

# **Aplikace numerických metod aproximace, interpolace a derivování v prostředí Mathematica vhodných pro předmět Matematika I na FAI UTB ve Zlíně**

Application of numerical methods of approximation, interpolation and differentiation in Mathematica environment that are suitable for Mathematics I subject at the FAI TBU in Zlín

Václav Vrba

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně  
Fakulta aplikované informatiky  
akademický rok: 2011/2012

## ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Václav VRBA**  
Osobní číslo: **A09664**  
Studijní program: **B 3902 Inženýrská informatika**  
Studijní obor: **Informační a řídicí technologie**

Téma práce: **Aplikace numerických metod aproximace, interpolace a derivování v prostředí Mathematica, vhodných pro předmět Matematika I na FAI UTB ve Zlíně**

Zásady pro vypracování:

1. Na základě aktuálních výukových materiálů, používaných vedoucím práce v předmětu Matematika I, navrhnete formu vypracování navazujících elektronických studijních materiálů ze základních numerických metod aproximace, interpolace (včetně interpolace splajny) a derivování a příklady naprogramujete v systému počítačové algebry Mathematica.
2. V materiálech navazujících na stávající elektronickou příručku, které by měly být stručným úvodem do problematiky numerických metod integrace, kladte vedle srozumitelnosti a názornosti také důraz na jejich motivující roli pro studenty.
3. Materiály implementujte do prostředí PowerPoint a do výukového kurzu v Moodle.
4. Výklad vybrané metody doplňte vždy motivačními řešenými příklady a efektivnost dosažených výsledků přehledně vyhodnoťte .
5. Zpracujte elektronickou oporu pro přednášky předmětu Matematika I.

Rozsah bakalářské práce:

Rozsah příloh:

Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

1. FIALKA, Miloslav a Hana CHARVÁTOVÁ. **Matematika I. Dotisk 2. vyd. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2009. ISBN 978-80-7318-584-8.**
2. CHRAMCOV, Bronislav. **Základy práce v prostředí Mathematica. 2. vyd. Zlín: Univerzita Tomáše Bati, 2006. ISBN 80-7318-510-5.**
3. RALSTON, A. **Základy numerické matematiky. 2. vyd. Praha: Academia, 1976.**
4. MÍKA, S. **Numerické metody Algebry. Praha: SNTL, 1985.**
5. REKTORYS, Karel. **Přehled užití matematiky I. 6. vyd. Praha: Prometheus, 1995. ISBN 80-85849-92-5.**
6. REKTORYS, Karel. **Přehled užití matematiky II. 6. vyd. Praha: Prometheus, 1995. ISBN 80-85849-62-3.**
7. DOBRAKOVÁ, J., M., KOVÁČOVÁ a V. ZÁHONOVÁ. **Mathematica 5.2: tréninkové materiály. Bratislava: Slovenská technická univerzita v Bratislavě, 2008. ISBN 80-969562-2-1.**
8. PŘIKRYL, Petr. **Numerické metody matematické analýzy. Praha: SNTL, 1985.**
9. VITÁSEK, E. **Numerické metody. Praha: SNTL, 1987.**

Vedoucí bakalářské práce:

**RNDr. Miloslav Fialka, CSc.**

Ústav matematiky

Datum zadání bakalářské práce:

**24. února 2012**

Termín odevzdání bakalářské práce:

**8. června 2012**

Ve Zlíně dne 24. února 2012



prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.  
*děkan*



prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.  
*ředitel ústavu*

## ABSTRAKT

Bakalářská práce je zaměřena na vypracování navazujících elektronických studijních materiálů ze základních numerických metod aproximace, interpolace a derivace v prostředí Wolfram Mathematica. Teoretická část přibližuje studentům intuitivní formou především interpolaci polynomy, včetně spline funkcí, dále metodu nejmenších čtverců a numerický výpočet derivace. Praktická část obsahuje vybrané příklady včetně ukázek kódů a grafického řešení. Pro větší názornost je práce doplněna grafy.

Klíčová slova: interpolace, aproximace, extrapolace, spline, splajn, interpolační polynom, numerická derivace, Wolfram Mathematica

## ABSTRACT

This bachelor thesis is focusing on formulation of subsequent electronic study materials regarding basic numeric methods of approximation, interpolation and derivation in the Wolfram Mathematica surroundings. The theoretical part is intuitively introducing students to polynomial interpolation including spline functions, further on the method of least squares and also numerical calculation of derivation. The practical part consists of selected problems including the examples of codes and graphic solutions. For illustrative purposes, the thesis contains also charts.

Keywords: interpolation, approximation, extrapolation, spline, polynomial interpolation, numerical derivation, Wolfram Mathematica

Rád bych především poděkoval vedoucímu své bakalářské práce RNDr. Miloslavu Fialkovi, CSc. a studentovi Lukáši Urbančokovi za poskytnutí experimentálních výsledků měření.

**Prohlašuji, že**

- beru na vědomí, že odevzdáním bakalářské práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb. o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších právních předpisů, bez ohledu na výsledek obhajoby;
- beru na vědomí, že bakalářská práce bude uložena v elektronické podobě v univerzitním informačním systému dostupná k prezenčnímu nahlédnutí, že jeden výtisk bakalářské práce bude uložen v příruční knihovně Fakulty aplikované informatiky Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně a jeden výtisk bude uložen u vedoucího práce;
- byl/a jsem seznámen/a s tím, že na moji bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších právních předpisů, zejm. § 35 odst. 3;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 1 autorského zákona má UTB ve Zlíně právo na uzavření licenční smlouvy o užití školního díla v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 2 a 3 autorského zákona mohu užít své dílo – bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití jen s předchozím písemným souhlasem Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše);
- beru na vědomí, že pokud bylo k vypracování bakalářské práce využito softwaru poskytnutého Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně nebo jinými subjekty pouze ke studijním a výzkumným účelům (tedy pouze k nekomerčnímu využití), nelze výsledky bakalářské práce využít ke komerčním účelům;
- beru na vědomí, že pokud je výstupem bakalářské práce jakýkoliv softwarový produkt, považují se za součást práce rovněž i zdrojové kódy, popř. soubory, ze kterých se projekt skládá. Neodevzdání této součásti může být důvodem k neobhájení práce.

**Prohlašuji,**

- že jsem na bakalářské práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval. V případě publikace výsledků budu uveden jako spoluautor.
- že odevzdaná verze bakalářské práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG jsou totožné.

Ve Zlíně

.....  
podpis diplomanta

**OBSAH**

<b>ÚVOD</b> .....	<b>9</b>
<b>I. TEORETICKÁ ČÁST</b> .....	<b>10</b>
<b>1 INTERPOLACE, APROXIMACE, EXTRAPOLACE</b> .....	<b>11</b>
1.1 ZÁKLADNÍ POJMY .....	11
1.1.1 Interpolace.....	11
1.1.2 Aproximace .....	11
1.1.3 Extrapolace.....	13
1.2 INTERPOLACE POLYNOMEM.....	14
1.2.1 Lineární interpolace .....	14
1.2.2 Lagrangeova interpolace .....	15
1.2.3 Newtonova interpolace.....	16
1.2.4 Hermiteova interpolace .....	17
1.3 INTERPOLACE SPLINE FUNKCEMI - SPLAJNY.....	18
1.3.1 Lineární splajn.....	18
1.3.2 Kubický splajn .....	19
1.4 METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ.....	20
<b>2 NUMERICKÁ DERIVACE</b> .....	<b>22</b>
2.1 DERIVACE INTERPOLAČNÍHO POLYNOMU .....	22
2.2 VZORCE PRO VÝPOČET .....	22
<b>3 MATHEMATICA</b> .....	<b>24</b>
3.1 MOŽNOSTI VYUŽITÍ .....	24
3.2 UŽIVATELSKÉ PROSTŘEDÍ .....	24
<b>II. PRAKTICKÁ ČÁST</b> .....	<b>26</b>
<b>4 ŘEŠENÍ PŘÍKLADŮ V PROGRAMU MATHEMATICA</b> .....	<b>27</b>
4.1 ZÁKLADNÍ PRINCIPY ZÁPISU PŘÍKAZŮ .....	27
4.2 PŘÍKAZY POUŽITÉ PŘI VÝPOČTU MOTIVAČNÍCH PŘÍKLADŮ .....	27
4.2.1 Definování bodů souřadnicemi .....	27
4.2.2 Příkazy pro nastavení vlastností grafu .....	27
4.2.3 Příkazy pro vykreslování grafu .....	28
4.2.4 Příkazy pro funkce, derivace a interpolaci bodů pomocí interpolační funkce .....	28
<b>5 MOTIVAČNÍ PŘÍKLADY</b> .....	<b>29</b>
5.1 1. PŘÍKLAD .....	29
5.1.1 Zadání.....	29
5.1.2 Řešení.....	30
5.2 2. PŘÍKLAD .....	34
5.2.1 Zadání.....	34
5.2.2 Řešení.....	35
5.2.2.1 Řešení pomocí interpolace.....	35
5.2.2.2 Řešení pomocí aproximace.....	39
5.2.2.3 Porovnání výsledků různých metod výpočtu.....	44

5.3	3. PŘÍKLAD.....	44
5.3.1	Zadání.....	45
5.3.2	Řešení.....	45
5.4	4. PŘÍKLAD.....	50
5.4.1	Zadání.....	50
5.4.2	Řešení.....	50
5.4.2.1	Řešení první derivace.....	51
5.4.2.2	Řešení druhé derivace.....	54
	<b>ZÁVĚR .....</b>	<b>57</b>
	<b>ZÁVĚR V ANGLIČTINĚ.....</b>	<b>58</b>
	<b>SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY.....</b>	<b>59</b>
	<b>SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK.....</b>	<b>60</b>
	<b>SEZNAM OBRÁZKŮ .....</b>	<b>62</b>
	<b>SEZNAM TABULEK.....</b>	<b>65</b>



## ÚVOD

Cílem této práce je seznámit studenty se základními numerickými metodami aproximace, interpolace a derivace. Studenti se s tímto problémem často setkávají a ne vždy si to uvědomují. Nevědomky se s tímto problémem setkávají při výpočtech na počítačích, vědomé setkání pak probíhá v laboratořích a v praxi při vyhodnocování výsledků experimentálních měření.

Pro vypracování této práce byla provedena podrobná rešerše možností řešení interpolací polynomy různými metodami, která byla doplněna také o rešerši modelových příkladů a dalších postupů, jak danou látku přiblížit studentům. Shrnutím těchto rešerší vznikla teoretická část této práce, ve které se autor snažil o intuitivní způsob formulace jednotlivých definicí s ohledem na srozumitelnost a dodržení jednotného formátu. Pro větší názornost byla tato část doplněna grafy.

V praktické části se autor zabývá řešením typových příkladů, které pro názornost řeší krok za krokem. Jednotlivé kroky řešení jsou doplněny grafy a zdrojovým kódem programu Wolfram Mathematica.

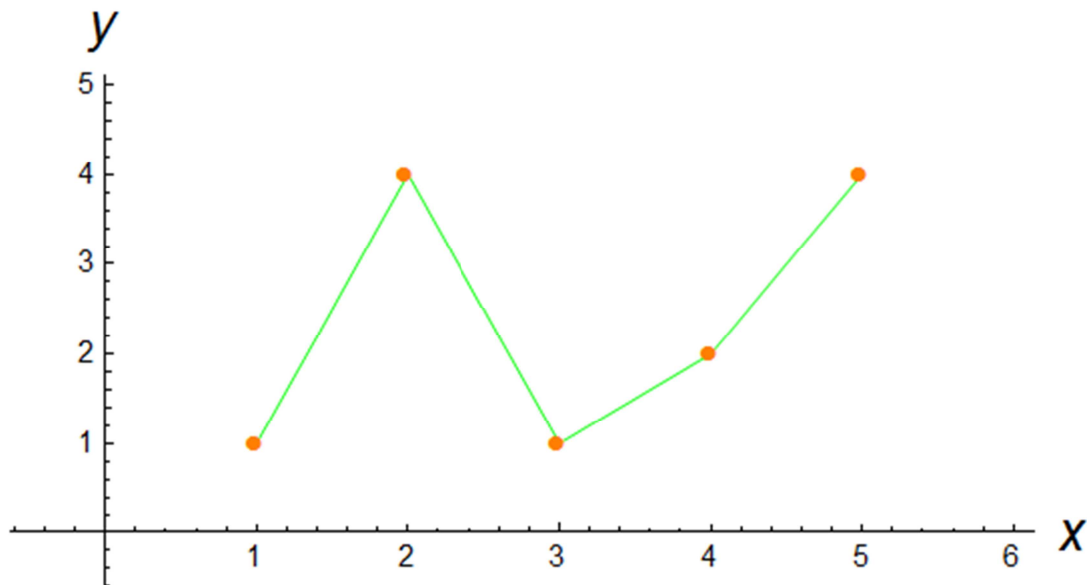
## **I. TEORETICKÁ ČÁST**

# 1 INTERPOLACE, APROXIMACE, EXTRAPOLACE

## 1.1 Základní pojmy

### 1.1.1 Interpolace

Při experimentech obvykle získáváme data o průběhu sledovaného jevu pouze v měřených bodech. Pro formulaci obecnějšího závěru nebo pro získání hodnot jevu i mezi jednotlivými měřeními je nutné matematicky formulovat funkci, která prochází změřenými body a zároveň s jistou pravděpodobností modeluje jev i mezi body měření (Obrázek 1.1). Hledání této funkce nazýváme interpolací.



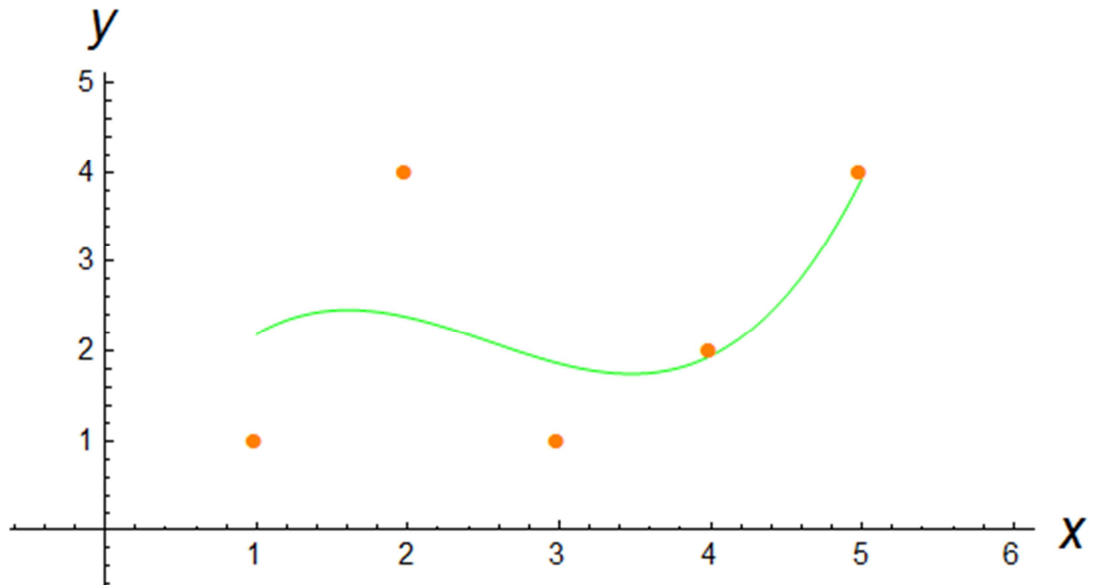
Obrázek 1.1 - Interpolace - příklad interpolace souboru měřených dat lineárním splajnem

Pro interpolaci je možné použít jakoukoliv funkci nebo spíše posloupnost funkcí. Nejjednodušší interpolace je možná pomocí lineární funkce, tato interpolační funkce je sice spojitá, ale její derivace již spojitá není a to omezuje možnosti jejího využití. Nejpoužívanější je interpolace polynomem druhého, třetího a případně i vyššího řádu. Čím vyšší je řád polynomické funkce, tím přesnější je interpolace. S vyšším řádem polynomické funkce roste složitost výpočtu a také může docházet k nežádoucí oscilaci.

### 1.1.2 Aproximace

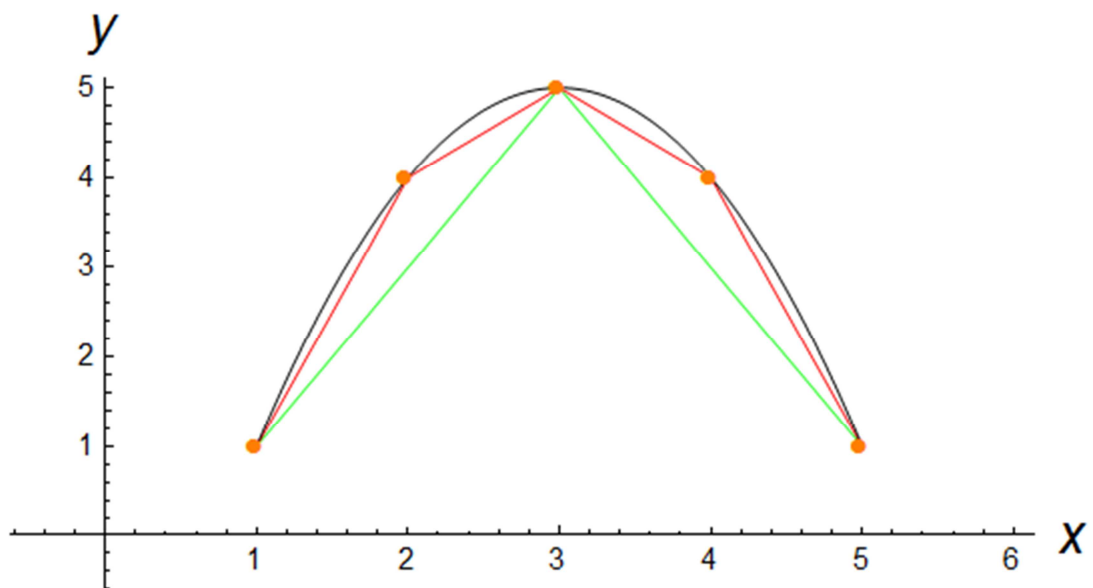
Další možností pro formulování funkční závislosti z naměřených bodových hodnot je použití aproximace. Aproximací získáme rovněž pravděpodobný model závislosti měřených parametrů, ale na rozdíl od interpolace nemusí aproximační funkce procházet

přímo změřenými body (Obrázek 1.2). Mohlo by se zdát, že v tomto případě nezískáme relevantní funkční závislost. Ale když vyjdeme z předpokladu, že měření je zatíženo náhodnou chybou, tak je zřejmé, že pro získání funkční závislosti odpovídající skutečnosti, nemusí graf funkce nutně přesně procházet změřenými body.



Obrázek 1.2 - Aproximace - příklad aproximace souboru měřených dat

Další využití najdou aproximace u modelování jevů, u kterých je známa přesná funkce, která je popisuje.

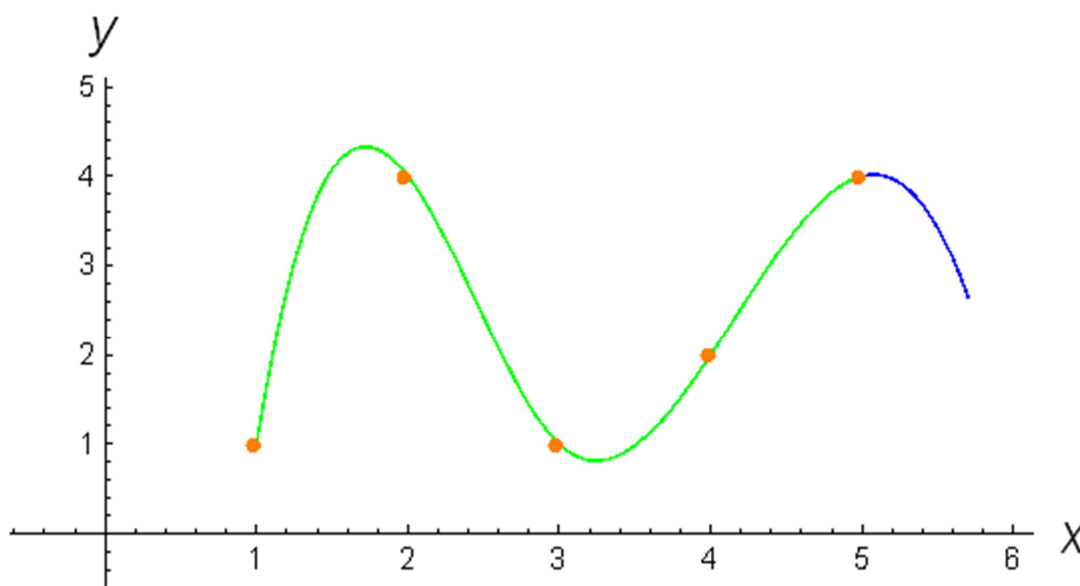


Obrázek 1.3 - Aproximace - ukázka zpřesnění aproximace funkce (černá) zvýšením počtu uzlových bodů (3 - zelená, 5 - červená)

Tato funkce je složitá nebo by výpočty s ní byly časově náročné. Vyjádříme tedy hodnoty této funkce pouze v předem zvolených bodech (uzlech) a pro další body použijeme interpolaci z uzlových bodů stejně jako v kapitole 1.1.1. Při zvyšování hustoty uzlových bodů dochází samozřejmě ke zvyšování přesnosti aproximace funkce (Obrázek 1.3), ale současně se zvyšuje i náročnost výpočtu. Určení správné hustoty uzlových bodů, vzhledem k požadované přesnosti aproximace funkce, je proto klíčové.

### 1.1.3 Extrapolace

Často se stává, že měření není provedeno v celém intervalu hodnot, které nás zajímají. Je to způsobeno omezením množství měření nebo omezenou možností měření v daném rozsahu hodnot. V těchto případech však potřebujeme určit průběh sledovaného jevu i mimo rozsah opravdu změřených hodnot. (Obrázek 1.4). V tu chvíli přichází ke slovu extrapolace. Při extrapolaci použijeme stejný postup jako při interpolaci, při kterém nahradíme neznámou funkci ve známých funkčních hodnotách jinou vhodnou funkcí. Díky této funkci můžeme určit s jistou pravděpodobností i hodnoty mimo původní rozsah měření. Tato pravděpodobnost ovšem rychle klesá se zvyšující se vzdáleností od původního rozsahu měření. Z toho vyplývá, že je možné extrapolaci používat pouze v blízkosti měřeného intervalu, protože ve větší vzdálenosti od něj může docházet ke vzniku značné odchylky od skutečných hodnot (kdyby byly změřeny).



Obrázek 1.4 - Extrapolace - příklad extrapolace mimo oblast měřených dat (modře)

## 1.2 Interpolace polynomem

Při interpolaci se nejčastěji setkáváme s využitím interpolačních funkcí ve tvaru polynomu. Použití polynomických funkcí je velmi výhodné, protože:

- mají poměrně jednoduchý matematický popis - stačí určit stupeň polynomu a jeho jednotlivé koeficienty
- mají relativně jednoduchý výpočet - bez obtíží se dají vypočítat konečným počtem aritmetických operací
- matematické operace s nimi jsou jednoduché na výpočet - derivace a integrace
- s nimi můžeme dosáhnout libovolnou přesnost - v závislosti na stupni použitého polynomu

Nechť jsou pro body  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , takzvané uzly interpolace, dány hodnoty  $y_i$  a platí  $x_i \neq x_j$  pro  $i \neq j$ . Pak polynom  $P_n(x)$ , který splňuje interpolační podmínky:

$$P_n(x_i) = y_i \quad (1.1)$$

pro  $i = 0, 1, \dots, n$ , nazýváme interpolační polynom, který je nejvýše stupně  $n$  [2].

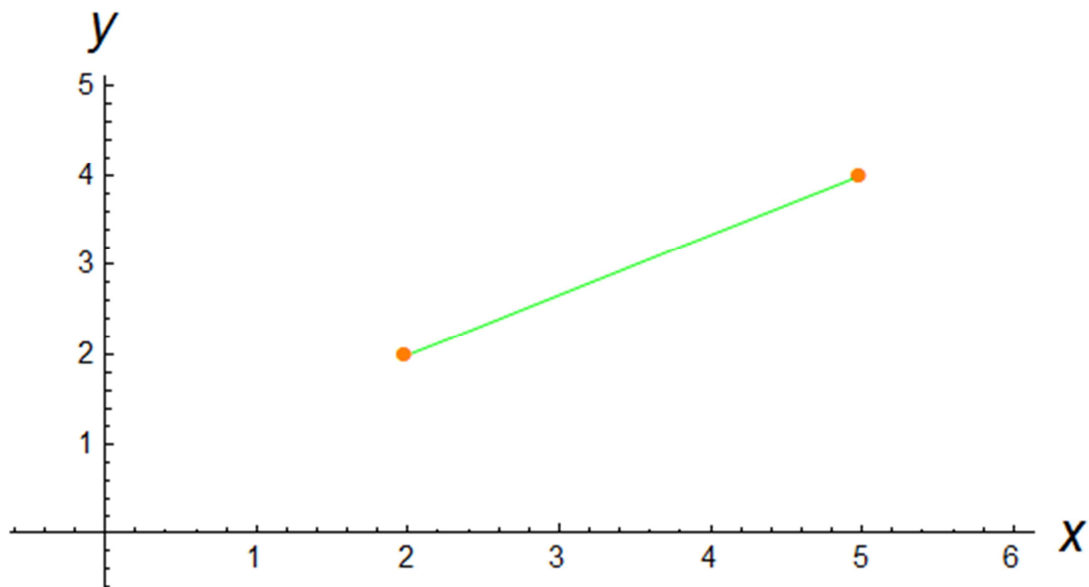
Pro některé polynomické funkce nižších stupňů byly zavedeny speciální názvy:

- polynom prvního stupně ( $n = 1$ ) - lineární funkce (interpolace přímkou)
- polynom druhého stupně ( $n = 2$ ) - kvadratická funkce (interpolace parabolou nebo kružnicí)
- polynom třetího stupně ( $n = 3$ ) - kubická funkce

### 1.2.1 Lineární interpolace

Interpolace pomocí polynomu prvního stupně ( $n = 1$ ) se nazývá lineární interpolací. Je to nejjednodušší možná interpolace, kde dva sousední body grafu proložíme přímkou (Obrázek 1.5). V uzlových bodech takto vzniklé interpolační funkce však není zajištěna spojitost ani derivace prvního řádu a tím je omezena využitelnost tohoto způsobu interpolace.

S tímto způsobem interpolace se nejčastěji setkáváme při užívání matematických, fyzikálních a dalších tabulek, ve kterých lineárně interpolujeme hodnoty, které přímo nejsou v tabulkách uvedeny.



Obrázek 1.5 - Lineární interpolace - příklad interpolace pomocí lineárního interpolačního polynomu

### 1.2.2 Lagrangeova interpolace

Jednou z možností výpočtu vhodného interpolačního polynomu je použití Lagrangeovy interpolace (Obrázek 1.6). Výpočet se skládá z výpočtu elementárních polynomů a jejich následného složení do vlastního interpolačního polynomu.

Nechť jsou pro body  $x_0, x_1, \dots, x_n$  dány hodnoty  $y_i$  a platí  $x_i \neq x_j$  pro  $i \neq j$  a necht' existují elementární polynomy  $l_i(x)$  takové, že:

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_{n-1})(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_{n-1})(x_i-x_n)}. \quad (1.2)$$

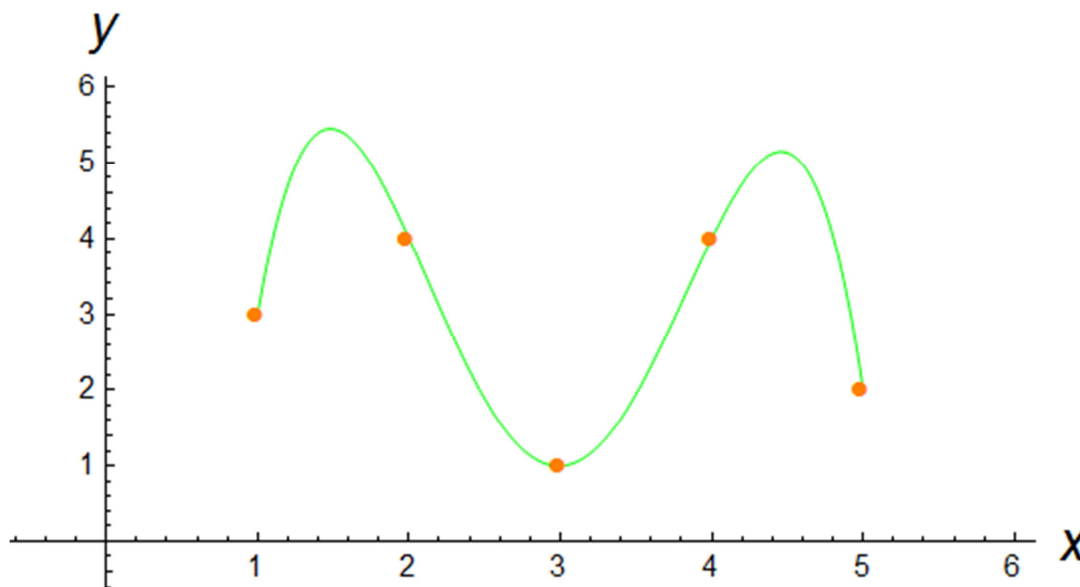
Pak existuje polynom  $L_n(x)$  definovaný vztahem:

$$L_n(x_k) = \sum_{i=0}^n y_i l_i(x_k) = y_k \quad (1.3)$$

pro  $i, k = 0, 1, \dots, n$ , který nazýváme Lagrangeův interpolační polynom, který je nejvýše stupně  $n$ .

Dá se dokázat, že pro každý soubor hodnot zadaných v uzlových bodech, z nichž žádné dva se neshodují, vede řešení pouze k jednomu Lagrangeovu interpolačnímu polynomu. Chyba aproximace funkce pomocí Lagrangeovy interpolace závisí na počtu a rozmístění uzlových bodů. Nejmenší chyby je dosaženo uprostřed intervalu uzlových bodů a směrem

k okraji tohoto intervalu až na výjimky (v uzlových bodech je chyba nulová) roste. V případě, že počet uzlů je vysoký, není bohužel Lagrangeova interpolace pro praktické výpočty příliš vhodná. Vhodnější využití je pro případy interpolace různých funkcí ve stejných uzlových bodech.



Obrázek 1.6 - Lagrangeova interpolace - příklad interpolace pomocí Lagrangeova interpolačního polynomu

### 1.2.3 Newtonova interpolace

Další možností výpočtu vhodného interpolačního polynomu je použití Newtonovy metody interpolace. Jedná se o interpolační polynom v takzvaném uzavřeném tvaru.

Nechť jsou pro body  $x_0, x_1, \dots, x_n$  dány hodnoty  $y_i$  a platí  $x_i \neq x_j$  pro  $i \neq j$ .

Pak polynom  $N_n(x)$  ve tvaru:

$$N_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \\ + a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-2})(x - x_{n-1}), \quad (1.4)$$

který splňuje interpolační podmínky:

$$N_n(x_i) = y_i \quad (1.5)$$

pro  $i = 0, 1, \dots, n$ , nazýváme Newtonův interpolační polynom, který je nejvýše stupně  $n$ .

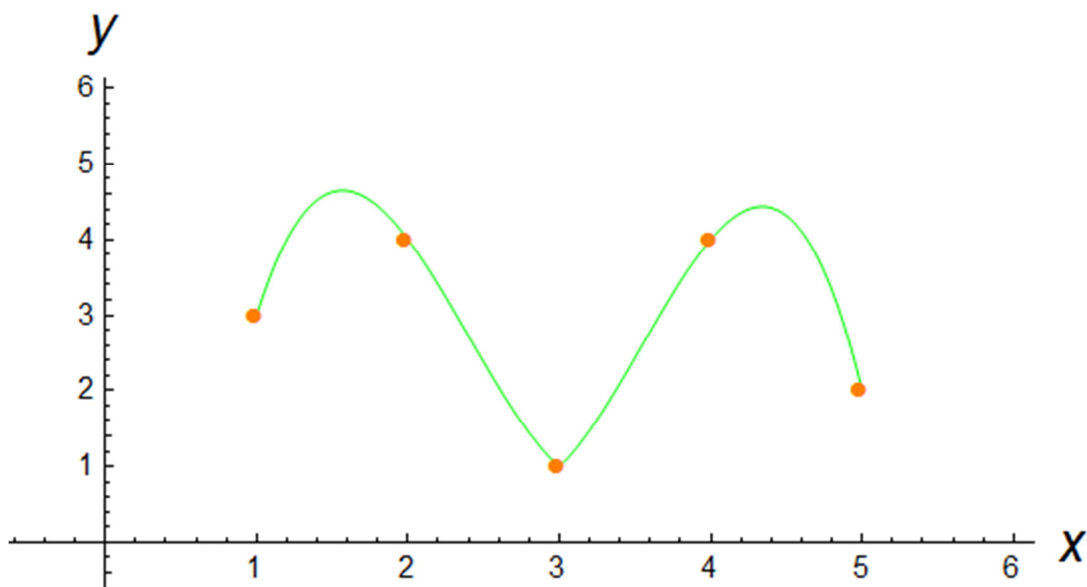
Stejně jako u Lagrangeova interpolačního polynomu existuje i u Newtonova interpolačního polynomu pouze jedno řešení splňující podmínky nulové chyby interpolace ve všech uzlových bodech, které jsou od sebe různé. Newtonův interpolační polynom je vlastně



pouze jiným zápisem (nulovým zápisem) Lagrangeova polynomu (Obrázek 1.6). Z toho vyplývá, že chyba Newtonovy interpolace bude stejná jako u Lagrangeovy interpolace.

#### 1.2.4 Hermiteova interpolace

Ve vybraných případech aplikací potřebujeme splnit více definovaných podmínek. Základní podmínkou, kterou musí splňovat všechny interpolace, je rovnost funkční hodnoty interpolační funkce a měřených hodnot nebo hodnot vypočtených z nahrazované funkce v uzlových bodech. Další podmínkou pak může být splnění rovnosti první a případně i dalších derivací v uzlových bodech. Pro tento případ můžeme využít Hermiteova interpolačního polynomu (Obrázek 1.7).



Obrázek 1.7 - Hermiteova interpolace - příklad interpolace pomocí Hermiteova interpolačního polynomu

Nechť jsou pro body  $x_0, x_1, \dots, x_n$  dány hodnoty  $y_i$  a platí  $x_i \neq x_j$  pro  $i \neq j$  a necht' existují elementární polynomy  $l_i(x)$  Lagrangeovy interpolace takové, že:

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_{n-1})(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_{n-1})(x_i-x_n)}. \quad (1.6)$$

Pak polynom  $H_n(x)$  definovaný vztahem:

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^n [y_i h_i(x) + y'_i g_i(x)] \quad (1.7)$$

kde

$$h_i(x) = [1 - 2(x - x_i)l'_i(x_i)]l_i^2(x), \quad (1.8)$$

$$g_i(x) = (x - x_i)l_i^2(x), \quad (1.9)$$

který splňuje interpolační podmínky:

$$H_{2n+1}(x) = y_i, \quad (1.10)$$

$$H'_{2n+1}(x) = y'_i \quad (1.11)$$

pro  $i = 0, 1, \dots, n$ , nazýváme Hermiteův interpolační polynom, který je nejvýše stupně  $2n + 1$ .

### 1.3 Interpolace spline funkcemi - splajny

Interpolace polynomem je výhodná pro menší množství zadaných hodnot. Samotná konstrukce nám totiž určuje stupeň polynomu, který s počtem uzlů roste. V praxi se ovšem často setkáváme s mnohem robustnějším datovým vstupem. Pak se klasická interpolace polynomem ukazuje jako nevýhodná, neboť dobře aproximuje pouze v okolí zadaných bodů, ale v jednotlivých intervalech vytvoří například nevhodné kmitání. Vhodnější je proto použít funkci, která je po částech polynomem nízkého stupně, a jejíž jednotlivé části na sebe v uzlech hladce navazují. Tyto funkce nazýváme česky splajny, z anglického spline function.

#### 1.3.1 Lineární splajn

Lineární splajn (Obrázek 1.8) je jedním z nejoblíbenějších díky své jednoduchosti a přehlednosti. Umožňuje nám získat rychlý grafický pohled na naměřená data.

Nechť jsou pro body  $x_0, x_1, \dots, x_n$  dány hodnoty  $y_i$  a platí  $x_i \neq x_j$  pro  $i \neq j$  a necht' existuje funkce  $S_1(x)$ , která pro každé dva uzly  $x_i, x_{i+1}$  aproximuje daný interval polynomem prvního stupně a platí:

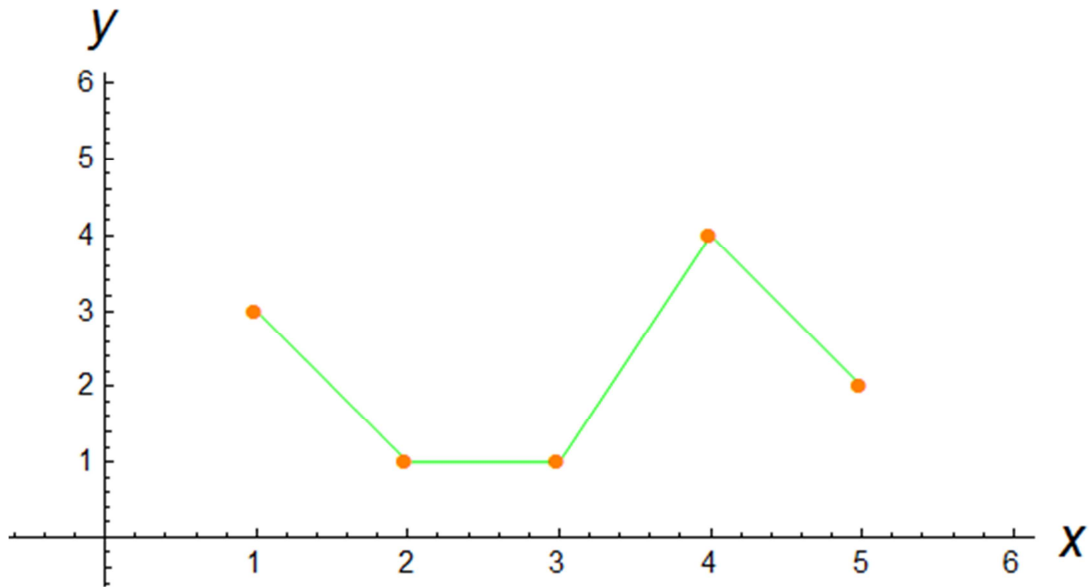
$$S_1(x) = y_i(1 - t) + y_{i+1}t \quad (1.12)$$

pro  $i = 0, 1, \dots, n - 1$ , kde

$$t = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad (1.13)$$

$$x \in [x_i, x_{i+1}]. \quad (1.14)$$

Pak tuto funkci nazýváme lineárním splajnem.



Obrázek 1.8 - Lineární splajna - příklad interpolace užitím lineárního splajnu

### 1.3.2 Kubický splajn

Aproximace lineárním splajnem nám poskytuje opravdu hrubý grafický pohled. Vystává se otázka, jaký stupeň polynomu zvolit, abychom dosáhli rychlého zpracování naměřených výsledků, omezili riziko spojené s kmitáním či jinými nevhodnými jevy a především dostali grafické vyjádření v přijatelné formě. Jako ideální se jeví polynom třetího stupně, při jehož použití dosáhneme často nejmenší křivosti.

Vzhledem ke složitosti kubického splajnu uvedeme intuitivní definici a samotnou konstrukci provedeme následně. Necht' jsou pro body  $x_0, x_1, \dots, x_n$  dány hodnoty  $y_i$  a platí  $x_i \neq x_j$  pro  $i \neq j$  a necht' existuje funkce  $S_3(x)$ , která pro každé dva uzly  $x_i, x_{i+1}$  aproximuje daný interval polynomem třetího stupně a pro uzly  $x_0, x_1, \dots, x_n$  má spojitou jejich první derivaci  $y'_i$ . Pak tuto funkci nazýváme kubickým splajnem. Nyní přistupme ke konstrukci. Vyjdeme z vyjádření po částech pro  $i = 1, 2, \dots, n$  a položíme  $h_i = x_i - x_{i-1}$ . Pak

$$S_3(x) = y_{i-1}(1 - 3t^2 + 2t^3) + y_i(3t^2 - 2t^3) + m_{i-1}h_i(t - 2t^2 + t^3) + m_i h_i(-t^2 + t^3), \quad (1.15)$$

kde

$$t = \frac{(x - x_{i-1})}{h_i}, \quad (1.16)$$

$$x \in [x_{i-1}, x_i], \quad (1.17)$$

je kubickým interpolačním splajnem. Parametry  $y_{i-1}, y_i$  a  $m_{i-1}, m_i$  jsou funkční hodnoty a hodnoty prvních derivací v bodech  $x_{i-1}, x_i$ . Z toho vyplývá platnost:

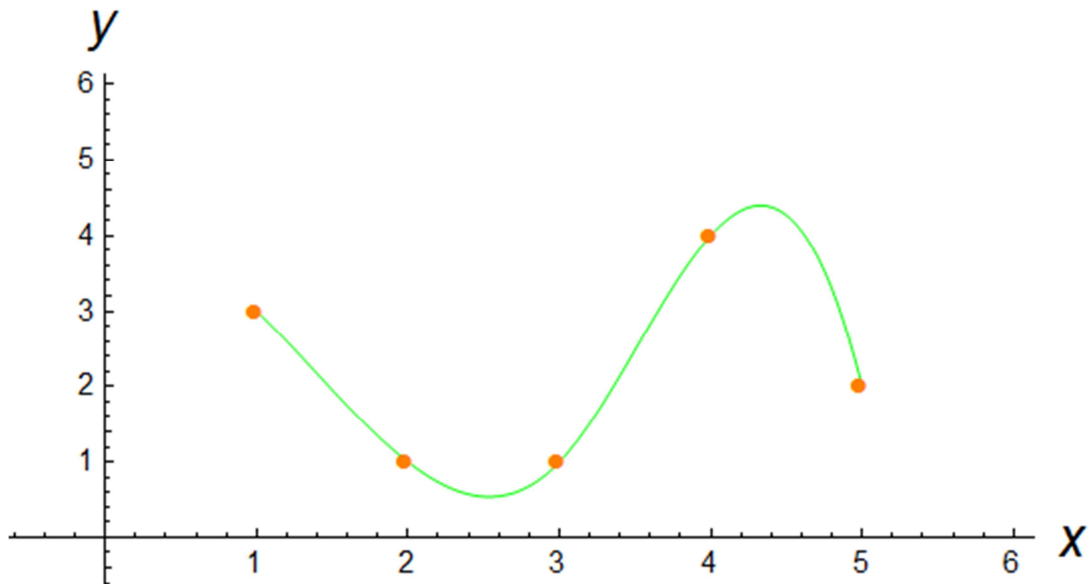
$$S_3(x_{i-1}) = y_{i-1}, \quad (1.18)$$

$$S_3(x_i) = y_i, \quad (1.19)$$

$$S'_3(x_{i-1}) = m_{i-1}, \quad (1.20)$$

$$S'_3(x_i) = m_i. \quad (1.21)$$

Spojitosť první derivace interpolační funkce je dána již definicí a spojitost druhé derivace zajistíme speciální volbou  $m_i$ .



Obrázek 1.9 - Kubický splajn - příklad interpolace užitím kubického splajnu

#### 1.4 Metoda nejmenších čtverců

Při práci s naměřenými daty se můžeme dostat do situace, kdy nelze použít interpolaci. Datový soubor bývá robustní nebo zatížen chybami měření, a protože je často znám požadovaný druh aproximované funkce, může se stát, že klasické řešení interpolací polynomem nebo splajny nemusí vést k vhodnému výsledku.

Stejný problém může nastat v případě funkce, která nám sice přesně popisuje daný děj, ale pro praktické použití je třeba ji nahradit jednodušší funkcí. V tomto případě může být výhodné použít metodu nejmenších čtverců (Obrázek 1.10).

Nechť pro body  $x_0, x_1, \dots, x_n$  jsou dány hodnoty  $y_i$  a platí  $x_i \neq x_j$  pro  $i \neq j$ . Hledání řešení pomocí metody nejmenších čtverců pak spočívá v minimalizaci výrazu

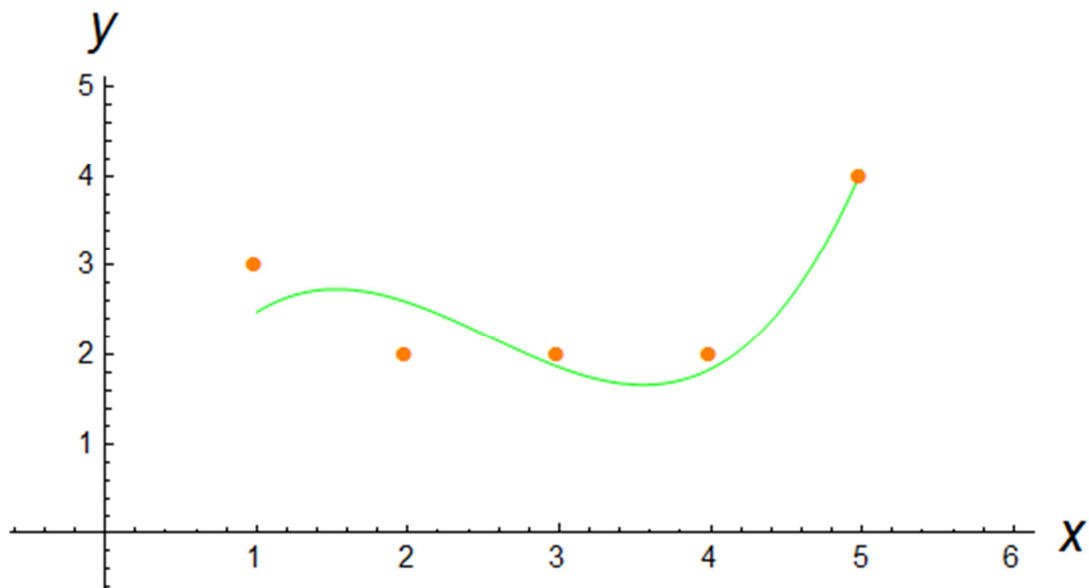
$$\sum_{i=0}^n |y_i - \varphi(x_i)|^2 \omega_i \quad (1.22)$$

pro diskrétní případ a výrazu a

$$\int_a^b |y_i - \varphi(x)|^2 \omega(x) dx \quad (1.23)$$

pro spojitý případ, kde  $\omega$  je váhovou funkcí a  $\varphi$  je aproximace dané funkce.

Váhová funkce  $\omega$  nám umožňuje upřednostnit některé body. Obvykle se pokládá  $\omega = 1$ , ale občas je nutné vliv některých bodů na řešení snížit. Nalézt vhodnou funkci  $\varphi$  není jednoduché. Pro naše účely je výhodné za  $\varphi$  intuitivně dosadit vhodný typ funkce.



Obrázek 1.10 - Metoda nejmenších čtverců - příklad aproximace pomocí metody nejmenších čtverců

## 2 NUMERICKÁ DERIVACE

### 2.1 Derivace interpolačního polynomu

K numerickému výpočtu derivace je možné použít různých interpolačních postupů. Pro výpočet derivace nižšího řádu lze použít interpolaci pomocí splajnů. Při nutnosti výpočtu derivací vyšších řádů je lepší využít aproximaci pomocí interpolačního polynomu. Stupeň interpolačního polynomu musí být vyšší než řád derivace, kterou chceme počítat. Při použití Newtonova interpolačního polynomu se stupněm  $n$ , pro který známe funkční hodnotu v  $n + 1$  bodech můžeme derivaci řádu  $k$  vyjádřit takto:

$$y^{(k)}(x) \approx N_n^{(k)}(x) = y(x_0, x_1, \dots, x_k) \frac{d^k}{dx^k} [(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})] + \\ + \dots + y(x_0, x_1, \dots, x_k) \frac{d^k}{dx^k} [(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})]. \quad (2.1)$$

Nutnou podmínkou je ovšem  $n \geq k$ .

Chyby ve funkčních hodnotách funkce  $y$  (například chyby měření) mají při numerickém derivování mnohem větší význam než při numerické integraci. Při derivování se totiž chyba ve vstupních datech zesiluje. Definujme si proto chybu aproximace derivace. Necht' jsou pro body  $x_0, x_1, \dots, x_n$  dány funkční hodnoty  $y_i$  a platí  $x_i \neq x_j$  pro  $i \neq j$  a necht'  $y$  je dostatečně hladká na intervalu  $[x_0, x_n]$  a  $N_n(x)$  je vhodný Newtonův interpolační polynom, pak pro chybu aproximace derivace  $y' - N_n'(x)$  platí:

$$y' - N_n'(x) = \frac{y^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} v', \quad (2.2)$$

kde bod  $\xi \in [x_0, x_n]$  a

$$v = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})(x - x_n). \quad (2.3)$$

### 2.2 Vzorce pro výpočet

Vzorce (2.1) a (2.2) jsou poměrně složité. Pomocí vhodných úprav však získáme běžně používané vzorce. Vyjdeme z myšlenky interpolace polynomem a definice derivace. Necht' jsou uzly  $x_0, x_1, \dots, x_n$  ekvidistantní s krokem  $h$ , pak platí  $x_i = x_0 + ih$ . Vybraný uzel, ve kterém počítáme derivaci, označíme nově místo  $x_k$  pouze  $x$ . Přizpůsobíme označení  $i$  pro ostatní uzly s využitím kroku  $h$  dostáváme po sobě jdoucí uzly  $\dots, x - h, x, x + h, x +$

$2h, \dots$  Bod  $\xi$  leží v intervalu mezi největším a nejmenším užitým uzlem. Po splnění všech těchto předpokladů získáme následující vzorce [7]:

1. Pro první derivaci

$$y' = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \frac{1}{2} hy''(\xi), \quad (2.4)$$

$$y' = \frac{y(x) - y(x-h)}{h} + \frac{1}{2} hy''(\xi), \quad (2.5)$$

$$y' = \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} - \frac{1}{6} h^2 y'''(\xi), \quad (2.6)$$

$$y' = \frac{3y(x) - 4y(x-h) + y(x-2h)}{2h} - \frac{1}{3} h^2 y'''(\xi), \quad (2.7)$$

$$y' = \frac{-3y(x) + 4y(x+h) - y(x+2h)}{2h} - \frac{1}{3} h^2 y'''(\xi). \quad (2.8)$$

2. Pro druhou derivaci

$$y'' = \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} - \frac{1}{12} h^2 y^{(4)}(\xi), \quad (2.9)$$

$$y'' = \frac{y(x) - 2y(x-h) + y(x-2h)}{h^2} + hy'''(\xi), \quad (2.10)$$

$$y'' = \frac{y(x+2h) - 2y(x+h) + y(x)}{h^2} - hy'''(\xi). \quad (2.11)$$

Derivace vyšších řádů může vést při numerickém výpočtu ke značné chybě, zvláště pak při použití hodnot změřených s malou přesností nebo zaokrouhlováním. Chyby výpočtu můžeme snížit tzv. vyrovnáním vstupních naměřených dat.

### 3 MATHEMATICA

#### 3.1 Možnosti využití

Oblasti praktického využití programu Mathematica jsou velmi široké od matematiky přes fyziku, biologii, ekonomii, sociologii, ... Program Mathematica se používá například pro:

- běžné výpočty
- vykreslování grafů funkcí
- úpravy a řešení rovnic
- výpočty derivací a integrálů
- animaci simulací

Jako vstupní data používá tento program text se speciální syntaxí. Výstupem pak například mohou být:

- číselná hodnota
- výsledek zapsaný symbolicky
- graf - 2D, 3D
- animace

#### 3.2 Uživatelské prostředí

Uživatelské prostředí tzv. notebook je složeno z buněk, které si může uživatel přizpůsobit vzhledově i obsahově. Základními buňkami je Input (vstup) pro zápis vstupních dat a Output (výstup), který zobrazuje výsledky.

Pro usnadnění práce je program vybaven nástrojovými paletami, které obsahují tlačítka s předem definovanými funkcemi, které uživatel doplní již pouze o proměnné a parametry. Program umožňuje uživateli také vytvoření vlastních nástrojových palet. Další pomůckou při psaní je našeptávač, který zobrazuje nabídku dostupných funkcí začínajících napsanou skupinou písmen. Samozřejmostí je pak obsáhlá nápověda, která kromě detailního popisu všech funkcí umožňuje interaktivní úpravu vzorových příkladů (úpravy se do nápovědy neukládají).



The image shows two windows from the Wolfram Mathematica 8.0 software. The left window, titled 'graf7.nb', displays a Mathematica notebook with the following code:

```
body = {{1, 3}, {2, 4}, {3, 1}, {4, 4}, {5, 2}};  
vykresli = Interpolation[body, Method -> "Hermite"];  
Show[Plot[vykresli[x], {x, 1, 5}, PlotStyle -> {Green}],  
ListPlot[body, PlotMarkers -> {"@"}, 8,  
PlotStyle -> {Orange}],  
PlotRange -> {{-0.5, 6}, {-0.5, 6}}, AspectRatio -> 0.5,  
AxesOrigin -> {0, 0},  
AxesLabel -> {Style[x, Black, 18], Style[y, Black, 18]},  
LabelStyle -> Directive[Black, FontFamily -> "Italic"]]
```

Below the code is a plot showing a green curve passing through five orange data points. The x-axis is labeled 'x' and the y-axis is labeled 'y'. The x-axis ranges from 1 to 5, and the y-axis ranges from 1 to 6.

The right window, titled 'Plot - Wolfram Mathematica', shows the help page for the 'Plot' function. It includes the following information:

- Plot**  
 $\text{Plot}[f, \{x, x_{\text{min}}, x_{\text{max}}\}]$   
generates a plot of  $f$  as a function of  $x$  from  $x_{\text{min}}$  to  $x_{\text{max}}$ .
- $\text{Plot}[f_1, f_2, \dots, \{x, x_{\text{min}}, x_{\text{max}}\}]$   
plots several functions  $f_i$ .
- EXAMPLES**
  - Basic Examples (4)**
    - Plot a function:  
 $\text{In}[1]= \text{Plot}[\text{Sin}[x], \{x, 0, 6 \text{ Pi}\}]$   
 $\text{Out}[1]=$  [Plot of Sin[x] from 0 to 6π]
    - Plot several functions:  
 $\text{In}[1]= \text{Plot}[\{\text{Sin}[x], \text{Sin}[2 x], \text{Sin}[3 x]\}, \{x, 0, 2 \text{ Pi}\}]$   
 $\text{Out}[1]=$  [Plot of Sin[x], Sin[2x], and Sin[3x] from 0 to 2π]

Obrázek 3.1 - Mathematica - náhled tzv. notebooku - vpravo nápověda

## **II. PRAKTICKÁ ČÁST**

## 4 ŘEŠENÍ PŘÍKLADŮ V PROGRAMU MATHEMATICA

### 4.1 Základní principy zápisu příkazů

Jednotlivé příkazy vycházejí z anglických názvů a vždy začínají velkým písmenem. Z anglických názvů vycházejí i názvy například barev, písma nebo metod výpočtu, které také vždy začínají velkým písmenem. Proměnné mohou mít libovolný název, kromě názvů, které jsou vyhrazené pro názvy příkazů, barev, písem, metod výpočtu nebo dalších předem definovaných funkcí. Při psaní složitějších příkazů se jednotlivé dílčí parametry příkazu oddělují čárkami. Středník na konci příkazu znamená, že se příkaz provede, ale nevykreslí nebo nevypíše svůj výsledek. Pro psaní desetinných čísel je třeba používat tečku místo desetinné čárky.

Pro zjednodušení zápisu je možné používat klávesové zkratky například:

“F1“	- vyvolání nápovědy
“Ctrl“ + „k“	- zapnutí/vypnutí našeptávače k funkcím
“Ctrl“ + “/“	- vytvoří zlomek
“-“ + “>”	- vytvoří →

### 4.2 Příkazy použité při výpočtu motivačních příkladů

#### 4.2.1 Definování bodů souřadnicemi

$název\_skupiny\_bodů = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$	- definuje skupinu bodů
$název\_skupiny\_bodů = \{\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \dots, \{x_n, y_n\}\}$	- $[x_i, y_i]$ - souřadnice bodů (když není zadáno x, nastaví se automaticky hodnoty 1, 2, ..., n)

#### 4.2.2 Příkazy pro nastavení vlastností grafu

$PlotMarkers \rightarrow \{typ\_značky, velikost\_značky\}$	- nastavení vykreslování bodů
$PlotStyle \rightarrow \{barva\}$	- nastavení barvy vykreslování
$PlotRange \rightarrow \{\{x_1, x_2\}, \{y_1, y_2\}\}$	- nastavení rozsahu vykreslování
$AspectRatio \rightarrow číselná\_hodnota$	- změna poměru velikostí jednotek na jednotlivých osách
$AxesOrigin \rightarrow \{x_0, y_0\}$	- nastavení počátku os grafu

**AxesLabel**→{**Style**["název\_osy\_x",barva,velikost\_písma],  
**Style**["název\_osy\_y",barva,velikost\_písma]}

- nastavení popisu os grafu

**LabelStyle**→**Directive**[barva,**FontFamily**→"název\_písma"]

- nastavení popisu hodnot na osách grafu

**AxesStyle**→barva

- nastavení barvy os grafu

**Ticks**→{{{hodnota\_x1,popis\_hodnoty\_x1},...,{hodnota\_xn,popis\_hodnoty\_xn}},  
 {{{hodnota\_y1,popis\_hodnoty\_y1},...,{hodnota\_yn,popis\_hodnoty\_yn}}}

- nastavení textu popisu hodnot na osách grafu

### 4.2.3 Příkazy pro vykreslování grafu

**ListPlot**[název\_skupiny\_bodů, všechny další příkazy pro nastavení  
 vlastností grafů oddělené čárkami]

- vykreslení bodů

**Plot**[název\_funkce[x],{x,dolní\_mez\_vykreslování,horní\_mez\_vykreslování}]

- vykreslí funkci

**Show**[vykreslovací\_funkce1,...,vykreslovací\_funkcen]

- vykreslení více funkcí do jednoho grafu

### 4.2.4 Příkazy pro funkce, derivace a interpolaci bodů pomocí interpolační funkce

**Interpolation**[název\_skupiny\_bodů,**InterpolationOrder**→řád\_interpolačního\_polynomu]

- vypočítá interpolační polynom daného řádu

**Interpolation**[název\_skupiny\_bodů,**Method**→"název\_metody"]

- vypočítá interpolační polynom danou metodou (např.: Spline, Hermite)

**D**[funkce,x]

- vypočítá derivaci funkce podle proměnné x

## 5 MOTIVAČNÍ PŘÍKLADY

### 5.1 1. Příklad

Podívejme se na příklad ze cvičení Elektromagnetické detektory I, které je součástí předmětu Technické prostředky bezpečnostního průmyslu.

#### 5.1.1 Zadání

Ultrazvuk o frekvenci  $f_0 = 30$  MHz vysílaný MW (microwave) detektorem je po odrazu od narušitele, který se pohybuje rychlostí  $v$  směrem k detektoru, zaznamenán přijímačem detektoru v důsledku Dopplerova principu na vyšší frekvenci  $f$ , který je dán vztahem:

$$f = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}}$$

kde  $c = 340$  m/s je rychlost šíření zvuku ve vzduchu. Aproximujte tabulkové hodnoty (Tabulka 5.1) křivkou zvolenými interpolačními metodami v prostředí Wolfram Mathematica.

Číslo měření	Rychlost [m/s]	Dopočítaná frekvence f [MHz]
1	0,86	3,00761
2	0,89	3,00787
3	1,12	3,00992
4	1,00	3,00885
5	0,98	3,00867
6	1,16	3,0103
7	1,22	3,0109
8	1,18	3,0105
9	1,20	3,0106
10	1,22	3,0108

Tabulka 5.1 - Tabulka rychlostí pohybu narušitele a dopočítané frekvence odražené ultrazvukové vlny

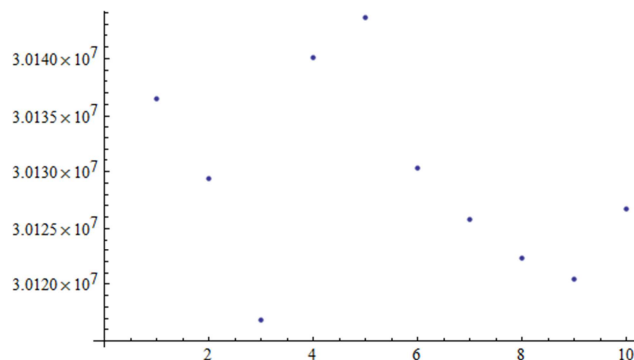
### 5.1.2 Řešení

Body zadané tabulkou uložíme ve tvaru:

$$\text{body}=\{3.01365*10^7,3.01294*10^7,3.01169*10^7,3.01401*10^7,3.01436*10^7, \\ 3.01303*10^7,3.01258*10^7,3.01223*10^7,3.01205*10^7,3.01267*10^7\}$$

Následně je pro názornost jednoduše vykreslíme příkazem ListPlot (Obrázek 5.1).

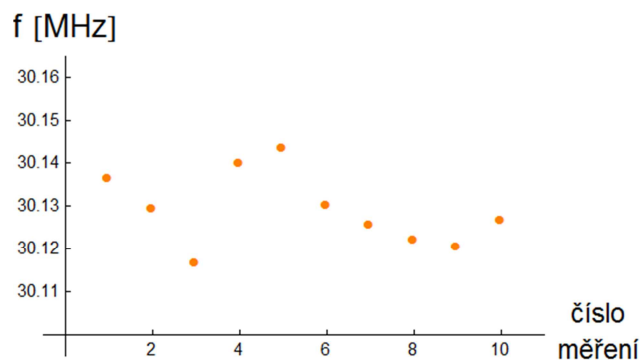
`ListPlot[body]`



Obrázek 5.1 - Graf dopočítaných frekvencí odražených ultrazvukových vln

Po přidání parametrů příkazu ListPlot získáme lepší vizualizaci bodů (Obrázek 5.2):

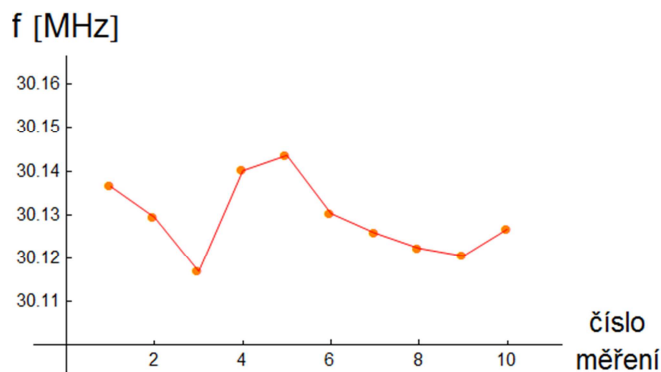
```
ListPlot[body,PlotMarkers→{"●",8},PlotStyle→{Orange},
PlotRange→{{-0.5,11},{3.0095*10^7,3.0165*10^7}},
AspectRatio→0.6,AxesOrigin→{0,3.01*10^7},
AxesLabel→{Style[" číslo ",Black,15],Style["f[MHz]",Black,18]},
LabelStyle→Directive[Black,FontFamily→"Italic"],
Ticks→{{2,4,6,8,10},{3.011*10^7,30.11},{3.012*10^7,30.12},
{3.013*10^7,30.13},{3.014*10^7,30.14},{3.015*10^7,30.15},
{3.016*10^7,30.16}}}]
```



Obrázek 5.2 - Graficky upravený graf dopočítaných frekvencí odražených ultrazvukových vln

Naší první zvolenou metodou je lineární splajn funkce (Obrázek 5.3) (Kapitola 1.3.1):

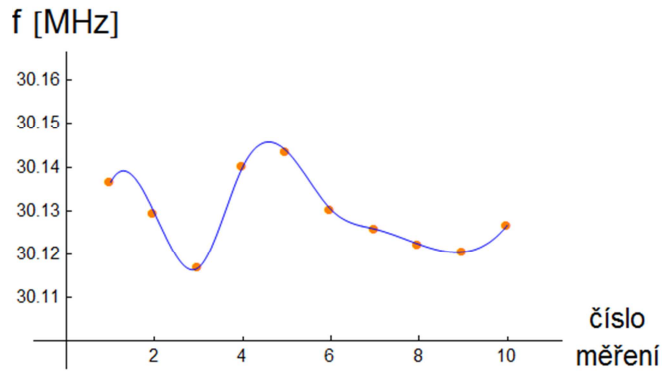
```
S1fun=Interpolation[body,InterpolationOrder→1];
Show[ListPlot[body,PlotMarkers→{"●",8},PlotStyle→{Orange}],
Plot[S1fun[x],{x,1,10},PlotStyle→{Red}],
PlotRange→{{-0.5,11},{3.0095*10^7,3.0165*10^7}},
AspectRatio→0.6,AxesOrigin→{0,3.01*10^7},
AxesLabel→{Style[" číslo ",Black,15],Style["f[MHz]",Black,18]},
LabelStyle→Directive[Black,FontFamily→"Italic"],
Ticks→{{2,4,6,8,10},{3.011*10^7,30.11},{3.012*10^7,30.12},
{3.013*10^7,30.13},{3.014*10^7,30.14},{3.015*10^7,30.15},
{3.016*10^7,30.16}}}]
```



Obrázek 5.3 - Graf interpolace zadaných hodnot metodou lineárního splajnu

Naší druhou zvolenou metodou je kubická spajn funkce (Obrázek 5.4) (Kapitola 1.3.2):

```
S3fun=Interpolation[body,Method→"Spline"];
Show[ListPlot[body,PlotMarkers→{"●",8},PlotStyle→{Orange}],
Plot[S3fun[x],{x,1,10},PlotStyle→{Blue}],
PlotRange→{{-0.5,11},{3.0095*10^7,3.0165*10^7}},
AspectRatio→0.6,AxesOrigin→{0,3.01*10^7},
AxesLabel→{Style[" číslo ",Black,15],Style["f[MHz]",Black,18]},
LabelStyle→Directive[Black,FontFamily→"Italic"],
Ticks→{{2,4,6,8,10},{3.011*10^7,30.11},{3.012*10^7,30.12},
{3.013*10^7,30.13},{3.014*10^7,30.14},{3.015*10^7,30.15},
{3.016*10^7,30.16}}}]
```



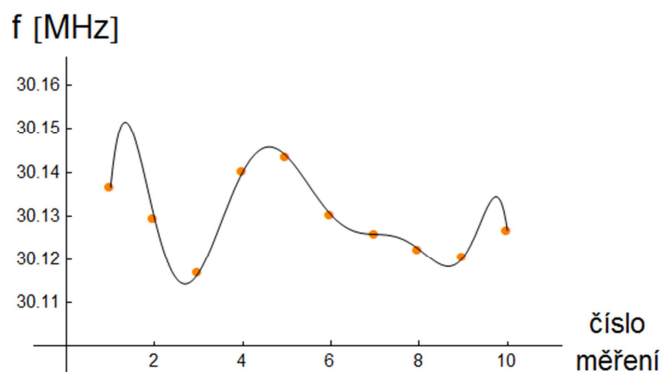
Obrázek 5.4 - Graf interpolace zadaných hodnot metodou kubického splajnu

Naší třetí zvolenou metodou je Lagrangeův interpolační polynom (Obrázek 5.5) (Kapitola 1.2.2):

```

Nefun=Interpolation[body,InterpolationOrder→9];
Show[ListPlot[body,PlotMarkers→{"•",8},PlotStyle→{Orange}],
Plot[Nefun[x],{x,1,10},PlotStyle→{Black}],
PlotRange→{{-0.5,11},{3.0095*10^7,3.0165*10^7}},
AspectRatio→0.6,AxesOrigin→{0,3.01*10^7},
AxesLabel→{Style[" číslo ",Black,15],Style["f[MHz]",Black,18]},
LabelStyle→Directive[Black,FontFamily→"Italic"],
Ticks→{{2,4,6,8,10},{3.011*10^7,30.11},{3.012*10^7,30.12},
{3.013*10^7,30.13},{3.014*10^7,30.14},{3.015*10^7,30.15},
{3.016*10^7,30.16}}}]

```

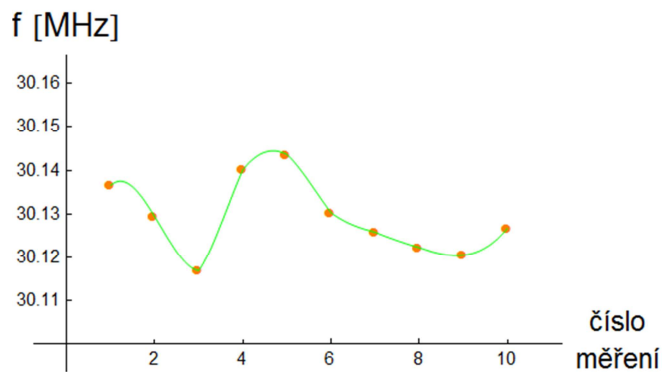


Obrázek 5.5 - Graf interpolace zadaných hodnot Lagrangeovým interpolačním polynomem



Naší čtvrtou zvolenou metodou je Hermiteův interpolační polynom (Obrázek 5.6) (Kapitola 1.2.4):

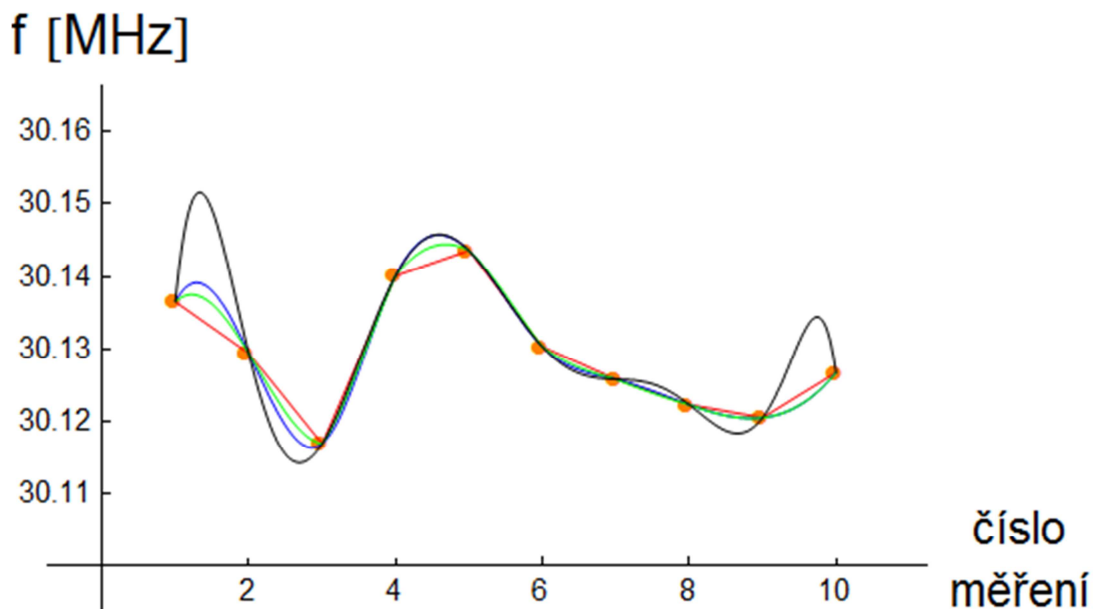
```
Hefun=Interpolation[body,Method->"Hermite"];
Show[ListPlot[body,PlotMarkers->{"•",8},PlotStyle->{Orange}],
Plot[Hefun[x],{x,1,10},PlotStyle->{Green}],
PlotRange->{{-0.5,11},{3.0095*10^7,3.0165*10^7}},
AspectRatio->0.6,AxesOrigin->{0,3.01*10^7},
AxesLabel->{Style[" číslo ",Black,15],Style["f[MHz]",Black,18]},
LabelStyle->Directive[Black,FontFamily->"Italic"],
Ticks->{{2,4,6,8,10},{3.011*10^7,30.11},{3.012*10^7,30.12},
{3.013*10^7,30.13},{3.014*10^7,30.14},{3.015*10^7,30.15},
{3.016*10^7,30.16}}}]
```



Obrázek 5.6 - Graf interpolace zadaných hodnot Hermiteovým interpolačním polynomem

Pro porovnání si vykreslíme společný graf (Obrázek 5.7):

```
Show[ListPlot[body,PlotMarkers->{"•",8},PlotStyle->{Orange}],
Plot[S1fun[x],{x,1,10},PlotStyle->{Red}],
Plot[S3fun[x],{x,1,10},PlotStyle->{Blue}],
Plot[Hefun[x],{x,1,10},PlotStyle->{Green}],
Plot[Nefun[x],{x,1,10},PlotStyle->{Black}],
PlotRange->{{-0.5,11},{3.0095*10^7,3.0165*10^7}},
AspectRatio->0.6,AxesOrigin->{0,3.01*10^7},
AxesLabel->{Style[" číslo ",Black,15],Style["f[MHz]",Black,18]},
LabelStyle->Directive[Black,FontFamily->"Italic"],
```

$$\text{Ticks} \rightarrow \{\{2,4,6,8,10\}, \{\{3.011 \cdot 10^7, 30.11\}, \{3.012 \cdot 10^7, 30.12\}, \\ \{3.013 \cdot 10^7, 30.13\}, \{3.014 \cdot 10^7, 30.14\}, \{3.015 \cdot 10^7, 30.15\}, \\ \{3.016 \cdot 10^7, 30.16\}\}\}$$


Obrázek 5.7 - Graf interpolace zadaných hodnot (oranžová) metodou lineárního splajnu (červená), metodou kubického splajnu (modrá), Lagrangeovým interpolačním polynomem (černá) a Hermiteovým interpolačním polynomem (zelená)

## 5.2 2. Příklad

Nyní si uvedeme praktický příklad z oblasti managementu a ekonomiky.

### 5.2.1 Zadání

Na základě průzkumu trhu začala bezpečnostní firma vyvíjet novou technologii pro automatizaci správy ochrany inteligentních domů s výhledem na možné nasazení ve velkých komerčních objektech. Po vyšších počátečních investicích ve čtvrtém kvartále roku 2010, způsobených vytvořením potřebné agendy a projektového týmu, se náklady na vývoj pohybovaly v roce 2011 podle tabulky (Tabulka 5.2). Na základě známých dat odhadněte vývoj nákladů pro leden roku 2012, například vhodnou polynomickou funkcí.

měsíc	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
náklady	1,20	1,15	1,24	1,22	1,34	1,15	0,98	0,98	1,15	1,26	1,28	1,25

Tabulka 5.2 - Vynaložené náklady v průběhu roku 2011 v milionech Kč

## 5.2.2 Řešení

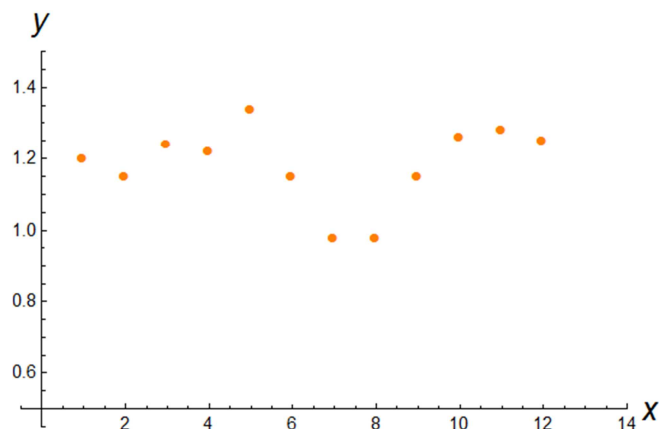
### 5.2.2.1 Řešení pomocí interpolace

Hodnoty zadané tabulkou (Tabulka 5.2) uložíme ve tvaru:

```
naklady={{1,1.2},{2,1.15},{3,1.24},{4,1.22},{5,1.34},{6,1.15},{7,0.98},{8,0.98},
          {9,1.15},{10,1.26},{11,1.28},{12,1.25}}
```

Následně je pro názornost vykreslíme příkazem ListPlot s parametry pro lepší vizualizaci (Obrázek 5.8):

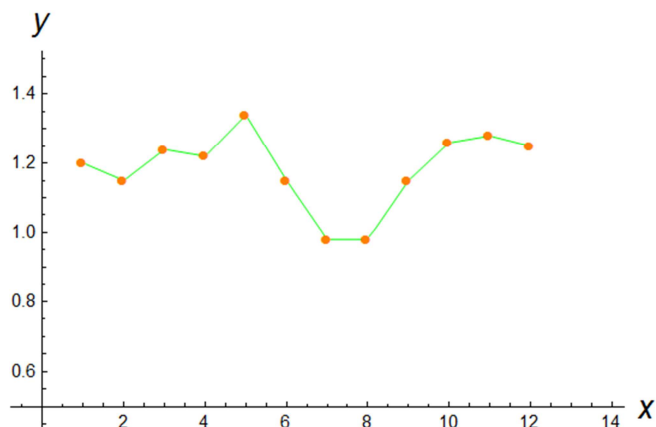
```
ListPlot[naklady,PlotMarkers→{"●",8},PlotStyle→{Orange},
          PlotRange→{{-0.5,14},{0.45,1.5}},AxesOrigin→{0,0.5},
          AxesLabel→{Style[x,Black,18],Style[y,Black,18]},
          LabelStyle→Directive[Black,FontFamily→"Italic"]]
```



Obrázek 5.8 - Graf vynaložených nákladů v průběhu roku 2011 v milionech Kč

Zadanými body proložíme lineární splajn (Obrázek 5.9):

```
S1nakl=Interpolation[naklady,InterpolationOrder→1];
Show[Plot[S1nakl[x],{x,1,12},PlotStyle→{Green}],
      ListPlot[naklady,PlotMarkers→{"●",8},PlotStyle→{Orange}],
      PlotRange→{{-0.5,14},{0.45,1.5}},
      AxesOrigin→{0,0.5},AxesLabel→{Style[x,Black,18],
      Style[y,Black,18]},LabelStyle→Directive[Black,FontFamily→"Italic"]]
```



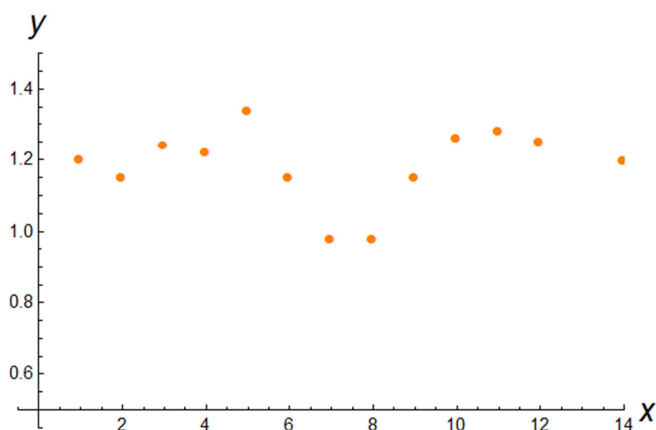
Obrázek 5.9 - Graf interpolace vynaložených nákladů pomocí lineárního splajnu

K řešení určení výše předpokládaných nákladů v lednu 2012 přistoupíme zcela intuitivně. Jednoduchou úvahou přidáme další bod [únor 2012, průměrný měsíční náklad v prvním kvartále roku 2011] a převedeme úlohu na aproximaci interpolačními metodami.

*{14,1.197}*

Zobrazíme novou množinu hodnot:

```
ListPlot[naklady, PlotMarkers -> {"•", 8}, PlotStyle -> {Orange},
PlotRange -> {{-0.5, 14}, {0.45, 1.5}}, AxesOrigin -> {0, 0.5},
AxesLabel -> {Style[x, Black, 18], Style[y, Black, 18]},
LabelStyle -> Directive[Black, FontFamily -> "Italic"]]
```

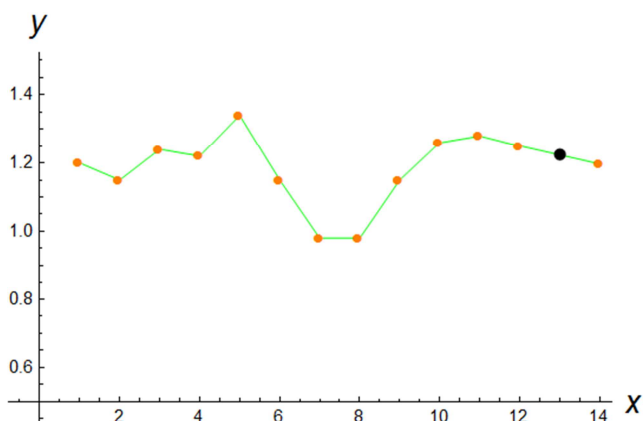


Obrázek 5.10 - Graf vynaložených nákladů v průběhu roku 2011 v milionech Kč -  
doplněný o náklady v únoru 2012

Jako první zvolme pro interpolace lineární splajn (Obrázek 5.11):

```
SInakl=Interpolation[naklady, InterpolationOrder -> 1]
```

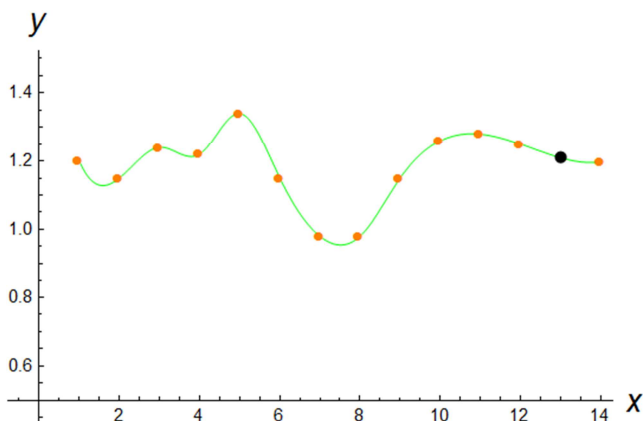
```
Show[Plot[S1nakl[x],{x,1,14},PlotStyle→{Green}],
ListPlot[naklady,PlotMarkers→{"●",8},PlotStyle→{Orange}],
PlotRange→{{-0.5,14},{0.45,1.5}},AxesOrigin→{0,0.5},
AxesLabel→{Style[x,Black,18],Style[y,Black,18]},
LabelStyle→Directive[Black,FontFamily→"Italic"],
Epilog→{PointSize[0.02],Point[{13,S1nakl[13]}]}]
```



Obrázek 5.11 - Graf interpolace vynaložených nákladů pomocí lineárního splajnu

Jako druhou metodu zvolme použití kubického splajnu (Obrázek 5.12):

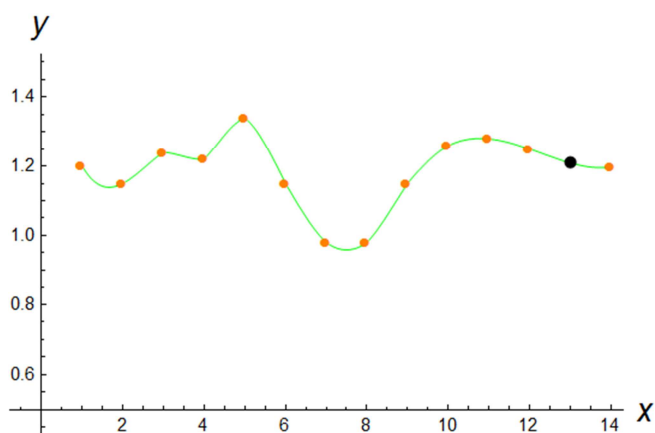
```
S3nakl=Interpolation[naklady,Method→"Spline"]
Show[Plot[S3nakl[x],{x,1,14},PlotStyle→{Green}],
ListPlot[naklady,PlotMarkers→{"●",8},PlotStyle→{Orange}],
PlotRange→{{-0.5,14},{0.45,1.5}},AxesOrigin→{0,0.5},
AxesLabel→{Style[x,Black,18],Style[y,Black,18]},
LabelStyle→Directive[Black,FontFamily→"Italic"],
Epilog→{PointSize[0.02],Point[{13,S3nakl[13]}]}]
```



Obrázek 5.12 - Graf interpolace vynaložených nákladů pomocí kubického splajnu

Jako třetí zvolme Hermiteův interpolační polynom (Obrázek 5.13):

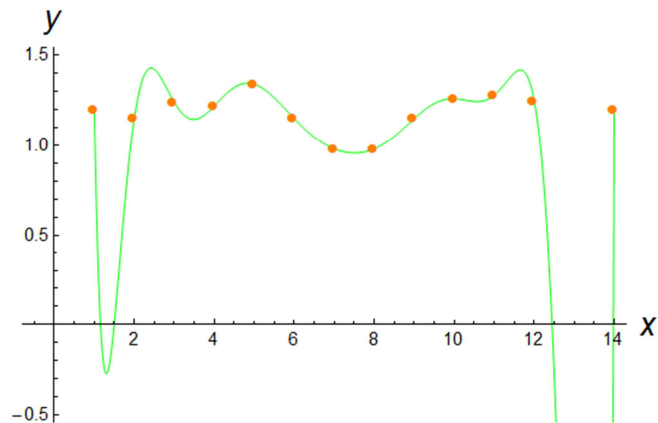
```
Henakl=Interpolation[naklady,Method→"Hermite"]
Show[Plot[Henakl[x],{x,1,14},PlotStyle→{Green}],
ListPlot[naklady,PlotMarkers→{"●",8},PlotStyle→{Orange}],
PlotRange→{{-0.5,14},{0.45,1.5}},AxesOrigin→{0,0.5},
AxesLabel→{Style[x,Black,18],Style[y,Black,18]},
LabelStyle→Directive[Black,FontFamily→"Italic"],
Epilog→{PointSize[0.02],Point[{13,Henakl[13]}}]}
```



Obrázek 5.13 - Graf interpolace vynaložených nákladů pomocí Hermiteova interpolačního polynomu

Jako čtvrtou metodu výpočtu zvolme použití Lagrangeova interpolačního polynomu (Obrázek 5.14):

```
Lanakl=Interpolation[naklady,InterpolationOrder→12]
Show[Plot[Lanakl[x],{x,1,14},PlotStyle→{Green}],
ListPlot[naklady,PlotMarkers→{"●",8},PlotStyle→{Orange}],
PlotRange→{{-0.5,14},{-0.5,1.5}},AxesOrigin→{0,0},
AxesLabel→{Style[x,Black,18],Style[y,Black,18]},
LabelStyle→Directive[Black,FontFamily→"Italic"],
Epilog→{PointSize[0.02],Point[{13,Lanakl[13]}}]}
```



Obrázek 5.14 - Graf interpolace vynaložených nákladů pomocí Lagrangeova interpolačního polynomu

### 5.2.2.2 Řešení pomocí aproximace

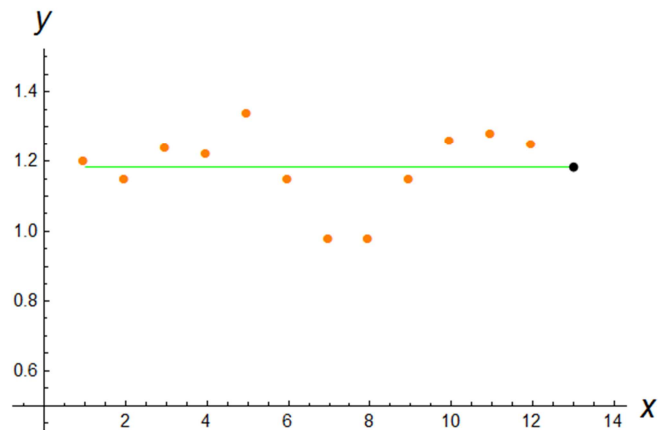
Jinou možností řešení je využití metody nejmenších čtverců. Hodnoty budeme aproximovat polynomem nultého až čtvrtého stupně.

Hodnoty zadané tabulkou uložíme ve tvaru:

```
naklady={1.2,1.15,1.24,1.22,1.34,1.15,0.98,0.98,1.15,1.26,1.28,1.25}
```

Aproximace polynomem nultého stupně (konstantou) (Obrázek 5.15):

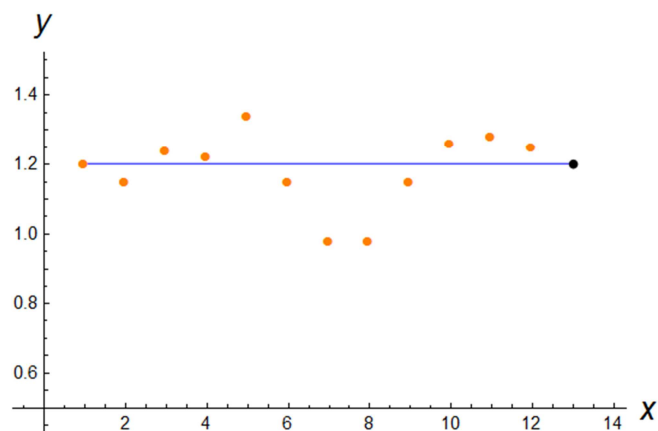
```
konst=Fit[naklady,1,x]
Show[Plot[konst,{x,1,13},PlotStyle→{Green}],ListPlot[naklady,
  PlotMarkers→{"•",8},PlotStyle→{Orange}],
  PlotRange→{{-0.5,14},{0.45,1.5}},AxesOrigin→{0,0.5},
  AxesLabel→{Style[x,Black,18],Style[y,Black,18]},
  LabelStyle→Directive[Black,FontFamily→"Italic"],
  Epilog→{PointSize[0.015],Point[{13,konst}]}
```



Obrázek 5.15 - Graf aproximace vynaložených nákladů pomocí polynomu nultého stupně (konstantou)

V období letních prázdnin jsou náklady nízké. Proto snížíme váhu nákladů v měsících červenci a srpnu na polovinu. A znovu použijeme aproximaci polynomem nultého stupně (konstantou) (Obrázek 5.16):

```
Wkonst=LinearModelFit[naklady,1,x,
Weights→{1,1,1,1,1,1,0.5,0.5,1,1,1,1}]/Normal
Show[Plot[Wkonst,{x,1,13},PlotStyle→{Blue}],ListPlot[naklady,
PlotMarkers→{"•",8},PlotStyle→{Orange}],
PlotRange→{{-0.5,14},{0.45,1.5}},AxesOrigin→{0,0.5},
AxesLabel→{Style[x,Black,18],Style[y,Black,18]},
LabelStyle→Directive[Black,FontFamily→"Italic"],
Epilog→{PointSize[0.015],Point[{13,Wkonst]}]}
```



Obrázek 5.16 - Graf aproximace vynaložených nákladů pomocí polynomu nultého stupně (konstantou) se snížením váhy nákladů v červenci a srpnu

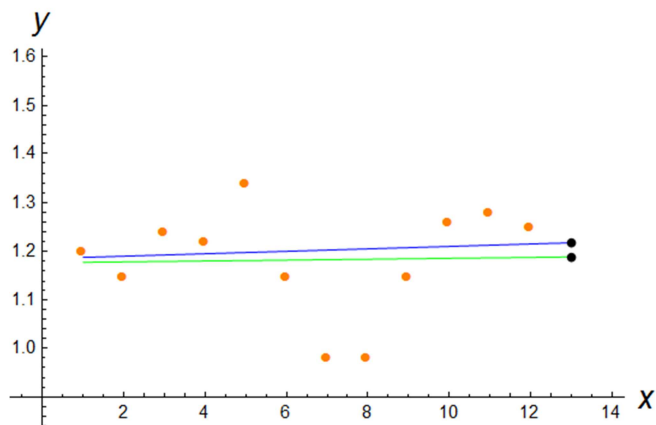


V dalším případě použijeme k výpočtu váhovou funkci a aproximaci polynomem prvního stupně (Obrázek 5.17):

```

st1=Fit[naklady,{1,x},x]
Wst1=LinearModelFit[naklady,{1,x},x,
Weights→{1,1,1,1,1,1,0.5,0.5,1,1,1,1}]/Normal
st1F=Function[x,Evaluate[st1]]
Wst1F=Function[x,Evaluate[Wst1]]
Show[Plot[st1,{x,1,13},PlotStyle→{Green}],Plot[Wst1,{x,1,13},PlotStyle→{Blue}],
ListPlot[naklady,PlotMarkers→{"●",8},PlotStyle→{Orange}],
PlotRange→{{-0.5,14},{0.85,1.5}},AxesOrigin→{0,0.9},
AxesLabel→{Style[x,Black,18],Style[y,Black,18]},
LabelStyle→Directive[Black,FontFamily→"Italic"],
Epilog→{PointSize[0.015],Point[{13,st1F[13]},Point[{13,Wst1F[13]}]}]}

```



Obrázek 5.17 - Graf aproximace vynaložených nákladů pomocí polynomu prvního

stupně (zelená) a pomocí polynomu prvního stupně s použitím váhové funkce (modrá)

V dalším případě použijeme k výpočtu váhovou funkci a aproximaci polynomem druhého stupně (Obrázek 5.18):

```

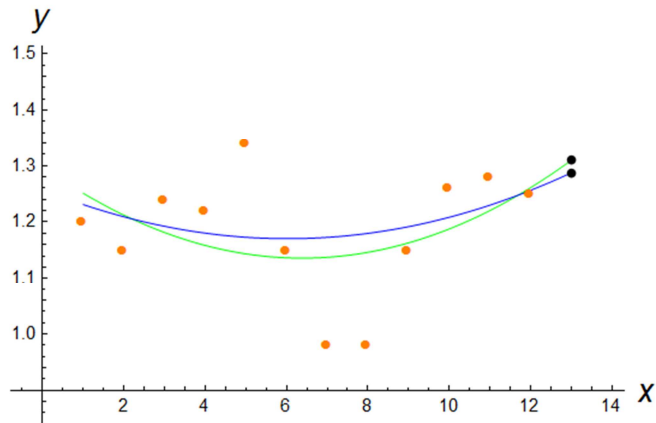
st1=Fit[naklady,{1,x,x^2},x]
Wst1=LinearModelFit[naklady,{1,x,x^2},x,
Weights→{1,1,1,1,1,1,0.5,0.5,1,1,1,1}]/Normal
st1F=Function[x,Evaluate[st1]]
Wst1F=Function[x,Evaluate[Wst1]]
Show[Plot[st1,{x,1,13},PlotStyle→{Green}],Plot[Wst1,{x,1,13},PlotStyle→{Blue}],
ListPlot[naklady,PlotMarkers→{"●",8},PlotStyle→{Orange}],

```

```

PlotRange→{{-0.5,14},{0.85,1.5}},AxesOrigin→{0,0.9},
AxesLabel→{Style[x,Black,18],Style[y,Black,18]},
LabelStyle→Directive[Black,FontFamily→"Italic"],
Epilog→{PointSize[0.015],Point[{13,st1F[13]}],Point[{13,Wst1F[13]}]}

```



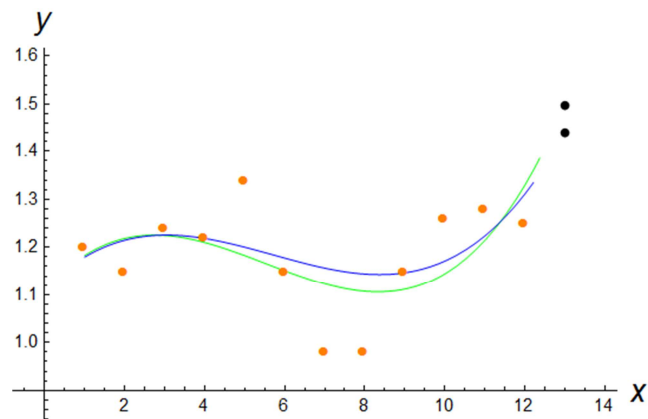
Obrázek 5.18 - Graf aproximace vynaložených nákladů pomocí polynomu druhého stupně (zelená) a pomocí polynomu druhého stupně s použitím váhové funkce (modrá)

V dalším případě použijeme k výpočtu váhovou funkci a aproximaci polynomem třetího stupně (Obrázek 5.19):

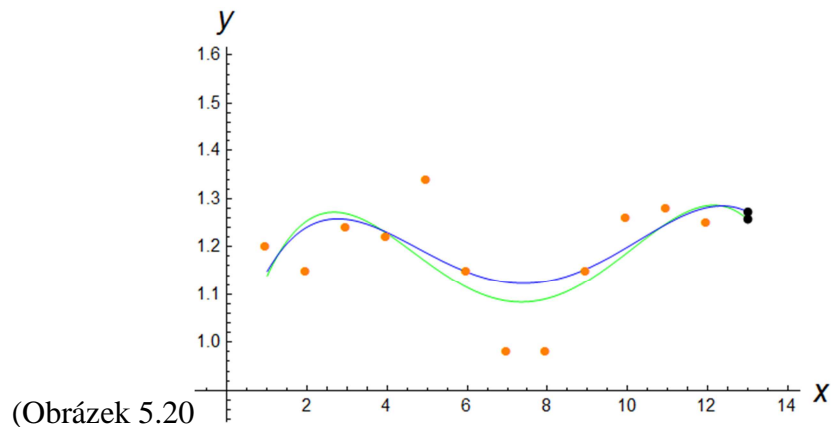
```

st1=Fit[naklady,{1,x,x^2,x^3},x]
Wst1=LinearModelFit[naklady,{1,x,x^2,x^3},x,
Weights→{1,1,1,1,1,1,0.5,0.5,1,1,1,1}]/Normal
st1F=Function[x,Evaluate[st1]]
Wst1F=Function[x,Evaluate[Wst1]]
Show[Plot[st1,{x,1,13},PlotStyle→{Green}],Plot[Wst1,{x,1,13},PlotStyle→{Blue}],
ListPlot[naklady,PlotMarkers→{"•",8},PlotStyle→{Orange}],
PlotRange→{{-0.5,14},{0.85,1.6}},AxesOrigin→{0,0.9},
AxesLabel→{Style[x,Black,18],Style[y,Black,18]},
LabelStyle→Directive[Black,FontFamily→"Italic"],
Epilog→{PointSize[0.015],Point[{13,st1F[13]}],Point[{13,Wst1F[13]}]}

```



Obrázek 5.19 - Graf aproximace vynaložených nákladů pomocí polynomu třetího stupně (zelená) a pomocí polynomu třetího stupně s použitím váhové funkce (modrá)  
Na závěr použijeme k výpočtu váhovou funkci a aproximaci polynomem čtvrtého stupně



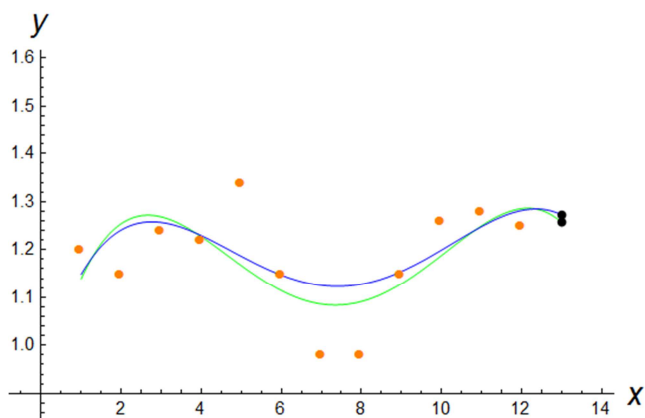
(Obrázek 5.20)

Obrázek 5.20):

```

st1=Fit[naklady,{1,x,x^2,x^3,x^4},x]
Wst1=LinearModelFit[naklady,{1,x,x^2,x^3,x^4},x,
Weights→{1,1,1,1,1,1,0.5,0.5,1,1,1,1}]/Normal
st1F=Function[x,Evaluate[st1]]
Wst1F=Function[x,Evaluate[Wst1]]
Show[Plot[st1,{x,1,13},PlotStyle→{Green}],Plot[Wst1,{x,1,13},PlotStyle→{Blue}],
ListPlot[naklady,PlotMarkers→{"•",8},PlotStyle→{Orange}],
PlotRange→{{-0.5,14},{0.85,1.6}},AxesOrigin→{0,0.9},
AxesLabel→{Style[x,Black,18],Style[y,Black,18]},
LabelStyle→Directive[Black,FontFamily→"Italic"],
Epilog→{PointSize[0.015],Point[{13,st1F[13]}],Point[{13,Wst1F[13]}]}]

```



Obrázek 5.20 - Graf aproximace vynaložených nákladů pomocí polynomu čtvrtého stupně (zelená) a pomocí polynomu čtvrtého stupně s použitím váhové funkce (modrá)

### 5.2.2.3 Porovnání výsledků různých metod výpočtu

Výsledky použití různých metod výpočtu předpokládaných nákladů v lednu 2012 jsou shrnuty v následujících tabulkách (Tabulka 5.3) (Tabulka 5.4). Z grafu pro vykreslení výsledků výpočtu pomocí Lagrangeova polynomu (Obrázek 5.14) je zřejmé, že tato interpolace není v řešeném případě vhodná a její záporný výsledek rozhodně nemůžeme použít pro odhad nákladů.

metoda výpočtu	odhad nákladů v lednu 2012
lineární splajn	1,22350
kubický splajn	1,20931
Hermiteův polynom	1,20925
Lagrangeův polynom	-4,51023

Tabulka 5.3 - Porovnání výše předpokládaných nákladů v milionech Kč v lednu 2012 při použití různých metod výpočtu pomocí interpolace

stupeň interpolačního polynomu	odhad nákladů	odhad nákladů s využitím váhové funkce
0	1,18333	1.20182
1	1.18924	1.21819
2	1.30955	1.28739
3	1.49727	1.43906
4	1.25659	1.27256

Tabulka 5.4 - Porovnání výše předpokládaných nákladů v milionech Kč v lednu 2012 při použití různých metod výpočtu pomocí aproximace

## 5.3 3. Příklad

Nyní se podívejme na příklad ze cvičení Elektromagnetické detektory II, které je součástí předmětu Technické prostředky bezpečnostního průmyslu.

### 5.3.1 Zadání

Intenzita  $H(\text{W}/\text{m}^2)$  infračerveného záření vyzařovaného člověkem o teplotě těla  $T_b = 309,15 \text{ K}$  (tj.  $36^\circ\text{C}$ ) a povrchem těla  $S_b = 2\text{m}^2$ , kterou ve vzdálenosti  $L$  zachytí pyroelement PIR (passive infrared) detektoru o teplotě  $T_s = 293,15 \text{ K}$  (tj.  $20^\circ\text{C}$ ), je v důsledku Stefan-Boltzmannova zákona dána vztahem.:

$$H = \varepsilon_b \cdot \varepsilon_s \cdot \delta_0 \cdot (T_b - T_s)^4 \frac{S_b}{2\pi L^2},$$

kde  $\varepsilon_b$ , resp.  $\varepsilon_s$  je emisivita povrchu lidského těla, resp. dielektrika o hodnotě 0,9 respektive 1,  $\delta_0 = 5,67 \cdot 10^{-8} (\text{W}/\text{m}^2\text{K}^4)$  je součinitel záření neboli Stefan-Boltzmannova konstanta. Aproximujte hodnoty Intenzit  $H$  infračerveného záření, které vznikají při vstupu narušitele do objektu chráněného PIR detektorem, křivkou zvolenými interpolačními metodami v prostředí Wolfram Mathematica. Intenzita se mění podle různé vzdálenosti pachatele od detektoru (Tabulka 5.5).

Číslo měření	Vzdálenost [m]	Dopočítaná Intenzita $H$ [ $\text{W}/\text{m}^2$ ]
1	5	$3.83229 \cdot 10^{-5}$
2	6	$2.66131 \cdot 10^{-5}$
3	7	$1.95525 \cdot 10^{-5}$
4	8	$1.49699 \cdot 10^{-5}$
5	9	$1.1828 \cdot 10^{-5}$
6	10	$9.58072 \cdot 10^{-5}$
7	11	$7.91795 \cdot 10^{-5}$
8	12	$6.65328 \cdot 10^{-5}$
9	13	$5.66906 \cdot 10^{-5}$
10	14	$4.88812 \cdot 10^{-5}$

Tabulka 5.5 - Tabulka vzdáleností narušitele od detektoru a dopočítané intenzity infračerveného záření vyzařovaného narušitelem

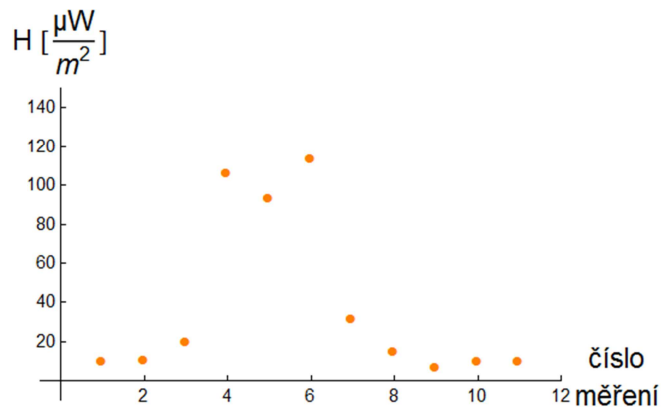
### 5.3.2 Řešení

Body zadané tabulkou uložíme ve tvaru:

$$\text{body} = \{9.5807 \cdot 10^{-6}, 10.6518 \cdot 10^{-6}, 19.5525 \cdot 10^{-6}, \\ 106.4524 \cdot 10^{-6}, 93.5617 \cdot 10^{-6}, 113.921 \cdot 10^{-6}, \\ 31.6718 \cdot 10^{-6}, 14.9699 \cdot 10^{-6}, 6.6533 \cdot 10^{-6}, \\ 9.58072 \cdot 10^{-6}, 9.58072 \cdot 10^{-6}\}$$

Následně je pro názornost vykreslíme příkazem ListPlot s parametry pro lepší vizualizaci (Obrázek 5.21):

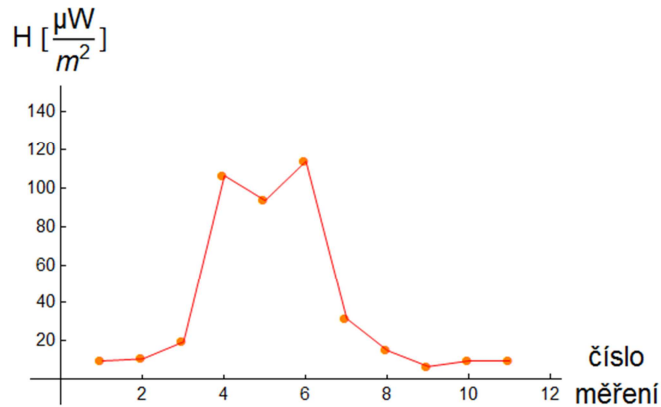
```
ListPlot[body,PlotMarkers→{"●",8},PlotStyle→{Orange},
PlotRange→{{-0.5,12},{-0.00001,0.00015}},
AspectRatio→0.6,AxesOrigin→{0,0},
AxesLabel→{Style[" číslo ",Black,15],Style["H[" $\frac{\mu W}{m^2}$ "]",Black,15]},
LabelStyle→Directive[Black,FontFamily→"Italic"],
Ticks→{{2,4,6,8,10,12},{0.00002,20},{0.00004,40},{0.00006,60},
{0.00008,80},{0.0001,100},{0.00012,120},{0.00014,140}}}]
```



Obrázek 5.21 - Graficky upravený graf dopočítaných intenzit infračerveného záření vyzařovaného narušitelem

Naší první zvolenou metodou je lineární splajn funkce (Obrázek 5.22) (Kapitola 1.3.1):

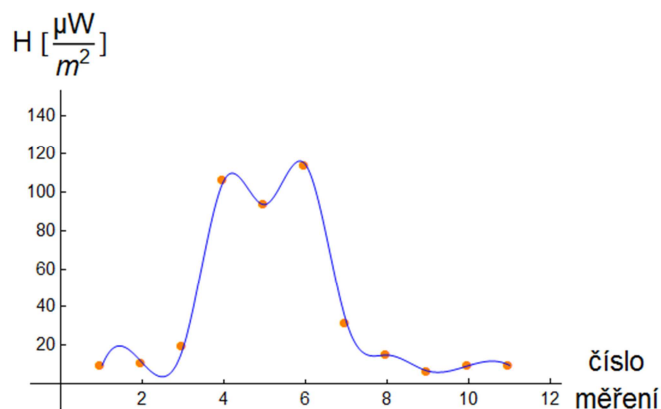
```
SIfun=Interpolation[body,InterpolationOrder→1];
Show[ListPlot[body,PlotMarkers→{"●",8},PlotStyle→{Orange}],
Plot[SIfun[x],{x,1,11},PlotStyle→{Red}],
PlotRange→{{-0.5,12},{-0.00001,0.00015}},
AspectRatio→0.6,AxesOrigin→{0,0},
AxesLabel→{Style[" číslo ",Black,15],Style["H[" $\frac{\mu W}{m^2}$ "]",Black,15]},
LabelStyle→Directive[Black,FontFamily→"Italic"],
Ticks→{{2,4,6,8,10,12},{0.00002,20},{0.00004,40},{0.00006,60},
{0.00008,80},{0.0001,100},{0.00012,120},{0.00014,140}}}]
```



Obrázek 5.22 - Graf interpolace zadaných hodnot metodou lineárního splajnu

Naší druhou zvolenou metodou je kubická spajn funkce (Obrázek 5.23) (Kapitola 1.3.2):

```
S3fun=Interpolation[body,Method->"Spline"];
Show[ListPlot[body,PlotMarkers->{"•",8},PlotStyle->{Orange}],
Plot[S3fun[x],{x,1,11},PlotStyle->{Blue}],
PlotRange->{{-0.5,12},{-0.00001,0.00015}},
AspectRatio->0.6,AxesOrigin->{0,0},
AxesLabel->{Style[" číslo ",Black,15],Style["H [ $\frac{\mu W}{m^2}$ ]",Black,15]},
LabelStyle->Directive[Black,FontFamily->"Italic"],
Ticks->{{2,4,6,8,10,12},{0.00002,20},{0.00004,40},{0.00006,60},
{0.00008,80},{0.0001,100},{0.00012,120},{0.00014,140}}}]
```

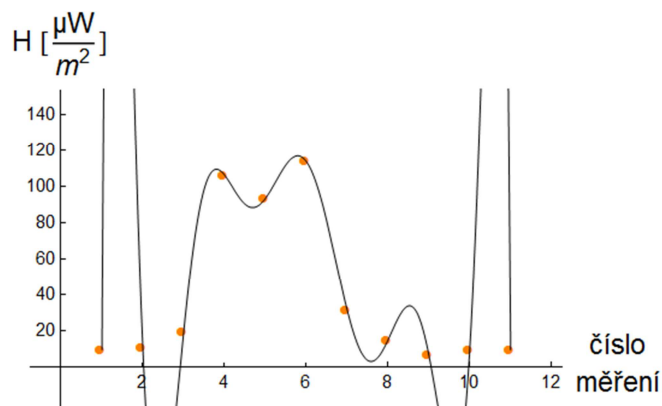


Obrázek 5.23 - Graf interpolace zadaných hodnot metodou kubického splajnu

Naší třetí zvolenou metodou je Lagrangeův interpolační polynom (Obrázek 5.24, Obrázek 5.25) (Kapitola 1.2.2):

```
Nefun=Interpolation[body,InterpolationOrder->10];
```

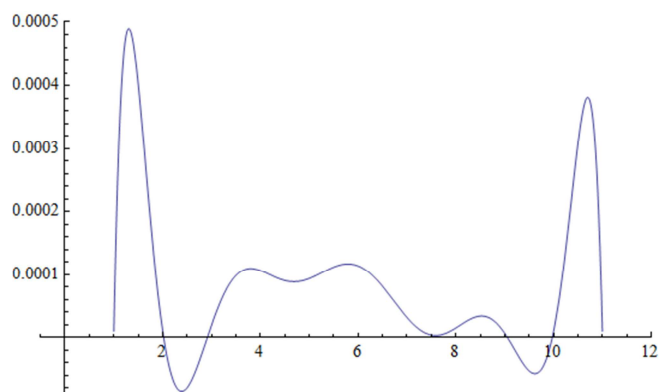
```
Show[ListPlot[body,PlotMarkers->{"•",8},PlotStyle->{Orange}],
Plot[Nefun[x],{x,1,11},PlotStyle->{Black}],
PlotRange->{{-0.5,12},{-0.00002,0.00015}},
AspectRatio->0.6,AxesOrigin->{0,0},
AxesLabel->{Style[" číslo ",Black,15],Style["H [ $\frac{\mu W}{m^2}$ ]",Black,15]},
LabelStyle->Directive[Black,FontFamily->"Italic"],
Ticks->{{2,4,6,8,10,12},{0.00002,20},{0.00004,40},{0.00006,60},
{0.00008,80},{0.0001,100},{0.00012,120},{0.00014,140}}}]
```



Obrázek 5.24 - Graf interpolace zadaných hodnot Lagrangeovým interpolačním polynomem

Tento interpolační graf nám nezobrazuje potřebný rozsah hodnot. Pomůžeme si jednoduchým příkazem Plot (Obrázek 5.25):

```
Plot[Nefun[x],{x,1,11},PlotRange->{{-0.5,12},All}]
```



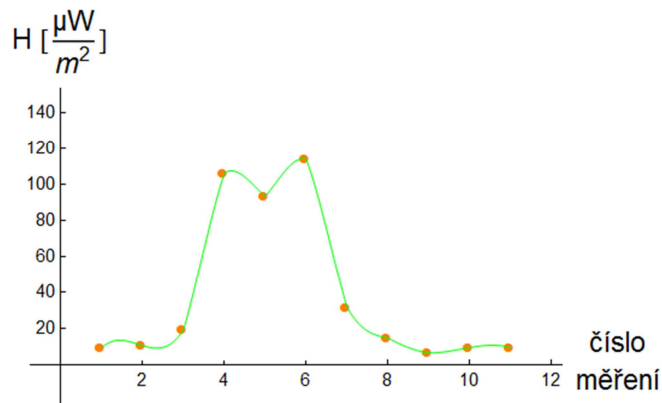
Obrázek 5.25 - Graf interpolace zadaných hodnot Lagrangeovým interpolačním polynomem - upravený rozsah hodnot vykreslování



Je zřejmé, že rozsah funkčních hodnot interpolační funkce je příliš velký. Tato interpolace proto není vhodná pro tento případ.

Naší čtvrtou zvolenou metodou je Hermiteův interpolační polynom (Obrázek 5.26) (Kapitola 1.2.4):

```
Hefun=Interpolation[body,Method->"Hermite"];
Show[ListPlot[body,PlotMarkers->{"•",8},PlotStyle->{Orange}],
      Plot[Hefun[x],{x,1,11},PlotStyle->{Green}],
      PlotRange->{{-0.5,12},{-0.00002,0.00015}},
      AspectRatio->0.6,AxesOrigin->{0,0},
      AxesLabel->{Style[" číslo ",Black,15],Style["H [ $\frac{\mu W}{m^2}$ ]",Black,15]},
      LabelStyle->Directive[Black,FontFamily->"Italic"],
      Ticks->{{2,4,6,8,10,12},{0.00002,20},{0.00004,40},{0.00006,60},
              {0.00008,80},{0.0001,100},{0.00012,120},{0.00014,140}}}]
```

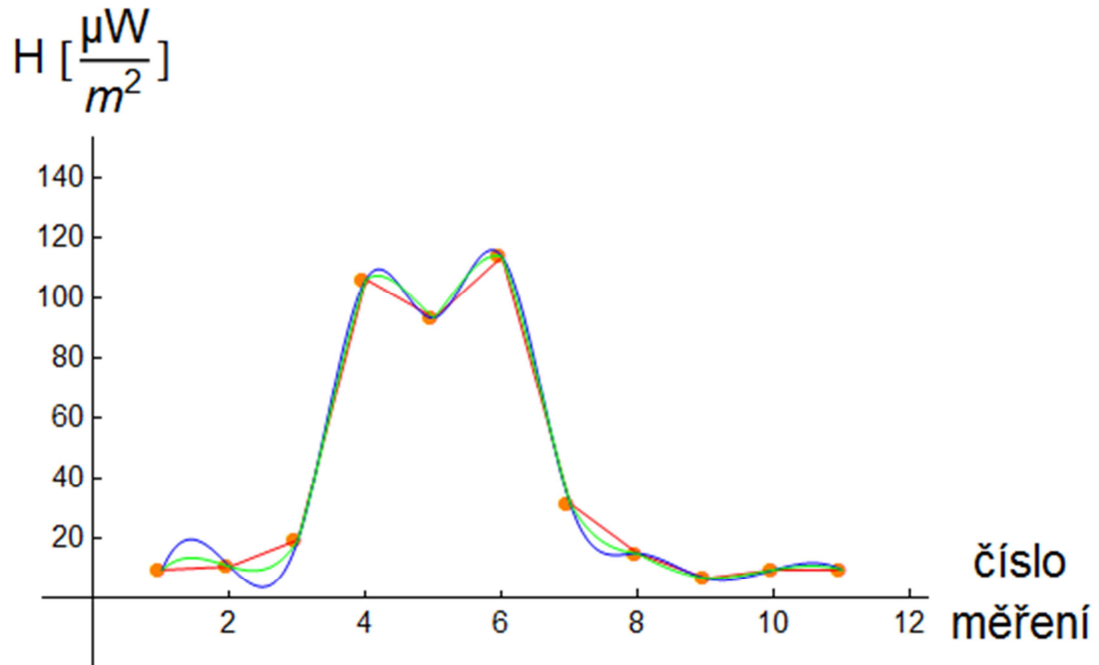


Obrázek 5.26 - Graf interpolace zadaných hodnot Hermiteovým interpolačním polynomem

Pro porovnání si vykreslíme společný graf bez Lagrangeova interpolačního polynomu (Obrázek 5.27):

```
Show[ListPlot[body,PlotMarkers->{"•",8},PlotStyle->{Orange}],
      Plot[S1fun[x],{x,1,11},PlotStyle->{Red}],
      Plot[S3fun[x],{x,1,11},PlotStyle->{Blue}],
      Plot[Hefun[x],{x,1,11},PlotStyle->{Green}],
      PlotRange->{{-0.5,12},{-0.00002,0.00015}},
      AspectRatio->0.6,AxesOrigin->{0,0},
      AxesLabel->{Style[" číslo ",Black,15],Style["H [ $\frac{\mu W}{m^2}$ ]",Black,15]},
      LabelStyle->Directive[Black,FontFamily->"Italic"]}
```

```
LabelStyle→Directive[Black,FontFamily→"Italic"],
Ticks→{{2,4,6,8,10,12},{{0.00002,20},{0.00004,40},{0.00006,60},
{0.00008,80},{0.0001,100},{0.00012,120},{0.00014,140}}}}
```



Obrázek 5.27 - Graf interpolace zadaných hodnot (oranžová) metodou lineárního splajnu (červená), metodou kubického splajnu (modrá) a Hermiteovým interpolačním polynomem (zelená)

## 5.4 4. Příklad

Typový příklad na použití vzorců pro numerický výpočet derivací.

### 5.4.1 Zadání

Přehledně graficky vyjádřete aproximace první a druhé derivace funkce:

$$f(x) = \frac{-7x^4}{8} + \frac{125x^3}{12} - \frac{341x^2}{8} + \frac{829x}{12} - 33$$

na intervalu  $[2,9; 3,1]$  s krokem  $h = 0,01$  vzroci pro numerický výpočet derivací. Pro výpočet první derivace použijte vzorce (2.4), (2.6) a (2.8). Pro výpočet druhé derivace použijte vzorce (2.9) a (2.10).

### 5.4.2 Řešení

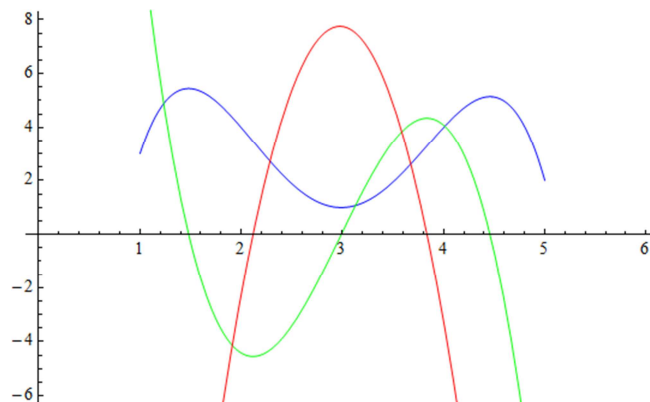
Na začátku si uložíme funkci, spočítáme její první a druhou derivaci a vykreslíme je ve společném grafu (Obrázek 5.28):

$$f = \frac{-7*x^4}{8} + \frac{125*x^3}{12} - \frac{341*x^2}{8} + \frac{829*x}{12} - 33$$

$$f1d = D[f, x]$$

$$f2d = D[f, x, x]$$

```
Show[Plot[f, {x, 1, 5}, PlotStyle -> {Blue}], Plot[f1d, {x, 1, 5}, PlotStyle -> {Green}],
      Plot[f2d, {x, 1, 5}, PlotStyle -> {Red}], PlotRange -> {{0, 6}, {-6, 8}},
      AxesOrigin -> {0, 0}]
```



Obrázek 5.28 - Graf zadané funkce (modrá), 1. derivace funkce (zelená),  
2. derivace (červená)

#### 5.4.2.1 Řešení první derivace

Převědeme zadané vzorce (2.4), (2.6), (2.8) do podoby funkce vhodné pro výpočty:

$$Fcef = \text{Function}[x, \text{Evaluate}[f]]$$

ze vzorce (2.4):

$$Vz1odhad1d = \text{Function}[x, \frac{Fcef[x + 0.01] - Fcef[x]}{0.01}]$$

ze vzorce (2.6):

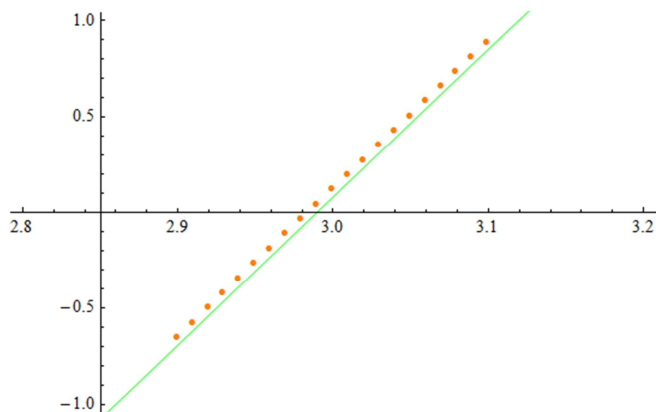
$$Vz2odhad1d = \text{Function}[x, \frac{Fcef[x + 0.01] - Fcef[x - 0.01]}{0.02}]$$

ze vzorce (2.8):

$$Vz3odhad1d = \text{Function}[x, \frac{-3 * Fcef[x] + 4 * Fcef[x + 0.01] - Fcef[x + 0.02]}{0.02}]$$

Vypočítáme bodovou aproximaci 1. derivace vzorcem (2.4) a pro srovnání ji vykreslíme společně s funkcí 1. derivace (Obrázek 5.29):

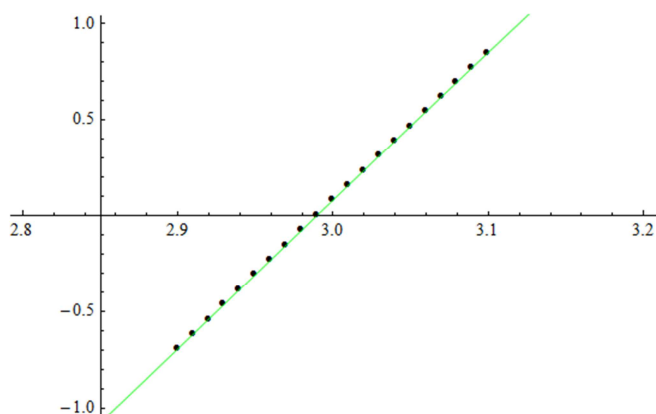
```
Vz1body=Table[{i,Vz1odhad1d[i]},{i,2.9,3.1,0.01}]
Show[ListPlot[Vz1body,PlotMarkers->{"•",5},PlotStyle->{Orange}],
Plot[f1d,{x,2.8,3.2},PlotStyle->{Green}],
PlotRange->{{2.8,3.2},{-1,1}},AxesOrigin->{2.85,0}]
```



Obrázek 5.29 - Graf funkce 1. derivace zadané funkce a bodové aproximace 1. derivace této funkce vzorcem (2.4)

Vypočítáme bodovou aproximaci 1. derivace vzorcem (2.6) a pro srovnání ji vykreslíme společně s funkcí 1. derivace (Obrázek 5.30):

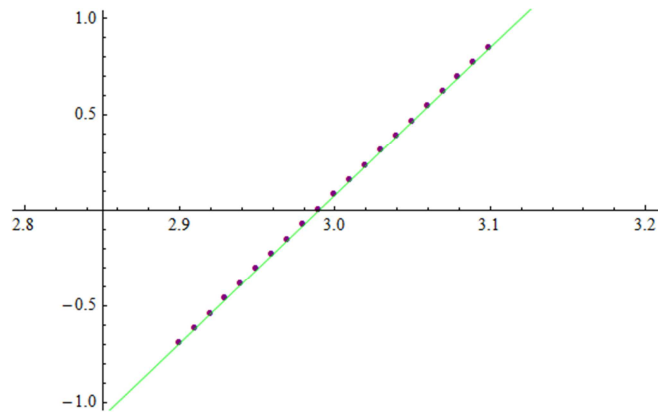
```
Vz2body=Table[{i,Vz2odhad1d[i]},{i,2.9,3.1,0.01}];
Show[ListPlot[Vz2body,PlotMarkers->{"•",5},PlotStyle->{Black}],
Plot[f1d,{x,2.8,3.2},PlotStyle->{Green}],
PlotRange->{{2.8,3.2},{-1,1}},AxesOrigin->{2.85,0}]
```



Obrázek 5.30 - Graf funkce 1. derivace zadané funkce a bodové aproximace 1. derivace této funkce vzorcem (2.6)

Vypočítáme bodovou aproximaci 1. derivace vzorcem (2.8) a pro srovnání ji vykreslíme společně s funkcí 1. derivace (Obrázek 5.31):

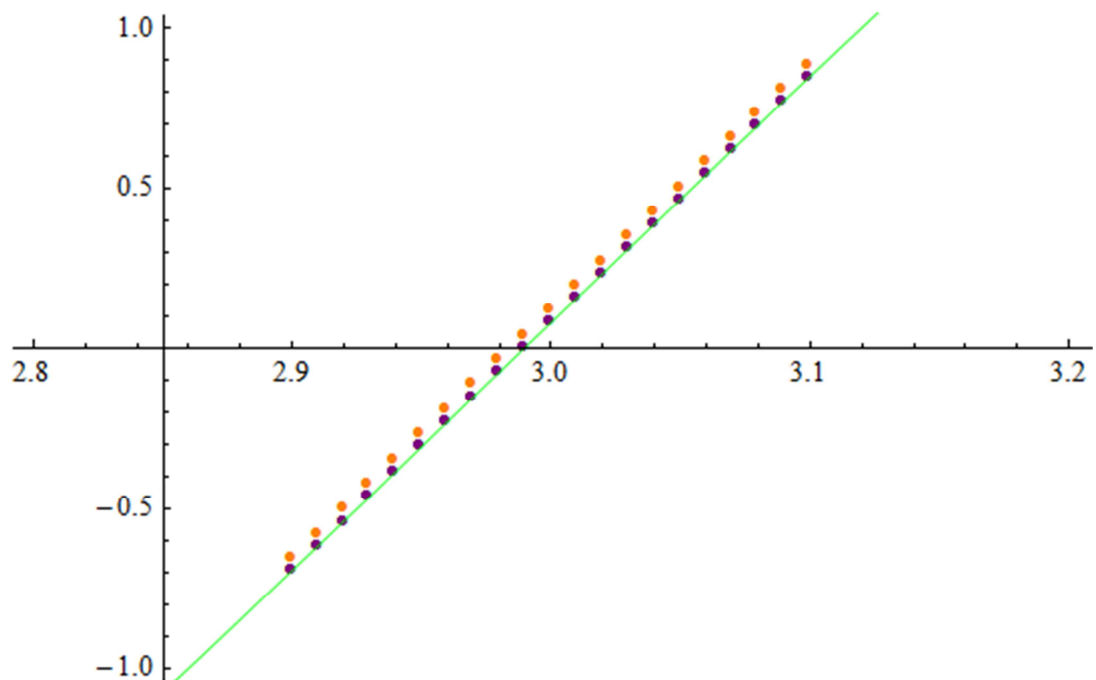
```
Vz3body=Table[{i,Vz3odhad1d[i]},{i,2.9,3.1,0.01}];
Show[ListPlot[Vz3body,PlotMarkers->{"●",5},PlotStyle->{Purple}],
      Plot[f1d,{x,2.8,3.2},PlotStyle->{Green}],
      PlotRange->{{2.8,3.2},{-1,1}},AxesOrigin->{2.85,0}]
```



Obrázek 5.31 - Graf funkce 1. derivace zadané funkce a bodové aproximace 1. derivace této funkce vzorcem (2.8)

Pro srovnání vykreslíme společný graf (Obrázek 5.32):

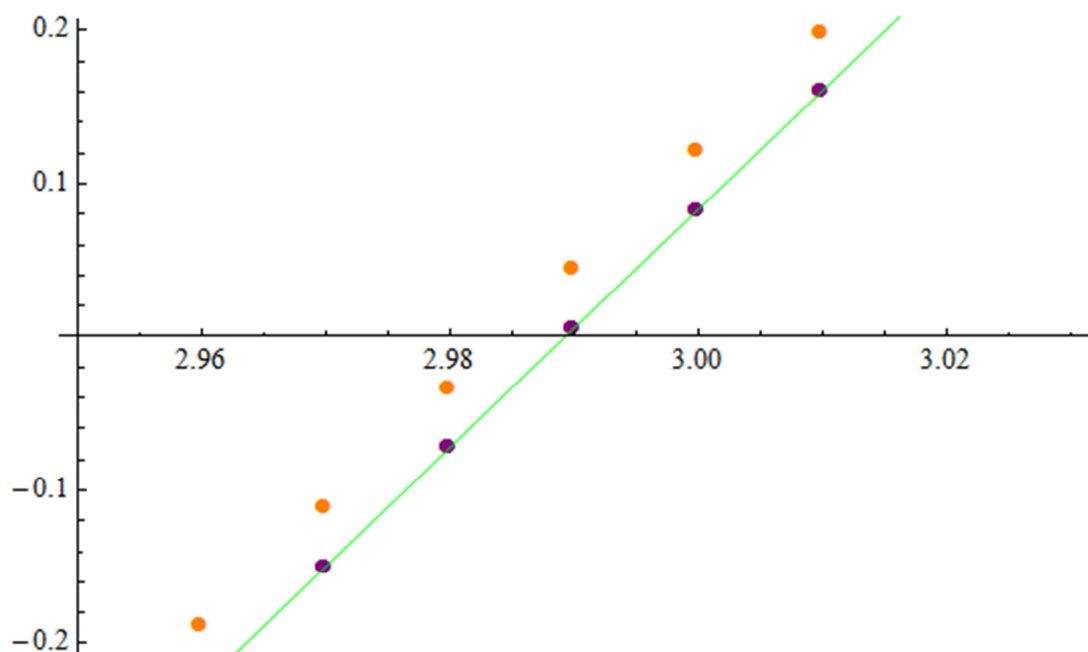
```
Show[ListPlot[Vz1body,PlotMarkers->{"●",5},PlotStyle->{Orange}],
      ListPlot[Vz2body,PlotMarkers->{"●",5},PlotStyle->{Black}],
      ListPlot[Vz3body,PlotMarkers->{"●",5},PlotStyle->{Purple}],
      Plot[f1d,{x,2.8,3.2},PlotStyle->{Green}],
      PlotRange->{{2.8,3.2},{-1,1}},AxesOrigin->{2.85,0}]
```



Obrázek 5.32 - Graf funkce 1. derivace zadané funkce (zelená) a bodové aproximace 1. derivace této funkce vzorcem (2.4) (oranžová), (2.6) (černá) a (2.7) (fialová)

Společný graf je nepřehledný, zobrazíme proto menší interval (Obrázek 5.33):

```
Show[ListPlot[Vz1body,PlotMarkers->{"•",8},PlotStyle->{Orange}],
      ListPlot[Vz2body,PlotMarkers->{"•",8},PlotStyle->{Black}],
      ListPlot[Vz3body,PlotMarkers->{"•",8},PlotStyle->{Purple}],
      Plot[f1d,{x,2.8,3.2},PlotStyle->{Green}],
      PlotRange->{{2.95,3.03},{-0.2,0.2}},AxesOrigin->{2.95,0}]
```



Obrázek 5.33 - Graf funkce 1. derivace zadané funkce (zelená) a bodové aproximace 1. derivace této funkce vzorcem (2.4) (oranžová), (2.6) (černá) a (2.7) (fialová) - vybraný interval

Aproximace pomocí vzorců (2.6) a (2.8) jsou velmi blízké.

#### 5.4.2.2 Řešení druhé derivace

Převědeme zadané vzorce (2.9), (2.10) do podoby funkce vhodné pro výpočty:

$$Fcef = \text{Function}[x, \text{Evaluate}[f]]$$

ze vzorce 2.9:

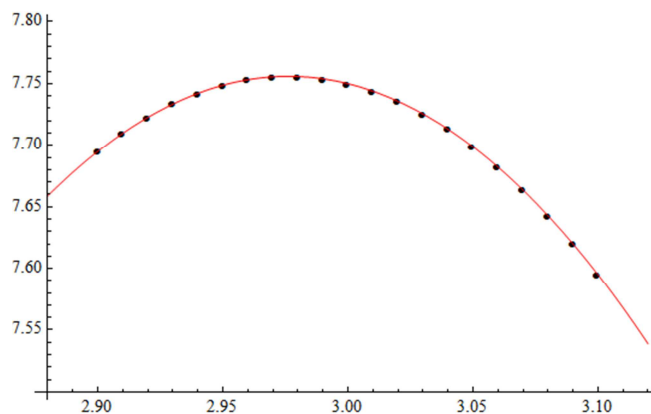
$$Vz1odhad2d = \text{Function}[x, \frac{Fcef[x + 0.01] - 2 * Fcef[x] + Fcef[x - 0.01]}{0.0001}]$$

ze vzorce 2.10:

$$Vz2odhad2d = \text{Function}[x, \frac{Fcef[x] - 2 * Fcef[x - 0.01] + Fcef[x - 0.02]}{0.0001}]$$

Vypočítáme bodovou aproximaci 2. derivace vzorcem (2.9) a pro srovnání ji vykreslíme společně s funkcí 2. derivace (Obrázek 5.34):

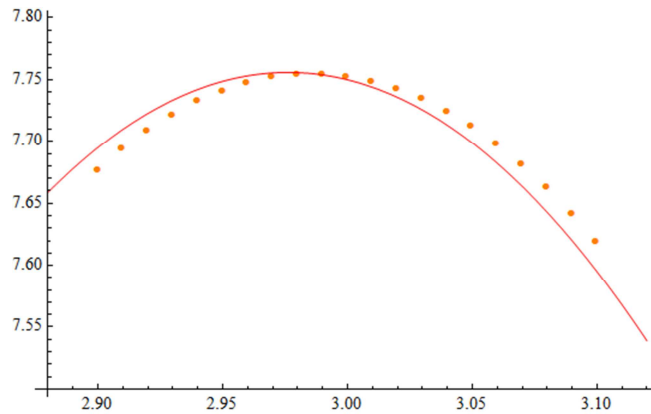
```
Vz1body2d=Table[{i,Vz1odhad2d[i]},{i,2.9,3.1,0.01}]
Show[ListPlot[Vz1body2d,PlotMarkers->{"•",6},PlotStyle->{Black}],
Plot[f2d,{x,2.88,3.12},PlotStyle->{Red}],
PlotRange->{{2.88,3.12},{7.5,7.8}},AxesOrigin->{2.88,7.5}]
```



Obrázek 5.34 - Graf funkce 2. derivace zadané funkce a bodové aproximace 2. derivace této funkce vzorcem (2.9)

Vypočítáme bodovou aproximaci 2. derivace vzorcem (2.10) a pro srovnání ji vykreslíme společně s funkcí 2. derivace (Obrázek 5.35):

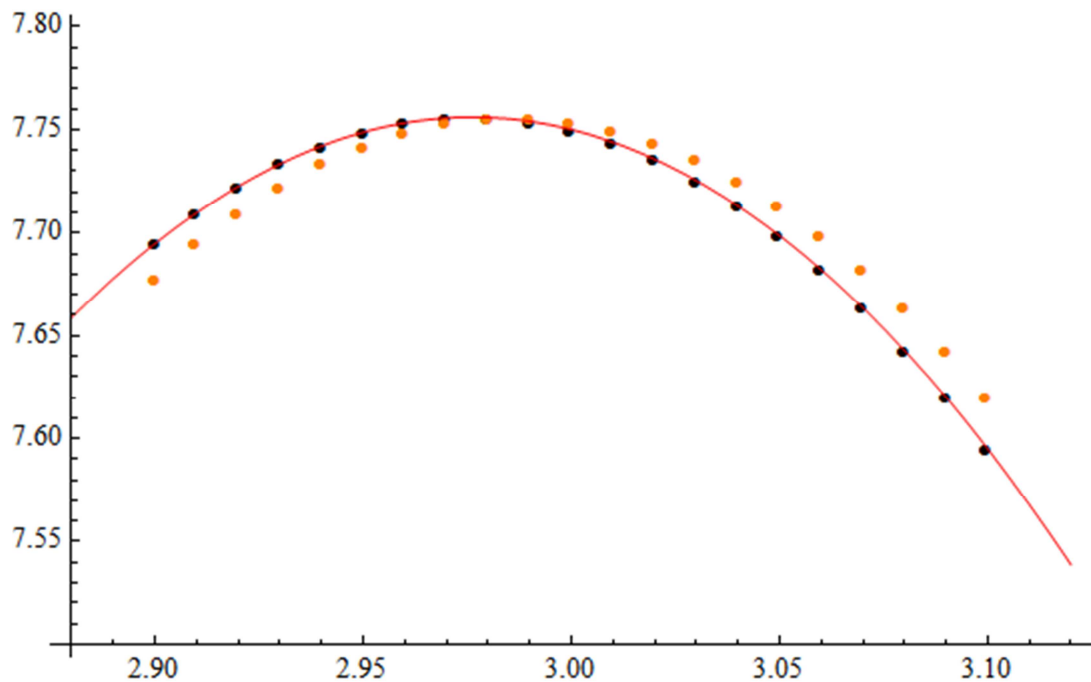
```
Vz2body2d=Table[{i,Vz2odhad2d[i]},{i,2.9,3.1,0.01}]
Show[ListPlot[Vz2body2d,PlotMarkers->{"•",6},PlotStyle->{Orange}],
Plot[f2d,{x,2.88,3.12},PlotStyle->{Red}],
PlotRange->{{2.88,3.12},{7.5,7.8}},AxesOrigin->{2.88,7.5}]
```



Obrázek 5.35 - Graf funkce 2. derivace zadané funkce a bodové aproximace 2. derivace této funkce vzorcem (2.10)

Pro srovnání vykreslíme společný graf:

```
Show[ListPlot[Vz1body2d,PlotMarkers->{"•",6},PlotStyle->{Black}],
      ListPlot[Vz2body2d,PlotMarkers->{"•",6},PlotStyle->{Orange}],
      Plot[f2d,{x,2.88,3.12},PlotStyle->{Red}],
      PlotRange->{{2.88,3.12},{7.5,7.8}},AxesOrigin->{2.88,7.5}]
```



Obrázek 5.36 - Graf funkce 2. derivace zadané funkce (červená) a bodové aproximace 2. derivace této funkce vzorcem (2.9) (černá) a (2.10) (oranžová)



## ZÁVĚR

Tato práce má sloužit jako navazující elektronický studijní materiál předmětu Matematika I určený studentům oboru Bezpečnostní technologie, systémy a management na Fakultě aplikované informatiky Univerzity Tomáše Baťi ve Zlíně. Jsou v ní intuitivně vysvětleny základy interpolace polynomy, aproximace a numerické derivace, které budou studenti dále využívat v odborných předmětech, laboratořích a později i v praxi. Studenti se zde také seznámí s možnostmi využití, prostředím a základními příkazy programu Mathematica, které mohou využít pro vlastní výpočty. V praktické části si mohou ověřit správné pochopení této problematiky na typových příkladech konzultovaných s vedoucím práce a Ústavem bezpečnostního inženýrství FAI, které postupně prakticky ukazují použití jednotlivých metod interpolace, aproximace a numerické derivace. Příklady jsou doplněny grafy a postupy řešení ve formě příkazů pro program Mathematica.

Přínosem autora je kromě vypracovaných typových příkladů s podrobným řešením také formulace teoretické části, která se snaží při práci s více zdroji zachovávat jednotnou formu a díky tomu zjednodušit pochopení předkládané problematiky, mimo jiné i názornými grafy.

## ZÁVĚR V ANGLIČTINĚ

The purpose of this thesis is to serve as a subsequent electronic study material for the class of Mathematics I designated to the students of Security Technology and Management at the Faculty of Applied Informatics at the Tomas Bata University in Zlín. The thesis is intuitively explaining basics of polynomial interpolation, approximation and numerical derivation which the students will use in other subjects, laboratories and later on also in profession life. Students will also discover opportunities of usage, surroundings and basic commands of program Mathematica which they can use for their calculations. In the practical part, the students can verify understanding of the problematic by solving model problems. These problems were consulted with the head of Department of Security Engineering at FAI and progressively and practically show the usage of different methods of interpolation, approximation and numeric derivation. The problems are supplemented by charts and the order of commands for program Mathematica.

Besides detailed model problem solutions, the author contributed by formulating the theoretical part. It is trying to respect united form despite the fact that the author used plural resources. This united form and illustrative charts enabled simplification of understanding the problematic.

**SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY**

- [1] BJÖRK, Ake a Germund DAHLQUIST. *Numerical Methods. Přel. ze švéd. orig.* Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1974.
- [2] ČERMÁK, Libor a Rudolf HLAVIČKA. Numerické metody I. In: *VUT, FSI, Ústav matematiky* [online]. Brno, 1.11.2006. Dostupné z:  
<http://mathonline.fme.vutbr.cz/Numericke-metody-I/sc-8-sr-1-a-11/default.aspx>
- [3] FIALKA, Miloslav a Hana CHARVÁTOVÁ. *Matematika I.* Dotisk 2. vydání. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2009. ISBN 978-80-7318-584-8.
- [4] CHRAMCOV, Bronislav. *Základy práce v prostředí Mathematica.* 2. vydání. Zlín: Univerzita Tomáše Bati, 2006. ISBN 80-7318-510-5.
- [5] KUBÍČEK, M., M. DUBCOVÁ a D. JANOVSÁ. *Numerické metody a algoritmy.* 2. vydání. Praha: Vysoká škola chemicko-technologická, 2005. ISBN 80-7080-558-7.
- [6] MEINARDUS, Günter. *Aproximace funkcí: Teorie a numerické metody. Přel. z něm. orig.* Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1968.
- [7] PŘIKRYL, Petr a Marek BRANDNER. Numerické metody II. In: *ZČU, FAV, Katedra matematiky* [online]. Plzeň, 9.2.2006. Dostupné z:  
[http://www.cam.zcu.cz/~danek/Students/2006\\_LS/soubory/Prikryl,Brandner-NumerickeMetody2.pdf](http://www.cam.zcu.cz/~danek/Students/2006_LS/soubory/Prikryl,Brandner-NumerickeMetody2.pdf)
- [8] REKTORYS, Karel. *Co je a k čemu je vyšší matematika.* Praha: Academia, 2001. ISBN: 80-200-0883-7.
- [9] REKTORYS, Karel. *Přehled užití matematiky I.* 6. vydání. Praha: Prometheus, 1995. ISBN 80-85849-92-5.
- [10] REKTORYS, Karel. *Přehled užití matematiky II.* 6. vydání. Praha: Prometheus, 1995. ISBN 80-85849-62-3.

**SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK****Teoretická část**

$\xi$	Bod.
$\varphi(x_i)$	Aproximační funkce.
$\omega_i(x_i)$	Váhová funkce.
$H_n(x)$	Hermiteův interpolační polynom.
$L_n(x)$	Lagrangeův interpolační polynom.
$N_n(x)$	Newtonův interpolační polynom.
$P_n(x)$	Interpolační polynom.
$S_1(x)$	Lineární interpolační spline.
$S_3(x)$	Kubický interpolační spline.
$a_i$	Koeficient.
$g_i$	Proměnná závislá na $x_i$ .
$h_i$	Proměnná závislá na $x_i$ .
$k$	Proměnná.
$l_i(x)$	Elementární polynom Lagrangeova interpolačního polynomu.
$n$	Proměnná, stupeň polynomu.
$t$	Proměnná závislá na $x_i$ .
$x_i$	Proměnná.
$y_i$	Funkční hodnota.
$2D$	Rovina.
$3D$	Prostor.

**Praktická část**

$f$	Frekvence zachycená detektorem.
$f_0$	Frekvence vysílaná detektorem.
$v$	Rychlost.
$c$	Rychlost šíření zvuku ve vzduchu.
$Hz$	Hertz (jednotka frekvence).
$W$	Watt (jednotka výkonu).
$m$	Metr (jednotka délky).
$s$	Sekunda (jednotka času).
$H$	Intenzita infračerveného záření vyzařovaného člověkem.
$T_b$	Teplota těla.
$^{\circ}C$	Stupeň Celsia (jednotka teploty).
$S_b$	Plocha povrchu těla.
$m^2$	Metr čtverečný (jednotka plochy).
$L$	Vzdálenost.
$T_s$	Teplota detektoru.
$K$	Kelvin (jednotka teploty).
$\varepsilon_b$	Emisivita povrchu lidského těla.
$\varepsilon_s$	Emisivita povrchu dielektrika.
$\delta_0$	Stefan-Boltzmanova konstanta.

**SEZNAM OBRÁZKŮ**

Obrázek 1.1 - Interpolace - příklad interpolace souboru měřených dat lineárním splajnem.....	11
Obrázek 1.2 - Aproximace - příklad aproximace souboru měřených dat.....	12
Obrázek 1.3 - Aproximace - ukázka zpřesnění aproximace funkce (černá) zvýšením počtu uzlových bodů (3 - zelená, 5 - červená) .....	12
Obrázek 1.4 - Extrapolace - příklad extrapolace mimo oblast měřených dat (modře).....	13
Obrázek 1.5 - Lineární interpolace - příklad interpolace pomocí lineárního interpolačního polynomu.....	15
Obrázek 1.6 - Lagrangeova interpolace - příklad interpolace pomocí Lagrangeova interpolačního polynomu.....	16
Obrázek 1.7 - Hermiteova interpolace - příklad interpolace pomocí Hermiteova interpolačního polynomu.....	17
Obrázek 1.8 - Lineární splajna - příklad interpolace užitím lineárního splajnu .....	19
Obrázek 1.9 - Kubický splajn - příklad interpolace užitím kubického splajnu .....	20
Obrázek 1.10 - Metoda nejmenších čtverců - příklad aproximace pomocí metody nejmenších čtverců .....	21
Obrázek 3.1 - Mathematica - náhled tzv. notebooku - vpravo nápověda .....	25
Obrázek 5.1 - Graf dopočítaných frekvencí odražených ultrazvukových vln .....	30
Obrázek 5.2 - Graficky upravený graf dopočítaných frekvencí odražených .....	30
Obrázek 5.3 - Graf interpolace zadaných hodnot metodou .....	31
Obrázek 5.4 - Graf interpolace zadaných hodnot metodou .....	32
Obrázek 5.5 - Graf interpolace zadaných hodnot Lagrangeovým .....	32
Obrázek 5.6 - Graf interpolace zadaných hodnot Hermiteovým .....	33
Obrázek 5.7 - Graf interpolace zadaných hodnot (oranžová) metodou lineárního splajnu (červená), metodou kubického splajnu (modrá), Lagrangeovým interpolačním.....	34
Obrázek 5.8 - Graf vynaložených nákladů v průběhu roku 2011 v milionech Kč .....	35
Obrázek 5.9 - Graf interpolace vynaložených nákladů pomocí lineárního splajnu.....	36
Obrázek 5.10 - Graf vynaložených nákladů v průběhu roku 2011 v milionech Kč - doplněný o náklady v únoru 2012 .....	36
Obrázek 5.11 - Graf interpolace vynaložených nákladů pomocí lineárního splajnu.....	37
Obrázek 5.12 - Graf interpolace vynaložených nákladů pomocí kubického splajnu .....	37

Obrázek 5.13 - Graf interpolace vynaložených nákladů pomocí Hermiteova interpolačního polynomu.....	38
Obrázek 5.14 - Graf interpolace vynaložených nákladů pomocí Lagrangeova interpolačního polynomu.....	39
Obrázek 5.15 - Graf aproximace vynaložených nákladů pomocí polynomu nultého stupně (konstantou) .....	40
Obrázek 5.16 - Graf aproximace vynaložených nákladů pomocí polynomu nultého stupně (konstantou) se snížením váhy nákladů v červenci a srpnu.....	40
Obrázek 5.17 - Graf aproximace vynaložených nákladů pomocí polynomu prvního stupně (zelená) a pomocí polynomu prvního stupně s použitím váhové funkce (modrá).....	41
Obrázek 5.18 - Graf aproximace vynaložených nákladů pomocí polynomu druhého stupně (zelená) a pomocí polynomu druhého stupně s použitím váhové funkce (modrá).....	42
Obrázek 5.19 - Graf aproximace vynaložených nákladů pomocí polynomu třetího stupně (zelená) a pomocí polynomu třetího stupně s použitím váhové funkce (modrá).....	43
Obrázek 5.20 - Graf aproximace vynaložených nákladů pomocí polynomu čtvrtého stupně (zelená) a pomocí polynomu čtvrtého stupně s použitím váhové funkce (modrá).....	44
Obrázek 5.21 - Graficky upravený graf dopočítaných intenzit infračerveného záření vyzářovaného narušitelem.....	46
Obrázek 5.22 - Graf interpolace zadaných hodnot metodou .....	47
Obrázek 5.23 - Graf interpolace zadaných hodnot metodou kubického splajnu .....	47
Obrázek 5.24 - Graf interpolace zadaných hodnot Lagrangeovým interpolačním polynomem.....	48
Obrázek 5.25 - Graf interpolace zadaných hodnot Lagrangeovým interpolačním polynomem - upravený rozsah hodnot vykreslování .....	48
Obrázek 5.26 - Graf interpolace zadaných hodnot Hermiteovým interpolačním polynomem.....	49
Obrázek 5.27 - Graf interpolace zadaných hodnot (oranžová) metodou lineárního.....	50
Obrázek 5.28 - Graf zadané funkce (modrá), 1.derivace funkce (zalená),.....	51
Obrázek 5.29 - Graf funkce 1. derivace zadané funkce a bodové aproximace 1. derivace této funkce vzorcem (2.4) .....	52

Obrázek 5.30 - Graf funkce 1. derivace zadané funkce a bodové aproximace 1. derivace této funkce vzorcem (2.6) .....	52
Obrázek 5.31 - Graf funkce 1. derivace zadané funkce a bodové aproximace 1. derivace této funkce vzorcem (2.8) .....	53
Obrázek 5.32 - Graf funkce 1. derivace zadané funkce (zelená) a bodové aproximace 1. derivace této funkce vzorcem (2.4) (oranžová), (2.6) (černá) a (2.7) (fialová).....	54
Obrázek 5.33 - Graf funkce 1. derivace zadané funkce (zelená) a bodové aproximace 1. derivace této funkce vzorcem (2.4) (oranžová), (2.6) (černá) a (2.7) (fialová).....	54
Obrázek 5.34 - Graf funkce 2. derivace zadané funkce a bodové aproximace 2. derivace této funkce vzorcem (2.9) .....	55
Obrázek 5.35 - Graf funkce 2. derivace zadané funkce a bodové aproximace 2. derivace této funkce vzorcem (2.10) .....	56
Obrázek 5.36 - Graf funkce 2. derivace zadané funkce (červená) a bodové aproximace 2. derivace této funkce vzorcem (2.9) (černá) a (2.10) (oranžová) .....	56



**SEZNAM TABULEK**

Tabulka 5.1 - Tabulka rychlostí pohybu narušitele a dopočítané frekvence .....	29
Tabulka 5.2 - Vynaložené náklady v průběhu roku 2011 v milionech Kč .....	34
Tabulka 5.3 - Porovnání výše předpokládaných nákladů v milionech Kč v lednu 2012 při použití různých metod výpočtu pomocí interpolace .....	44
Tabulka 5.4 - Porovnání výše předpokládaných nákladů v milionech Kč v lednu 2012 při použití různých metod výpočtu pomocí aproximace .....	44
Tabulka 5.5 - Tabulka vzdáleností narušitele od detektoru a dopočítané intenzity infračerveného záření vyzařovaného narušitelem .....	45