$  jsou zvoleny tak, aby  $S$  vycházelo v centimetrech. Potom dostáváme  $S = 1$  cm. Předpokládáme, že materiál nosníku ubývá tak, že  $\Delta h = \Delta w = -0,1$  cm/měsíc.

Platí tedy

$$\Delta S = \frac{\partial S}{\partial w} \Delta w + \frac{\partial S}{\partial h} \Delta h.$$

Spočítáme parciální derivace

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial w} &= C \frac{pL^4}{h^3} \cdot (-1)w^{-2} = -C \frac{pL^4}{wh^3} \cdot \frac{1}{w}, \\ \frac{\partial S}{\partial h} &= C \frac{pL^4}{w} \cdot (-3)h^{-4} = -3C \frac{pL^4}{wh^3} \cdot \frac{1}{h}. \end{aligned}$$

Pro zadané hodnoty dosazením dostáváme

$$\frac{\partial S}{\partial w} = -1 \cdot \frac{1}{10} = -0,1 \quad \text{a} \quad \frac{\partial S}{\partial h} = -3 \cdot \frac{1}{10} = -0,3.$$

Odkud

$$\Delta S = \frac{\partial S}{\partial w} \Delta w + \frac{\partial S}{\partial h} \Delta h = -0,1 \cdot (-0,1) + (-0,3) \cdot (-0,1) = \underline{\underline{0,04}}.$$

Prohnutí nosníku se zvětšuje rychlostí 0,04 cm/měsíc.

### Př. 16.2

Maximalizace zisku v závislosti na ceně produktu a nákladech na reklamu.

Celkový příjem  $R$  dané firmy za daný druh produktu je dán součinem ceny a poptávky po tomto produktu. Platí tedy obecný vztah

$$R = p \cdot q(p, A) = p \cdot \frac{54\sqrt{A}}{\sqrt{p^3}} = \frac{54\sqrt{A}}{\sqrt{p}}.$$

#### Řešení

Uvažujeme závislost příjmu  $R$  firmy na ceně produktu  $p$  a nákladech na reklamu  $A$ :

$$R = f(p, A) = \frac{54\sqrt{A}}{\sqrt{p}}.$$

Dále uvažujeme souvislost produkčních nákladů  $C$  a poptávky po daném produktu  $q$ , které vychází z obecného vztahu

$$C = 2q \quad \text{neboli} \quad C = 2 \cdot \frac{54\sqrt{A}}{\sqrt{p^3}} = \frac{108\sqrt{A}}{\sqrt{p^3}}.$$

Pro zisk  $P$  firmy z daného produktu lze předpokládat vztah

$$P = R - C - A.$$

Po dosazení do výše uvedených vzorců pro  $R$  a  $C$  dostáváme

$$P = f(p, A) = \frac{54\sqrt{A}}{\sqrt{p}} - \frac{108\sqrt{A}}{\sqrt{p^3}} - A = \frac{54\sqrt{A}}{\sqrt{p^3}}(p - 2) - A.$$

Určíme parciální derivace

$$\frac{\partial P}{\partial p} = -\frac{27\sqrt{A}}{\sqrt{p^3}} + \frac{162\sqrt{A}}{\sqrt{p^5}} = \frac{27\sqrt{A}}{\sqrt{p^5}}(-p + 6), \quad \frac{\partial P}{\partial A} = \frac{27}{\sqrt{Ap^3}}(p - 2) - 1.$$

Platí  $A > 0, p > 0$ . Položením parciálních derivací nule vyřešíme soustavu rovnic a určíme lokální extrémy dané funkce

$$\frac{27\sqrt{A}}{\sqrt{p^5}}(-p+6) = 0 \Rightarrow \underline{p=6}$$

$$\frac{27}{\sqrt{Ap^3}}(p-2) - 1 = 0$$


---


$$\frac{27 \cdot 4}{6\sqrt{A} \cdot 6} = 1$$

$$A = \left(\frac{9 \cdot 2}{\sqrt{6}}\right)^2 \Rightarrow \underline{A=54}$$

Zjistíme, zda pro  $p = 6, A = 54$  skutečně nastává lokální minimum nebo maximum. Určíme druhé parciální derivace

$$\frac{\partial^2 P}{\partial p^2} = \left[ 54\sqrt{A} \left( -\frac{1}{2\sqrt{p^3}} + \frac{3}{\sqrt{p^5}} \right) \right] = 54\sqrt{A} \left( \frac{3}{4\sqrt{p^5}} - \frac{15}{2\sqrt{p^7}} \right) = \frac{81\sqrt{A}}{2\sqrt{p^7}}(p-10),$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial p \partial A} = \left[ \frac{27\sqrt{A}}{\sqrt{p^5}}(-p+6) \right] = \frac{27}{2\sqrt{A} \cdot p^5}(-p+6),$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial A^2} = \left[ \frac{27}{\sqrt{A} \cdot p^3}(p-2) - 1 \right] = -\frac{27}{2\sqrt{A^3 p^3}}(p-2).$$

Sestavíme Hessián z druhých parciálních derivací  $P = f(p, A)$  v bodě  $p = 6, A = 54$

$$H_{f(6,54)} = \begin{vmatrix} \frac{81\sqrt{54}}{2\sqrt{6^7}}(6-10) & \frac{27}{2\sqrt{54 \cdot 6^5}}(6-6) \\ \frac{27}{2\sqrt{54 \cdot 6^5}}(6-6) & -\frac{27}{2\sqrt{54^3 \cdot 6^3}}(6-2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{9}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{108} \end{vmatrix} = -\frac{9}{4} \cdot \left(-\frac{1}{108}\right) - 0 = \frac{1}{48}.$$

Platí

$$\frac{\partial^2 P}{\partial p^2}(6, 54) < 0 \quad \wedge \quad H(6, 54) > 0.$$

Z výše uvedené podmínky vyplývá, že v daném bodě nastává lokální maximum dané funkce, tj. při ceně produktu  $p$  rovné 6 a nákladům na reklamu  $A$  rovným 54 nastává lokální maximum.

**Př. 16.3**

Určete rozměry pravoúhlého otevřeného bazénu tak, aby měl co nejmenší povrch při daném objemu  $V$ .



Obrázek 17. Bazén

Řešení

Označíme si  $a$  délku,  $b$  výšku,  $c$  šířku bazénu. Platí zde základní vztahy pro výpočet objemu čtyřbokého hranolu s obdélníkovou podstavou  $V = abc$  a povrchu  $S(a, b, c) = ab + 2ac + 2bc$ . Budeme tedy hledat minimum funkce  $S(a, b, c)$  při podmínce  $V = abc$ , kde  $a, b, c > 0$ .

Ze vztahu  $V = abc$  vyjádříme proměnnou  $a$  jako  $a = \frac{V}{bc}$ , jejím dosazením do funkce  $S$  dostaneme funkci dvou proměnných

$$S(b, c) = \frac{V}{c} + \frac{2V}{b} + 2bc.$$

Spočítáme parciální derivace

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -\frac{2V}{b^2} + 2c, \quad \frac{\partial S}{\partial c} = -\frac{V}{c^2} + 2b.$$

Vyřešíme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}
 -\frac{2V}{b^2} + 2c &= 0 \Rightarrow c = \frac{V}{b^2} \\
 -\frac{V}{c^2} + 2b &= 0 \\
 \hline
 -\frac{V}{\left(\frac{V}{b^2}\right)^2} + 2b &= 0 \\
 2b &= \frac{b^4}{V} \\
 b &= \sqrt[3]{2V}
 \end{aligned}$$

Dosazením do vyjádření proměnné  $c$  dostaneme  $c = \frac{V}{\left(\sqrt[3]{2V}\right)^2}$ . Získáváme tedy jeden podezřelý bod  $\left[\sqrt[3]{2V}, \frac{V}{\left(\sqrt[3]{2V}\right)^2}\right]$  z lokálního extrému funkce  $S$ .

Spočítáme druhé parciální derivace

$$\frac{\partial^2 S}{\partial b^2} = \frac{4V}{b^3}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial b \partial c} = 2, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial c^2} = \frac{2V}{c^3}.$$

Sestavíme a vypočítáme Hessián v daném bodě

$$H\left(\sqrt[3]{2V}, \frac{V}{\left(\sqrt[3]{2V}\right)^2}\right) = \begin{vmatrix} \frac{4V}{b^3} & 2 \\ 2 & \frac{2V}{c^3} \end{vmatrix} = \frac{4V}{b^3} \cdot \frac{2V}{c^3} - 4 = \frac{8V^2}{2V \cdot \frac{V^3}{\left(\sqrt[3]{2V}\right)^6}} = \frac{8V^2}{\frac{V^2}{2}} - 4 = 12.$$

Protože  $\frac{4V}{b^3} = \frac{4V}{2V} = 2 > 0 \quad \wedge \quad H\left(\sqrt[3]{2V}, \frac{V}{\left(\sqrt[3]{2V}\right)^2}\right) > 0$  nastává v daném bodě lokální minimum.

Dosazením do vztahu  $a = \frac{V}{bc}$  dostáváme rozměry bazénu  $a = b = \sqrt[3]{2V}$ .

*Aplikace jsou vybrány ze zdrojů [2],[13].*

## ZÁVĚR

Hlavním cílem této bakalářské práce bylo vytvořit sbírku řešených a neřešených příkladů z teorie diferenciálního počtu funkce více proměnných, která hraje podstatnou roli nejen v matematice, ale i v jejích fyzikálních, technických a ekonomických aplikacích. Je určena jako studijní pomůcka studentům FAI UTB v předmětu Matematika II.

Teoretická část sbírky je rozdělena do osmi kapitol, kde jsou uvedeny definice a věty objasňující základní pojmy z teorie diferenciálního počtu funkce více proměnných, které se využívají při praktickém řešení příkladů. K hlavním pojmům patří metrické prostory, parciální derivace, diferenciál funkce, implicitní funkce, lokální a globální extrémy. Praktická část sbírky obsahuje především řešené příklady s podrobným popisem postupu řešení, umožňující studentům lepší pochopení dané problematiky. V závěru každé kapitoly je uvedena sada neřešených příkladů s výsledky, určených k procvičení.

Práce je zpracována v sázecím programu  $\LaTeX$ , který se používá zejména pro tvorbu matematických a vědeckých dokumentů. Obrázky jsou vytvořeny pomocí grafického balíku  $\text{TikZ\&PGF}$ , což je nástroj k vytváření kvalitních vektorových ilustrací v multiplatformním prostředí  $\text{T}\text{E}\text{X}$ .

## CONCLUSION

The aim of this bachelor thesis was to create a collection of solved and unsolved examples from the theory of differential calculus, which plays an essential role not only in mathematics but also in its physical, technical and economic applications. It should be helpful as a study tool for students FAI UTB in the subject Mathematics II.

The theoretical part of the collection is divided into eight chapters, which provides definitions and sentences explaining the basic concepts of the theory of differential calculus, which are used in solving practical examples. Key concepts include metric spaces, partial derivatives, differential, implicit functions, local and global extrema. The practical part of the collection contains mostly solved examples with detailed description of the solution process, enabling students better understanding of the issue. At the end of each chapter is a set of examples with unresolved outcomes for practice.

Work is processed in the typesetting program  $\LaTeX$ , which is mainly used for creating mathematical and scientific documents. Images are created using a graphical package  $\text{TikZ\&PGF}$ , a tool for creating high-quality vector illustrations in a multi-platform environments  $\text{T}\text{E}\text{X}$ .

**Reference**

- [1] DOŠLÁ, Z.; DOŠLÝ, O. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*, Brno, 2006. ISBN 80-210-4159-5.
- [2] KAŇKA, M.; HENZLER, J. *Matematika 2*, Praha, 2003. ISBN 80-86119-77-7.
- [3] KOPKA, H.; DALY, P. W. *Latex - kompletní průvodce.*, Brno, 2004. ISBN 80-7226-973-9.
- [4] MENDELSON, E. *Schaum's 3000 solved problems in calculus*, McGraw-Hill, 1988. ISBN 0-07-041480-7.
- [5] NAVRÁTIL, M. *Matematika: diferenciální a integrální počet funkcí dvou a více proměnných*, Brno, 2001. ISBN 80-7157-493-7.
- [6] OSTRAVSKÝ, J. *Diferenciální počet funkce více proměnných. Nekonečné číselné řady.*, Zlín, 2009. ISBN 978-80-7318-856-6.
- [7] RYBIČKA, J. *Latex pro začátečníky*, Brno, 2003. ISBN 80-7302-049-1.
- [8] THOMAS, G. B.; WEIR, M. D.; HASS, J.; GIORDANO, F. R. *Thomas Calculus*, Media Upgrade (11th Edition). Amazon, 2007. ISBN 0-321-48987-X.
- [9] TOMICA, R. *Cvičení z matematiky II*, Brno, 1974.
- [10] *Matematika online* [online]. [cit. 2011-4-6]. Dostupný z WWW: <http://mathonline.fme.vutbr.cz/Matematika-II/sc-6-sr-1-a-25/default.aspx>.
- [11] *Diferenciální počet funkcí více proměnných - interaktivní sbírka* [online]. [cit. 2011-4-12]. Dostupný z WWW: <http://is.muni.cz/do/1499/el/estud/prif/ps09/sbirka/web/sbirka/interaktivni-sbirka.pdf>.
- [12] *Matematická analýza s programem Maple* [online]. [cit. 2011-4-16]. Dostupný z WWW: <http://www.math.muni.cz/~plch/mapm/>.
- [13] *Robert Mařík* [online]. [cit. 2011-5-14]. Dostupný z WWW: <http://user.mendelu.cz/marik/inzmat/aplikace-pd-screen.pdf>.

**SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK**

- $\mathbb{N}$  množina všech přirozených čísel  
 $\mathbb{R}$  množina všech reálných čísel  
 $\mathbb{Z}$  množina všech celých čísel

**Seznam obrázků**

Obr. 1. Okolí bodu v $\mathbb{E}_1$ .....	11
Obr. 2. Okolí bodu v $\mathbb{E}_2$ .....	11
Obr. 3. Okolí bodu v $\mathbb{E}_3$ .....	11
Obr. 4. Vnitřní, hraniční a vnější bod množiny $M$ .....	12
Obr. 5. Geometrický význam parciálních derivací .....	18
Obr. 6. Definiční obor funkce $f(x, y) = \frac{x+y}{9x^2+16y^2-144}$ .....	27
Obr. 7. Definiční obor funkce $f(x, y) = \sqrt[4]{(9-x^2-y^2)(x^2+y^2-4)}$ .....	28
Obr. 8. Definiční obor funkce $f(x, y) = \sqrt{\frac{6x-x^2-y^2}{x^2-y}}$ .....	29
Obr. 9. Definiční obor funkce $f(x, y) = \ln[\sin(x+y)]$ .....	30
Obr. 10. Definiční obor funkce $f(x, y) = \ln[x \ln(y-x)]$ .....	31
Obr. 11. Definiční obor funkce $f(x, y) = \arccos \frac{x}{x+y}$ .....	32
Obr. 12. Definiční obor funkce $f(x, y) = \arcsin \frac{x}{y^2} + \arccos(1-y)$ .....	32
Obr. 13. Trojúhelník ABC .....	52
Obr. 14. Obdélník ABCD .....	54
Obr. 15. Množina $M$ .....	56
Obr. 16. Nosník .....	59
Obr. 17. Bazén .....	62