

Vybrané kapitoly z matematiky vyložené pomocí programu GeoGebra

Selected chapters from mathematics interpreted with program
GeoGebra

Oldřich Liška

Bakalářská práce
2012



Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky
akademický rok: 2011/2012

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: Oldřich LIŠKA
Osobní číslo: A08354
Studijní program: B 3902 Inženýrská informatika
Studijní obor: Bezpečnostní technologie, systémy a management

Téma práce: Vybrané kapitoly z matematiky vyložené s pomocí programu GeoGebra

Zásady pro vypracování:

1. Seznamte se s matematickým softwarem GeoGebra.
2. Vložte vybrané pojmy z matematiky s využitím Geogebra.
3. Vyřešte vhodné příklady z diferenciálního a integrálního počtu.
4. Aplikujte získané znalosti na bezpečnostní problematiku překonání mechanického zábranného systému.

Rozsah bakalářské práce:

Rozsah příloh:

Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

1. **MÁDROVÁ, Vladimíra. Matematická analýza I. 2001. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2001. ISBN 80-244-0269-6.**
2. **OSTRAVSKÝ, Jan. Diferenciální počet funkce více proměnných, nekonečné číselné číselné řady. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2007. ISBN 978-80-7318-567-1.**
3. **KŘENEK, Josef, OSTRAVSKÝ, Jan. Diferenciální a integrální počet s aplikacemi v ekonomii. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2006. ISBN 80-7318-354-4.**
4. **IVANKA, Jan. Mechanické zábranné systémy. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2009.**

Vedoucí bakalářské práce:

RNDr. Jana Volná, Ph.D.

Ústav matematiky

Datum zadání bakalářské práce:

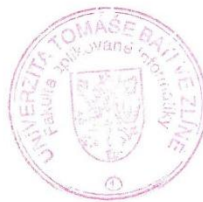
24. února 2012

Termín odevzdání bakalářské práce:

25. května 2012

Ve Zlíně dne 24. února 2012

prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.
děkan



L.S.

doc. Mgr. Milan Adámek, Ph.D.
ředitel ústavu

ABSTRAKT

Bakalářská práce je zaměřena na prezentaci vybraných kapitol z diferenciálního a integrálního počtu funkcí jedné proměnné pomocí programu GeoGebra. Teoretická část obsahuje popis programu, matematické definice a popis dílčích matematických problémů. V praktické části jsou uvedeny jak dynamické procedury, tak i konkrétní příkladu řešené pomocí GeoGebry. Součástí práce jsou přílohy s dynamickými procedurami.

Klíčová slova: GeoGebra, diferenciální počet, integrální počet, funkce, posuvník

ABSTRACT

My bachelor thesis aims at presentation of selected themes of differential and integral calculus of function of one variable by using GeoGebra program. The theoretical part includes description of the given program, mathematical definitions and description of particular math problems. In the practical part I present dynamic procedures as well as concrete problems solved by GeoGebra. Bachelor thesis also includes appendixes with the dynamic procedures.

Keywords: GeoGebra, differential calculus, integral calculus, function, slider

Tímto bych rád poděkoval mé vedoucí bakalářské práce paní RNDr. Janě Volné, Ph.D. za její čas, připomínky a odborné vedení v průběhu vypracování mé bakalářské práce.

Prohlašuji, že

- beru na vědomí, že odevzdáním bakalářské práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb. o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších právních předpisů, bez ohledu na výsledek obhajoby;
- beru na vědomí, že bakalářská práce bude uložena v elektronické podobě v univerzitním informačním systému dostupná k prezenčnímu nahlédnutí, že jeden výtisk bakalářské práce bude uložen v příruční knihovně Fakulty aplikované informatiky Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně a jeden výtisk bude uložen u vedoucího práce;
- byl/a jsem seznámen/a s tím, že na moji bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších právních předpisů, zejm. § 35 odst. 3;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 1 autorského zákona má UTB ve Zlíně právo na uzavření licenční smlouvy o užití školního díla v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 2 a 3 autorského zákona mohu užít své dílo – bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití jen s předchozím písemným souhlasem Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše);
- beru na vědomí, že pokud bylo k vypracování bakalářské práce využito softwaru poskytnutého Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně nebo jinými subjekty pouze ke studijním a výzkumným účelům (tedy pouze k nekomerčnímu využití), nelze výsledky bakalářské práce využít ke komerčním účelům;
- beru na vědomí, že pokud je výstupem bakalářské práce jakýkoliv softwarový produkt, považují se za součást práce rovněž i zdrojové kódy, popř. soubory, ze kterých se projekt skládá. Neodevzdání této součásti může být důvodem k neobhájení práce.

Prohlašuji,

- že jsem na bakalářské práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval. V případě publikace výsledků budu uveden jako spoluautor.
- že odevzdaná verze bakalářské práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG jsou totožné.

Ve Zlíně

.....
podpis diplomanta

OBSAH

ÚVOD	9
I TEORETICKÁ ČÁST	10
1 PROGRAM GEOGEBRA	11
1.1 GEOMETRICKÉ ZADÁVÁNÍ OBJEKTŮ	12
1.1.1 Panel nástrojů	12
1.1.2 Kontextová nabídka	13
1.1.3 Dynamické nástroje.....	13
1.1.4 Navigační panel.....	13
1.1.5 Zápis konstrukce	14
1.2 ALGEBRAICKÝ VSTUP.....	14
1.2.1 Příkazový řádek.....	14
1.2.2 Předdefinované příkazy.....	15
1.2.3 Export konstrukce	15
1.3 NASTAVENÍ PRACOVNÍHO PROSTŘEDÍ.....	16
1.3.1 Přichytávání bodů.....	16
1.3.2 Jednotka úhlu	16
1.3.3 Desetinná místa	16
1.3.4 Jazyk.....	16
2 DIFERENCIÁLNÍ POČET FUNKCÍ JEDNÉ PROMĚNNÉ	17
2.1 REÁLNÍ FUNKCE REÁLNÉ PROMĚNNÉ.....	17
2.2 LIMITA FUNKCE.....	18
2.2.1 Vlastní limita ve vlastním bodě.....	18
2.2.2 Nevlastní limita ve vlastním bodě.....	19
2.2.3 Vlastní limita v nevlastním bodě.....	19
2.2.4 Nevlastní limita v nevlastním bodě.....	20
2.2.5 Jednostranné limity	20
2.3 DERIVACE FUNKCE.....	21
2.3.1 Vzorce pro derivaci elementárních funkcí	22
2.3.2 Obecné vztahy pro výpočet derivace	22
2.3.3 Derivace složené funkce	22
2.3.4 Derivace vyšších řádů	22
2.4 VYŠETŘOVÁNÍ PRŮBĚHU FUNKCE.....	23
2.4.1 Monotónnost funkce.....	23
2.4.2 Extrémy funkce	23
2.4.3 Konvexnost a konkávnost	24
2.4.4 Asymptoty bez směrnice	25
2.4.5 Asymptoty se směrnicí	25
2.4.6 Inflexní bod	26
3 INTEGRÁLNÍ POČET FUNKCÍ JEDNÉ PROMĚNNÉ	27
3.1.1 Stěžejní vzorce pro integraci elementárních funkcí	27
3.2 URČITÝ INTEGRÁL	28
3.2.1 Riemannův integrál	28
3.2.2 Výpočet určitého integrálu.....	30
3.2.3 Aplikace určitého integrálu v geometrii.....	30

3.2.3.1	Délka rovinné křivky	30
3.2.3.2	Objem tělesa	30
3.2.3.3	Obsah pláště rotačního tělesa.....	30
3.2.4	Aplikace určitého integrálu ve fyzice.....	31
3.2.4.1	Těžiště křivky	31
3.2.4.2	Těžiště rovinného obrazce	31
II	PRAKTICKÁ ČÁST	32
4	DIFERENCIÁLNÍ POČET FUNKCÍ JEDNÉ PROMĚNNÉ – APLIKACE	33
4.1	DYNAMICKÉ PROCEDURY	33
4.1.1	Derivace funkce	33
4.1.2	Extrémy funkce	35
4.1.3	Inflexní body	35
4.2	ŘEŠENÉ PŘÍKLADY.....	36
4.2.1	Příklad I.....	36
4.2.2	Příklad II.....	37
4.2.3	Příklad III	38
5	INTEGRÁLNÍ POČET FUNKCÍ JEDNÉ PROMĚNNÉ – APLIKACE	39
5.1	DYNAMICKÉ PROCEDURY	39
5.1.1	Horní a dolní součet	39
5.1.2	Výpočet obsahu obrazce	40
5.1.3	Výpočet obsahu obrazce II.....	41
5.1.4	Délka křivky.....	41
5.2	ŘEŠENÉ PŘÍKLADY.....	42
5.2.1	Příklad IV	42
5.2.2	Příklad V	43
5.2.3	Příklad VI.....	43
5.2.4	Příklad VII.....	44
6	PRŮLOMOVÁ ODOLNOST MECHANICKÉHO ZÁBRANNÉHO SYSTÉMU – APLIKACE.....	45
6.1	STANOVENÍ MINIMÁLNÍ DOBY PRŮLOMOVÉ ODOLNOSTI ÚSCHOVNÝCH OBJEKTŮ	45
6.2	STUPNĚ RIZIKA OHROŽENÝCH OBJEKTŮ	45
6.3	VLASTNÍ PŘÍKLAD NA STANOVENÍ PRŮLOMOVÉ ODOLNOSTI.....	46
	ZÁVĚR	47
	ZÁVĚR V ANGLIČTINĚ.....	48
	SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY.....	49
	SEZNAM OBRÁZKŮ	50

ÚVOD

Dříve než se pustím do výkladu problematiky matematických pojmů, rád bych na úvod specifikoval prostřednictvím několika řádků mojí bakalářskou práci. Text jsem se snažil koncipovat tak, aby byl snadno pochopitelný zejména pro studenty bakalářského programu. Cílem je nastínit problematiku a pomoci studentům s pochopením základních principů, což jim mnohdy činí nemalé potíže. Matematických skript, knih a aplikací existuje samozřejmě mnoho. Má práce se však liší v tom, že není napsána člověkem přednášejícím matematiku na univerzitě. Matematika je mým koníčkem, nepovažuji se ovšem za žádného ortodoxního nadšence. Ve svém volném čase doučuji studenty středních a vysokých škol, jimiž jsou povětšinou kamarádi a známí. Často mám dojem, že jim můj, v jistém slova smyslu amatérský, avšak jsem přesvědčen, že ucelený a pravdivý výklad, vyhovuje mnohem více, než mnoho řádků empirických vztahů a matematických vzorečků. Jsem zastáncem tvrzení, že matematika je v podstatě jednoduchá věda, je-li správně vysvětlena a pochopena. Ze své krátké praxe jsem tedy nabyl dojmu, že pro studenty není problém se něco naučit. Daleko větší úskalí spatřuji v pochopení cíle dané úlohy a aplikování jej např. ve slovní úloze. Právě tímto se budu v praktické části zabývat detailněji. Předtím je však nezbytné upřesnit si neoblíbenou, avšak velmi důležitou teorii. K vysvětlení a ilustraci využiji vlastní nákresy vytvořené v programu GeoGebra.

I. TEORETICKÁ ČÁST

1 PROGRAM GEOGEBRA

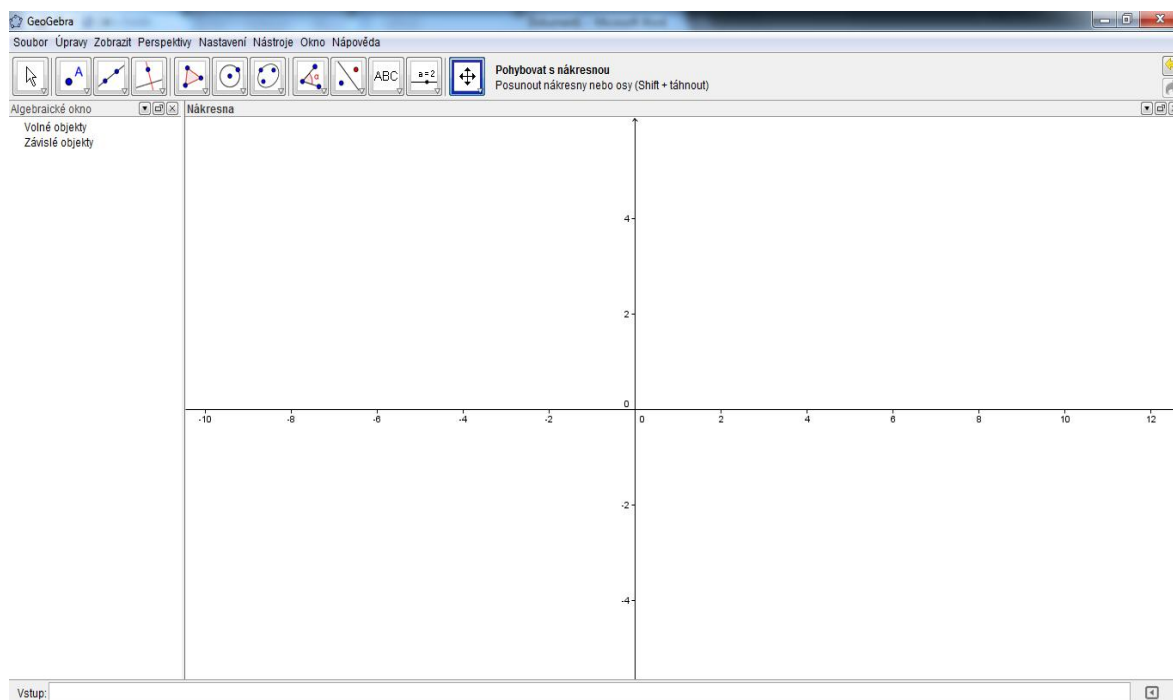
GeoGebra je dynamický matematický software, který byl vytvořen Markusem Honenwarterem na Univerzitě Florida Atlantic. Spojuje jednotlivé matematické disciplíny jako geometrii, algebru a matematickou analýzu. Program získal řadu ocenění v Rakousku, Německu, ale i v dalších evropských zemích. GeoGebra představuje zajímavou alternativu komerčních programů. Vzhledem k tomu její oblíbenost neustále narůstá.

V době rozvinutých informačních technologií jsou programy nedílnou součástí běžného používání a usnadňování práce, ať již ve výuce nebo v praxi. Program GeoGebra je atraktivní zejména díky své jednoduchosti a možnosti využití nejen v matematice, ale i v širokém spektru jiných technických oborů. Při mém průzkumu a shromažďování informací od návštěvníků různých diskusních fór, je aplikace oblíbená zejména na základních školách, kde učitelé zábavnou formou prezentují probíranou látku. Místo dřívějšího náročného rýsování za použití pravítek a kružítek dnes žáci pracují s programem, jenž si nežadá žádné pořizovací náklady. Osobně si myslím, že důsledek toho, že se pedagogičtí pracovníci snaží GeoGebra a jiné podpůrné mechanismy používat, vede k lepšímu pochopení provázanosti jednotlivých matematických disciplín. Studenti názorně vidí co se děje s kvadratickou funkcí v případě, že se mění její parametry apod. Jednoznačně to zvyšuje efektivitu a kvalitu výuky.

V GeoGebra lze konstruovat body, úsečky přímk, vektory, kuželosečky a zároveň interaktivní grafy funkcí. GeoGebra také zvládá početní úkony jako takové. Do těchto úkonů je zahrnuto počítání s čísly, vektory, souřadnicemi bodů. Umožňuje také určovat derivace a integrály námi zadaných funkcí. Všechny výsledné aplikace je možno exportovat do řady různých formátů. Nespornou výhodou je jeho poskytování jako volně šiřitelný freeware produkt, jež má celou řadu využití, od problematiky zahrnující osnovy základní školy, až po znázornění přednášené látky na akademické půdě.

GeoGebra má dva způsoby ovládání. Geometrické, kdy ovládáme program myší, a algebraické, kde jsou vstupní hodnoty zadávány pomocí kláves, přičemž objekt v geometrickém okně je zapsán odpovídajícím způsobem v okně algebraickém. Přejděme nyní k samotnému popisu pracovního prostředí.

Při otevření spouštěcí ikony vidíme vlevo algebraické okno a vpravo nákresnu neboli geometrické okno.



Obr. 1.1: hlavní okna po spuštění

1.1 Geometrické zadávání objektů

1.1.1 Panel nástrojů

K zadávání objektů pomocí myši nám slouží nástrojový panel umístěný nad nákresnou. Při kliknutí na námi vybraný objekt se zobrazí roleta s multivýběrem. Panel obsahuje širokou škálu možností výběru. Lze zadávat body, přímky, kuželosečky, mnohoúhelníky, vektory ale také měřit vzdálenosti, úhly, nebo třeba vkládat obrázky. Nástroje jsou členěny dle typu výsledných objektů do malých oken. Kliknutím na malou šipku v rohu přepínáme mezi jednotlivými nástroji. Pomocí vybraného symbolu na obr. 1.2 lze pohybovat souřadnicovými osami.



Obr. 1.2: ukázka panelu nástrojů

1.1.2 Kontextová nabídka

Kliknutím pravým tlačítkem myši otevíráme kontextovou nabídku. Slouží ke specifické editaci a změně vlastností objektu, nebo pracovní plochy. Najdeme zde příkazy jako přejmenovat, zrušit, nebo zobrazit objekt.

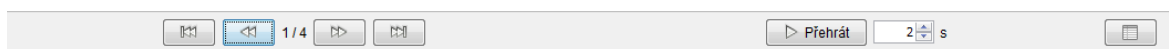
1.1.3 Dynamické nástroje

V úvodu jsem již předeslal, že je GeoGebra dynamický software, což znamená, že můžeme pohybovat objekty a měnit jejich velikosti a vzdálenosti. To vše ovšem za předpokladu, že zůstanou zachovány vazby mezi jednotlivými objekty. Nástroje umožňující pohyb jsou:

- **Ukazovátko** - slouží k přemístění daného volného objektu. Objekty závislé se posouvají současně spolu s nimi.
- **Posuvník** - jedná se o grafickou reprezentaci hodnoty (čísla, úhlu). Pomocí tohoto nástroje nastavíme interval, v němž se má hodnota objektu (např. velikost poloměru r kružnice) pohybovat.
- **Animace** - animace se realizují pomocí posuvníků. Kliknutím pravým tlačítkem myši aktivujeme kontextovou nabídku, kde zatrhneme položku animace. Poté se sama začne měnit hodnota v rámci zadaných mezí.
- **Stopa** - geometrické objekty za sebou mohou zanechávat stopu, její zapnutí či vypnutí je snadné provést pomocí kontextové nabídky příslušné k danému objektu. Použitím stopy je tedy názorně vidět, jak množina, kterou daný objekt vykresluje, postupně vzniká.

1.1.4 Navigační panel

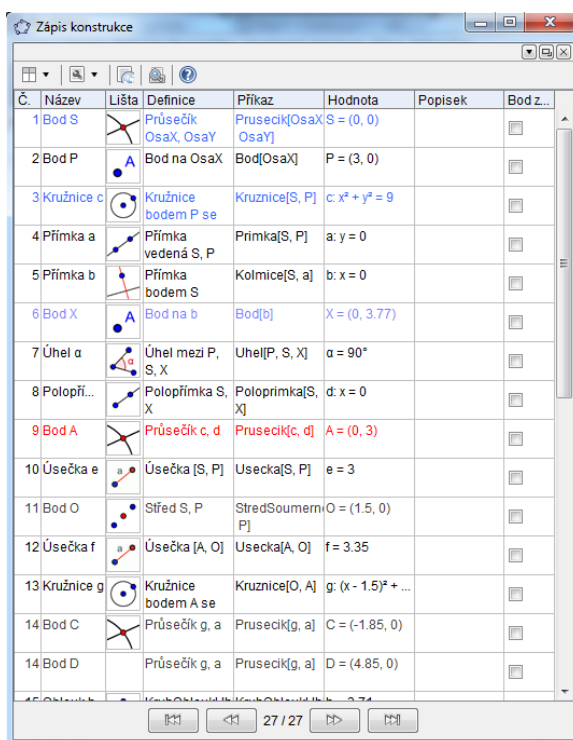
Tento prvek slouží ke krokování vytvořené konstrukce. Aktivuje se v nabídce **/Zobrazit/** Navigační panel pro krokování konstrukce. Využijeme jej při tvorbě appletu a následné prezentaci k pochopení dílčích kroků. Buď nastavíme libovolnou prodlevu a spustíme krokování automaticky, nebo ovládáme aplikaci pomocí tlačítek.


















Obr. 1.3: navigační panel

1.1.5 Zápís konstrukce

V následujícím okně vidíme seřazeny jednotlivé kroky. Zápís konstrukce je vlastně tabulka, v níž se můžeme libovolně pohybovat, případně měnit kroky dle potřeby. Body zastavení jsou kroky konstrukce, které by se měly zobrazovat. Jelikož je mnohdy zbytečné zobrazovat pomocné čáry a konstrukce, byly ponechány jako neviditelné.



Č.	Název	Lišta	Definice	Příkaz	Hodnota	Popisek	Bod z...
1	Bod S		Průsečík OsaX, OsaY	Prusecik[OsaX OsaY]	S = (0, 0)		<input type="checkbox"/>
2	Bod P		Bod na OsaX	Bod[OsaX]	P = (3, 0)		<input type="checkbox"/>
3	Kružnice c		Kružnice bodem P se	Kruznice[S, P]	c: $x^2 + y^2 = 9$		<input type="checkbox"/>
4	Přímka a		Přímka vedená S, P	Primka[S, P]	a: $y = 0$		<input type="checkbox"/>
5	Přímka b		Přímka bodem S	Kolmice[S, a]	b: $x = 0$		<input type="checkbox"/>
6	Bod X		Bod na b	Bod[b]	X = (0, 3.77)		<input type="checkbox"/>
7	Úhel α		Úhel mezi P, S, X	Uhel[P, S, X]	$\alpha = 90^\circ$		<input type="checkbox"/>
8	Polopř...		Polopřímka S, X	Poloprímka[S, X]	d: $x = 0$		<input type="checkbox"/>
9	Bod A		Průsečík c, d	Prusecik[c, d]	A = (0, 3)		<input type="checkbox"/>
10	Úsečka e		Úsečka [S, P]	Usecka[S, P]	e = 3		<input type="checkbox"/>
11	Bod O		Střed S, P	StredSoumerni P]	O = (1.5, 0)		<input type="checkbox"/>
12	Úsečka f		Úsečka [A, O]	Usecka[A, O]	f = 3.35		<input type="checkbox"/>
13	Kružnice g		Kružnice bodem A se	Kruznice[O, A]	g: $(x - 1.5)^2 + \dots$		<input type="checkbox"/>
14	Bod C		Průsečík g, a	Prusecik[g, a]	C = (-1.85, 0)		<input type="checkbox"/>
14	Bod D		Průsečík g, a	Prusecik[g, a]	D = (4.85, 0)		<input type="checkbox"/>

Obr. 1.4: zápís konstrukce

1.2 Algebraický vstup

1.2.1 Příkazový řádek

Je umístěn v dolní části pod oběma okny. Jde o tzv. přímý vstup. Do tohoto pole zadáváme a modifikujeme pomocí kartézských, či polárních souřadnic body, úhly, přímky, kuželosečky, funkce a jiné všeobecné příkazy. Body a vektory vkládáme do kulatých závorek a souřadnice oddělujeme čárkou. Zde je třeba věnovat zvýšenou pozornost správnému pojmenování! Velká písmena označují body, malá naopak vektory. Můžeme samozřejmě využít již nadefinované proměnné. Jakoukoliv přímku, funkci, či objekt si můžeme pojmenovat.



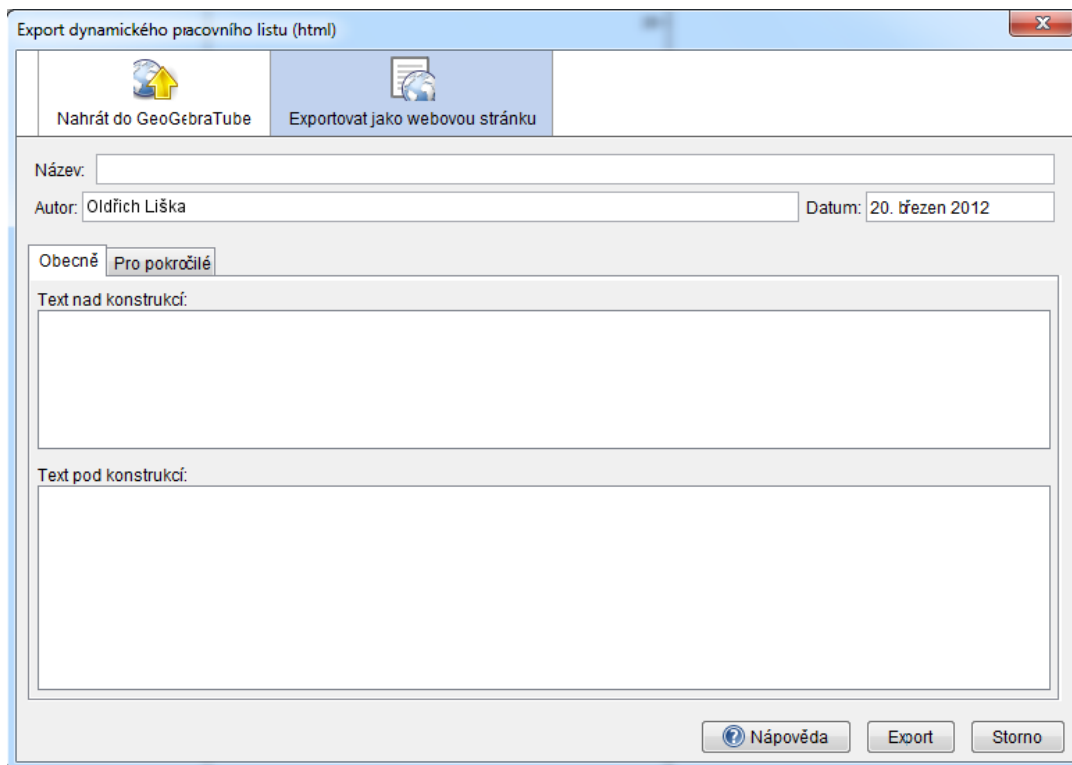
Obr. 1.5: příkazový řádek

1.2.2 Předdefinované příkazy

Program je doplněn sadou předdefinovaných příkazů, které nám ve výstupu zobrazují nejrůznější informace tykající se dané konstrukce, resp. objektů. Jsou zcela bez diakritiky. Chceme-li např. zjistit vzájemnou polohu přímky p a kuželosečky k , zadáme do příkazového řádku syntaxi: Vztah [p, k]. Podobných příkazů je téměř 200 a patří do nich i logické operátory a podmínky. Veškeré podrobné přepisy jsou k nalezení v nápovědě na oficiálních stránkách programu. Ve výrazech lze používat konstanty e a π , pouze tehdy, nejmenuje-li se již tak nějaká použitá proměnná. Obě konstanty se dají vyvolat z pomocného výběrového okna. Čísla obsahující desetinnou čárku se zadávají s desetinnou tečkou. Znak násobení lze nahradit mezerou.

1.2.3 Export konstrukce

Již hotovou konstrukci exportujeme přímo do dynamického pracovního listu jako webovou aplikaci. V dialogovém okně můžeme vyplnit název, autora, datum, text, který bude zobrazen nad (pod) dynamickou konstrukcí (např. popis konstrukce a zadání příkladu). Aby byla dynamická konstrukce funkční, je nutné mít nainstalovanou a povolenou aplikaci JAVA. Při statických konstrukcích lze výsledek exportovat do obrázku s příponou „.png“. Soubory vytvořené programem GeoGebra mají příponu „.ggb“.



Obr. 1.6: Export dynamického pracovního listu

1.3 Nastavení pracovního prostředí

Ke změnám vlastností objektů slouží kontextová nabídka. Využití nastavení programu a jeho vlastností se provádí pomocí nabídky nastavení.

1.3.1 Přichytávání bodů

Máme tři výchozí možnosti jak přichytit body. V prvním případě lze s volným bodem pohybovat po nákresně jakkoliv. Ve druhém případě s ním lze pohybovat pouze po jednotlivých uzlech souřadnicové mřížky a v posledním typu nastavení jsou body přichycovány automaticky.

1.3.2 Jednotka úhlu

Nastavuje, v jaké jednotce se budou zobrazovat velikosti úhlů: ve stupních, nebo v radiánech.

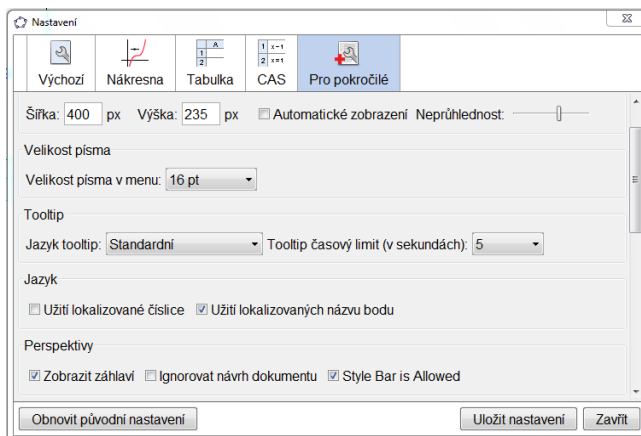
1.3.3 Desetinná místa

Nastavuje počet zobrazovaných desetinných míst (od 0 do 5).

1.3.4 Jazyk

Pomocí této položky lze změnit jazyk. Z přednastavené knihovny si lze vybrat požadovaný jazyk, jehož změna se projeví nejen v grafickém rozhraní programu, ale i u příkazů a výstupů.

Dále lze pružně měnit velikost fontu, způsob zobrazení souřadnic, vzhled bodu a vzhled pravého úhlu. Je také například povoleno zapnutí (vypnutí) heuristiky spojitosti. Pro podrobnější nastavení a komfort existuje i dialogové okno a v něm panel pro pokročilé.



Obr. 1.7: Nastavení pro pokročilé

2 DIFERENCIÁLNÍ POČET FUNKCÍ JEDNÉ PROMĚNNÉ

2.1 Reální funkce reálné proměnné

Reálnou funkcí jedné reálné proměnné (stručně funkcí) nazýváme každé zobrazení $f: K \rightarrow R$, kde $K \subseteq R$. Množinu K nazýváme definičním oborem funkce f a značíme Df , množinu $f(K) := \{f(x) \in R: x \in K\}$ nazýváme oborem hodnot funkce f a označujeme Hf . [1]

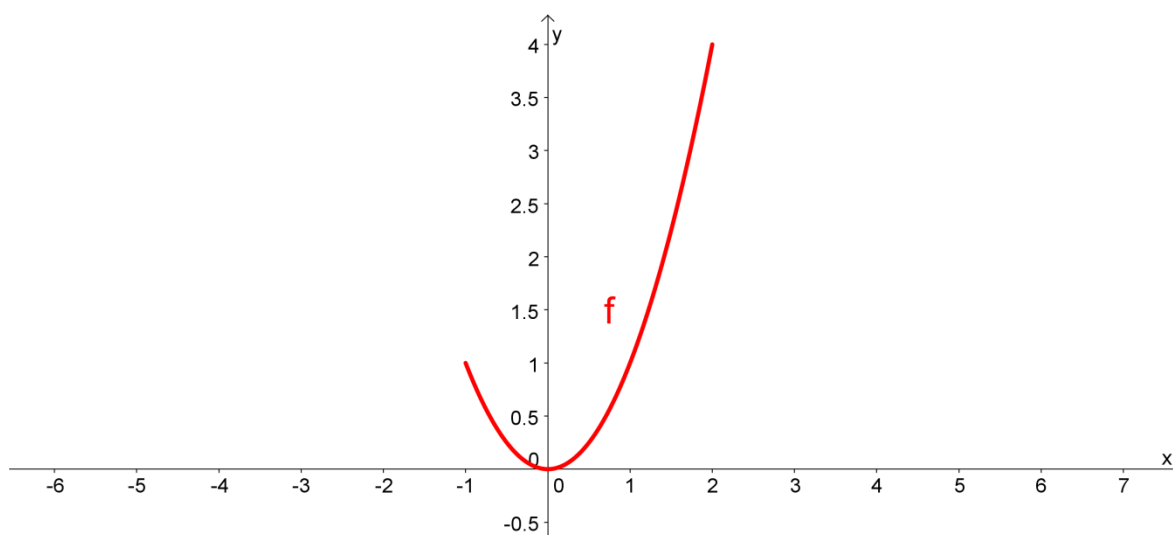
Mějme funkci, která každému $x \in \langle -1, 2 \rangle$ přiřazuje číslo x^2 . Takovou funkci, lze zapsat následujícími způsoby:

$$f: y = x^2, x \in \langle -1, 2 \rangle,$$

$$f: f(x) = x^2, x \in \langle -1, 2 \rangle,$$

$$f: x \rightarrow x^2, x \in \langle -1, 2 \rangle. [1]$$

Výše uvedenou závislost lze samozřejmě vyjádřit i způsobem velmi přehledným – **grafem**.



Obr. 2.1.: Graf funkce $f: y = x^2, x \in \langle -1, 2 \rangle$

Druhy funkcí:

- **Algebraické** - konstantní, lineární, kvadratická, mocninná, lineární lomená
- **Transcendentní** - exponenciální, logaritmická, goniometrické, cyklometrické, hyperbolické, hyperbolometrické

2.2 Limita funkce

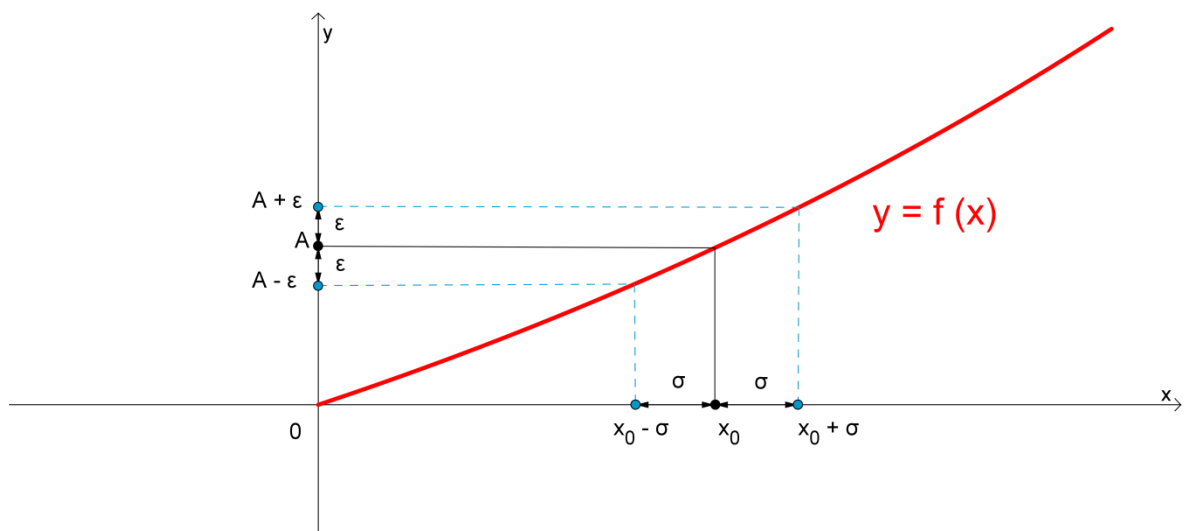
Limitní přechod se používal již ve starověku. Limita funkce v diferenciálním počtu nám popisuje chování zadané funkce v neúplném okolí bodu. Důležité je si uvědomit, že limita nezávisí na funkční hodnotě funkce v daném bodě. Ta se může výrazně lišit od limity této funkce, nebo dokonce funkce nemusí být v daném bodě vůbec definována. Funkce má v daném bodě nejvýše jednu limitu. [2]

Nechť funkce f je definována na nějakém neúplném okolí bodu x_0 . Pak říkáme, že funkce f má v bodě x_0 limitu rovnou číslu A , když ke každému okolí $O(A)$ čísla A existuje takové neúplné okolí $O(x_0)$ čísla x_0 , že pro každé $x \in O(x_0)$ platí $x \in O(x_0) \Rightarrow f(x) \in O(A)$, píšeme tedy:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A. [1]$$

2.2.1 Vlastní limita ve vlastním bodě

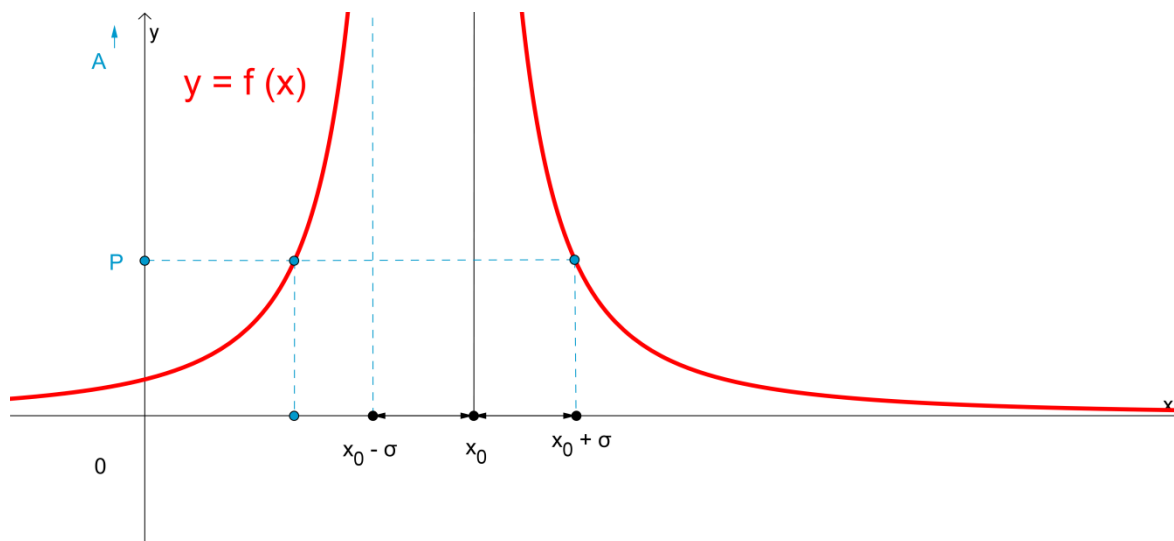
- A i x_0 jsou reálná čísla



Obr. 2.2: Vlastní limita ve vlastním bodě

2.2.2 Nevlastní limita ve vlastním bodě

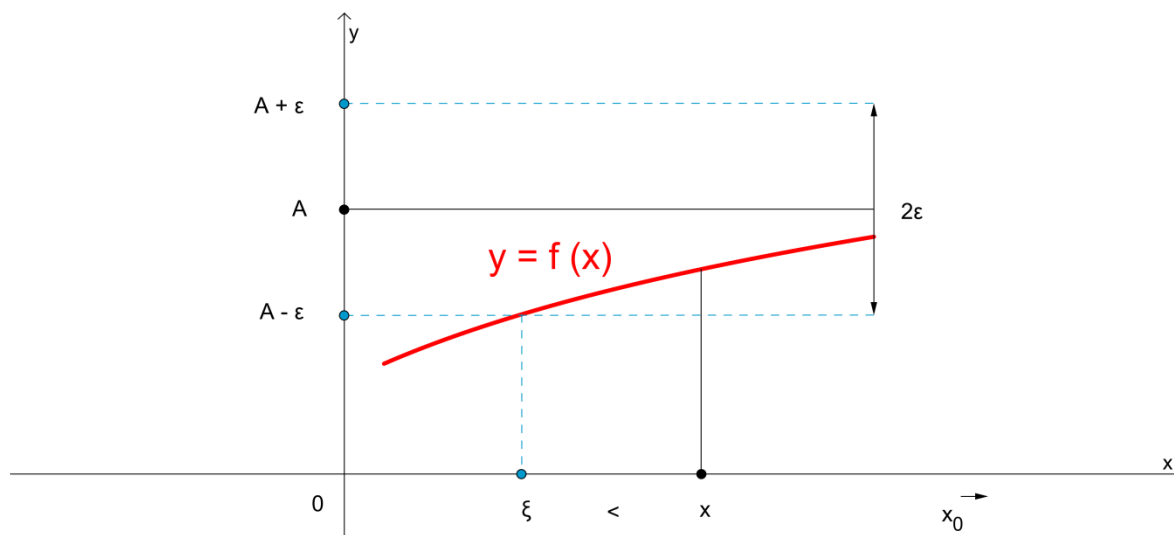
- $A = \pm\infty$, x_0 je reálné číslo



Obr. 2.3: Nevlastní limita ve vlastním bodě

2.2.3 Vlastní limita v nevlastním bodě

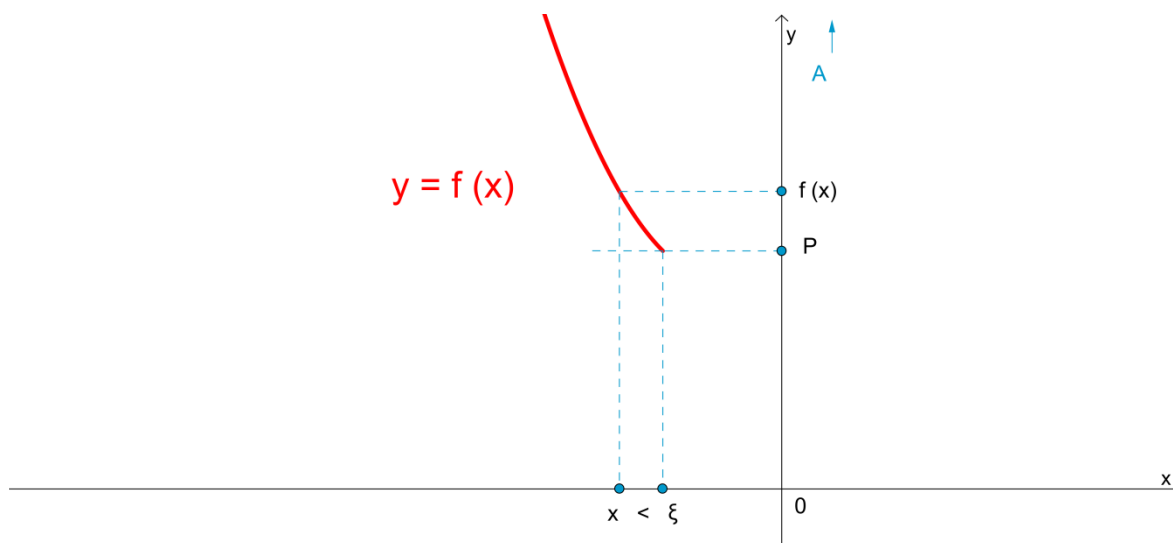
- A je reálné číslo a $x_0 = \pm\infty$



Obr. 2.4: Vlastní limita v nevlastním bodě

2.2.4 Nevlastní limita v nevlastním bodě

- $A = \pm\infty$ a $x_0 = \pm\infty$



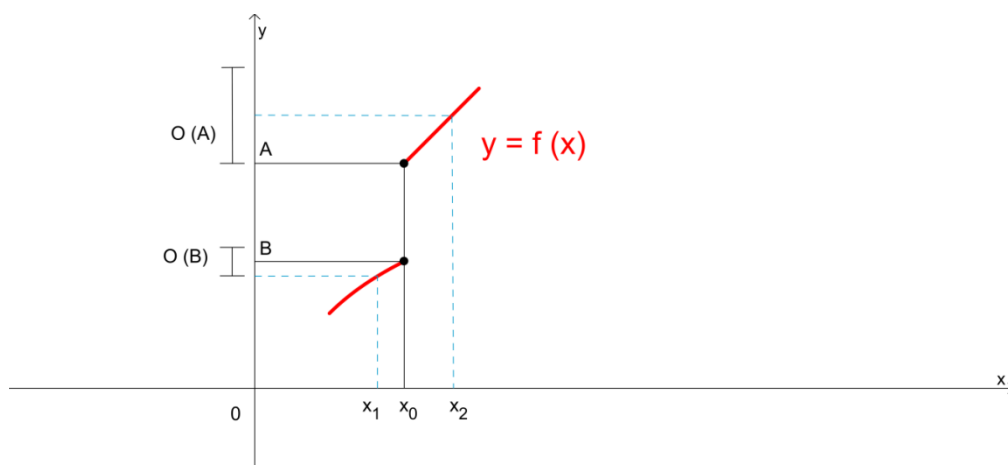
Obr. 2.5: Nevlastní limita v nevlastním bodě

2.2.5 Jednostranné limity

Existují také funkce, které nejsou definované na spojitém intervalu. Typickým příkladem může být funkce lomená. Dle Obr. 2.6 můžeme definovat limitu funkce f **zleva** (značíme exponentem $-$) a limitu funkce f **zprava** (značíme exponentem $+$). Z definice limity plyne následující vztah:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = B.$$



Obr. 2.6: Jednostranné limity

2.3 Derivace funkce

Řekněme, že funkce f má v bodě $x_0 \in Df$ derivaci, jestliže existuje vlastní limita zapsaná:

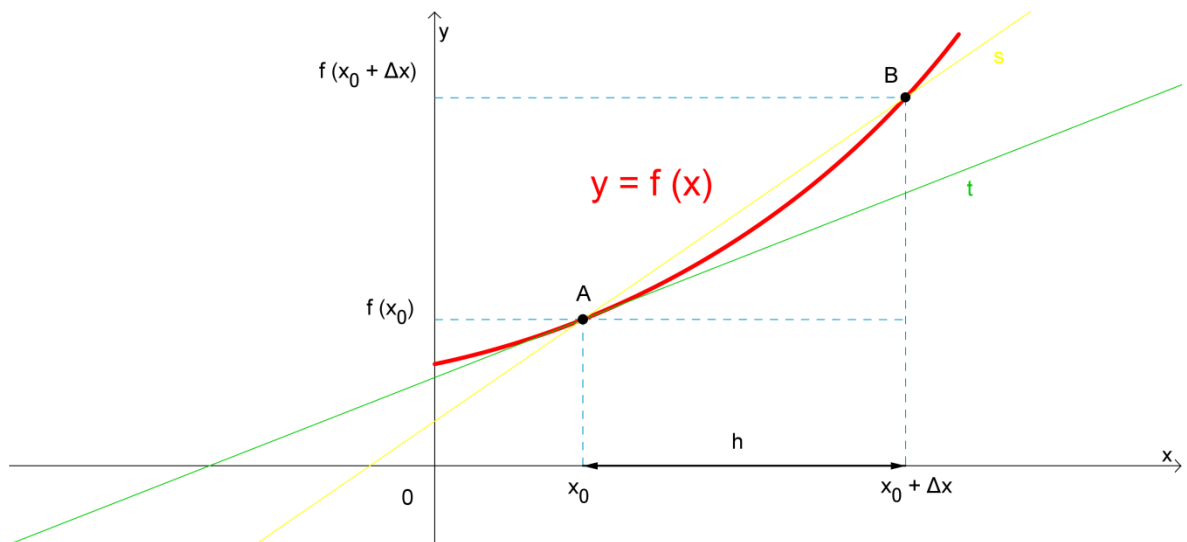
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

resp.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, h \neq 0.$$

Tuto limitu pak nazýváme derivací funkce f v bodě x_0 a značíme ji $f'(x)$. Neexistuje-li tato limita, říkáme, že f nemá v bodě x_0 derivaci. Geometricky to znamená, že v daném bodu grafu funkce $y = f(x)$ **neexistuje tečna**. [2]

- funkce f má v libovolném bodě nejvýše jednu derivaci
- hodnota derivace je směrnice tečny ke grafu dané funkce v daném bodě
- $f'(x)$ je opět funkcí, přičemž $Df' \subseteq Df$



Obr. 2.7: Tečna v bodě A

2.3.1 Vzorce pro derivaci elementárních funkcí

- | | |
|---|---|
| 1) $(c)' = 0$, c je konstantní funkce | 2) $(x^r)' = r \cdot x^{r-1}$, $r \in \mathbb{R} - \{0\}$ |
| 3) $(e^x)' = e^x$ | 4) $(a^x)' = a \cdot \ln a$, $a \in \mathbb{R} - \{1\}$ |
| 5) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ | 6) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$, $a \in \mathbb{R} - \{1\}$ |
| 7) $(\cos x)' = -\sin(x)$ | 8) $(\sin x)' = \cos x$ |
| 9) $(\tan x)' = \frac{1}{(\cos x)^2}$ | 10) $(\cot x)' = -\frac{1}{(\sin x)^2}$ |
| 11) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | 12) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| 13) $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ | 14) $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ |

2.3.2 Obecné vztahy pro výpočet derivace

- 1) $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$
- 2) $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
- 3) $(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$
- 4) $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$

2.3.3 Derivace složené funkce

Má-li funkce g derivaci v bodě x_0 a funkce f má derivaci v bodě $u_0 = g(x_0)$, pak složená funkce $F = f(g)$ má derivaci v bodě x_0 , přičemž platí

$$F'(x_0) = (f(g(x)))_{x=x_0}' = f'(u_0) \cdot g'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0), \text{ kde } u_0 = g_0. [1]$$

2.3.4 Derivace vyšších řádů

K funkci $f(x)$ s definičním oborem Df jsme zavedli funkci $f'(x)$ s definičním oborem Df' . Mluvíme také o první derivaci nebo o derivaci 1. řádu. Podobně můžeme uvažovat množinu Df'' , v jejíchž bodech má funkce $f'(x)$ derivaci a na množině Df'' definovat funkci $(f'(x))' = f''(x)$, kterou nazýváme druhou derivací funkce $f(x)$, nebo derivací druhého řádu funkce $f(x)$. Druhou derivaci $f''(x)$ funkce $f(x)$ v bodě x_0 definujeme:

$$f''(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h}. [1]$$

Podobným způsobem lze zavést i derivaci třetího, čtvrtého atd. řádu, tedy **derivace n -tého řádu, nebo n -tá derivace funkce**. Derivaci n -tého řádu $f^n(x_0)$ funkce $f(x)$ v bodě x_0 zapíšeme jako:

$$f^n(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{n-1}(x_0+h) - f^{n-1}(x_0)}{h}. [1]$$

2.4 Vyšetřování průběhu funkce

Jak již napovídá název, naším cílem je kompletně vyšetřit zadanou funkci. V podstatě jde o to vyjmenovat, a popsat průběh tak, abychom dokázali funkci charakterizovat a nakreslit její graf. Samozřejmostí je zvládnutí středoškolského učiva. V následujících odstavcích bych rád prezentoval stěžejní body vyšetřování průběhu funkce.

2.4.1 Monotónnost funkce

Funkce rostoucí, klesající, nerostoucí, neklesající na intervalu $M \subset Df$ se nazývají monotónní funkce na M . Funkce rostoucí, nebo klesající na M se nazývají ryze monotónní na M . [1]

Nechť je funkce f na intervalu M spojitá a nechť má v každém vnitřním bodě tohoto intervalu derivaci. Pro každé X_0 z intervalu M platí:

$f'(x) > 0$	rostoucí
$f'(x) < 0$	klesající
$f'(x) \geq 0$	neklesající
$f'(x) \leq 0$	nerostoucí

2.4.2 Extrémy funkce

Globální minimum a globální maximum souhrnně nazýváme globální extrémy funkce. Funkce f má na intervalu $M \subset Df$ **globální maximum** popř. (**globální minimum**) v bodě x_0 , když pro každé $x \in M$ platí:

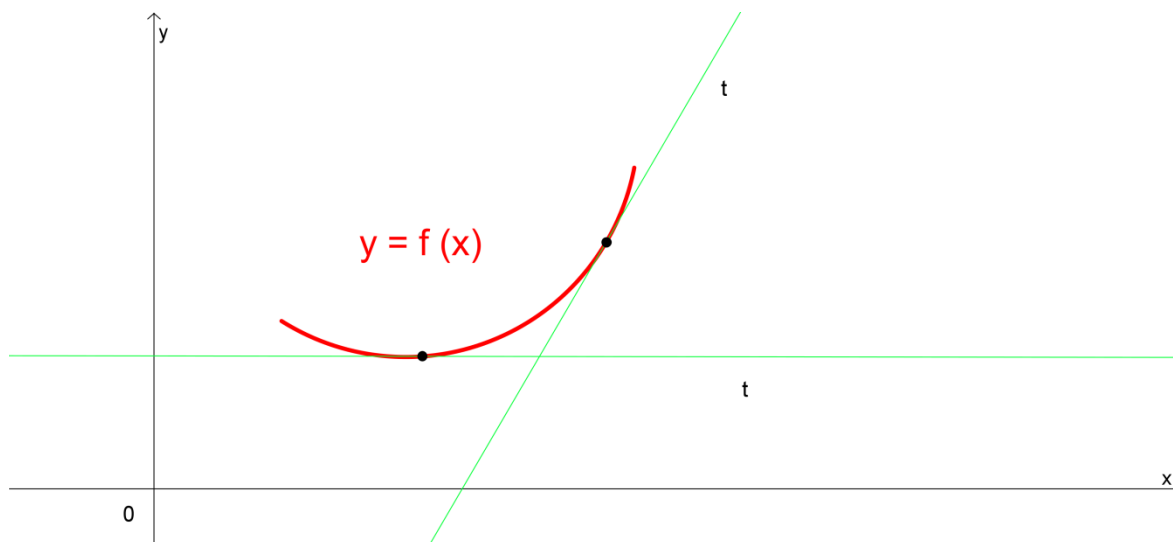
$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{popř.} \quad f(x) \geq f(x_0). [1]$$

Funkce f má v bodě $x_0 \in Df$ lokální maximum popř. (lokální minimum) f , když existuje okolí bodu x_0 $O(x_0)$, které celé leží v Df , že pro každé x z tohoto okolí platí:

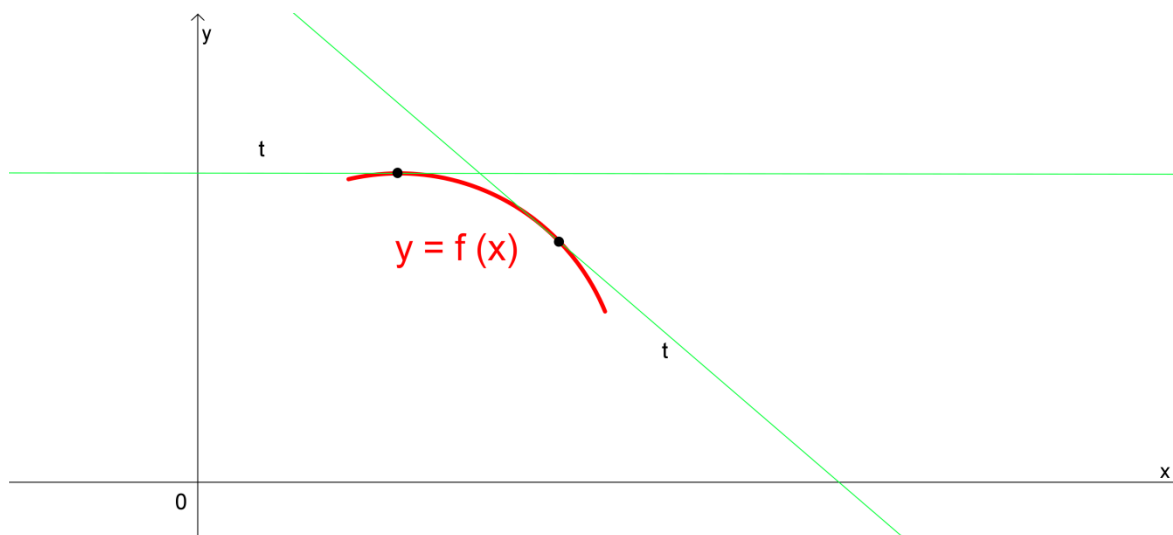
$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{popř.} \quad f(x) \geq f(x_0). [1]$$

2.4.3 Konvexnost a konkávnost

Funkce f je **konvexní** v daném bodě x_0 tehdy, když existuje neúplné okolí bodu x_0 , ve kterém graf funkce leží **nad tečnou** a je **konkávní**, když graf funkce leží **pod tečnou**. [2]



Obr. 2.8: Graf konvexní funkce



Obr. 2.9: Graf konkávní funkce

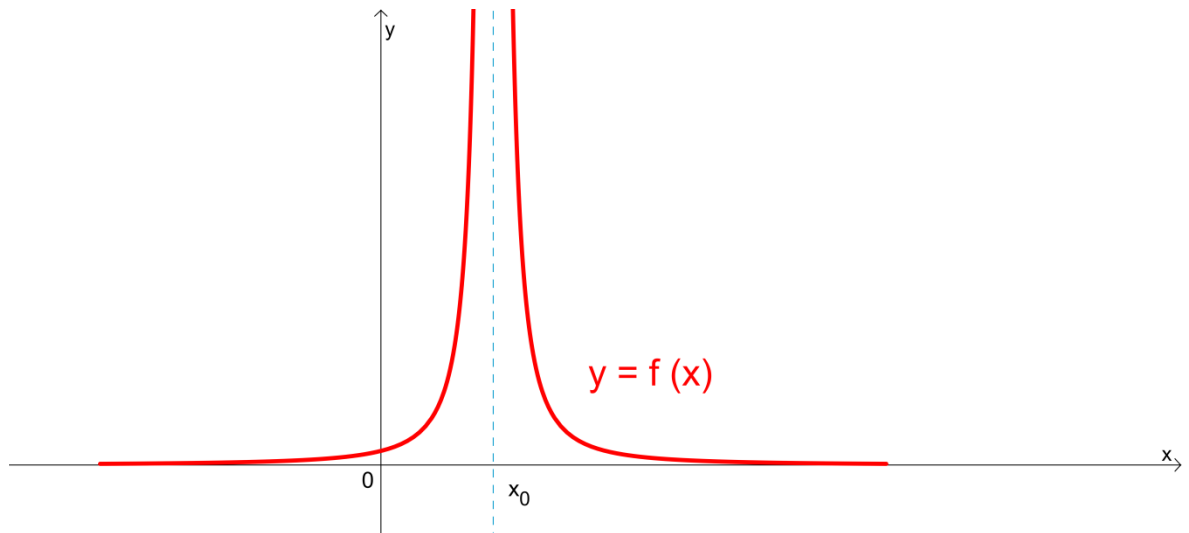
Jestliže funkce f spojitá na intervalu M a v každém bodě tohoto intervalu má druhou derivaci $f''(x)$, pak pro každý bod intervalu M platí:

$f''(x) > 0$ je funkce f konvexní

$f''(x) < 0$ je funkce f konkávní. [1]

2.4.4 Asymptoty bez směrnice

Řekneme, že přímka $x = x_0$ je asymptota bez směrnice, neboli vertikální asymptota funkce, jestliže je minimálně jedna její jednostranná limita v bodě x_0 **nevlastní**. [2]

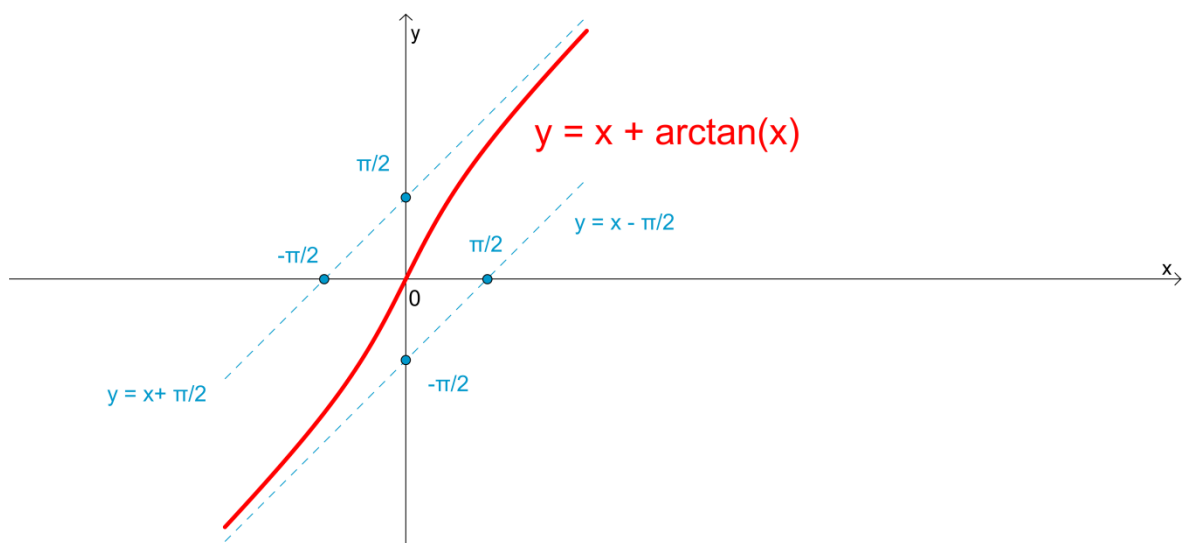


Obr. 3.1: Asymptota bez směrnice

2.4.5 Asymptoty se směrnici

Řekneme, že přímka s je asymptotou grafu funkce $f(x)$, jestliže platí:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0. [4]$$



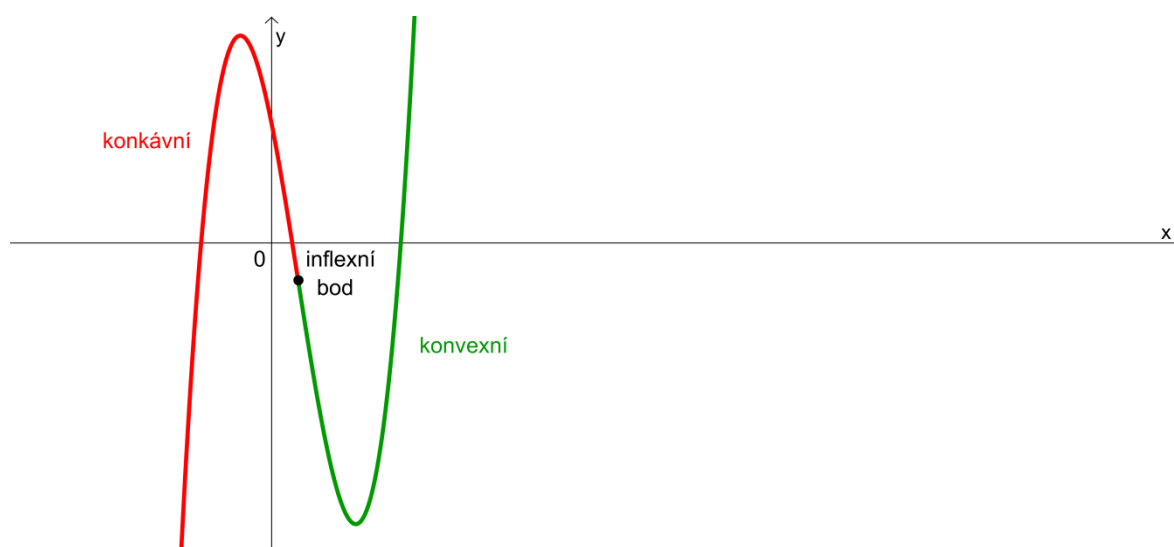
Obr. 3.2: Asymptota se směrnici

Přímka $y = k \cdot x + q$ je asymptota ve směrnicovém tvaru, kde směrnice $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ a současně $q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - k(x))$.

2.4.6 Inflexní bod

Nechť funkce f spojitá v x_0 a má v x_0 vlastní, či nevlastní 1. derivaci, říkáme, že x_0 je inflexním bodem funkce f , jestliže v redukovaném levém okolí $O(x_0)$, je f konvexní a v redukovaném pravém okolí $O(x_0)$, je f konkávní, nebo naopak. Inflexní bod je takový bod grafu funkce, ve kterém se mění zakřivení grafu funkce, přesněji řečeno dochází k přechodu mezi konvexní a konkávní částí grafu. [1]

Jestliže existuje $f''(x_0)$ a x_0 je inflexní bod $f(x)$, pak $f''(x_0) = 0$. Jestliže v bodě x_0 pro funkci $f(x)$ platí $f''(x_0) = 0$ a funkce $f''(x)$ mění v bodě x_0 znaménko, pak bod x_0 je inflexní bod funkce $f(x)$. [1]



Obr. 3.2: Inflexní bod

3 INTEGRÁLNÍ POČET FUNKCÍ JEDNÉ PROMĚNNÉ

Integrální počet se zformoval do podoby dnes známé koncem 17. století. Je zajímavé, že již myslitelé ve starověkém Řecku používali k výpočtu obsahů rovinných obrazců metody, jež byly v mnoha úvahách velmi podobné integrálnímu počtu. U zrodu integrálního počtu jako vědecké disciplíny stáli I. Newton a G.W.Leibniz. Integrace je v podstatě jakýsi inverzní proces k derivaci. V této části své bakalářské práce se budu zabývat jak integrálem neurčitým, tak i určitým. [1]

Neurčitý integrál se značí $\int f(x)dx$. Symbol se nazývá integrálním znakem. Funkce $f(x)$ se nazývá integrand. Symbol dx lze u integrování funkce jedné proměnné chápat zcela formálně. Jde o „tečku“ na konci integrálu.

Nechť funkce $f(x)$ je definována na intervalu J s krajními body a, b , kde je $a < b$, přičemž hodnoty a, b mohou být i nevlastní. Říkáme, že $F(x)$ je primitivní funkce (v některé literatuře také antiderivace) k jisté funkci $f(x)$ na intervalu J (otevřeném, či uzavřeném a ohraničeném, či neohraničeném), pakliže platí:

$$F'(x) = f(x), \text{ kde } x \in [a, b],$$

$$F'(a) = f(a), \text{ kde } a \in J.$$

Což lze také obecně vyjádřit zápisem $F' = f$ na intervalu J . [2]

3.1.1 Stěžejní vzorce pro integraci elementárních funkcí

$$1) \int 0 dx = C, C \in \mathbb{R}$$

$$2) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$$

$$3) \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, x \neq 0$$

$$4) \int e^x dx = e^x + C$$

$$5) \int dx = x + C, x \in \mathbb{R}$$

$$6) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1)$$

$$7) \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$8) \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$9) \int \frac{1}{(\cos x)^2} dx = \tan x + C, x \neq (2k + 1) \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$10) \int \frac{1}{(\sin x)^2} dx = -\cot x + C, (x \neq \pi \cdot k, k \in \mathbb{Z})$$

$$11) \int -\frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arccot} x + C$$

$$12) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsin} x + C$$

$$13) \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C, (a \in R, a \neq 0)$$

$$14) \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x) + C|, f(x) \neq 0$$

$$15) \int f(a \cdot x + b) dx = \frac{1}{a} F(a \cdot x + b) + C$$

Vlastností neurčitých integrálů je i tzv. **homogenita**:

$$\int c \cdot f(x) dx = c \int f(x) dx,$$

a také **aditivita**:

$$\int (f_1(x) + f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx.$$

3.2 Určitý integrál

Myšlenka integrování vzešla z požadavků zjišťování délek, obsahů a objemů geometrických útvarů. V současnosti existuje mnoho typů určitých integrálů, avšak nejběžnější z nich je tzv. Riemannův integrál.

3.2.1 Riemannův integrál

Obecná definice pracuje s funkcemi, které nemusí být nutně spojité. Pro naše, tedy geometrické, fyzikální účely postačí uvažovat o spojitých funkcích na intervalu $[a, b]$. Základem je funkce $f(x)$ (integrováný objekt) spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$. Graf této funkce spolu s přímkami $x = a$, $x = b$ a osou x vymezí v rovině xy rovinný útvar. Předpokládejme, že $f(x)$ je na intervalu $[a, b]$ nezáporná a náš útvar leží v horní polovině roviny xy . Naším úkolem bude zjistit obsah tohoto útvaru. Představme si, že náš útvar nakreslíme na čtverečkovaný papír s milimetrovou sítí (1 čtvereček = 1mm^2) tak, aby osa x splývala s okrajem některé řady čtverečků. Sečteme obsahy obdélníků pod grafem, které jsou obsaženy v námi zadaném útvaru. Jsme schopni, alespoň přibližně určit obsah plochy útvaru. Uvažujme nyní v poněkud obecnější rovině (kdy se budou velikosti základny obdélníků lišit). Dělení intervalu je soubor vzestupně řazených hodnot a značí se D . Délka největšího „dílků“ se nazývá norma dělení D a značí se $v(D)$. Uvažujme nyní interval $[x_i, x_{i+1}]$. Na tomto intervalu funkce nabývá nejmenší a největší hodnoty. Tyto hodnoty jsem označil a . Sestrojíme-li nad každou základnou omezenou intervalem $[x_i, x_{i+1}]$ obdélník o výšce m_i , pak obsah těchto obdélníků představuje jakýsi odhad obsahu obrazce.

Respektive „dolní“ odhad. Podobným způsobem sestrojíme obdélníky o výšce M_i , jejichž obsah bude „horním“ odhadem obsahu obrazce. Označme si obsah obrazce P a můžeme psát:

$$\sum_{i=0}^{n-1} m_i \cdot (x_{i+1} - x_i) \leq P \leq \sum_{i=0}^{n-1} M_i \cdot (x_{i+1} - x_i). [3]$$

„Horní“ a „dolní“ odhad obsahu obrazce nazýváme horním a dolním součtem náležícím funkci $f(x)$ a dělení intervalu D .

$$U(f, D) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

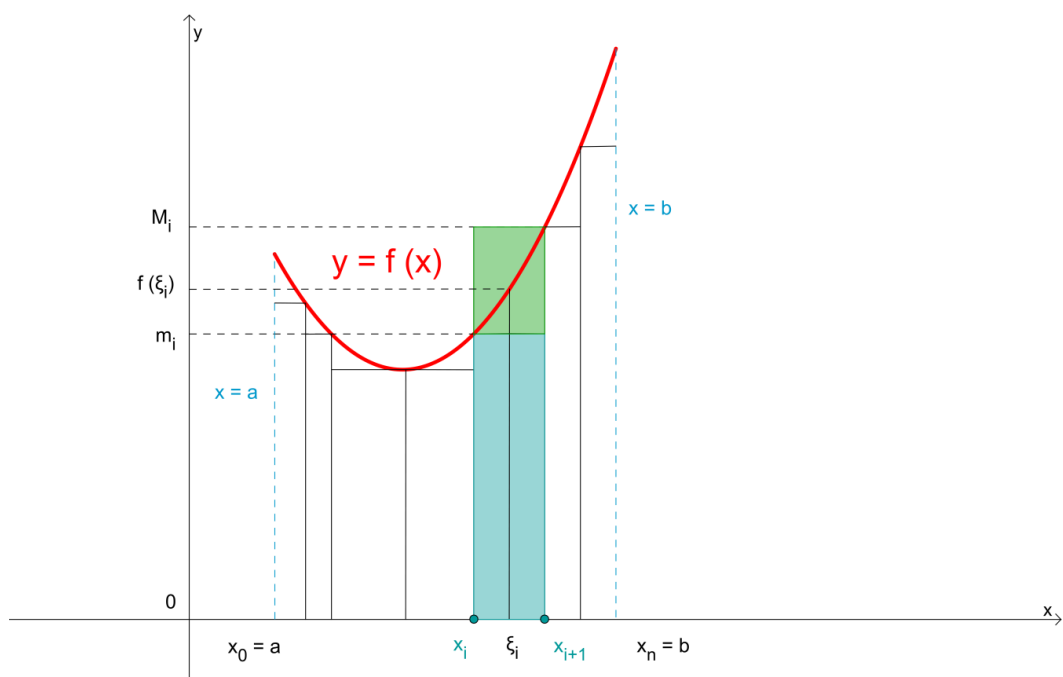
$$L(f, D) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

Odhady obsahu obrazce P , lze samozřejmě zpřesnit, budeme-li dělení intervalu $[a, b]$ zjemňovat. Rozdíl „horního“ a „dolního“ odhadu se bude zmenšovat. Naším úkolem je tedy přibližovat normu dělení $v(D)$ nule. Z toho vyplývá:

$$\lim_{v(D) \rightarrow 0} L(f, D) = \lim_{v(D) \rightarrow 0} U(f, D). [3]$$

Vztah pro integrální součty $S(f, D)$:

$$\lim_{v(D) \rightarrow 0} S(f, D) = \int_a^b f(x) dx. [3]$$



Obr. 3.3: Horní a dolní součet

3.2.2 Výpočet určitého integrálu

Necht' $f(x)$ je integrovatelná na intervalu $[a, b]$. Necht' je primitivní funkce $F(x)$ k funkci $f(x)$ je spojitá na $[a, b]$, tj. $F(x) \in C[a, b]$ rovnost $F'(x) = f(x)$ platí ve všech bodech $[a, b]$ až na konečný počet. Potom platí Newtonova-Liebnizova formule:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b. [1]$$

3.2.3 Aplikace určitého integrálu v geometrii

Vztah pro výpočet obsahu rovinných útvarů jsem v podstatě definoval již v předchozím odstavci. Nyní bych rád ve stručnosti uvedl další neméně využitelné vztahy pro geometrické aplikace.

3.2.3.1 Délka rovinné křivky

Necht' $y = f(x)$ je funkce definovaná na intervalu $[a, b]$ a mající zde spojitou derivaci.

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx [1]$$

3.2.3.2 Objem tělesa

Necht' $f(x)$ je nezáporná spojitá funkce na intervalu $[a, b]$. Uvažujme rotační těleso, jež vznikne, otáčí-li se rovinný útvar omezený osou x , přímkami $x = a$, $x = b$ a křivkou $y = f(x)$ kolem osy x , pak platí:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx. [1]$$

3.2.3.3 Obsah pláště rotačního tělesa

Necht' $f(x)$ je nezáporná funkce se spojitou derivací na intervalu $[a, b]$. Otáčí-li se rovinný útvar omezený osou x , přímkami $x = a$, $x = b$ a křivkou $y = f(x)$ kolem osy x , vznikne rotační těleso. Obsah jeho pláště vypočítáme dle vztahu:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. [1]$$

3.2.4 Aplikace určitého integrálu ve fyzice

3.2.4.1 Těžiště křivky

Nechť je dána v rovině křivka $y = f(x)$ pro $[a, b]$, kde $f(x)$ má spojitou derivaci na intervalu $[a, b]$. Nechť je tato křivka pokryta hmotou tak, že specifická hmota v bodě $[x, f(x)]$ je $s(x)$. Nechť je $s(x)$ spojitá funkce na $[a, b]$. Poté celková hmota křivky H je dána vztahem:

$$H = \int_a^b s(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx,$$

statické momenty vzhledem k souřadnicovým osám jsou:

$$S_x = \int_a^b s(x) \cdot f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx,$$

$$S_y = \int_a^b s(x) \cdot x \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx,$$

těžiště $T = [m, n]$:

$$m = \frac{S_y}{H}, \quad n = \frac{S_x}{H}. \quad [1]$$

3.2.4.2 Těžiště rovinného obrazce

Nechť je dán rovinná obrazec omezený osou x , přímkami $x = a$, $x = b$ a grafem spojitě nezáporné funkce $y = f(x)$. Nechť je pokryt hmotou tak, že specifická hmota v bodě $[x, y]$, je $s(x)$, kde $s(x)$ je spojitá na $[a, b]$. Pak celková hmota H je dána vztahem:

$$H = \int_a^b s(x) f(x) dx,$$

statické momenty vzhledem k souřadnicovým osám jsou:

$$S_x = \frac{1}{2} \int_a^b s(x) (f(x))^2 dx,$$

$$S_y = \frac{1}{2} \int_a^b s(x) \cdot x \cdot f(x) dx,$$

těžiště $T = [m, n]$:

$$m = \frac{S_y}{H}, \quad n = \frac{S_x}{H}. \quad [1]$$

II. PRAKTICKÁ ČÁST

4 DIFERENCIÁLNÍ POČET FUNKCÍ JEDNÉ PROMĚNNÉ – APLIKACE

V této části bakalářské práce se budu zabývat aplikací vybraných témat z teoretické části. Veškeré příklady a applety jsou zpracovány v programu GeoGebra a jsou součástí přílohy mé práce. Kapitulu jsem rozdělil na dvě podskupiny. První je spíše funkční a druhá řeší konkrétní příklady. Cílem praktické části je, aby příklady dopomohli k pochopení probírané problematiky názornější formou. Zaměřil jsem se, na dle mého názoru nejzajímavější a nejvyužitelnější část diferenciálního počtu, zejména na průběh funkce, derivace funkce a lokální extrémy.

4.1 Dynamické procedury

4.1.1 Derivace funkce

Applet se skládá z následujících funkcí:

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,$$

$$f(x) = \frac{a \cdot x + b}{c},$$

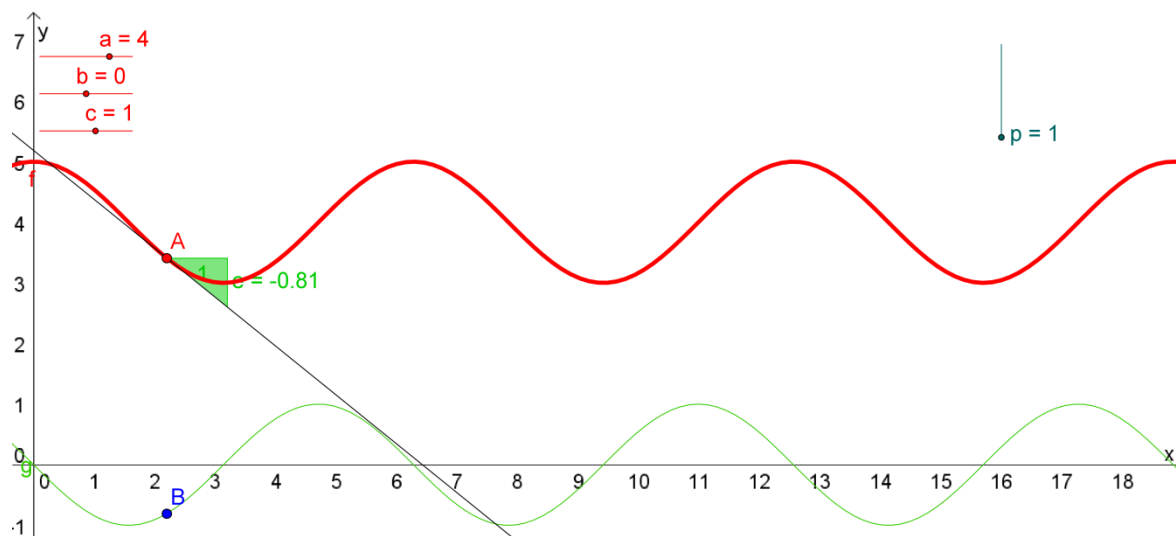
$$f(x) = b \cdot \sin(a \cdot x),$$

$$f(x) = (a \cdot \log x) + b,$$

$$f(x) = a \cdot e^{x-b},$$

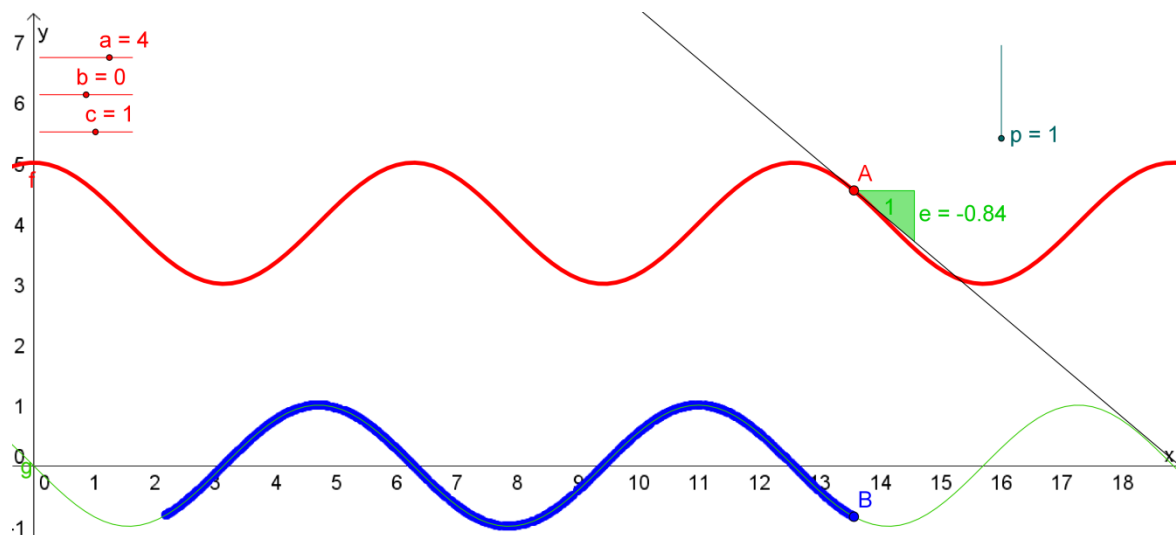
$$f(x) = a - b \cdot x + \cos(c \cdot x).$$

Koeficienty a, b, c lze pružně měnit pomocí posuvníků, v závislosti na nich se mění také graf zadané funkce. Mezi výše uvedenými funkcemi lze přepínat také posuvníkem p , který je ve svislé poloze. Na funkci f leží bod A , a také jeho tečna, jež je označena d . Libovolně můžeme měnit polohu bodu A . Přitom se také mění velikost směrnice e tečny d . Tato velikost je označena zeleně. Všimněme si, že volně umístěný bod B , za nímž stopa mění polohu v závislosti na bodu A a v závislosti na velikosti e . Stopa tedy vykresluje první derivaci funkce f a má stejnou trajektorii jako graf derivace f , která je vykreslena zeleně, již při spuštění.



Obr. 3.4: Graf funkce

Sledujme nyní stopu za bodem B , která odpovídá první derivaci funkce f .



Obr. 3.5: Vykreslení stopy za bodem B

4.1.2 Extrémy funkce

Stejně jako v předchozím příkladu lze měnit koeficienty a, b následujících funkcí:

$$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + x + 3,$$

$$f(x) = \frac{x^2 - a \cdot x + 2}{x^2 + b \cdot x + 1},$$

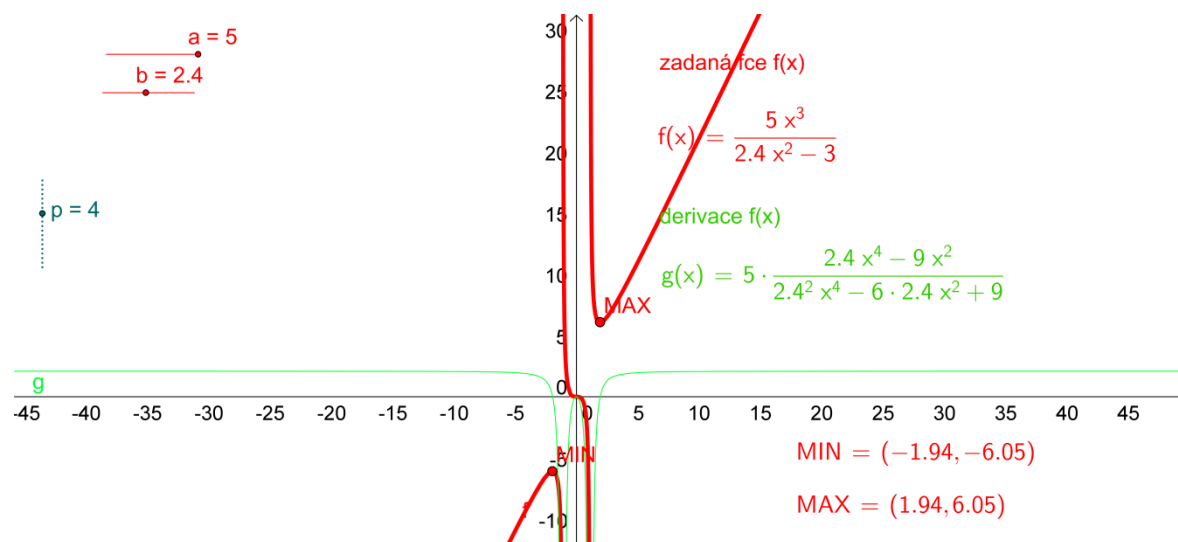
$$f(x) = \log \sqrt{a \cdot x^2 + b \cdot x},$$

$$f(x) = \frac{a \cdot x^3}{b \cdot x^2 - 3},$$

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + 3,$$

$$f(x) = \frac{a \cdot \ln x}{b \cdot \sqrt{x}}.$$

K výběru přednastavených funkcí použijeme, stejně jako v předchozím případě svislý posuvník p . Využití je mnoho, lze zkoumat změnu extrémy daných funkcí, nebo si můžeme ověřit, zda jsme se dopočítali správného výsledku.



Obr. 3.6: Minimum a maximum

4.1.3 Inflexní body

Další neméně důležitou částí určování průběhu funkce je bezesporu určení konvexnosti a konkávnosti v daném intervalu. Bod, ve kterém graf přechází z konvexní do

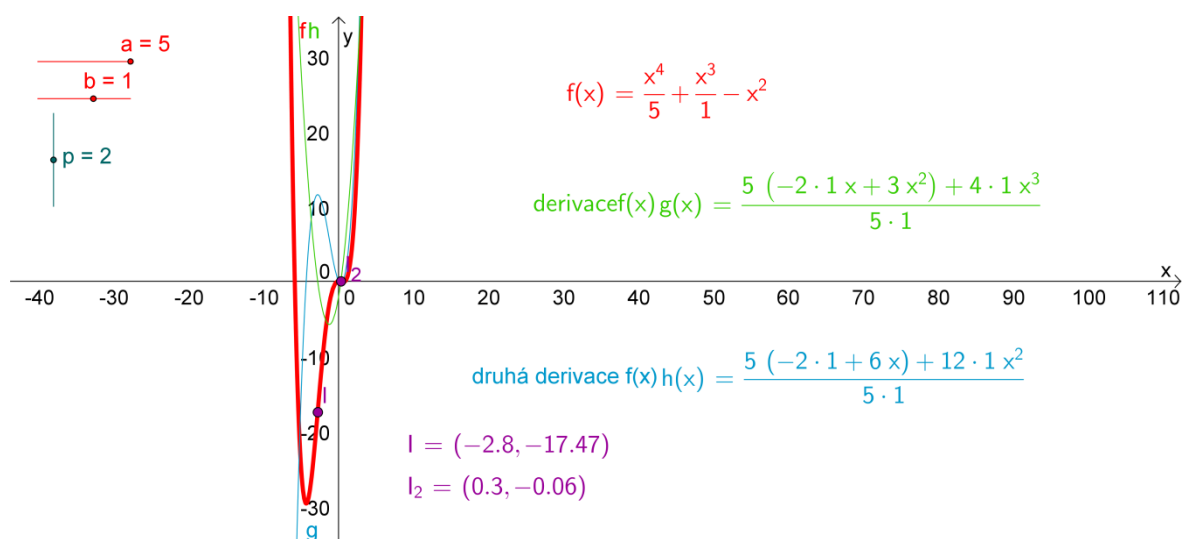
konkávni, se nazývá inflexní bod. V tomto appletu lze editovat pomocí koeficientů a a b přednastavené funkce a zkoumat inflexní body.

K dispozici máme přednastavené funkce:

$$f(x) = a \cdot x^5 + b,$$

$$f(x) = \frac{x^4}{a} + \frac{x^3}{b} - x^2,$$

$$f(x) = \frac{x^3}{a} + b \cdot x + 1.$$



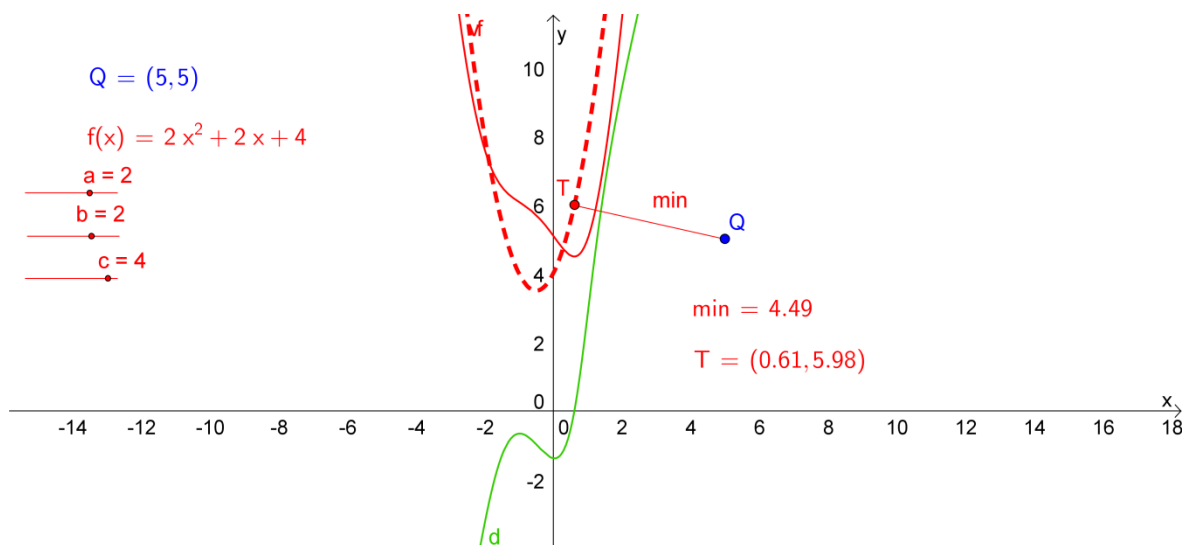
Obr. 3.7: Inflexní body

4.2 Řešené příklady

4.2.1 Příklad I

Zadání: Na parabole o rovnici $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ najděte bod T , který je nejbližší bodu $Q[d, e]$.

Tento příklad lze použít i jako názorný applet. Použité koeficienty a, b, c je možno libovolně editovat. Tažením lze také měnit polohu bodu Q . Je zde zobrazena hodnota vzdálenosti bodu Q od hledaného bodu T (označena „min“). V případě zobrazení dvou hodnot vzdálenosti, uvažujme tu nižší.

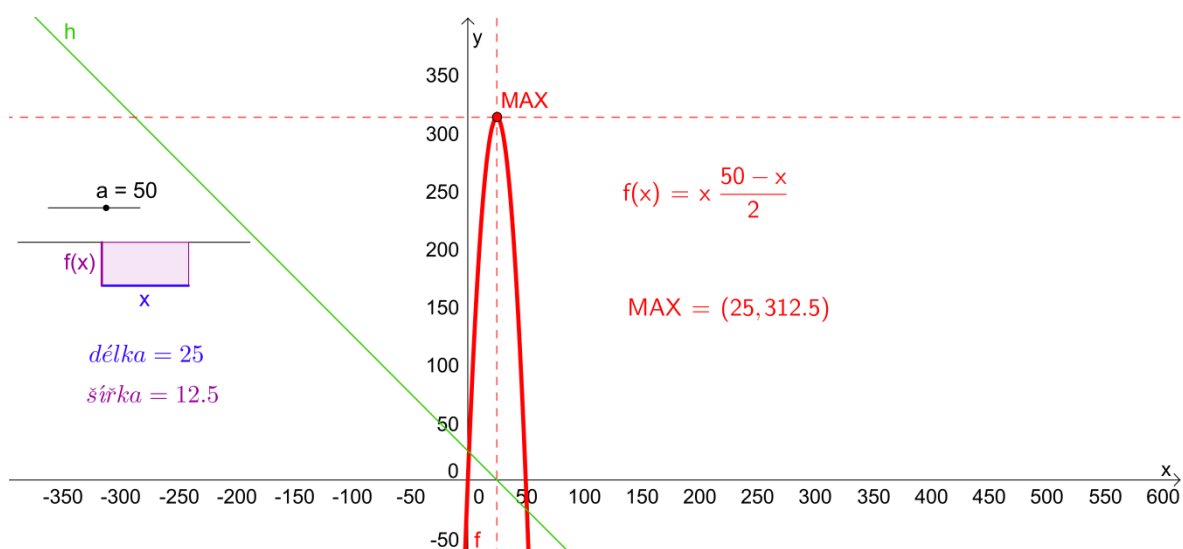


Obr. 3.8: Příklad I

4.2.2 Příklad II

Zadání: Vypočítejte rozměry co největšího obdélníkového výběhu, máme-li na oplocení k dispozici a metrů pletiva a jednu stranu výběhu tvoří stěna budovy. Označme délku obdélníkového výběhu x a šířku $f(x)$. Vzhledem k délce pletiva tedy platí:

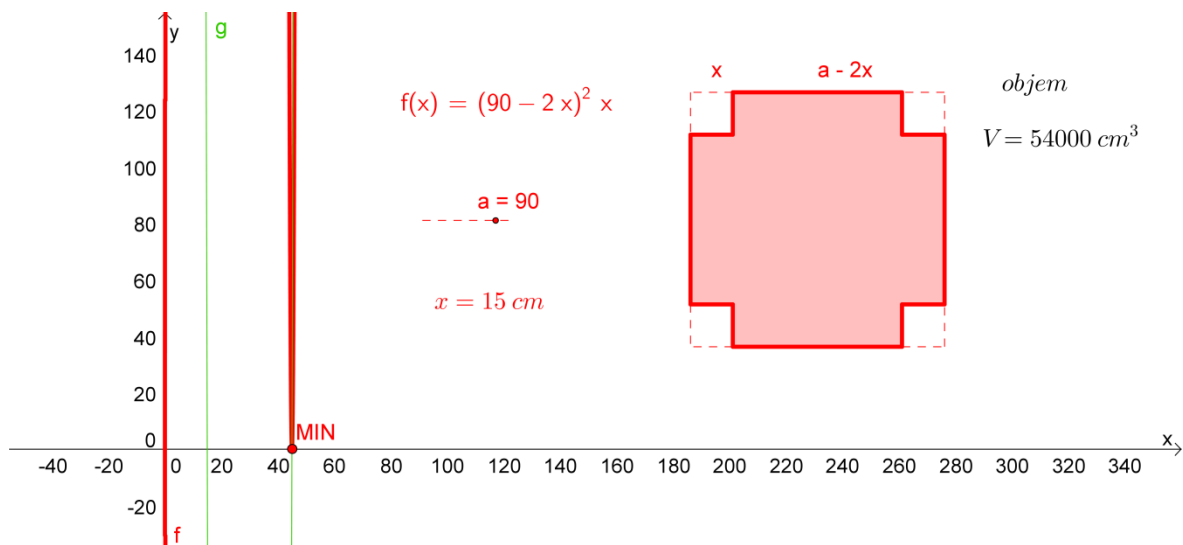
$$f(x) = \frac{a-x}{2}$$



Obr. 3.9: Příklad II

4.2.3 Příklad III

Zadání: Úkolem je ze čtvercového kusu papíru o rozměru a metrů udělat krabici bez víka, s co možná největším objemem. Je zapotřebí zjistit jak moc je nutné papír nastříhnout, aby vznikla co možná nejobjemnější krabice. Hodnotou x je myšlena přebytečná hrana.



Obr. 4.1: Příklad III

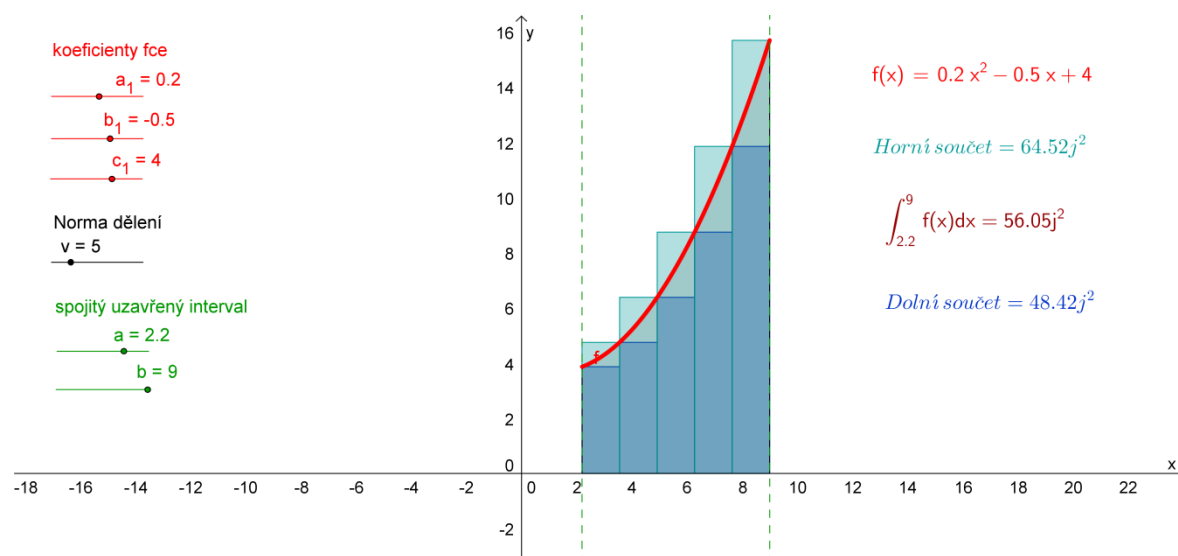
5 INTEGRÁLNÍ POČET FUNKCÍ JEDNÉ PROMĚNNÉ – APLIKACE

Kapitola je rozdělena na dvě podskupiny. První se skládá ze čtyř dynamických aplikací. Druhá je zaměřena na konkrétní vybrané příklady.

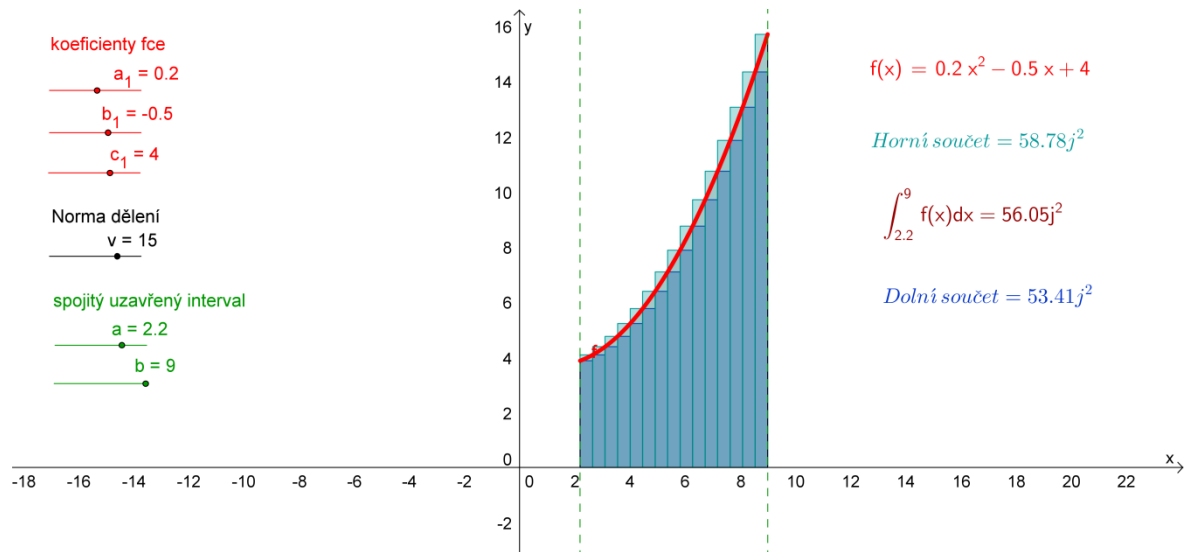
5.1 Dynamické procedury

5.1.1 Horní a dolní součet

Uvažujme funkci $f(x) = a_1 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + c_1$, $x \in [a, b]$. Přičemž intervaly a a b lze pružně editovat, stejně jako koeficienty a_1, b_1, c_1 funkce. Editujme také normu dělení v , která je zobrazená na intervalu od 0 do 20. Pozorujme, jak se mění horní a dolní součet funkce, při zvyšování v a jak se oba tyto součty přibližují skutečnému obsahu obrazce. Skutečný obsah je v aplikaci fialovou barvou vypočítán přes určitý integrál.



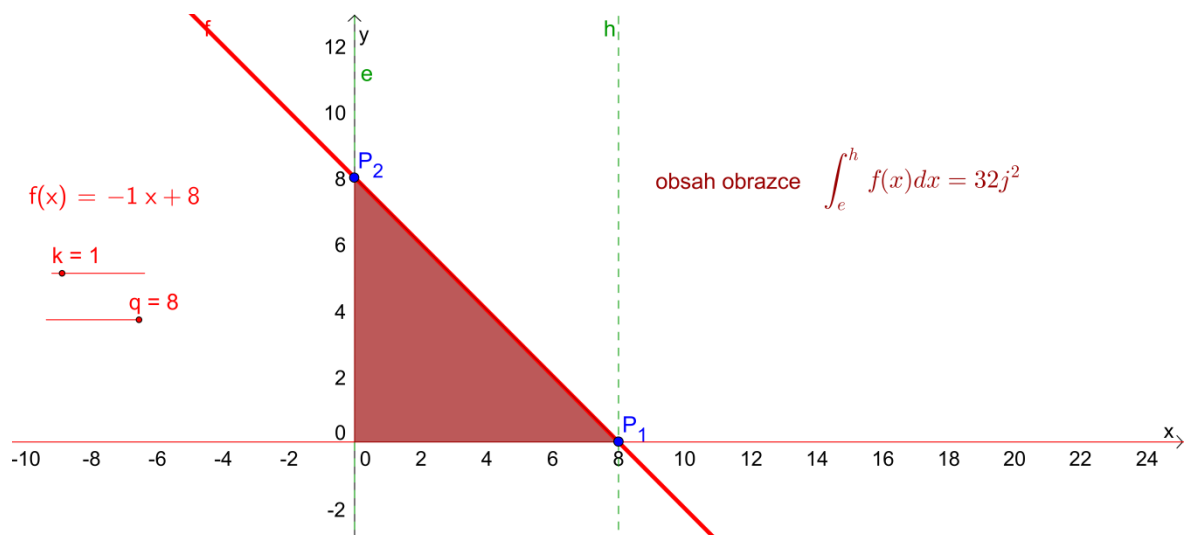
Obr. 4.2: Horní a dolní součet, $v = 5$



Obr. 4.3: Horní a dolní součet, $v = 15$

5.1.2 Výpočet obsahu obrazce

Přímka vytváří obrazec tvaru trojúhelníku společně s osami souřadného systému. Přímka je zadána ve směrnicovém tvaru $f(x) = -k \cdot x + q$, kde hodnoty k a q lze libovolně měnit. Obsah obrazce je vypočítán integrálem.



Obr. 4.4: Obsah obrazce vymezeného přímkou

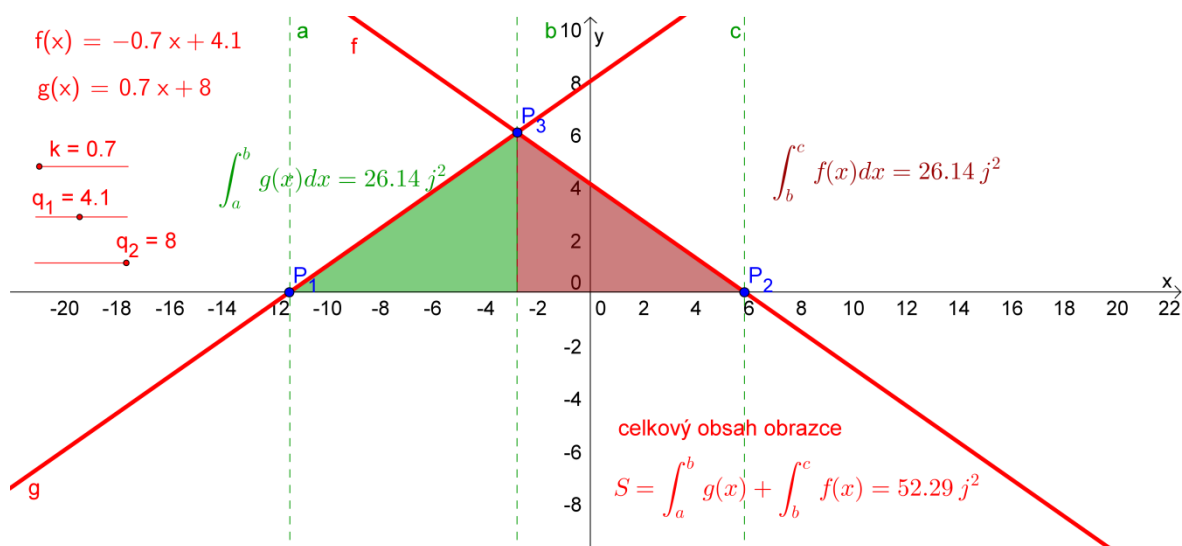
5.1.3 Výpočet obsahu obrazce II

Tento applet pracuje podobně jako výše uvedený. Rozdíl je v tom, že máme dvě přímky ve směrnicovém tvaru:

$$f(x) = -k \cdot x + q_1,$$

$$g(x) = k \cdot x + q_2.$$

Z toho je patrné, že lze editovat hodnoty k, q_1, q_2 . Vykreslením dvou přímek a přímkou $y = 0$ vymežíme obrazec. Obsah celkového obrazce je rozdělen na dva poloviční trojúhelníky, jejichž hodnoty obsahů jsou totožné.



Obr. 4.5: Obsah obrazce vymezený dvěma přímkami a osou x

5.1.4 Délka křivky

Délka křivky je geometrickou aplikací integrálního počtu. Máme přednastaveny následující funkce:

$$f(x) = a \cdot x,$$

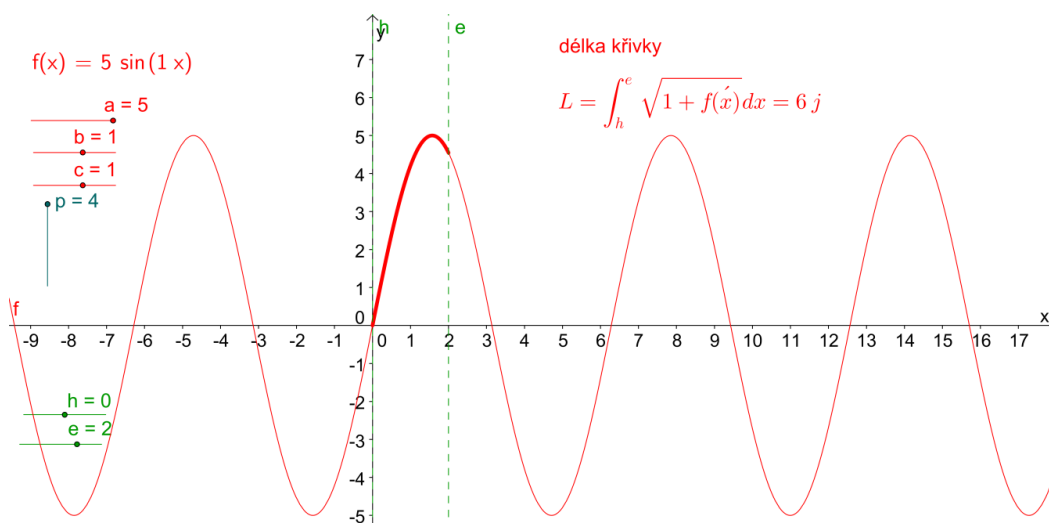
$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,$$

$$f(x) = \frac{a \cdot x}{b} + c,$$

$$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x).$$

Tyto funkce jsou vymezeny námi zvoleným intervalem pomocí posuvníků e a h . Svislým posuvníkem p přepínáme přednastavené funkce. Třemi posuvníky a, b, c , měníme

koeficienty funkce. Můžeme si tak vytvořit mnoho variant. Integrálem vypočtený vztah nám zobrazuje délku křivky L .



Obr. 4.6: Délka křivky ve zvoleném intervalu

5.2 Řešené příklady

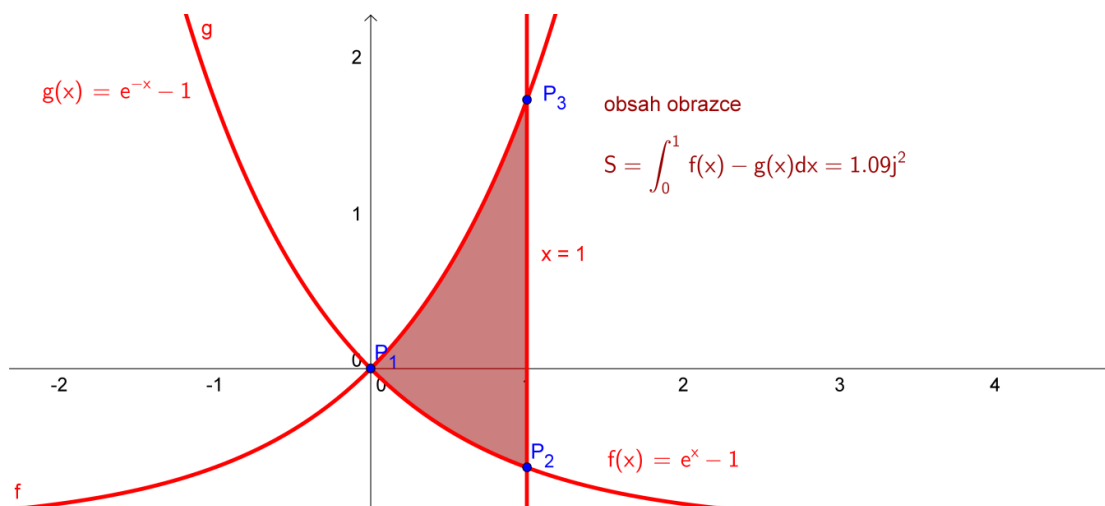
5.2.1 Příklad IV

Zadání: Určete obsah obrazce omezeného dvěma křivkami

$$f(x) = e^x - 1,$$

$$g(x) = e^{-x} - 1$$

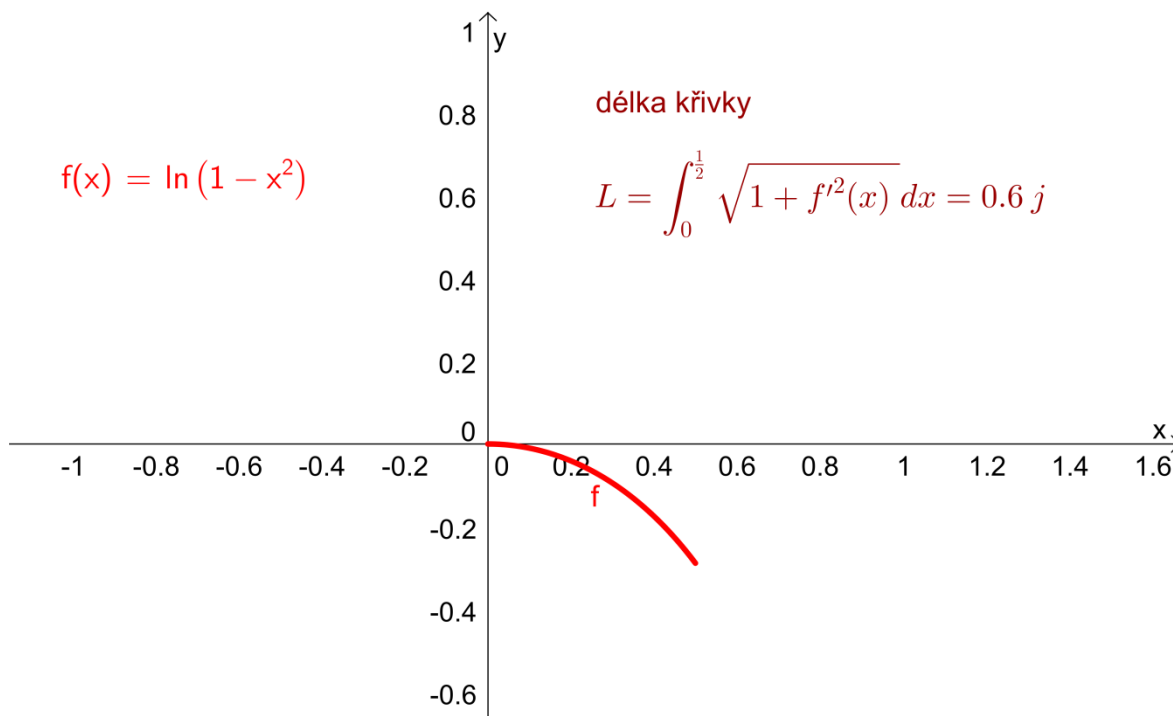
a přímkou $x = 1$.



Obr. 4.7: Příklad IV

5.2.2 Příklad V

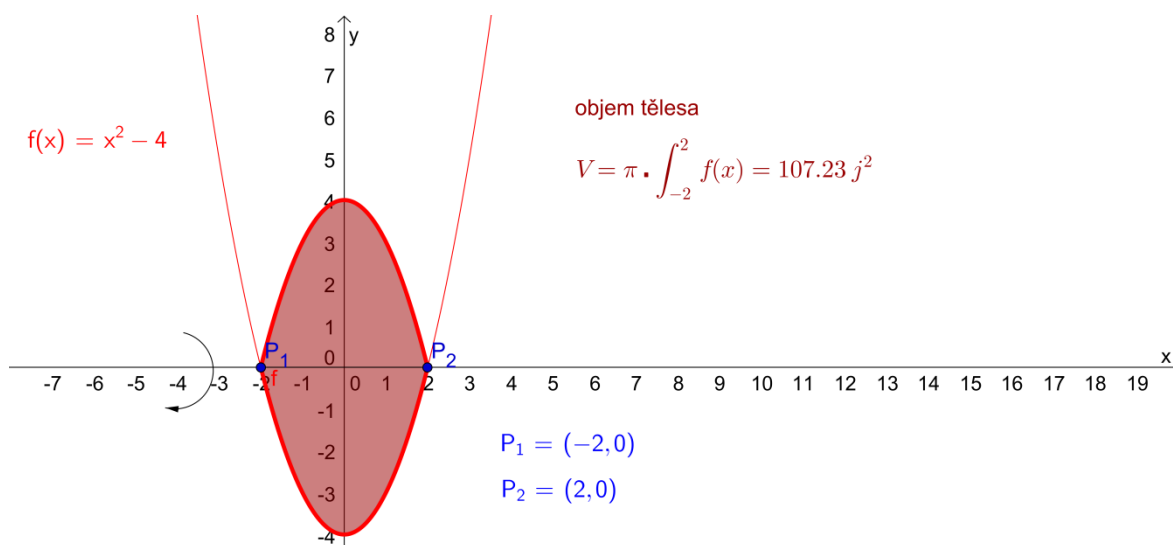
Zadání: Vypočítejte délku oblouku křivky $f(x) = \ln(1 - x^2)$, $x \in [0, \frac{1}{2}]$.



Obr. 4.8: Příklad V

5.2.3 Příklad VI

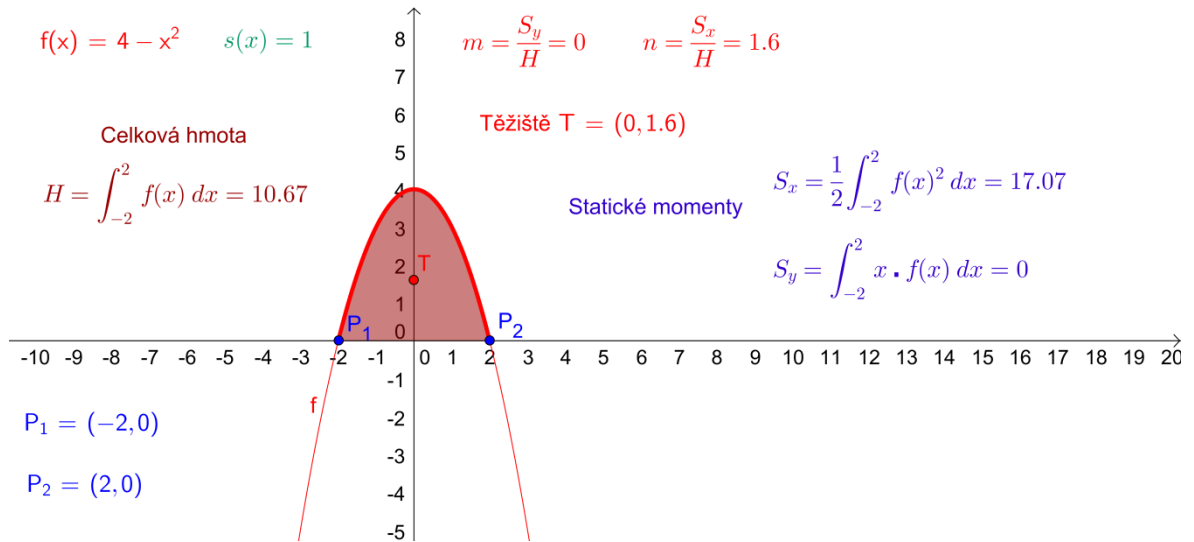
Zadání: Vypočítejte objem tělesa vytvořeného rotací obrazce kolem osy x omezeného parabolou $f(x) = x^2 - 4$.



Obr. 4.9: Příklad VI

5.2.4 Příklad VII

Zadání: Vypočtete souřadnice těžiště plochy omezené křivkou $f(x) = 4 - x^2$ a osou x .



Obr. 5.1: Příklad VII

6 PRŮLOMOVÁ ODOLNOST MECHANICKÉHO ZÁBRANNÉHO SYSTÉMU – APLIKACE

Mechanické zábranné systémy mají v průmyslu komerční bezpečnosti široké zastoupení, zejména proto, že jsou schopny poskytnout svojí mechanickou odolností ochranu objektu, či předmětu. Je zcela zřejmé, že každý mechanický zábranný systém lze překonat po určitém čase. Tento čas je závislý na mechanické pevnosti zábranného systému, množství energie a znalostí, či druhu náradí. **Doba, kterou musí pachatel vynaložit na překonání mechanické pevnosti, se nazývá průlomová odolnost.** [4]

6.1 Stanovení minimální doby průlomové odolnosti úschovných objektů

Při stanovení minimální doby průlomové odolnosti se vychází z toho, jedná-li se o otvorové výplně, nebo úschovné objekty. Pro úschovné objekty je platí vztah:

$$T_V = [(V_R - BV) : C_1] \times (2 \div 3) \text{ [min.], přičemž}$$

T_V = doba minimální průlomové odolnosti úschovného objektu,

V_R = hodnota průlomové odolnosti úschovného objektu (u skříňového trezoru je rovna průměrné hodnotě částečného a úplného průlomu, u trezorových dveří a komorového trezoru jde o hodnotu pro úplný průlom),

BV = základní ocenění – číselná hodnota přidělená určitému náradí,

C_1 = koeficient průlomové odolnosti úschovného objektu,

$(2 \div 3)$ = koeficient navýšení.[4]

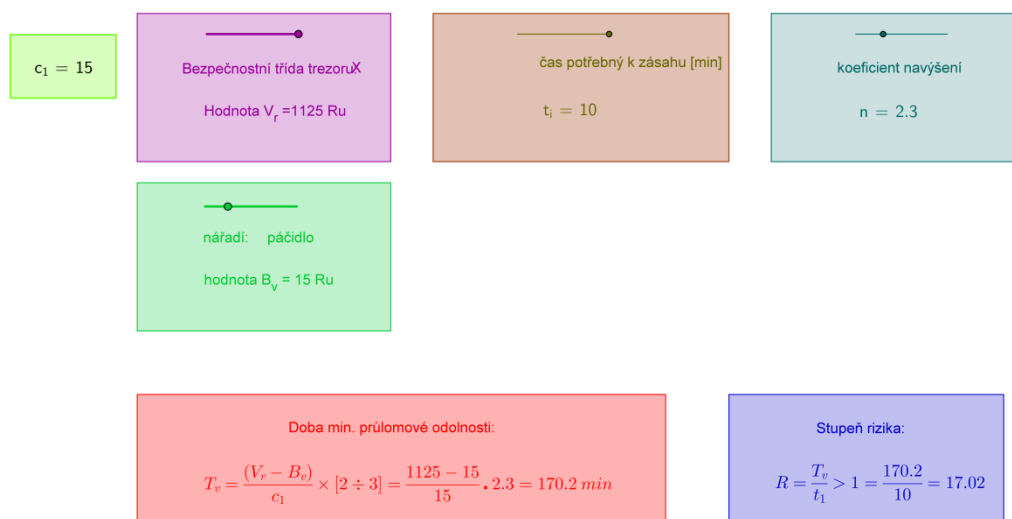
6.2 Stupně rizika ohrožených objektů

Stupeň rizika lze stanovit, známe-li dobu minimální průlomové odolnosti a čas potřebný k zásahu Policie ČR, či bezpečnostní služby. Má-li být ochrana účelná, musí hodnota $R > 1$. Platí vztah:

$$R = T_V/t_i, \text{ přičemž } t_i = \text{čas potřebný k zásahu. [4]}$$

6.3 Vlastní příklad na stanovení průlomové odolnosti

Tato jednoduchá aplikace nám stanoví minimální dobu průlomové odolnosti a stupeň rizika. Mechanický zábranný systém je skříňový trezor a jeho třídu lze měnit posuvníkem. Pomocí posuvníků lze také měnit typ použitého nářadí, koeficient navýšení a čas potřebný k zásahu.



Obr. 5.2: Stanovení průlomové odolnosti skříňových trezorů

ZÁVĚR

Cílem práce bylo prezentovat vybrané kapitoly předmětu Matematika I pro studenty na Univerzitě Tomáše Bati ve Zlíně. V teoretické části jsem se seznámil se základními funkcemi programu GeoGebra. Jakým způsobem lze zadávat funkce, editovat je a tvořit vlastní procedury pomocí dynamických nástrojů. Teoretická část také popisuje matematické definice, vztahy, vzorečky a věty týkající se diferenciálního a integrálního počtu funkcí jedné proměnné.

Do praktické části jsem zahrnul vlastní procedury, které by měli sloužit k pochopení nejasností týkajících se např. průběhu fci, směrnice tečny, nebo obsahu obrazce vymezeného křivkou. Dle mého názoru, největším problémem dělá studentům aplikace extrémů funkcí ve slovní úloze. Uvedl jsem proto, asi tři typy takových úloh. Součástí praktické části jsou také řešené příklady pomocí dynamických procedur. V poslední části jsem se zabýval průlomovou odolností. Veškeré příklady a procedury jsou součástí přílohy mé práce ve formátu „html“.

ZÁVĚR V ANGLIČTINĚ

The aim of my bachelor thesis was to present selected themes of our subject Mathematics I. set for Thomas Bata University in Zlin students. In theoretical part I got familiar with basic functions of GeoGebra program, in what way it is possible to set functions, edit them and make my own procedures with usage of dynamic instruments. Theoretical part also describes mathematics functions, relations, formulas and sentences dealing with differential and integral calculus of functions of one variable.

The practical part includes my own procedures, which can be used for understanding the unclarity dealing with e.g. process of functions, tangent of secant or capacity of diagram define by curve. In my opinion, the biggest problem for the students is application of extreme functions in practical task. Hence I present three types of that task. They include also the solving process by using the dynamic procedures. In the last part of my thesis I deal with break resistance. All mathematical problems and procedures are included in appendixes in "html" form.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] KŘENEK, Josef; OSTRAVSKÝ, Jan. Diferenciální a integrální počet funkce jedné proměnné s aplikacemi v ekonomii. Vyd. 6. Zlín : Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2005. 231 s. ISBN 978-80-7318-761-3.
- [2] FIALKA, Miloslav a Hana CHARVÁTOVÁ. Matematika I: stručný výklad, řešené příklady, cvičení s aplikacemi, ukázky systému Maple : učební text. Vyd. 1. Ve Zlíně: UTB, 2006, 105 s. ISBN 80-731-8438-9.
- [3] MUSILOVÁ, Jana. Matematika I: pro porozumění a praxi : netradiční výklad tradičních témat vysokoškolské matematiky. Vyd. 1. Brno: VUTIUM, 2006, 281 s. ISBN 80-214-2914-3.
- [4] IVANKA, Ján. Mechanické zábranné systémy. Vyd. 1. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2010, 151 s. ISBN 978-80-7318-910-5.
- [5] MÁDROVÁ, Vladimíra. Matematická analýza I. 1. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého, Přírodovědecká fakulta, 2001, 217 s. ISBN 80-244-0269-6.

SEZNAM OBRÁZKŮ

- Obr. 1.1: hlavní okna po spuštění
- Obr. 1.2: ukázka panelu nástrojů
- Obr. 1.3: navigační panel
- Obr. 1.4: zápis konstrukce
- Obr. 1.5: příkazový řádek
- Obr. 1.6: Export dynamického pracovního listu
- Obr. 1.7: Nastavení pro pokročilé
- Obr. 2.1.: Graf funkce f
- Obr. 2.2: Vlastní limita ve vlastním bodě
- Obr. 2.3: Nevlastní limita ve vlastním bodě
- Obr. 2.4: Vlastní limita v nevlastním bodě
- Obr. 2.5: Nevlastní limita v nevlastním bodě
- Obr. 2.6: Jednostranné limity
- Obr. 2.7: Tečna v bodě A
- Obr. 2.8: Graf konvexní funkce
- Obr. 2.9: Graf konkávní funkce
- Obr. 3.1: Asymptota bez směrnice
- Obr. 3.2: Inflexní bod
- Obr. 3.3: Horní a dolní součet
- Obr. 3.4: Graf funkce
- Obr. 3.5: Vykreslení stopy za bodem B
- Obr. 3.6: Minimum a maximum
- Obr. 3.7: Inflexní body
- Obr. 3.8: Příklad I
- Obr. 3.9: Příklad II

Obr. 4.1: Příklad III

Obr. 4.2: Horní a dolní součet, $v = 5$

Obr. 4.3: Horní a dolní součet, $v = 15$

Obr. 4.4: Obsah obrazce vymezeného přímkou

Obr. 4.5: Obsah obrazce vymezený dvěma přímkami a osou x

Obr. 4.6: Délka křivky ve zvoleném intervalu

Obr. 4.7: Příklad IV

Obr. 4.8: Příklad V

Obr. 4.9: Příklad VI

Obr. 5.1: Příklad VII

Obr. 5.2: Stanovení průlomové odolnosti skříňových trezorů