

Aproximace přechodových charakteristik využitím numerických metod

Approximation of step responses using numerical methods

Radka Patočková

Bakalářská práce
2013



Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

Fakulta aplikované informatiky

akademický rok: 2012/2013

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Radka PATOČKOVÁ**
Osobní číslo: **A08691**
Studijní program: **B3902 Inženýrská informatika**
Studijní obor: **Informační a řídicí technologie**
Forma studia: **kombinovaná**

Téma práce: **Aproximace přechodových charakteristik využitím numerických metod**

Zásady pro vypracování:

1. Vypracujte literární rešerši pro aproximaci přechodových charakteristik se zaměřením na vhodné numerické metody pro odhad parametrů dynamického modelu.
2. Proměřte přechodovou charakteristiku reálné tepelné soustavy.
3. Vhodnou metodou proveďte počáteční aproximaci přechodové charakteristiky dynamickým modelem.
4. Aplikujte vhodné numerické metody pro aproximaci přechodové charakteristiky. Model získaný v předchozím bodě použijte jako počáteční odhad.

Rozsah bakalářské práce:

Rozsah příloh:

Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

1. Kubalčík M.: Cvičení z předmětu Identifikace systémů, UTB ve Zlíně, 2006.
2. Bobál V.: Identifikace systémů, UTB ve Zlíně, 2009.
3. Soukup J.: Identifikace soustav, SNTL, Praha, 1990.
4. Mikleš J., Fikar, J.: Modelovanie, Identifikácia a Riadenie procesov II., 2004.
5. Balátě J.: Automatické řízení, BEN-technická literatura, 2003.

Vedoucí bakalářské práce: **doc. Ing. Marek Kubalčík, Ph.D.**
Ústav řízení procesů

Datum zadání bakalářské práce: **24. února 2013**

Termín odevzdání bakalářské práce: **14. června 2013**

Ve Zlíně dne 24. února 2013

prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.
děkan



prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.
ředitel ústavu

ABSTRAKT

Tato práce byla vytvořena jako podpora předmětu Identifikace systémů. Cílem bylo vytvořit ji podrobně a srozumitelně, se zaměřením na aproximaci přechodových charakteristik. Důraz byl pak kladen na použití vhodných numerických metod pro aproximaci statických přechodových charakteristik soustav vyšších řádů. Pro realizaci programů bylo použito prostředí MATLAB.

Klíčová slova: Gradientní metoda, Gauss-Newtonova metoda, Newtonova metoda, aproximace přechodových charakteristik.

ABSTRACT

The work was created as support of the subject of Identification systems. The tendency of this work was create it in detail and simplicity, with to view to approximation of step responses. Emphasis was given on application of available numerical methods for approximation of static step responses of systems high-orders. For the realization of methods was used MATLAB.

Keywords: Gradient method, Gauss-Newton's method, Newton's method, Approximation of step responses.

V rámci téhle práce bych chtěla poděkovat panu Ing. Marku Kubalčíkovi za cenné rady, připomínky a trpělivost při vedení mé práce. Dále bych chtěla poděkovat rodině za podporu během celého studia.

Prohlašuji, že

- beru na vědomí, že odevzdáním bakalářské práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb. o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších právních předpisů, bez ohledu na výsledek obhajoby;
- beru na vědomí, že bakalářská práce bude uložena v elektronické podobě v univerzitním informačním systému dostupná k prezenčnímu nahlédnutí, že jeden výtisk bakalářské práce bude uložen v příruční knihovně Fakulty aplikované informatiky Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně a jeden výtisk bude uložen u vedoucího práce;
- byl/a jsem seznámen/a s tím, že na moji bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších právních předpisů, zejm. § 35 odst. 3;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 1 autorského zákona má UTB ve Zlíně právo na uzavření licenční smlouvy o užití školního díla v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 2 a 3 autorského zákona mohu užít své dílo – bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití jen s předchozím písemným souhlasem Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše);
- beru na vědomí, že pokud bylo k vypracování bakalářské práce využito softwaru poskytnutého Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně nebo jinými subjekty pouze ke studijním a výzkumným účelům (tedy pouze k nekomerčnímu využití), nelze výsledky bakalářské práce využít ke komerčním účelům;
- beru na vědomí, že pokud je výstupem bakalářské práce jakýkoliv softwarový produkt, považují se za součást práce rovněž i zdrojové kódy, popř. soubory, ze kterých se projekt skládá. Neodevzdání této součásti může být důvodem k neobhájení práce.

Prohlašuji,

- že jsem na bakalářské práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval. V případě publikace výsledků budu uveden jako spoluautor.
- že odevzdaná verze bakalářské práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG jsou totožné.

Ve Zlíně

.....

podpis diplomanta

OBSAH

ÚVOD	9
I TEORETICKÁ ČÁST	11
1 MĚŘENÍ A VYHODNOCOVÁNÍ PŘECHODOVÝCH CHARAKTERISTIK	12
1.1 APROXIMACE SOUSTAVOU PRVNÍHO ŘÁDU BEZ DOPRAVNÍHO ZPOŽDĚNÍ	14
1.2 APROXIMACE SOUSTAVOU PRVNÍHO ŘÁDU S DOPRAVNÍM ZPOŽDĚNÍM	16
1.3 APROXIMACE PŘECHODOVÉ CHARAKTERISTIKY ČLENU DRUHÉHO ŘÁDU S KMITAVÝM PRŮBĚHEM	19
1.4 APROXIMACE NEKMITAVÝCH SOUSTAV VYŠŠÍCH ŘÁDŮ	20
1.4.1 Postup pro určení aproximační funkce vyšetřované soustavy, aniž bychom museli naměřenou charakteristiku normovat.....	25
1.5 APROXIMACE NEKMITAVÝCH SOUSTAV PRVNÍHO ŘÁDU S INTEGRAČNÍM ČLENEM	26
1.6 POUŽITÍ NUMERICKÝCH METOD PRO APROXIMACI NEKMITAVÝCH PŘECHODOVÝCH CHARAKTERISTIK	28
1.6.1 Získání počátečních odhadů časových konstant s využitím Strejcovy metody	28
1.6.2 Gradientní metoda s krátkým a dlouhým krokem	31
1.6.3 Gauss-Newtonova metoda.....	32
1.6.4 Newtonova metoda.....	34
II PRAKTICKÁ ČÁST	36
2 ZADÁNÍ: APROXIMACE STATICKÉ SOUSTAVY DRUHÉHO ŘÁDU S RŮZNÝMI ČASOVÝMI KONSTANTAMI	37
2.1 MĚŘENÍ.....	37
2.2 URČENÍ POŘADNIC VÝSLEDNÉ PŘECHODOVÉ CHARAKTERISTIKY	44
2.3 ZÍSKÁNÍ POČÁTEČNÍCH ODHADŮ ČASOVÝCH KONSTANT STREJCOVOU METODOU	46
2.3.1 Určení souřadnic inflexního bodu	46
2.3.2 Určení rovnice tečny	47
2.3.3 Určení počátečních odhadů T_1 a T_2	48
2.4 REALIZACE PROGRAMŮ	51
2.4.1 Gradientní metoda	51
2.4.2 Newtonova metoda.....	58
2.4.3 Gauss-Newtonova metoda.....	64
ZÁVĚR	77
ZÁVĚR V ANGLIČTINĚ	78
SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY	79
SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK	80
SEZNAM OBRÁZKŮ	81

SEZNAM TABULEK.....	83
SEZNAM PŘÍLOH.....	84

ÚVOD

Tahle práce se bude zabývat skupinou metod Deterministické identifikace systémů, která je podskupinou větší Experimentální identifikace systémů. Je tedy vhodné ve stručnosti obě skupiny objasnit.

Při experimentální identifikace využíváme informace získané o vyšetřovaném objektu v průběhu jeho pozorování v normálním provozu, anebo při vhodně zvoleném experimentu. Rozborem průběhů vstupních a jim odpovídajících výstupních dat, získaných na měřeném objektu, určujeme jeho matematický model (dále jen model), jeho parametry, případně specifikujeme strukturu. Přitom vycházíme z dostupných apriorních informací a ze znalosti vyšetřovaného objektu anebo třídy podobných objektů. Rozsah a hloubka využití apriorních informací může být různá, posuzuje se vždy z hlediska účelu identifikace a cílů řízení. Někdy je účelné využít existující informaci o vnitřních vlastnostech objektu, často je však vhodné, případně jedině možné, využít jen informaci o vnějších vlastnostech objektu. V průběhu vývoje teorie identifikace a modelování byla navržena řada metod experimentální identifikace a další metody jsou stále publikovány. Z počáteční snahy o co nejjednodušší postup při experimentální identifikaci se s rozvojem výpočetní techniky přechází na stále složitější metodiku výpočtu parametrů modelu. Zde tedy jen stručně shrneme, podle čeho se tyto metody klasifikují:

- různorodost identifikačních metod spočívá ve volbě vstupního testovacího signálu
- na způsobu zpracování výsledků experimentu
- na volbě typu matematického modelu
- v neposlední řadě závisí na kritériu kvality identifikace, charakterizovaného tzv. účelovou funkcí

Podle těchto kritérií si zvolíme identifikační metodu. Správnost provedených rozhodnutí závisí na dostupných apriorních informacích o identifikovaném procesu, podmínkách identifikace a předešlých zkušenostech. Použitá identifikační metoda musí umožnit vyšetření dynamických vlastností daného systému při působení daného poruchového signálu během omezené (konečné) doby měření, při použití přípustného testovacího signálu a přípustné změny výstupu.

Dále se zde budeme zabývat metodami deterministické identifikace, patřící mezi historicky nejstarší identifikační metody. Jsou těsně spjaté s historickým vývojem teorie automatické regulace a jsou hlavně pro svoji jednoduchost v praxi často používané. Na významu neztrácí rovněž z toho důvodu, že slouží pro parametrizaci modelů ze získaných neparametrických forem ve tvaru grafických průběhů anebo tabulačního zápisu výsledků získaných měřením. Využívají tzv. standardní testovací signály, ke kterým v teorii regulace řadíme:

- Jednotkový skok
- Jednotkový (Diracův) impuls
- Harmonický signál
- Obecný signál

První tři signály mají víceméně teoretický význam. V praxi se nedá použít Diracův impuls, který je fyzikálně nerealizovatelný. Problémy vznikají i při realizaci jednotkového skoku, který si vyžaduje změnu fyzikální veličiny v nekonečně krátkém intervalu, jakož i harmonického signálu, na jehož realizaci jsou potřebné speciální generátory. Poměrně jednoduše a s vyhovující přesností, můžeme aproximovat jednotkový skok, jestliže skokovou změnu signálu uskutečníme v mnohem kratším čase, jako jsou předpokládané časové konstanty identifikovaného objektu. Místo Diracova impulsu používáme realizovatelnější impulsy konečné šířky a výšky.

Tyto metody identifikace, které jsou aplikovatelné na lineární a linearizovatelné časově neproměnlivé objekty, nazýváme deterministické.

Postup při těchto metodách můžeme rozdělit do tří etap:

- Měření vstupně výstupních závislostí
- Určení neparametrického modelu vyhodnocením měření
- Parametrizace získaného neparametrického modelu

I. TEORETICKÁ ČÁST

1 MĚŘENÍ A VYHODNOCOVÁNÍ PŘECHODOVÝCH CHARAKTERISTIK

Dříve než se pustíme do měření a vyhodnocování přechodových charakteristik, musíme se seznámit s pojmem přechodová funkce a přechodová charakteristika. Přechodová funkce, označujeme ji $h(t)$, je odezva systému na jednotkový skok, která má do času $t=0$ nulovou hodnotu a v čase $t=0$ skočí její hodnota na jednotku, kterou pak stále udržuje. Přechodová charakteristika je grafické znázornění přechodové funkce.

Měření přechodových charakteristik je často používaným prostředkem na zjišťování dynamických vlastností objektu, protože je v mnoha případech jednotkový skok jednoduše realizovatelný. Přechodová charakteristika se měří poměrně snadno tím způsobem, že se nejprve měřený objekt uvede do ustáleného stavu, a poté změníme vstupní veličinu skokem na jinou hodnotu. Časový průběh výstupní veličiny přepočítaný na jednotkovou změnu vstupní veličiny je přechodovou charakteristikou.

Měření přechodových charakteristik je vhodné i z toho důvodu, že nevyžaduje speciální experimentální zařízení.

Frekvenční spektrum jednotkového skoku je dáno výrazem $1/\omega$, se stoupající frekvencí klesá amplituda složek \rightarrow model bude dostatečně přesný pro nižší frekvence vstupního signálu, v oblasti vyšších- mezních frekvencích, bude model nepřesný.

Dalším zdrojem chyb jsou nelinearity v objektu, případně v měřicím obvodu a působení jiných signálů a vstupů, které se po dobu experimentu nedaří udržovat na konstantních hodnotách.

Z tohoto důvodu je třeba měření opakovat pro různé amplitudy a polaritu vstupního signálu a na zpracování použít střední pravděpodobný průběh charakteristiky. Pro stanovení pořadnic výsledné přechodové charakteristiky je možno použít vztah:

$$f_i = \frac{\sum_{i=1}^N \text{sign}(\Delta u_k) y_{ik}}{\sum_{i=1}^N |\Delta u_k|} \quad (1)$$

kde N je počet opakovaných měření přechodové charakteristiky při obecně nestejně velkých skokových změnách vstupní veličiny objektu,

Δu_i je skoková změna vstupní veličiny při i -tém měření přechodové charakteristiky,

f_k je pořadnice výsledné přechodové charakteristiky v čase $t = kT_0$, kde T_0 je perioda vzorkování,

y_{ik} je hodnota odezvy výstupní veličiny soustavy při i -tém měření, v k -tém intervalu vzorkování (k je pořadí vzorkovaných bodů přechodové charakteristiky pro $k=0, 1, 2, \dots, m$). [1]

Vzorec je vhodný pro eliminaci náhodných poruch v tom případě, když se změny vstupního signálu příliš neliší. Je přesnější a méně pracný než postup, kdy se z každého měření vyhodnotí přechodová charakteristika a vyhlazení se uskutečňuje průměrováním všech charakteristik. Použití vyhodnocovacího vzorce je omezeno pro změny vstupní veličiny jen v rozsahu přibližně 1:2. Jestliže jsou rozsahy změn větší, pak je potřeba použít následujícího složitějšího vzorce, odvozeného z minima kvadratických chyb

$$J_i = \sum_{k=1}^N (\Delta u_k f_i - y_{ik})^2 \rightarrow \min \quad (2)$$

$i = 0, 1, \dots, m$

Pro minimum platí

$$\frac{\partial J_i}{\partial f_i} = \sum_{k=1}^N 2\Delta u_k (\Delta u_k f_i - y_{ik}) \quad (3)$$

a odtud

$$f_i = \frac{\sum_{k=1}^N \Delta u_k y_{ik}}{\sum_{k=1}^N (\Delta u_k)^2} \quad (4)$$

Přesné určení dynamických vlastností řízeného objektu podle průběhu přechodových charakteristik je prakticky nemožné. Proto se vyhodnocováním přechodových charakteristik určuje většinou pouze přibližný (aproximační) přenos objektu. [1]

1.1 Aproximace soustavou prvního řádu bez dopravního zpoždění

Soustavou prvního řádu bez dopravního zpoždění lze s dostatečnou přesností aproximovat jen takové přechodové charakteristiky, u kterých je tzv. prodleva v okolí $t=0$ velmi malá. Takové soustavy lze popsat diferenciální rovnicí:

$$a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t) \quad (6)$$

kterou lze upravit na tvar:

$$T y'(t) + y(t) = K u(t) \quad (7)$$

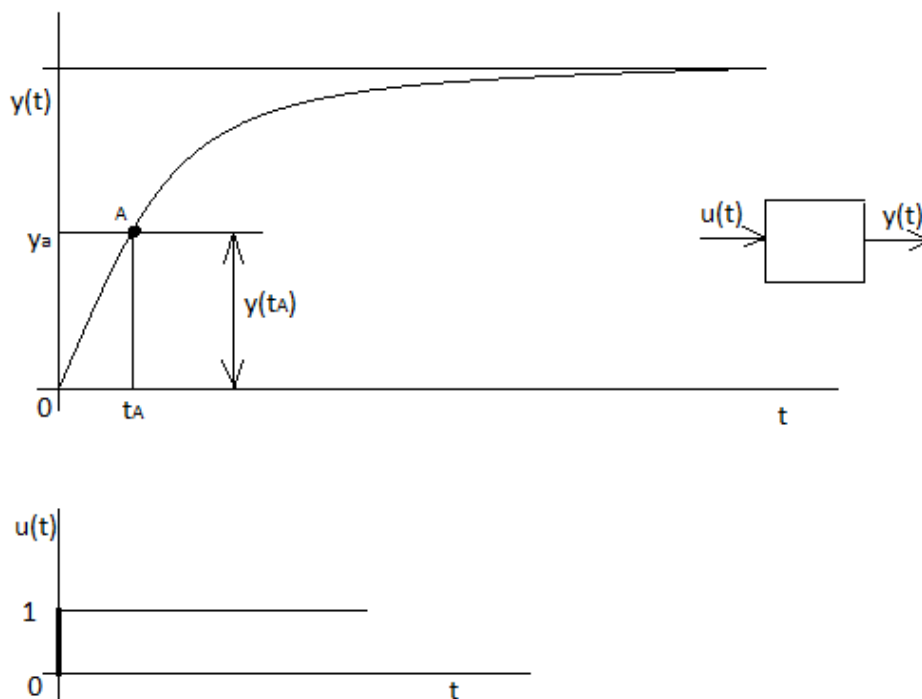
kde $T = \frac{a_1}{a_0}$ je časová konstanta soustavy a $K = \frac{b_0}{a_0}$ je zesílení soustavy.

Proporcionální soustava prvního řádu bez dopravního zpoždění je popsána přenosem

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1} \quad (8)$$

přechodovou funkcí

$$h(t) = K \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \quad (9)$$



Obr. 1. Přejchodová charakteristika soustavy prvního řádu [1]

Nejdříve zjistíme ustálenou hodnotu výstupní a vstupní veličiny. Jejich podílem získáme zesílení $K = \frac{y(\infty)}{u(\infty)}$, kde $u(\infty)$ - ustálená hodnota vstupní veličiny, $y(\infty)$ - ustálená hodnota

výstupní veličiny. Pokud je vstupní veličina jednotkový skok tj. $u(t) = 1$, potom ustálená hodnota výstupní veličiny je pro $t \rightarrow \infty$ rovna $y(\infty) = K$. Není-li možno při experimentálním měření z jakéhokoliv důvodu použít jako vstupního signálu jednotkového skoku, pak zesílení soustavy určíme z dané charakteristiky jako poměr změny výstupního signálu ke změně vstupního signálu

$$K = \frac{y(\infty) - y(0)}{\Delta u(t)} = \frac{\Delta y(t)}{\Delta u(t)} \quad (10)$$

Časovou konstantu T můžeme určit tak, že na experimentálně získané charakteristice zvolíme bod A se souřadnicemi t_A, y_A . Z rovnice (9) (pro $\Delta u \neq 1$) pro tento bod platí

$$y_A = \Delta y(t) \left(1 - e^{-\frac{t_A}{T}} \right) \quad (11)$$

A odtud vypočítáme časovou konstantu

$$T = -\frac{t_A}{\ln\left(1 - \frac{y_A}{\Delta y(t)}\right)} \quad (12)$$

1.2 Aproximace soustavou prvního řádu s dopravním zpožděním

Diferenciální rovnici statické soustavy prvního řádu s dopravním zpožděním zapisujeme ve tvaru

$$Ty'(t) + y(t) = Ku(t - t_d) \quad (13)$$

a její operátorový přenos

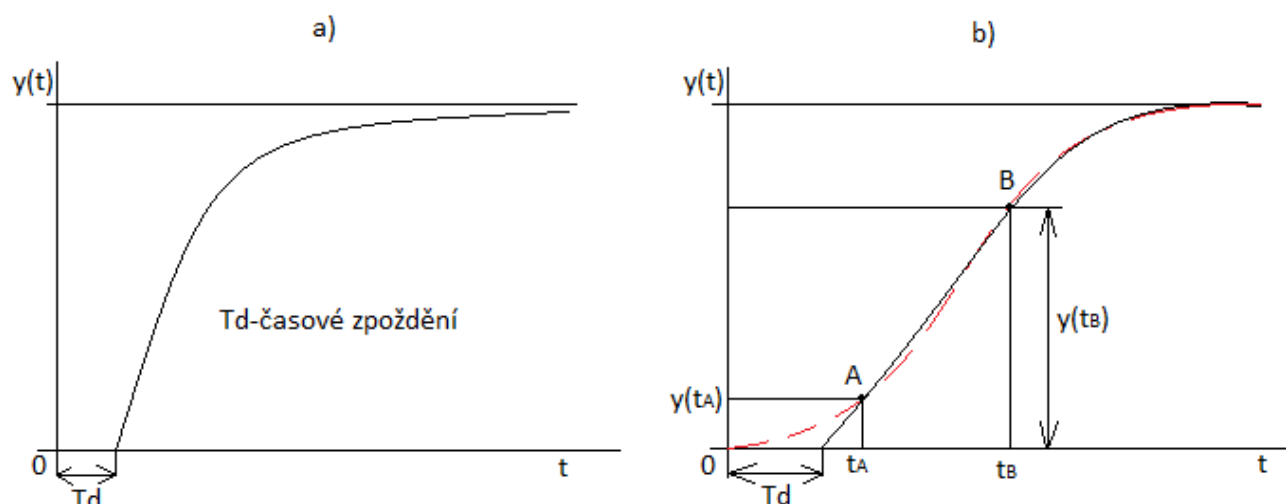
$$F(s) = \frac{K}{T_s + 1} e^{-T_d s} \quad (14)$$

Přechodová funkce je ve tvaru

$$h(t) = \begin{cases} \rightarrow 0 & \text{pro } t < T_d \\ \rightarrow K \left(1 - e^{-\frac{t-T_d}{T}}\right) & \text{pro } t \geq T_d \end{cases} \quad (15)$$

$$\rightarrow K \left(1 - e^{-\frac{t-T_d}{T}}\right) \text{ pro } t \geq T_d \quad (16)$$

Tato přechodová charakteristika je znázorněna na obrázku 2.a



Obr. 2. a) Přechodová charakteristika soustavy prvního řádu s dopravním zpožděním, b) Aproximace přechodové charakteristiky vyššího řádu charakteristikou prvního řádu s dopravním zpožděním [1]

Má-li charakteristická rovnice soustavy značně rozdílné kořeny, závisí tvar přechodové charakteristiky převážně na těch kořenech, které jsou nejmenší, neboť jim přísluší největší časové konstanty $tT_i = \frac{l}{p_i}$ (p_i jsou kořeny charakteristické rovnice). Je-li jeden kořen charakteristické rovnice soustavy vyššího řádu podstatně menší než ostatní kořeny, je tvar příslušné přechodové charakteristiky podobný tvaru přechodové charakteristiky soustavy prvního řádu s dopravním zpožděním.

Při aproximaci přechodové charakteristiky rovnicí (15), (16) je potřebné určit neznámé konstanty T , T_d , K . konstantu K určíme podobně jako v předchozím případě ze vztahu (10).

K výpočtu konstant T , T_d je potřeba vhodně zvolit na experimentálně získané charakteristice body A a B, jimiž bude aproximační charakteristika procházet. Je účelné volit jeden bod před inflexním bodem, aby aproximační křivka v pokud možno nejširším rozsahu dobře odpovídala dané charakteristice (obr. 2.b). Pro takto zvolené body potom musí platit (pro $\Delta u(t) \neq 1$)

$$y_A = \Delta y(t) \left(1 - e^{-\frac{t_A - T_d}{T}}\right) \quad (17)$$

$$y_B = \Delta y(t) \left(1 - e^{-\frac{t_B - T_d}{T}}\right) \quad (18)$$

Úpravou těchto rovnic získáme

$$e^{-\frac{t_A - Td}{T}} = 1 - \frac{y_A}{\Delta y(t)} \quad (19)$$

$$e^{-\frac{t_B - Td}{T}} = 1 - \frac{y_B}{\Delta y(t)}$$

a po zlogaritmování

$$-t_A + Td = T \ln\left(1 - \frac{y_A}{\Delta y(t)}\right) \quad (20)$$

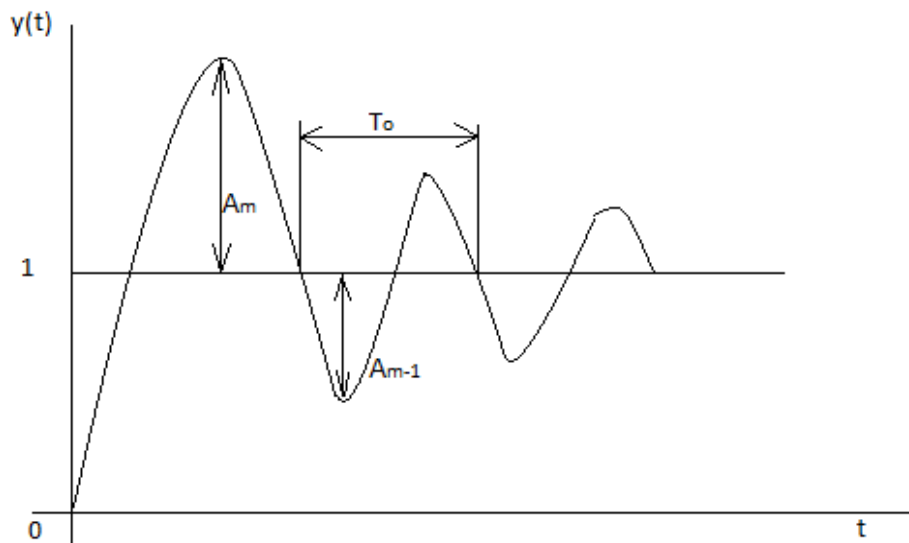
Jejich vydělením a úpravou obdržíme vztah pro dopravní zpoždění

$$Td = \frac{t_B \ln\left(1 - \frac{y_A}{\Delta y(t)}\right) - t_A \ln\left(1 - \frac{y_B}{\Delta y(t)}\right)}{\ln\left(1 - \frac{y_A}{\Delta y(t)}\right) - \ln\left(1 - \frac{y_B}{\Delta y(t)}\right)} \quad (21)$$

Časovou konstantu T z některé z rovnic (20) např.

$$T = \frac{Td - t_A}{\ln\left(1 - \frac{y_A}{\Delta y(t)}\right)} \quad (22)$$

1.3 Aproximace přechodové charakteristiky členu druhého řádu s kmitavým průběhem



Obr. 3. Přechodová charakteristika kmitavého členu

Má-li soustava dva akumulátory energie, jsou její dynamické vlastnosti popsány systémem druhého řádu. Nastává-li v této soustavě přelévání energie z jednoho akumulátoru energie do druhého, potom je její přechodová charakteristika kmitavá. Diferenciální rovnice popisující soustavu druhého řádu je

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b_0 u \quad (23)$$

kterou můžeme upravit na tvar

$$T^2 y'' - 2\xi T y' + y = K u \quad (24)$$

$$\text{kde } T^2 = \frac{a_2}{a_0}; \quad 2\xi T = \frac{a_1}{a_0}$$

Pro kmitavou soustavu musí být koeficient tlumení ξ v intervalu $0 < \xi < 1$.

V tomto případě je přechodová funkce dána rovnicí

$$y(t) = K \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{\frac{\xi}{T}t} \sin \left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} t + \arctg \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right) \right] \quad (25)$$

Obrazový přenos kmitavé soustavy je

$$G(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1} \quad (26)$$

Při aproximaci přechodové charakteristiky rovnicí (24) nebo operátorovým přenosem (26) musíme určit neznámé konstanty T , ξ , K . Konstantu K určíme jako v předcházejících případech z rovnice (10). Konstantu T , ξ určíme pomocí naměřené přechodové charakteristiky, ze které odměříme maximální překmit A_m (viz obr.3), překmit v následující půlperiodě A_{m-1} a dobu kmitu T_0 . Koeficient tlumení potom určíme ze vztahu [1]

$$\xi = \frac{\ln \frac{A_m}{A_{m-1}}}{\sqrt{\pi^2 + \left(\ln \frac{A_m}{A_{m-1}}\right)^2}} \quad (27)$$

a časovou konstantu

$$T = \frac{T_0 \sqrt{1 - \xi^2}}{2\pi} \quad (28)$$

Jelikož překmit A_m pro $\xi < 1$ můžeme určit z rovnice

$$A_m = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad (29)$$

můžeme koeficient tlumení ξ přímo určit pomocí tabulky vyčíslené ze vztahu (29). [1]

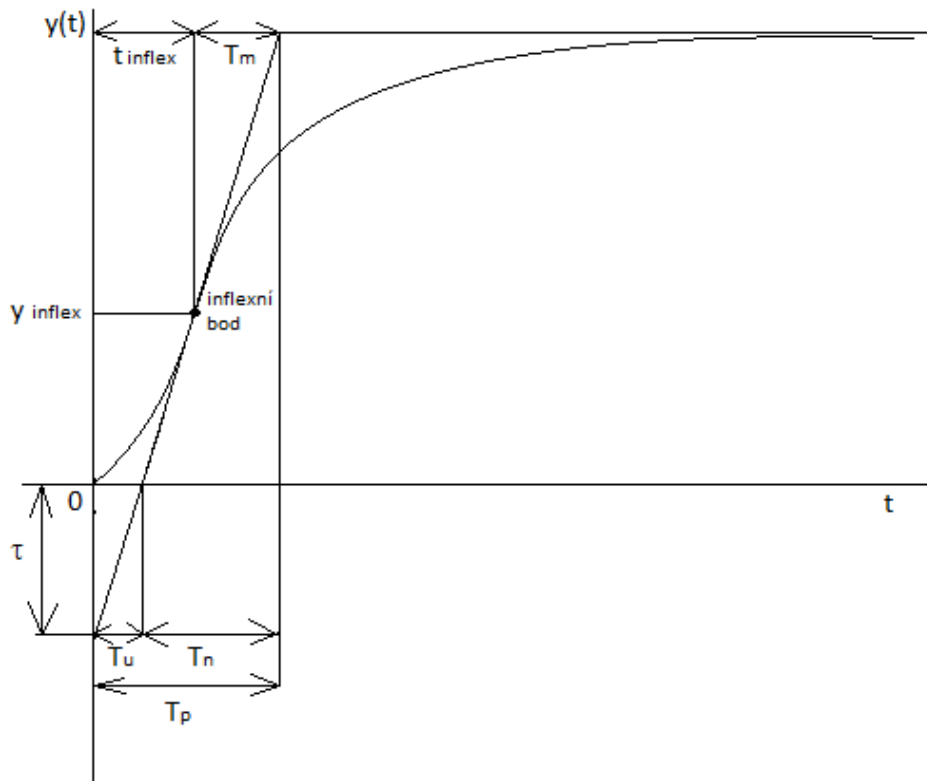
ξ	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
A(%)	100	72,92	52,66	37,23	25,38	16,3	9,48	4,6	1,52	0,15	0

Tab. 1. Hodnoty maximální překmitu v závislost na koeficientu tlumení

1.4 Aproximace nekmitavých soustav vyšších řádů

V případě soustav vyšších řádů je aproximace jejich přechodových charakteristik dosti náročným úkolem. Pokud se přechodová charakteristika ustálí na konečné hodnotě, jedná se o statickou soustavu. Přechodová charakteristika statické soustavy vyššího řádu, jejíž charakteristická rovnice nemá komplexně sdružené kořeny (tj. nemá členy schopné vlastních

kmitů), je znázorněna na obr.4. Z jejího tvaru nelze přesně určit ani řád ani parametry soustavy. Proto se používají přibližné metody, pomocí nichž se určují pouze aproximační přenosy soustavy. Tyto metody se liší volbou aproximačního přenosu. [1]



Obr. 4. Přechodová charakteristika statické soustavy vyššího řádu

Jednu z nejjednodušších a prakticky snadno použitelných metod aproximace přechodových charakteristik pro statické soustavy navrhl V. Strejc. Předpokládejme, že časové konstanty jednotlivých článků soustavy jsou přibližně stejně velké a kořeny charakteristické rovnice jsou reálné a záporné. Navrhuje se skutečné vlastnosti těchto soustav aproximovat soustavami buď n -tého řádu s vesměs stejnými časovými konstantami nebo soustavami druhého řádu s různě velkými časovými konstantami. Pro jeden nebo druhý způsob aproximace se rozhodne podle úseků, které vytíná na časové ose tečna, sestavená v inflexním bodě aproximované přechodové charakteristiky. Z důvodu popisu aproximační metody uvažujeme normovanou přechodovou charakteristiku, tj. Takovou, aby ustálená hodnota výstupního signálu $\Delta y(t) = y(\infty) - y(0)$ se rovnala jedné. Vychází se zde ze skutečnosti, že přechodová charakteristika statických soustav vyššího jak prvního řádu je v okolí inflexního bodu takřka přímková, takže směrnice tečny v inflexním bodě s časovou osou určuje dobu průtahu T_u a

průsečík pro $t \rightarrow \infty$ určuje dobu náběhu T_n . T_m se nazývá doplňková doba. Poměr $\tau = \frac{T_u}{T_n}$ spolu

souřadnicí inflexního bodu y_{inflex} závisí u statických soustav s vesměs stejnými časovými konstantami jen na řádu (n) soustavy a nezávisí na velikosti násobné časové konstanty T .

Soustavu n -tého řádu s násobnými časovými konstantami můžeme popsat přenosem [1]

$$f(s) = \frac{K}{(T_p + 1)^n} \quad (30)$$

A pro analytické vyjádření normované přechodové charakteristiky platí

$$y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} \left(\frac{t}{T}\right)^j \quad (31)$$

Z nulové hodnoty druhé derivace vztahu (31) vypočítáme souřadnici inflexního bodu t_{in}

$$t_{\text{in}} = (n-1)T \quad (32)$$

a po dosazení za $t = t_{\text{in}}$ nazpět do vztahu (31) i hodnotu charakteristiky y_{in} v inflexním bodě

$$y_{\text{in}} = 1 - e^{1-n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n-1}{j} \quad (33)$$

Ze vztahu $\tau = \frac{T_u}{T_n}$ plyne

$$\frac{T_u}{T_n} = \frac{(n-1)^{n-1} - (n-2)! \left[e^{n-1} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)^j}{j!} \right]}{(n-2)! e^{n-1}} \quad (34)$$

Ze (32), (33), (34) je zřejmé, že $\frac{t_{\text{in}}}{T}$, y_{in} , $\frac{T_u}{T_n}$ jsou závislé pouze na řádu soustavy n . Rovněž je

možno dokázat že podíly $\frac{T_m}{T_n}$, $\frac{T_n}{T}$, $\frac{T_u}{T}$, $\frac{T_m}{T}$ jsou taktéž závislé pouze na řádu soustavy. Tyto

hodnoty jsou shrnuty v tabulce 2:

n	Tu/Tn	yin/y∞	Tm/Tn	Tn/T	Tu/T	Tin/T	Tm/T
1	0	0	1	1	0	0	1
2	0.104	0.264	0.736	2.718	0.282	1	2
3	0.218	0.323	0.677	3.695	0.805	2	2.5
4	0.319	0.353	0.647	4.463	1.425	3	2.888
5	0.41	0.371	0.629	5.119	2.1	4	3.219
6	0.493	0.384	0.616	5.699	2.811	5	3.51
7	0.57	0.394	0.606	6.226	3.549	6	3.775
8	0.642	0.401	0.599	6.711	4.307	7	4.018
9	0.709	0.407	0.593	7.164	5.081	8	4.245
10	0.773	0.413	0.587	7.59	5.869	9	4.458

Tab. 2. Tabulka hodnot pro vyhodnocování statických soustav n-tého řádu se stejnými časovými konstantami

Jestliže τ_u je v intervalu (0-0,104), potom je vhodné aproximovat soustavu přenosem druhého řádu s různými časovými konstantami

$$G(s) = \frac{K}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)} \quad (35)$$

Pro vyhodnocování přenosu (35) se využívají dva body přechodové charakteristiky $A_1(t_1, y(t_1))$ a $A_2(t_2, y(t_2))$, přičemž pořadnice $y(t_1)$ prakticky nezávisí na poměru časových constant $\tau = \frac{T_2}{T_1}$,

$T_1 \geq T_2$ a hodnota pořadnice $y(t_2)$ závisí na poměru časových konstant $\frac{T_2}{T_1}$ ze všech bodů

přechodové charakteristiky nejvíce. Byly odvozeny vztahy:

$$\begin{aligned} y(t_1) &= 0,720; & t_1 &= k_1(T_1 + T_2); & k_1 &= 1,2564 \\ y(t_2) &= f(\tau); & t_2 &= k_2(T_1 + T_2); & k_2 &= 0,3574 \end{aligned} \quad (36)$$

Konstanta k_1 je vypočítána z podmínky

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} y(t_1) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} y(t_2) \quad (37)$$

přičemž pro $\tau=0$ je $t_1=k_1T_1$ a pro $\tau=1$ je $t_1=2k_1T_1$

Přechodovou normovanou funkcí druhého řádu můžeme vyjádřit vztahem

$$y(t) = 1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \quad (38)$$

Upravíme vztah pro t_1 (36)

$$t_1 = k_1(T_1 + T_2) = k_1T_1(1 + \tau) \quad (39)$$

a dosadíme do rovnice (38), čímž obdržíme

$$y(t_1) = 1 - \frac{1}{1 - \tau} e^{-k_1(1+\tau)} + \frac{\tau}{1 - \tau} e^{-k_1 \frac{1+\tau}{\tau}} \quad (40)$$

Pro jednotlivé limity z podmínky (37) platí

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow 0} y(t_1) &= 1 - e^{-k_1} \\ \lim_{\tau \rightarrow 1} y(t_1) &= 1 - e^{-2k_1} (1 + 2k_1) \end{aligned} \quad (41)$$

Po dosazení rovnic (41) do podmínky (37) obdržíme

$$1 - e^{-k_1} = 1 - e^{-2k_1} (1 + 2k_1) \quad (42)$$

a odtud po úpravě

$$e^{k_1} = 1 + 2k_1 \quad (43)$$

Transcendentní rovnici (43) vyhovuje kořen $k_1=1,2564$.

Z průběhu závislosti $y(t_1)$ v rovnici (40) na τ bylo zjištěno $y(t_1)_{\max}=0,724$ a $y(t_1)_{\min}=0,716$, takže průměrná hodnota $y(t_1)=0,720$. Konstanta k_2 se určí z podmínky

$$MaxD = \lim_{\tau \rightarrow 1} y(t_2) - \lim_{\tau \rightarrow 0} y(t_2) = e^{-k_2} - e^{-2k_2} (1 + 2k_2) \quad (44)$$

Tuto podmínku můžeme vyjádřit rovnicí

$$\frac{\delta D}{\delta k_2} = e^{-k_2} + 2e^{-2k_2} (1 + 2k_2) - 2e^{-2k_2} = 0 \quad (45)$$

a odtud po úpravě dostaneme transcendentní rovnici

$$e^{k_2} = 4k_2 \quad (46)$$

s kořenem $k_2=0,3574$. [1]

1.4.1 Postup pro určení aproximační funkce vyšetřované soustavy, aniž bychom museli naměřenou charakteristiku normovat

- Sestrojíme tečnu v inflexním bode přechodové charakteristiky a určíme hodnotu

$$\tau_u = \frac{T_u}{T_n}.$$

- Je-li $\tau_u \geq 0,104\Delta y$, zvolíme pro aproximaci soustavu druhého řádu se stejně velkými časovými konstantami: Z charakteristiky odečteme hodnoty Δy , t_{in} , y_{in} , T_u , T_n , T_m . Utvoříme

podíly $\frac{T_u}{T_n}$, $\frac{y_{in}}{\Delta y}$, $\frac{T_m}{T}$ a z tabulky 2 pro ně určíme řád diferenciální rovnice, tj. n . Ze zbývajících

sloupců tabulky 2 stanovíme pro určený řád diferenciální rovnice hodnoty $\frac{T_n}{T}$, $\frac{T_u}{T}$, $\frac{t_{in}}{T}$, $\frac{T_m}{T}$ ze

kterých pak určíme neznámou časovou konstantu T .

- Je-li $\tau_u \leq 0,104\Delta y$ zvolíme pro aproximaci soustavu druhého řádu s různě velkými časovými konstantami: Pro pořadnici $y(t_1)=0,720$ vyčteme z přechodové charakteristiky časový úsek t_1 a vypočítáme součet časových konstant podle vztahu

$$T_1 + T_2 = \frac{t_1}{1,2564} \quad (47)$$

Vypočítáme časový úsek t_2

$$t_2 = 0,3574(T_1 + T_2) \quad (48)$$

a z naměřené přechodové charakteristiky vyčteme příslušnou pořadnici $y(t_2)$. Z grafu

závislosti $\frac{y(t_2)}{\Delta y} = f(\tau)$ na obrázku 5 určíme poměr časových konstant

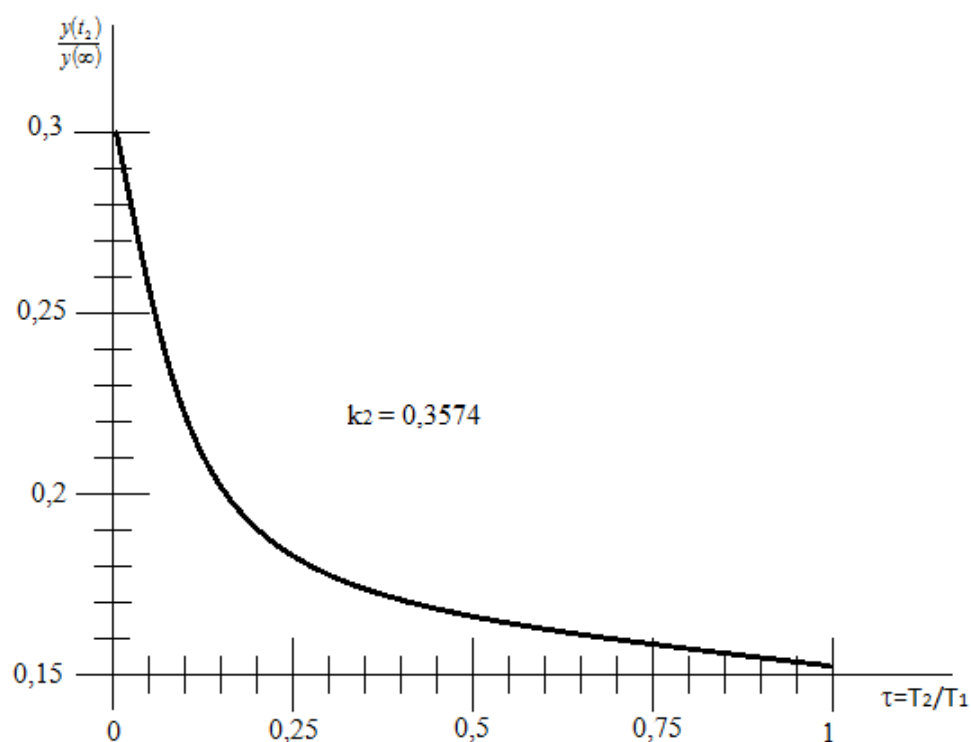
$$\tau = \frac{T_2}{T_1} \quad (49)$$

Z rovnice (47), (49) určíme hledané časové konstanty.

Diferenciální rovnice aproximační soustavy má tvar

$$T_1 T_2 y''(t) + (T_1 + T_2) y'(t) + y(t) = Ku(t) \quad (50)$$

- Zesílení K v obou případech určíme podle vztahu (10). [1]



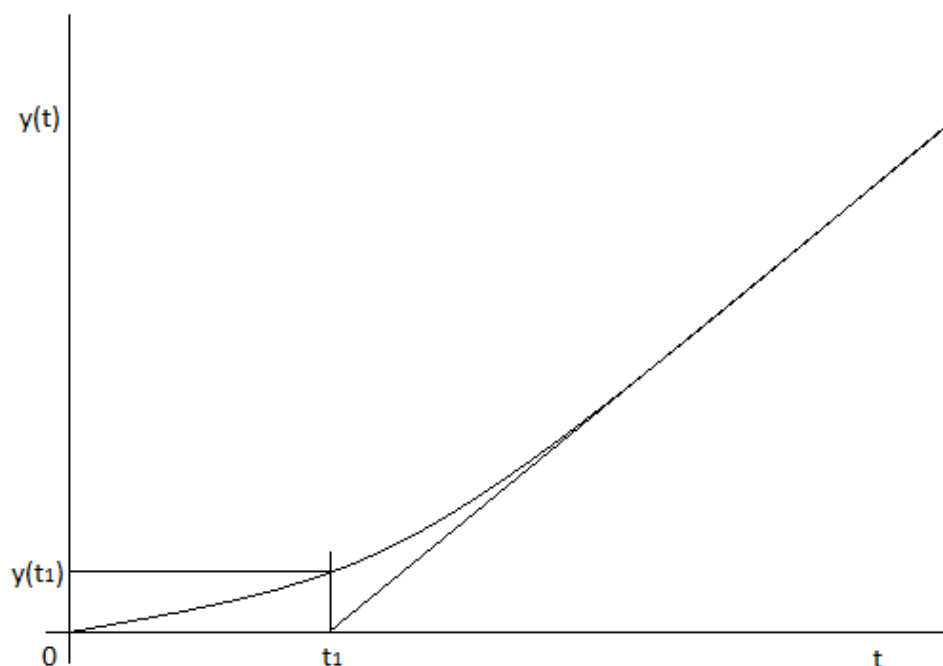
Obr. 5. Graf pro určení poměru časových konstant [1]

1.5 Aproximace nekmitavých soustav prvního řádu s integračním členem

Nekmitavé soustavy s integračním členem můžeme aproximovat přenosovou funkcí

$$G(s) = \frac{K_v}{s(T_s + 1)^n} \quad (79)$$

Přechodová charakteristika nekmitavé soustavy prvního řádu je znázorněna na obrázku 7.



Obr. 6. Přejchodová charakteristika astatické soustavy [1]

Směrnice asymptoty k přechodové charakteristice protíná časovou osu v čase $t=t_1$. Pořadnice přechodové charakteristiky v tomto bodě je $y(t_1)$. Potom lze dokázat, že pro konstanty aproximační soustavy platí

$$\frac{y(t_1)}{K_v} = t_1 \frac{n^{(n-1)}}{(n-1)!} e^{-n} \quad (80)$$

kde $K_v=nga$ je směrnice asymptoty k přechodové charakteristice a bod, kde asymptoty protíná časovou osu je

$$t_1=nT. \quad (81)$$

Poměr

$$f(n) = \frac{y(t_1)}{K_v t_1} \quad (82)$$

je funkcí pouze n a můžeme jej využívat na určení řádu soustavy podle tabulky 7. Časovou konstantu určíme ze vztahu 81.

n	1	2	3	4	5	6
$f(n) = \frac{y(t_1)}{K_v t_1}$	0.368	0.271	0.224	0.195	0.175	0.16

Tab. 3. Tabulka hodnot pro vyhodnocování astatických soustav

Postup aproximace tohoto typu soustav je následující:

- Sestrojíme asymptotu k přechodové charakteristice pro $t \rightarrow \infty$
- Určíme směrnici asymptoty $K_v = \tan \alpha$
- Z přechodové charakteristiky určíme souřadnici t_1 a její pořadnici $y(t_1)$
- Určíme hodnotu $f(n)$ ze vztahu (82)
- Z tabulky 4 určíme řád soustavy n
- Vypočítáme časovou konstantu úpravou vztahu (81) $T = \frac{t_1}{n}$

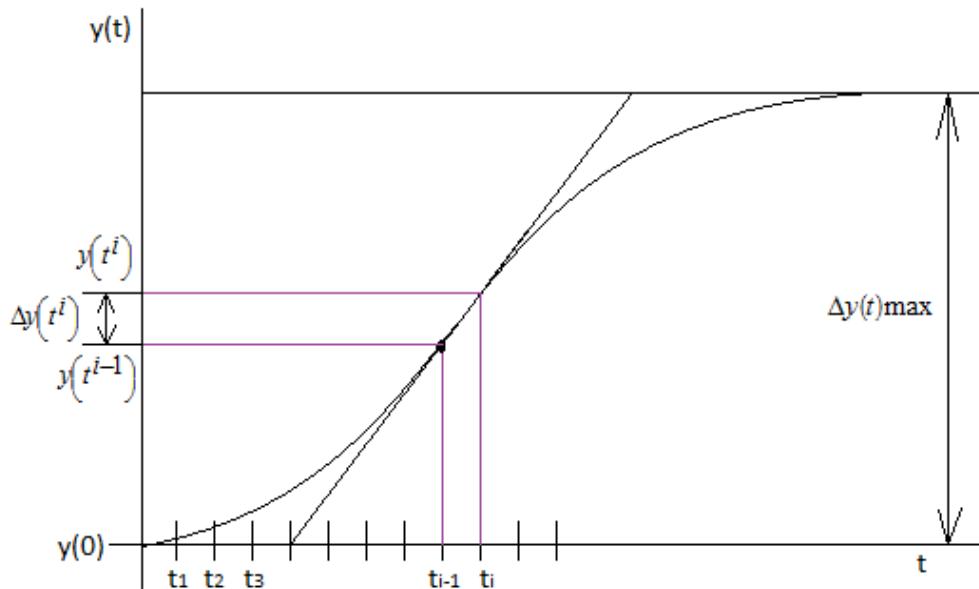
1.6 Použití numerických metod pro aproximaci nekmitavých přechodových charakteristik

Rozvoj výpočetní techniky umožnil nahrazení analytických, případně grafických aproximačních metod metodami numerickými a úplnou automatizaci identifikačního experimentu. Zde teď popíšeme algoritmus aproximace přechodové charakteristiky soustavou druhého řádu s různě velkými časovými konstantami pomocí numerických metod, vhodných pro řešení na číslicovém počítači. [2]

1.6.1 Získání počátečních odhadů časových konstant s využitím Strejcovy metody

Většina numerických metod konverguje tím rychleji, čím blíže zadáme počáteční odhady hledaných parametrů odhadům konečným. Hledanými parametry v našem případě jsou časové konstanty T_1 a T_2 . Předpokládejme, že máme k dispozici diskrétní hodnoty přechodové

charakteristiky $y(t^i)$, kde $i = 1, 2, 3, \dots, m$ je index změřeného vzorku. Nejdříve musíme naměřené hodnoty normovat- tj. aby ustálená hodnota výstupního signálu $\Delta y(t) = y(\infty) - y(0)$ se rovnala jedné.



Obr. 7. Přechodová charakteristika s tečnou v inflexním bodě

Poté určíme inflexní bod, ve kterém směrnice k charakteristice má největší strmost. V inflexním bodě je spojitá derivace rovna maximální hodnotě a platí

$$\left[\frac{dy(t)}{dt} \right]_{t=t_m} = \max \quad (51)$$

diskretizací (derivaci nahradíme diferencí) tohoto vztahu dostáváme [3]

$$\frac{y(t^i) - y(t^{i-1})}{t^i - t^{i-1}} = \max \quad (52)$$

Inflexní bod, bude tedy ležet v intervalu, kde poměr (52) nabývá maximální hodnoty.

Dále určíme tečnu v inflexním bodě. Tato přímka má rovnici

$$y = a + bt \quad (53)$$

Použijeme pětibodovou lineární regresi, kde jako střední bod vezmeme inflexní bod. Pomocí zjištěných koeficientů a, b vypočítáme dobu průtahu T_u . Do rovnice (53) dosadíme $t=T_u, y=0$ a dostaneme

$$T_u = -\frac{a}{b} \quad (52)$$

Z obrázku 4 je zřejmé že $b=\tau_u$ a proto za předpokladu, že ustálená hodnota $\Delta y=y(t^m)$, bude platit pro dobu náběhu

$$T_n = \frac{T_u}{b} y(t^m) \quad (53)$$

Součet časových konstant T_1, T_2 řešíme podle vztahu (47) tím způsobem, že nejprve hledáme pořadnici $y(t_1)$ podle vztahu

$$S = [y(t^i) - 0,72y(t^m)]^2 = \min \quad (54)$$

kde $i=1, 2, 3, \dots, m$, a k ní určíme z přechodové charakteristiky příslušné t_1 . Dále pak ze vztahů 5.31 a 5.43 odvodíme rovnice pro výpočet počátečních odhadů

$$T_1 = \frac{t_1}{k_1(1+\tau)}, T_2 = \frac{a_1}{k_1(1+\tau)} \quad (55)$$

kde, $k_1=1,2564$ je konstanta odvozená z (36). Pro poměr časových konstant τ můžeme použít tabulku 3 na základě pořadnice inflexního bodu podle vztahu $\frac{y_{in}}{\Delta y(t^m)}$, když potom hodnoty této tabulky použijeme jako vstupní data použitého programu.

Tímto jsme vypočítaly časové konstanty T_1, T_2 , které použijeme jako první iterace T_1^1, T_2^1 .

T_2/T_1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
T_u/T_n	0.05	0.072	0.084	0.092	0.097	0.1	0.102	0.103	0.103	0.104
y_{in}	0.148	0.197	0.224	0.24	0.25	0.256	0.26	0.263	0.264	0.264

Tab. 4. Tabulka závislosti poměru časových konstant na pořadnici inflexního bodu pro soustavu druhého řádu

1.6.2 Gradientní metoda s krátkým a dlouhým krokem

Obě tyto metody hledají minimum nebo maximum funkce. Algoritmus výpočtu se realizuje podle vztahů $x^{k+1} = x^k + \lambda_k \nabla f(x^k)$ nebo $x^{k+1} = x^k - \lambda_k \nabla f(x^k)$, přičemž λ_k je aktuální velikost kroku a znaménko u této hodnoty určuje směr hledaného extrému. Rozdíl mezi gradientní metodou s krátkým a dlouhým krokem spočívá v tom, že u metody s krátkým krokem si velikost kroku volíme konstantní, kdežto u metody s dlouhým krokem aktuální velikost kroku cyklicky měníme podle potřeby. Problém s konstantní velikostí aktuálního kroku spočívá v možném přeskočení hledaného extrému. Gradientní metoda s dlouhým krokem tento problém odstraňuje, avšak je výpočetně náročnější, protože se v každém kroku provádí optimalizace účelové funkce, má ale méně kroků.

V našem případě tedy gradientní metoda slouží k nalezení minima účelové funkce, proto iterační formuli definujeme se záporným znaménkem aktuálního kroku: $x^{k+1} = x^k - \lambda_k \nabla f(x^k)$.

Účelovou funkci definujeme jako sumu kvadrátu rozdílu hodnot aproximované a normované funkce:

$$f(T_1^k, T_2^k) = \sum_{j=1}^m \left(1 - \frac{T_1^k}{T_1^k - T_2^k} e^{-\frac{1}{T_1^k}} + \frac{T_2^k}{T_1^k - T_2^k} e^{-\frac{t}{T_2^k}} - \frac{y(t^j)}{\Delta y(t^m)} \right)^2 \quad (56)$$

kde $1 - \frac{T_1^k}{T_1^k - T_2^k} e^{-\frac{1}{T_1^k}} + \frac{T_2^k}{T_1^k - T_2^k} e^{-\frac{t}{T_2^k}} = h(T_1^k, T_2^k)$ je aproximovaná přechodová funkce metodou prof. Strejce, a $\frac{y(t^j)}{\Delta y(t^m)}$ je normovaná přechodová funkce.

Aplikací iterační formule definujeme minimalizující posloupnost:

$$\begin{aligned} T_1^{k+1} &= T_1^k - \lambda_k \frac{\partial f(T_1^k, T_2^k)}{\partial T_1^k} \\ T_2^{k+1} &= T_2^k - \lambda_k \frac{\partial f(T_1^k, T_2^k)}{\partial T_2^k} \end{aligned} \quad (57)$$

Přičemž v každém kroku provádíme již zmíněnou optimalizaci, kde λ_k volíme takové, aby platilo:

$$f(T_1^{k+1}, T_2^{k+1}) < f(T_1^k, T_2^k) \quad (58)$$

jinak cyklicky snížíme na hodnotu:

$$\lambda_{k+1} = \frac{\lambda_k}{10} \quad (59)$$

Parciální derivace uvedené ve vztazích 5.53 a 5.54 vypočítáme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(T_1, T_2)}{\partial T_1} &= 2\sqrt{f(T_1, T_2)} \left[\frac{T_2}{T_1 - T_2} \left(e^{-\frac{t}{T_1}} e^{-\frac{t}{T_2}} \right) - \frac{t}{T_1(T_1 - T_2)} e^{-\frac{t}{T_1}} \right] \\ \frac{\partial f(T_1, T_2)}{\partial T_2} &= 2\sqrt{f(T_1, T_2)} \left[\frac{T_1}{T_1 - T_2} \left(e^{-\frac{t}{T_1}} e^{-\frac{t}{T_2}} \right) - \frac{t}{T_2(T_1 - T_2)} e^{-\frac{t}{T_2}} \right] \end{aligned} \quad (60)$$

Algoritmus je ukončen, pokud se dvě po sobě jdoucí iterace neliší o předem danou hodnotu, v našem případě je postačující hodnota 0,0001.

1.6.3 Gauss-Newtonova metoda

Hledáme-li odhady parametrů v nelineární empirické formuli

$$y(t) = f(T_1, T_2, t) \quad (61)$$

minimalizujeme součet čtverců odchylek aproximované a normované přechodové charakteristiky

$$S(T_1, T_2) = \sum_{j=1}^m [f(T_1, T_2, t^j) - y(t^j)]^2 = \sum_{j=1}^m q_j^2(T_1, T_2) \quad (62)$$

kde q_j je residuum j -tého měřeného bodu a m je počet změřených bodů charakteristiky.

Odhady T_1 , T_2 hledáme jako limitu tzv. minimalizující posloupnosti, aby stále platila nerovnost

$$S(T_1^{k+1}, T_2^{k+1}) < S(T_1^k, T_2^k) \quad (63)$$

Označíme-li

$$J(T_1, T_2) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f(T_1, T_2, t^1)}{\partial T_1} & \frac{\partial f(T_1, T_2, t^1)}{\partial T_2} \\ \frac{\partial f(T_1, T_2, t^2)}{\partial T_1} & \frac{\partial f(T_1, T_2, t^2)}{\partial T_2} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f(T_1, T_2, t^m)}{\partial T_1} & \frac{\partial f(T_1, T_2, t^m)}{\partial T_2} \end{vmatrix} \quad (64)$$

Jacobiho maticí, vypočítáme přírůstky časových konstant ΔT_1 a ΔT_2 podle rovnice

$$\Delta T^k = -[J^T(T^k)J(T^k)]^{-1} J^T(T^k)q(T^k) \quad (65)$$

kde $J(T)$ je matice typu (m, n) ; $q(T)$ je vektor typu (m, n) ; n je počet parametrů (v tomto případě $n=2$); ΔT je vektor typu $(n, 1)$.

Výpočet následujících odhadů parametrů probíhá podle vztahu

$$T^{k+1} = T^k + \lambda_k \Delta T^k \quad (66)$$

Kde λ_k se volí v intervalu $(0, 1)$. Není-li nerovnost (63) splněna, λ_k se cyklicky sníží podle vztahu

$$T^{k+1} = \frac{\lambda_k}{2} \quad (67)$$

Parciální derivace ve vztahu (64) vypočteme dle vztahu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(T_1, T_2, t)}{\partial T_1} &= \frac{T_2}{(T_1 - T_2)^2} \left(e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}} \right) - \frac{t}{T_1(T_1 - T_2)} e^{-\frac{t}{T_1}} \\ \frac{\partial f(T_1, T_2, t)}{\partial T_2} &= \frac{T_1}{(T_1 - T_2)^2} \left(e^{-\frac{t}{T_2}} - e^{-\frac{t}{T_1}} \right) - \frac{t}{T_2(T_1 - T_2)} e^{-\frac{t}{T_2}} \end{aligned} \quad (68)$$

Objem výpočtů neúměrně roste se zvětšováním počtu bodů m přechodové charakteristiky. Při velkém počtu bodů se obvykle při násobení matic $J^T J$ obdrží singulární matice a výpočet se zhroutí. Proto je vhodné do programu zařadit test na singularitu matice a automaticky snížit počet využívaných bodů, případně jiným způsobem zajistit numerickou stabilitu algoritmu.

Nelineární regrese je výpočetně náročnější než gradientní metoda, ale má tu výhodu, že v blízkosti konečných odhadů parametrů konverguje poměrně rychle. Proto je vhodné použít

počáteční odhady parametrů pro řešení gradientní metodou a poté použít pro výpočet konečných odhadů nelineární regresi. [3]

1.6.4 Newtonova metoda

Při použití této metody vyjdeme z vlastnosti inflexního bodu přechodové charakteristiky, ve kterém je jeho druhá derivace podle času rovna nule. Druhá derivace normované přechodové funkce (38) je

$$\frac{d^2 y(t)}{dt} = \frac{1}{T_1 - T_2} \left(\frac{1}{T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} - \frac{1}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}} \right) \quad (69)$$

Položíme-li (79) rovno nule a dále dosadíme za $\tau = \frac{T_2}{T_1}, t = t_{in}$ pak po úpravě obdržíme

$$e^{-\frac{t_{in}}{T_2}} = \tau \cdot e^{-\frac{t_{in}}{T_1}} \quad (70)$$

a po zlogaritmování

$$-\frac{t_{in}}{T_2} = \ln \tau - \frac{t_{in}}{T_1} \quad (71)$$

Ze vztahu (71) obdržíme pro časové konstanty

$$T_1 = \frac{t_{in} \left(1 - \frac{1}{\tau} \right)}{\ln \tau} \quad T_2 = \frac{t_{in} (\tau - 1)}{\ln \tau} \quad (72)$$

Vztahy (72) dosadíme do rovnice (38) a obdržíme rovnici pro výpočet pořadnice inflexního bodu

$$y_{in} = 1 - \frac{1 - \frac{1}{\tau}}{2 - \tau - \frac{1}{\tau}} e^{-\frac{\ln \tau}{1 - \frac{1}{\tau}}} + \frac{\tau - 1}{2 - \tau - \frac{1}{\tau}} e^{-\frac{\ln \tau}{\tau - 1}} \quad (73)$$

Další úpravou obdržíme

$$y_{in} = 1 + \frac{1}{\tau - 1} \left(e^{\frac{-\ln \tau}{1-\tau}} - \tau e^{\frac{\ln \tau}{\tau-1}} \right) \quad (74)$$

$$y_{in} = 1 - (1 + \tau) \tau^{\frac{\tau}{1-\tau}}$$

Ze vztahu (74) je zřejmé, že pořadnice inflexního bodu nezávisí na velikosti časových konstant T_1 a T_2 , ale pouze na jejich poměru τ . To znamená, že k určení časových konstant je nutné znát pouze souřadnice inflexního bodu a jejich poměr. Vztah (74) je transcendentní rovnice, z níž nedokážeme určit neznámou τ analytickým způsobem. Úlohu však můžeme řešit numericky, např. tím, že počáteční odhad τ pro danou pořadnici inflexního bodu získáme z tabulky 3 a pro výpočet τ používáme některou z iteračních metod (např. Newtonovu metodu).

Hledáme tedy Newtonovou metodou řešení nelineární rovnice

$$f(\tau) = 1 - y_{in} - (1 + \tau) \tau^{\frac{\tau}{1-\tau}} \quad (75)$$

A proto řešíme iterační rovnici

$$\tau_{k+1} = \tau_k - \frac{f(\tau_k)}{f'(\tau_k)} \quad (76)$$

kde

$$f'(\tau) = -\tau^{\frac{\tau}{1-\tau}} \frac{\ln \tau}{(1-\tau)^2} - \tau^{\frac{\tau}{1-\tau}} \frac{\ln \tau}{(1-\tau)^2} \quad (77)$$

a po úpravě

$$f'(\tau) = -\frac{\ln \tau}{(1-\tau)^2} \tau^{\frac{1+\tau}{1-\tau}} \quad (78)$$

Časové konstanty pak určíme ze vztahů (72). [3]

II. PRAKTICKÁ ČÁST

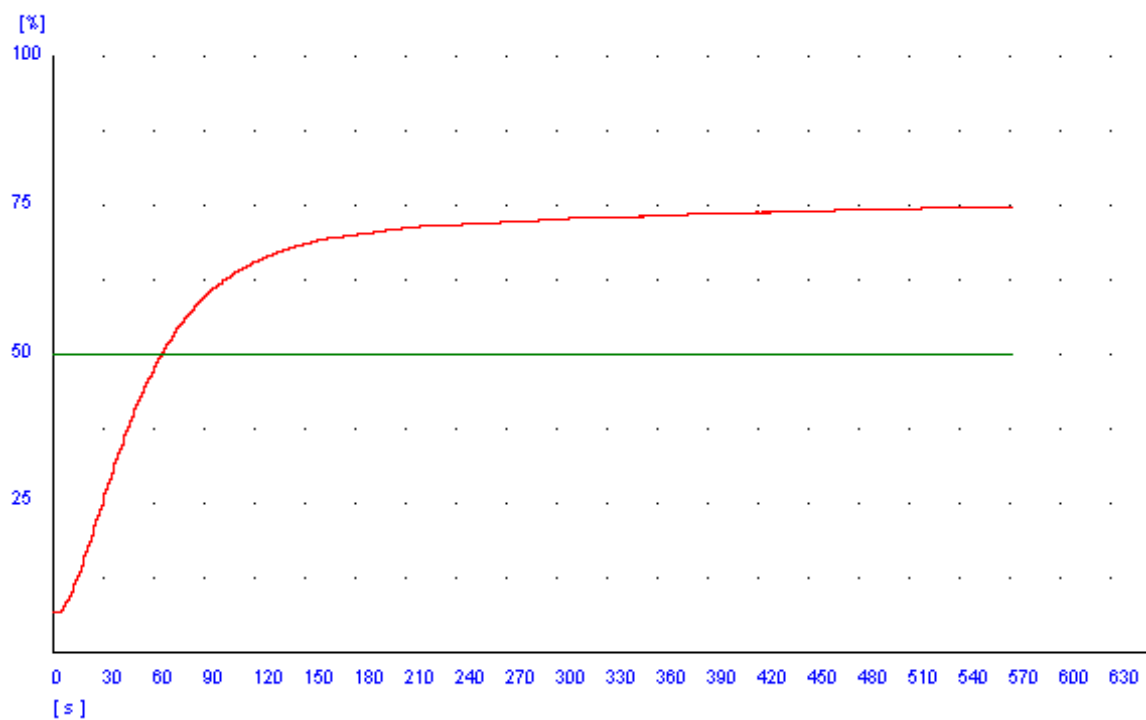
2 ZADÁNÍ: APROXIMACE STATICKÉ SOUSTAVY DRUHÉHO ŘÁDU S RŮZNÝMI ČASOVÝMI KONSTANTAMI

- Proved'te 3 samostatná měření přechodové charakteristiky teplotně proměnného odporu. Vstupní příkon volte 50%, 75%, 100% maximálního příkonu
- Na základě těchto tří měření určete pořadnice výsledné přechodové charakteristiky
- Pomocí Strejcovy metody určete počáteční odhady časových konstant statické soustavy druhého řádu s různými časovými konstantami
- Pomocí vhodných metod (gradientní, Newtonova, Gauss-Newtonova) aproximujte přechodovou charakteristiku. Pro realizaci programů použijte výpočetní systém MATLAB

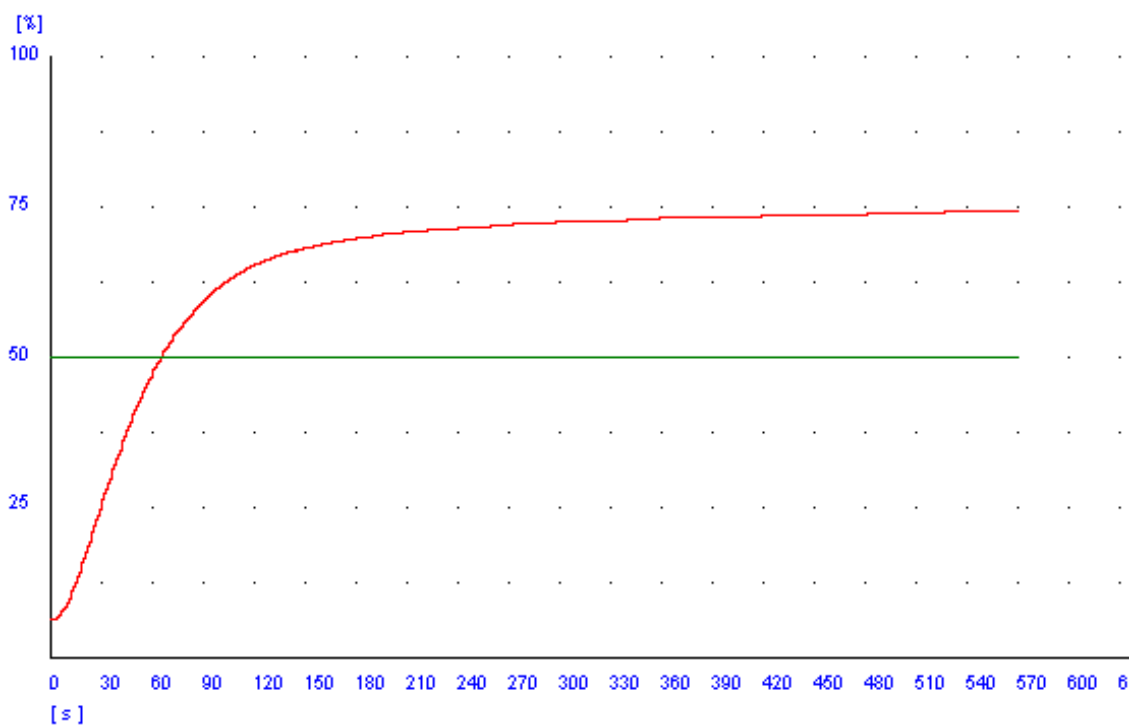
2.1 Měření

Měření teplotně proměnného odporu probíhalo pomocí programu W-Control v univerzitní laboratoři. Pro vyvarování se chyb, je potřeba měření opakovat pro různé amplitudy a polaritu vstupního signálu. Přechodová charakteristika se měří tím způsobem, že se systém (v mém případě laboratorní model) nejprve uvede do ustáleného stavu a poté se vstupní veličina změní skokem na jinou hodnotu. Měření, pro velikost skokové změny z nuly na 50%, z nuly na 75%, a z nuly na 100%, jsem pro každou skokovou změnu opakovala dvakrát. Pro jasnou představu, a pro rozsah naměřených bodů, přiložím alespoň několik počátečních a konečných hodnot z každého měření.

Měření pro skokovou změnu z nuly na 50%:



Obr. 8. Přechodová charakteristika s 50% skokovou změnou



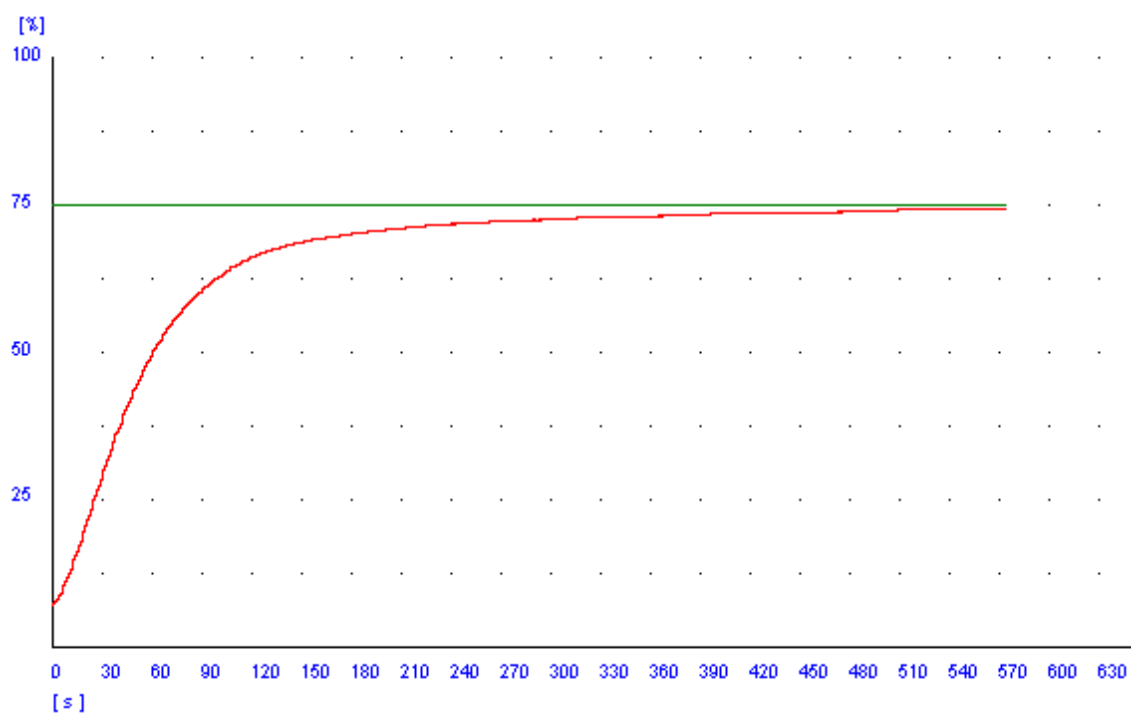
Obr. 9. Přechodová charakteristika s 50% skokovou změnou

Exportováno: 11:10:56		
Kanál č. 1: Čas [s]		
Kanál č. 2: Analog. vstup [degC]		
Kanál č. 3: Žádaná h. [%]		
[1]	[2]	[3]
0	26.367	50
1	26.367	50
2	26.367	50
3	26.562	50
4	27.148	50
5	27.93	50
6	29.297	50
7	30.859	50
8	32.812	50
9	34.766	50
10	37.109	50
	...	
	...	
	...	
564	298.633	50
565	298.633	50
566	298.633	50
567	298.633	50
568	298.633	50
569	298.633	50
570	298.828	50
571	298.828	50
572	298.633	50
573	298.828	50

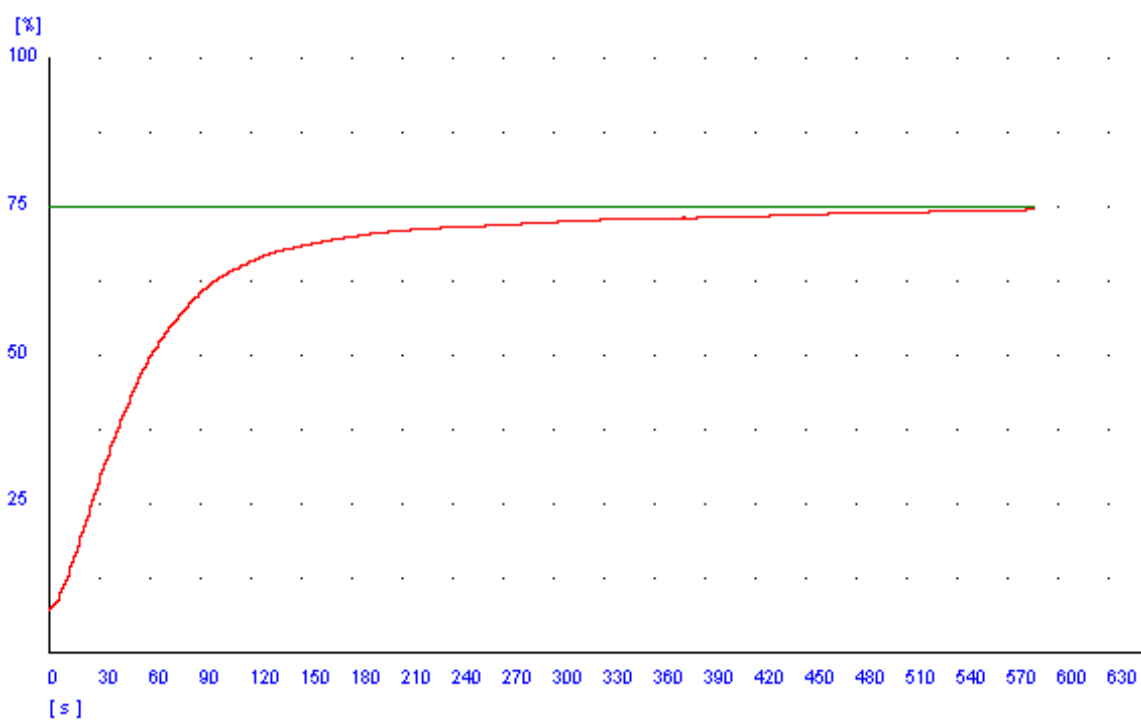
Exportováno: 10:45:15		
Kanál č. 1: Čas [s]		
Kanál č. 2: Analog. vstup [degC]		
Kanál č. 3: Žádaná h. [%]		
[1]	[2]	[3]
0	25.781	50
1	25.586	50
2	25.586	50
3	25.781	50
4	26.367	50
5	27.344	50
6	28.516	50
7	30.078	50
8	31.836	50
9	33.984	50
10	36.328	50
	...	
	...	
	...	
563	297.461	50
564	297.461	50
565	297.461	50
566	297.461	50
567	297.461	50
568	297.461	50
569	297.461	50
570	297.461	50
571	297.461	50
572	297.461	50

Tab. 5. Počáteční a konečné hodnoty přechodových charakteristik s 50% skokovou změnou

Měření pro skokovou změnu z nuly na 75%:



Obr. 10. Přejchodová charakteristika s 75% skokovou změnou



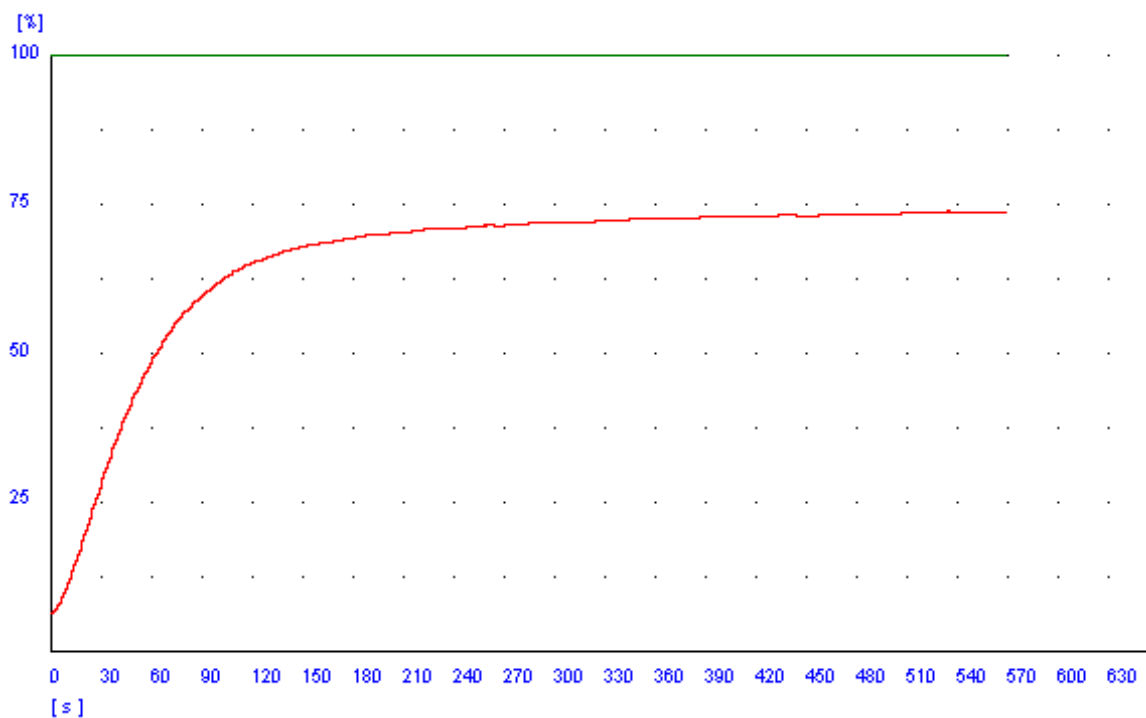
Obr. 11. Přejchodová charakteristika s 75% skokovou změnou

Exportováno: 10:19:08		
Kanál č. 1: Čas [s]		
Kanál č. 2: Analog. vstup [degC]		
Kanál č. 3: Žádaná h. [%]		
[1]	[2]	[3]
0	28.32	75
1	29.492	75
2	30.664	75
3	32.227	75
4	34.18	75
5	36.133	75
6	38.477	75
7	40.82	75
8	43.555	75
9	46.289	75
10	49.219	75
	...	
	...	
	...	
567	297.852	75
568	297.852	75
569	297.852	75
570	297.852	75
571	298.047	75
572	297.852	75
573	297.852	75
574	298.047	75
575	298.047	75
576	298.047	75

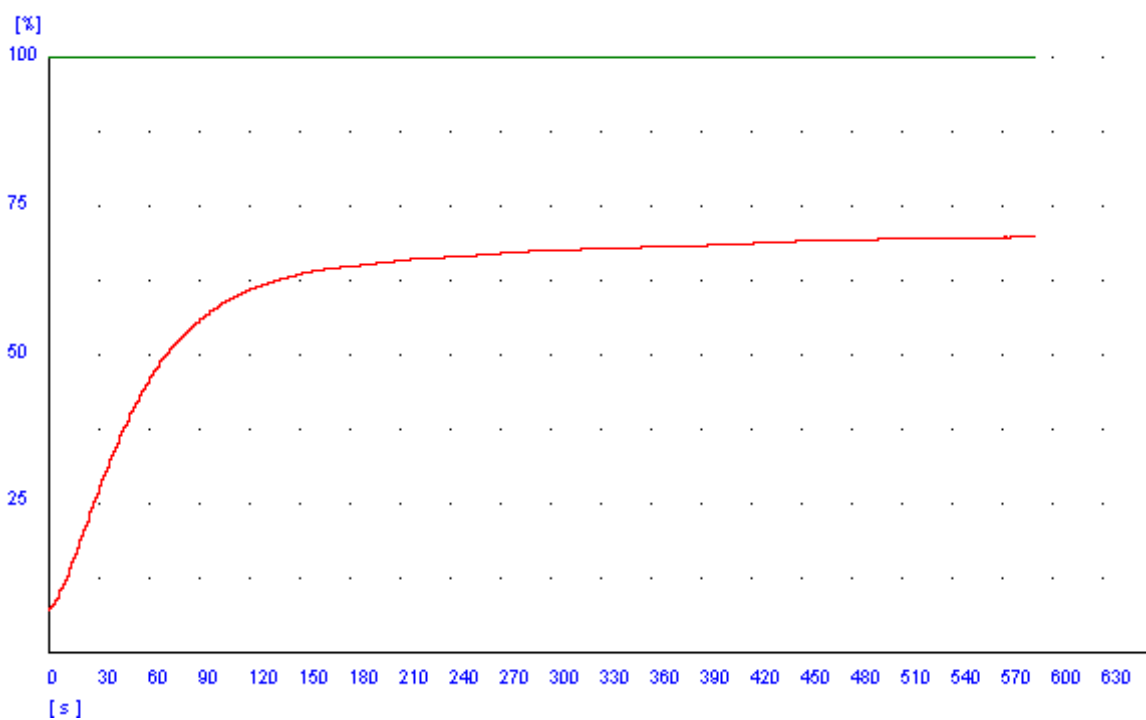
Exportováno: 09:54:59		
Kanál č. 1: Čas [s]		
Kanál č. 2: Analog. vstup [degC]		
Kanál č. 3: Žádaná h. [%]		
[1]	[2]	[3]
0	27.734	75
1	28.711	75
2	30.078	75
3	31.445	75
4	33.398	75
5	35.352	75
6	37.695	75
7	40.039	75
8	42.773	75
9	45.508	75
10	48.437	75
	...	
	...	
	...	
579	298.047	75
580	298.047	75
581	298.047	75
582	298.242	75
583	298.242	75
584	298.242	75
585	298.242	75
586	298.242	75
587	298.242	75
588	298.437	75

Tab. 6. Počáteční a konečné hodnoty přechodových charakteristik s 75% skokovou změnou

Měření skokové změny z nuly na 100%:



Obr. 11. Přejíhodová charakteristika s 100% skokovou změnou



Obr. 12. Přejíhodová charakteristika s 100% skokovou změnou

Exportováno: 09:40:57		
Kanál č. 1: Čas [s]		
Kanál č. 2: Analog. vstup [degC]		
Kanál č. 3: Žádaná h. [%]		
[1]	[2]	[3]
0	27.93	100
1	29.297	100
2	30.664	100
3	32.422	100
4	34.18	100
5	36.133	100
6	38.477	100
7	40.82	100
8	43.164	100
9	45.898	100
10	48.633	100
	...	
	...	
	...	
582	279.492	100
583	279.492	100
584	279.492	100
585	279.492	100
586	279.492	100
587	279.492	100
588	279.687	100
589	279.687	100
590	279.687	100
591	279.687	100

Exportováno: 09:28:19		
Kanál č. 1: Čas [s]		
Kanál č. 2: Analog. vstup [degC]		
Kanál č. 3: Žádaná h. [%]		
[1]	[2]	[3]
0	24.609	100
1	25.391	100
2	26.758	100
3	28.32	100
4	30.078	100
5	32.031	100
6	34.375	100
7	36.719	100
8	39.258	100
9	41.992	100
10	44.922	100
	...	
	...	
	...	
562	295.117	100
563	295.117	100
564	295.117	100
565	295.312	100
566	295.312	100
567	295.312	100
568	295.312	100
569	295.312	100
570	295.312	100
571	295.508	100

Tab. 7. Počáteční a konečné hodnoty přechodových charakteristik se 100% skokovou změnou

Mezi jednotlivými měřeními je potřeba počkat, až se model ochladí na přijatelnou teplotu. Hodnoty každé přechodové charakteristiky exportujeme do Excelu. Z každých dvou měření je pak zapotřebí vybrat jedno, dle uvážení nejlepší. Dále bývá ještě nutností upravit počet naměřených vzorků – Z měření tedy vybereme vždy to s nejnižší náběhovou teplotou a počet vzorků upravíme na 571.

2.2 Určení pořadnic výsledné přechodové charakteristiky

Takhle upravená data pak zprůměrujeme dle vztahu (1). Pořadnice v čase 0 sekund se

$$\text{například vypočítá: } f_0 = \frac{\sum_{k=1}^3 \text{sign}(\Delta u_k) y_{ik}}{\sum_{k=1}^3 |\Delta u_k|} = \frac{50 \cdot 25,781 + 75 \cdot 27,734 + 100 \cdot 24,609}{50 + 75 + 100} = 25,91111$$

Další pořadnice, v čase 1 sekunda se vypočítá:

$$f_1 = \frac{\sum_{k=1}^3 \text{sign}(\Delta u_k) y_{ik}}{\sum_{k=1}^3 |\Delta u_k|} = \frac{50 \cdot 25,586 + 75 \cdot 28,711 + 100 \cdot 25,391}{50 + 75 + 100} = 26,541$$

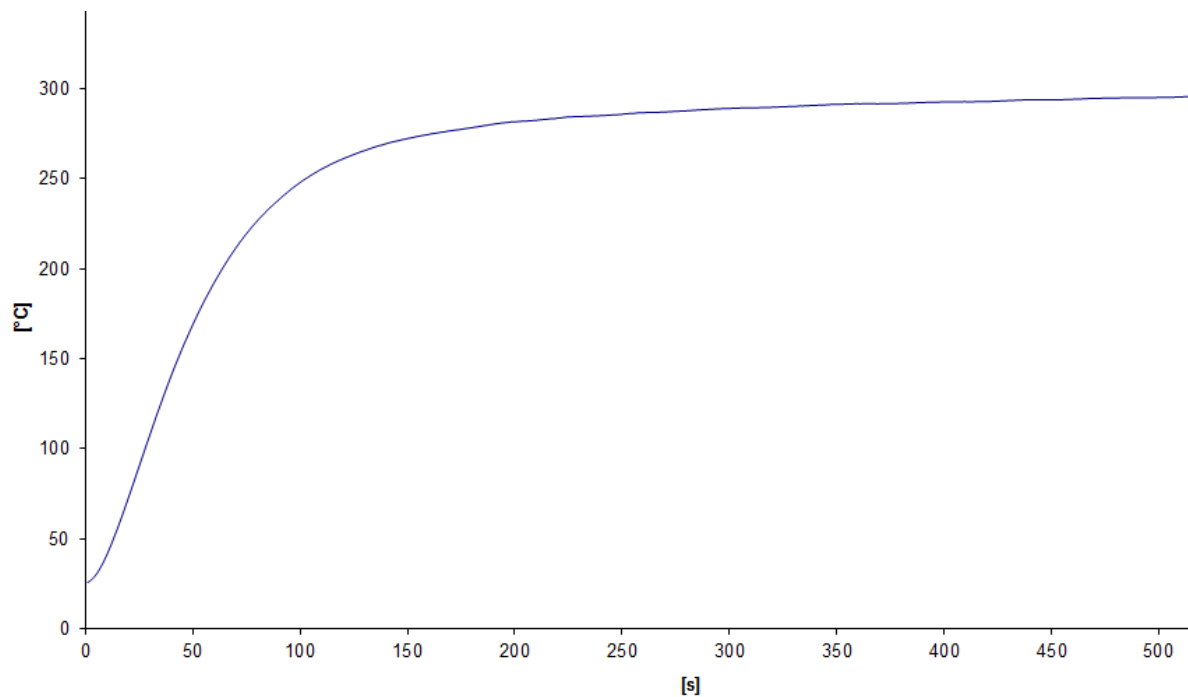
Samozřejmě nebudeme počítat 571 pořadnic analyticky, ale numericky, můžeme použít Excel.

Pro velký rozsah zde umístíme zase jen několik počátečních a konečných hodnot:

pořadnice	hodnota
0	25.91111
1	26.541
2	27.60422
3	28.79744
4	30.36
5	32.09644
6	34.17967
7	36.34989
8	38.78033
9	41.38444
10	44.18389
11	46.98367
12	50.02178
13	53.06011
...	...
...	...
...	...
561	296.4842
562	296.6362
563	296.5496
564	296.5496
565	296.5496
566	296.6362
567	296.6362
568	296.6362
569	296.6362
570	296.6362
571	296.7012

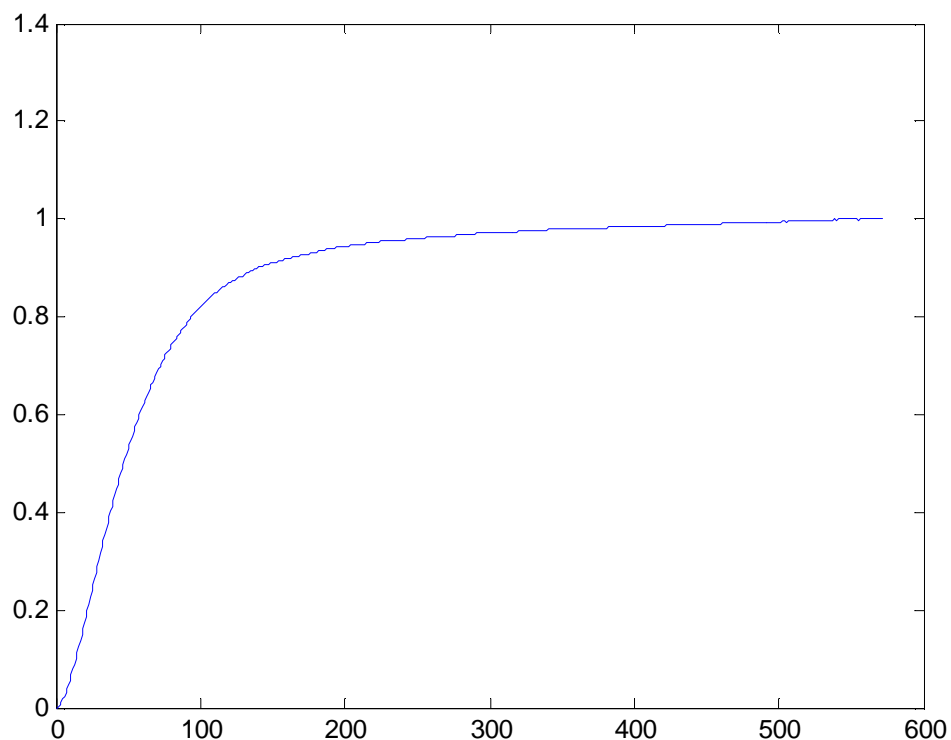
Tab. 8. Počáteční a konečné hodnoty zprůměrované přechodové charakteristiky

Takto zprůměrovaná data si vykreslíme v grafu:



Obr. 13. Zprůměrovaná přechodová charakteristika

Pro určení počátečních odhadů, výslednou přechodovou charakteristiku, resp. odezvu $y(t)$, přepočítáme v novém měřítku tak, aby se počáteční hodnota rovnala nule a ustálená hodnota jedné. To uděláme tak, že nejprve od všech hodnot odečteme první hodnotu, a následně vydělíme poslední hodnotou. Výsledná přechodová charakteristika, tzv. **normovaná přechodová charakteristika** bude začínat v nule a ustálí se na jedničce:



Obr. 14. Normovaná přechodová charakteristika

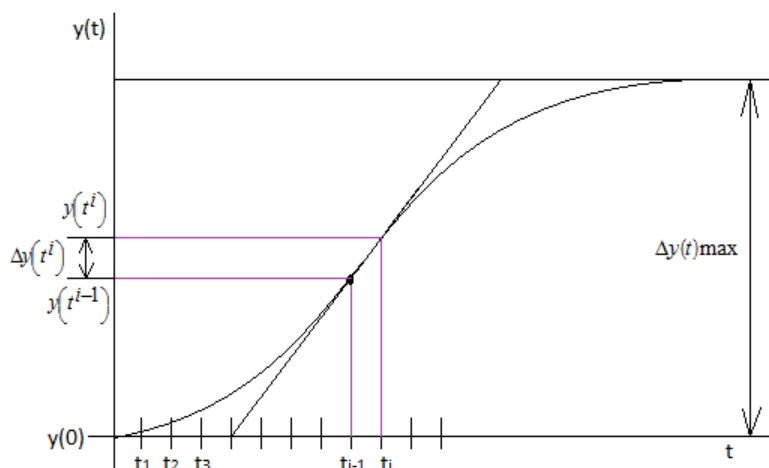
2.3 Získání počátečních odhadů časových konstant Strejcovou metodou

2.3.1 Určení souřadnic inflexního bodu

V inflexním bodě platí, $\left[\frac{d\Delta y(t)}{dt} \right] = \max$, derivaci nahradíme diferencí a dostáváme:

$$\frac{y(t^i) - y(t^{i-1})}{t^i - t^{i-1}} = \max \Rightarrow \frac{0.225525 - 0.211985}{24 - 23} = 0.01354$$

0.010336	11
0.011216	12
0.011217	13
0.011616	14
0.011938	15
0.012256	16
0.012097	17
0.01282	18
0.012819	19
0.012576	20
0.0129	21
0.012736	22
0.01354	23
0.012739	24
0.012978	25
0.01298	26
0.012979	27
0.012658	28
0.012739	29
0.012978	30
0.012739	31
0.01274	32
0.012256	33
0.012177	34
0.011937	35



Tab. 9. Hodnoty pro určení inflexního bodu

Zjistili jsme tedy, že má inflexní bod souřadnice čas=23s a $y(t)=0.211985$ a leží v intervalu, kde vztah (52) nabývá maximální hodnoty.

2.3.2 Určení rovnice tečny

Rovnice tečny je dána vztahem: $y_t = a + bt$. K určení této přímky použijeme pětibodovou lineární regresi, kde jako střední bod bude inflexní bod.

0.186348	21
0.199249	22
0.211985	23
0.225525	24
0.238264	25

Tab. 10. Hodnoty pro lineární regresi

Parametry a , b určíme regresním výpočtem. Můžeme použít funkci excelu – linregrese,

B	A
0.013011	-0.08697
7.11E-05	0.001638
0.99991	0.000225
33484.33	3
0.001693	1.52E-07

Tab. 11. Lineární regrese, výstup

kde ve výstupu jsou první vypočtené hodnoty hledané koeficienty a, b. Rovnice tečny má tedy tvar : $y_t = -0,08697 + 0,013011t$. Tečna k charakteristice vymezuje na časové ose úseky T_u (doba průtahu) a T_n (doba náběhu). Pro $t=T_u$ je $y_t=0$, proto z rovnice tečny (53) plyne $0 = a + T_u b$, a doba průtahu je $T_u = 6,6843s$. Pro dobu náběhu je z obr. 4 zřejmé, že $tg\alpha = b = \frac{(t^m)}{T_n}$, z tohoto vztahu určíme dobu náběhu $T_n = \frac{\Delta y(t^m)}{b} = \frac{1}{0,013011} = 76,85804s$.

2.3.3 Určení počátečních odhadů T_1 a T_2

Pro určení počátečního odhadu T_1 použijeme vztah $t_1 = k_1(T_1 + T_2) \Rightarrow T_1 = \frac{t_1}{k_1(1 + \tau)}$, kde

souřadnici t_1 určíme tak, že nejprve najdeme minimální hodnotu odpovídající vztahu:

$S = [y(t^i) - 0,72\Delta y(t^m)]^2$, pro $i=1,2,\dots,m$, a z této minimální hodnoty už snadno vyčteme

pořadnici $y(t_1)$ a k ní příslušné t_1 . Konstanta k_1 byla zjištěna experimentováním a má hodnotu

1,2564 a poměr časových konstant $\tau = \frac{T_2}{T_1}$ určíme na základě poměru $\tau_u = \frac{T_u}{T_n} = 0,087$

z tabulky 12:

T_2/T_1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
T_u/T_n	0.05	0.072	0.084	0.092	0.097	0.1	0.102	0.103	0.103	0.104
y_{in}	0.148	0.197	0.224	0.24	0.25	0.256	0.26	0.263	0.264	0.264

Tab. 12. Tabulka závislosti poměru časových konstant na pořadnici inflexního bodu pro soustavu druhého řádu

Pro souřadnici t_1 tedy hledáme minimální hodnotu:

t	min	y(t)
72	0.000482045	0.698044477
73	0.000264562	0.703734632
74	0.000106877	0.709661877
75	2.3136E-05	0.715190007

76	5.14544E-07	0.720717317
77	3.51067E-05	0.725925089
78	0.000129332	0.731372412
79	0.00025661	0.736019044
80	0.00044376	0.741065611
81	0.000690355	0.746274614
82	0.000946256	0.750761272
83	0.001236669	0.755166302
84	0.00158507	0.759812934
85	0.001934209	0.763979643
86	0.002349062	0.768467122

Tab. 13. Hledání minimální hodnoty vztahu $S = [y(t^i) - 0.72\Delta y(t^m)]^2$

Příslušné $y(t_1)$ je tedy 0.72 a $t_1=76s$.

$$\text{Nyní vše dosadíme do vztahu } T_1 = \frac{t_1}{k_1(1+\tau)} = \frac{76}{1.2564(1+0.3)} = 46.531s.$$

Pro počáteční odhad T_2 použijeme stejnou základovou rovnici

$$t_1 = k_1(T_1 + T_2) \Rightarrow T_2 = \frac{t_1}{k_1\left(1 + \frac{1}{\tau}\right)} = \frac{a_1}{k_1(1+\tau)}. \text{ Všechny hodnoty jsou stejné jako v minulém}$$

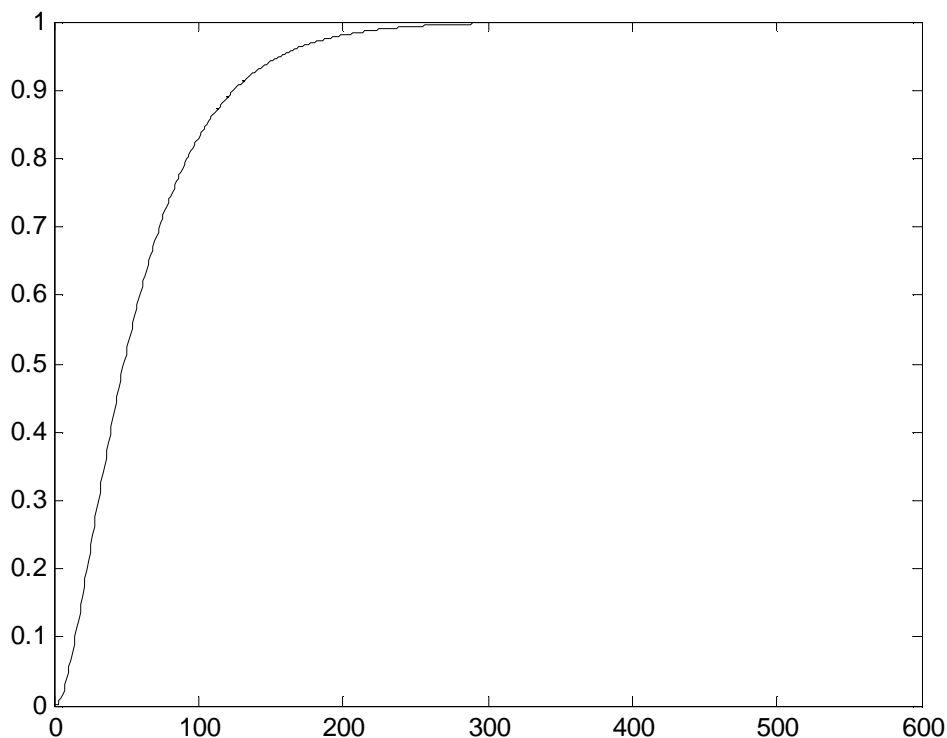
$$\text{případě proto rovnou dosadíme } T_2 = \frac{0.3 \cdot 76}{1.2564 \cdot (1+0.3)} = 13.959s.$$

Nyní když máme vypočítány aktuální časové konstanty, vykreslíme si aproximovanou přechodovou charakteristiku. Můžeme použít vztah pro přechodovou charakteristiku

$$h(T_1, T_2) = 1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t^j}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t^j}{T_2}}, \text{ anebo můžeme použít vztah pro přenos soustavy}$$

$$\text{druhého řádu } G(s) = \frac{k}{(T_1s+1)(T_2s+1)}. \text{ V téhle práci budeme používat první z výše zmíněných}$$

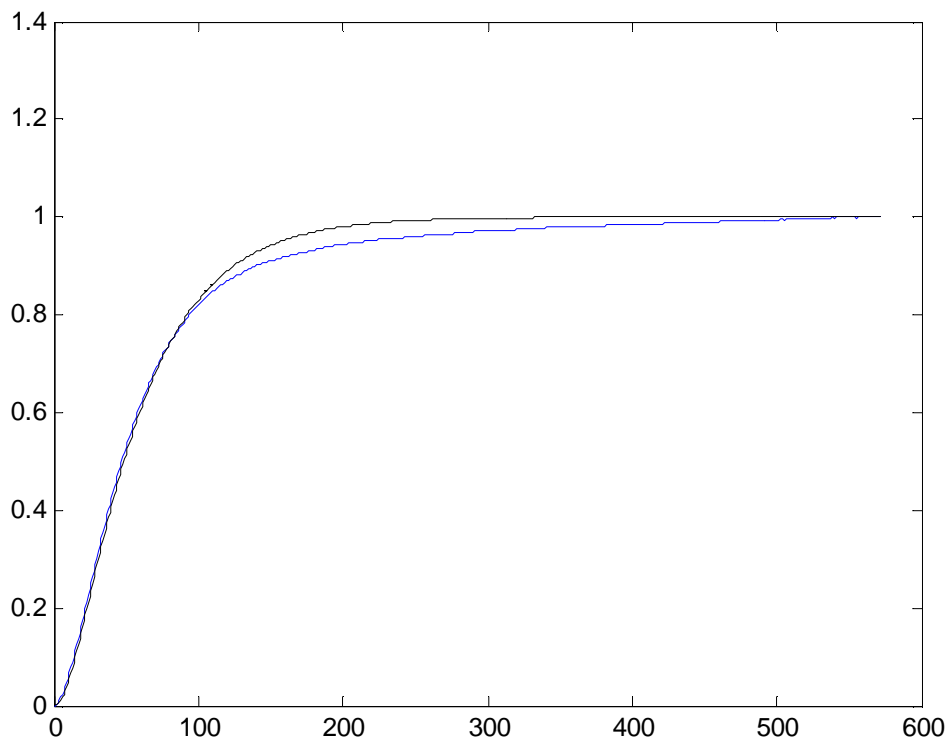
vztahů, kde T_1, T_2 jsou hodnoty časových konstant a t^j je řádková matice s hodnotami 0-571, zde reprezentující sekundy. (Je praktické nepoužívat tenhle vztah přímo pro vykreslování grafů, ale raději si takhle uložit hodnoty do proměnné ve Workspace, a pro vykreslování grafů příkazem plot() používat tuhle proměnnou!) Nyní si tedy vykreslíme graf příkazem plot() v MATLABu:



Obr. 15. Přejchodová charakteristika aproximována metodou prof. Strejce

Pro úplnou představu porovnáme normovanou a aproximovou charakteristiku v jednom grafu. Pro tento krok je zapotřebí naimportovat hodnoty normované charakteristiky, které máme uložené v Excelu do MATLABu. Většinou bývá nutností změnit oddělovač čárek, protože v MATLABu je desetinným oddělovačem tečka a v Excelu čárka. Dalším problémem už naimporotvaných dat bývá rozměr matice, ten překonáme jednoduchou transpozicí matice.

Po překonání počátečních problémů jednoduše vykreslíme jednu charakteristiku příkazem `plot()` poté graf podržíme příkazem `hold on` a vykreslíme druhý graf příkazem `plot()`:



Obr. 16. Přejchodová charakteristika normovaná (modrá) a aproximovaná metodou prof. Strejce (černá)

2.4 Realizace programů

2.4.1 Gradientní metoda

Pro realizaci programů byl zvolen výpočetní systém MATLAB. Každý program byl naprogramován v editoru jako posloupnost příkazů, přičemž workspace sloužil k přednastavení proměnných a k ukládání mezivýsledků.

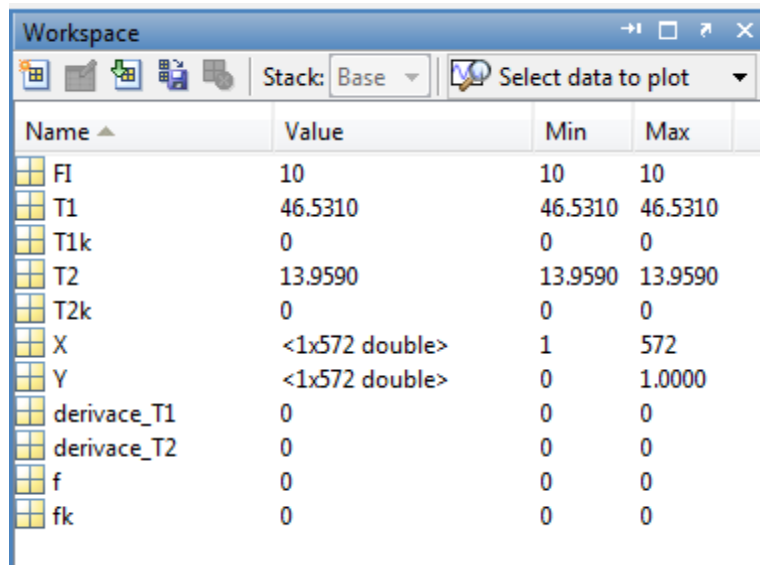
Gradientní metoda minimalizuje součet čtverců aproximované a naměřené přechodové charakteristiky. Program je naprogramován tak, že se každou iteraci hledají nové T1 a T2, a pokud podmínka nerovnosti vyhovuje, nové hodnoty se přiřadí na místo těch původních, pokud podmínka nevyhovuje, sníží se velikost kroku. Zde je program:

```

1 f=sum((1-T1/(T1-T2)*exp(-X/T1)+T2/(T1-T2)*exp(-X/T2)-Y).^2);
2
3 derivace_T2=sum(2*(1-T1/(T1-T2)*exp(-X/T1)+T2/(T1-T2)*exp(-X/T2)).*
4 .*(T1/(T1-T2)^2).*(exp(-X/T2)-exp(-X/T1))-(X/T2*(T1-T2)*exp(-X/T2)));
5
6 derivace_T1=sum(2*(1-T1/(T1-T2)*exp(-X/T1)+T2/(T1-T2)*exp(-X/T2)).*
7 .*(T2/(T1-T2)^2).*(exp(-X/T1)-exp(-X/T2))-(X/T1*(T1-T2)*exp(-X/T1)));
8
9 T1k=T1-FI*(derivace_T1);
10
11 T2k=T2-FI*(derivace_T2);
12
13 fk=sum((1-T1k/(T1k-T2k)*exp(-X/T1k)+T2k/(T1k-T2k)*exp(-X/T2k)-Y).^2);
14
15 if fk<f
16
17 T1=T1k;
18
19 T2=T2k;
20
21 else
22
23 FI=FI/10;
24
25 end

```

Workspace si přednastavíme:



The screenshot shows the MATLAB Workspace window with the following variables and their values:

Name	Value	Min	Max
FI	10	10	10
T1	46.5310	46.5310	46.5310
T1k	0	0	0
T2	13.9590	13.9590	13.9590
T2k	0	0	0
X	<1x572 double>	1	572
Y	<1x572 double>	0	1.0000
derivace_T1	0	0	0
derivace_T2	0	0	0
f	0	0	0
fk	0	0	0

Kde FI je aktuální velikost kroku, T1 je časová konstanta, T1k je časová konstanta v následujícím kroku, T2 je časová konstanta, T2k je časová konstanta v následujícím kroku, X je řádková matice 1x572 a představuje čas vzorkování, zde sekundy:

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	2	3	4	5	6
2							

Y je také řádková matice 1x572, a představuje jednotlivé pořadnice normované charakteristiky:

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0.0023	0.0063	0.0107	0.0164	0.0228	0.0305
2							

Derivace_T1, derivace_T2, f a fk slouží k ukládání mezivýsledků.

Program byl naprogramován pro lepší přehlednost tak, že každý krok spouští programátor nebo uživatel sám:

1. iterace: Vypočítávají se nové hodnoty T1 a T2, v programu reprezentovány proměnnými T1k a T2k. Poté se kontroluje podmínka $f(T_1^{k+1}, T_2^{k+1}) < f(T_1^k, T_2^k)$, která nevyhovuje, proto se jen sníží velikost kroku FI, a nové hodnoty T1, T2 se na místo těch původních nepřihadí:

Name ^	Value	Min	Max
FI	1	1	1
T1	46.5310	46.5310	46.5310
T1k	2.0219e+04	2.0219...	2.0219...
T2	13.9590	13.9590	13.9590
T2k	2.4092e+03	2.4092...	2.4092...

2. iterace: Je obdobná 1. iteraci, sníží se jen hodnota proměnné FI:

Name ^	Value	Min	Max
FI	0.1000	0.1000	0.1000
T1	46.5310	46.5310	46.5310
T1k	2.0637e+03	2.0637...	2.0637...
T2	13.9590	13.9590	13.9590
T2k	253.4818	253.48...	253.48...

3. iterace: Snížení hodnoty FI:

Name ▲	Value	Min	Max
FI	0.0100	0.0100	0.0100
T1	46.5310	46.5310	46.5310
T1k	248.2521	248.25...	248.25...
T2	13.9590	13.9590	13.9590
T2k	37.9113	37.9113	37.9113

4. iterace: Snížení hodnoty FI:

Name ▲	Value	Min	Max
FI	1.0000e-03	1.0000...	1.0000...
T1	46.5310	46.5310	46.5310
T1k	66.7031	66.7031	66.7031
T2	13.9590	13.9590	13.9590
T2k	16.3542	16.3542	16.3542

5. iterace: Podmínka vyhovuje, aktuální hodnoty T1 a T2 se přiřadí na místo těch původních:

Name ▲	Value	Min	Max
FI	1.0000e-03	1.0000...	1.0000...
T1	48.5482	48.5482	48.5482
T1k	48.5482	48.5482	48.5482
T2	14.1985	14.1985	14.1985
T2k	14.1985	14.1985	14.1985

6. iterace: Podmínka nevyhovuje, snižuje se velikost kroku:

Name ▲	Value	Min	Max
FI	1.0000e-04	1.0000...	1.0000...
T1	48.5482	48.5482	48.5482
T1k	50.7748	50.7748	50.7748
T2	14.1985	14.1985	14.1985
T2k	14.4509	14.4509	14.4509

7. iterace: Opět snížení proměnné FI:

Name ▲	Value	Min	Max
FI	1.0000e-05	1.0000...	1.0000...
T1	48.5482	48.5482	48.5482
T1k	48.7709	48.7709	48.7709
T2	14.1985	14.1985	14.1985
T2k	14.2238	14.2238	14.2238

8. iterace: Snížení proměnné FI:

Name ▲	Value	Min	Max
FI	1.0000e-06	1.0000...	1.0000...
T1	48.5482	48.5482	48.5482
T1k	48.5705	48.5705	48.5705
T2	14.1985	14.1985	14.1985
T2k	14.2010	14.2010	14.2010

9. iterace:

Name ▲	Value	Min	Max
FI	1.0000e-07	1.0000...	1.0000...
T1	48.5482	48.5482	48.5482
T1k	48.5504	48.5504	48.5504
T2	14.1985	14.1985	14.1985
T2k	14.1988	14.1988	14.1988

10. iterace: Vidíme že T2k se ustálila na stejné hodnotě jako T2:

Name ▲	Value	Min	Max
FI	1.0000e-08	1.0000...	1.0000...
T1	48.5482	48.5482	48.5482
T1k	48.5484	48.5484	48.5484
T2	14.1985	14.1985	14.1985
T2k	14.1985	14.1985	14.1985

11. iterace: T1k se ustálila na stejné hodnotě jako T1:

Name ▲	Value	Min	Max
FI	1.0000e-09	1.0000...	1.0000...
T1	48.5482	48.5482	48.5482
T1k	48.5482	48.5482	48.5482
T2	14.1985	14.1985	14.1985
T2k	14.1985	14.1985	14.1985

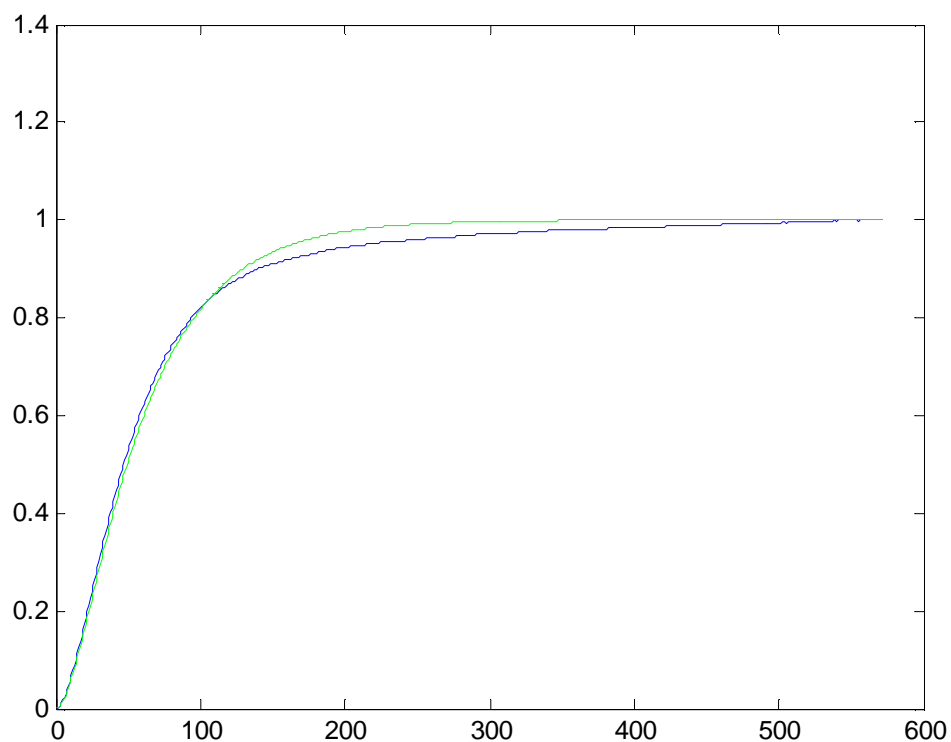
12. iterace: Algoritmus je u konce, iterace se už neliší ani lišit nebudou:

Name ▲	Value	Min	Max
FI	1.0000e-10	1.0000...	1.0000...
T1	48.5482	48.5482	48.5482
T1k	48.5482	48.5482	48.5482
T2	14.1985	14.1985	14.1985
T2k	14.1985	14.1985	14.1985

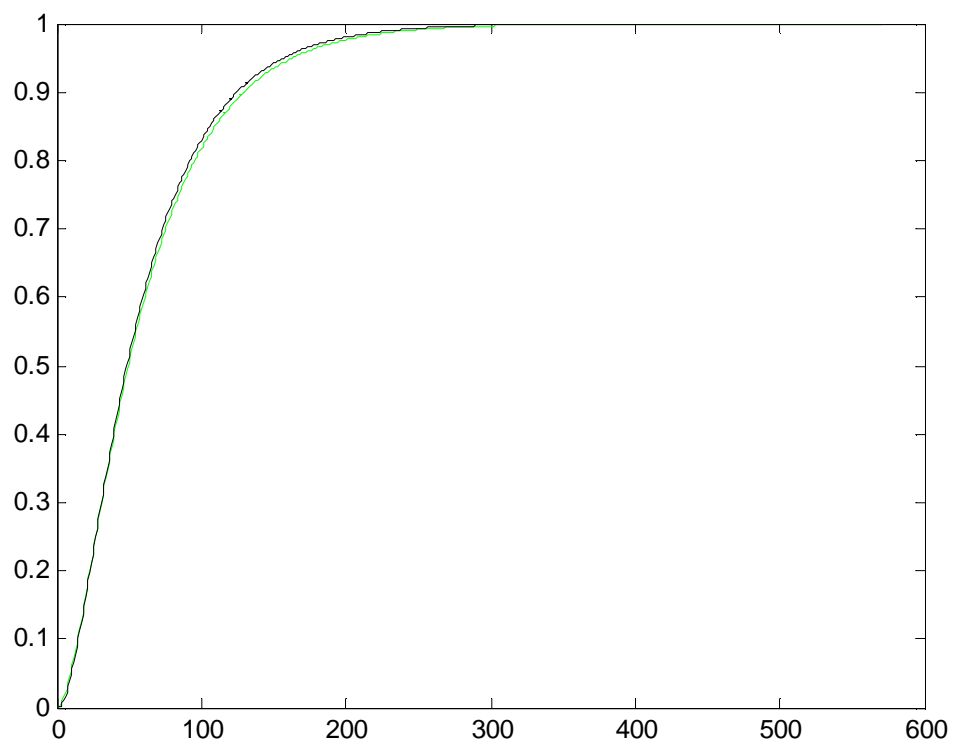
Shrnutí: Gradientní metodou jsme tedy našli nové hodnoty časových konstant. Pro T2 to byla 10. iterace a hodnota 14,1985s a pro T1 to byla 11. iterace a hodnota 48,5482s. Obě tyto hodnoty jsou z páté iterace, kdy vyhovovala podmínka.

Aproximované časové konstanty gradientní metodou si vykreslíme v jednom grafu s dvěma předchozími charakteristikami podle již známého vztahu

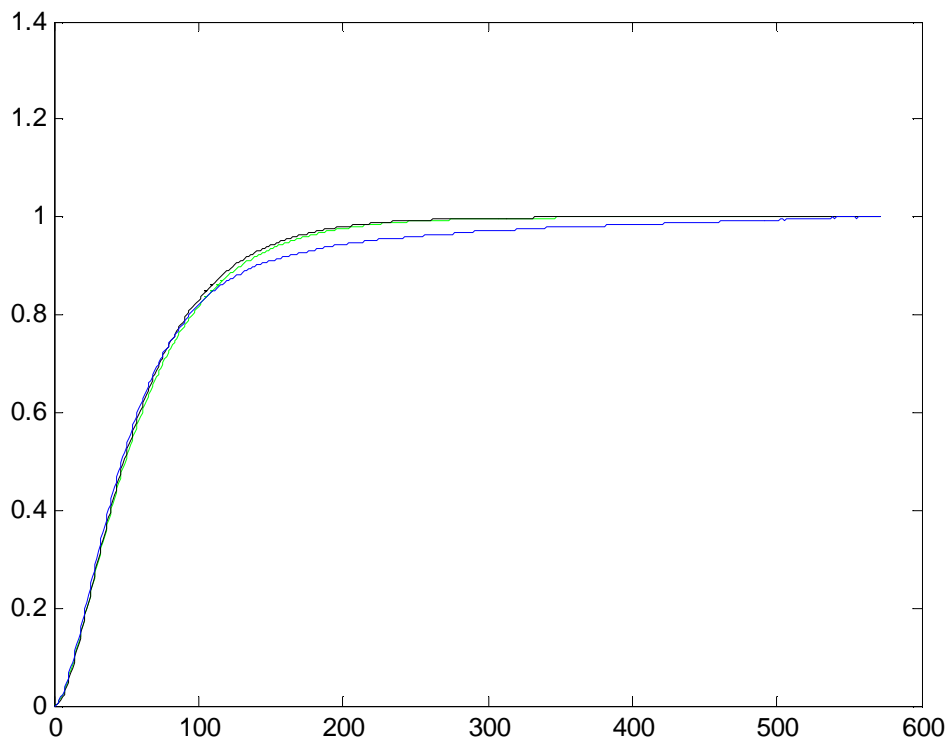
$$h(T_1, T_2) = 1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t^j}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t^j}{T_2}} :$$



Obr. 17. Přechodová charakteristika normovaná (modrá) a aproximovaná gradientní metodou (zelená)



Obr. 18. Přejchodová charakteristika aproximovaná gradientní (zelená) a Strejcovou metodou (černá)



Obr. 19. Přejchodová charakteristika normovaná (modrá), Strejcova (černá), Gradientní (zelená)

2.4.2 Newtonova metoda

V Newtonově metodě se pracuje s poměrem časových konstant. Obecně je to poměr menší časové konstanty ku větší. Program funguje jako minimalizující posloupnost. Pracuje na základě podmínky, kde se kontroluje rozdíl aktuálního poměru časových konstant s tím původním, a jestliže je menší nebo rovno, aktuální poměr se přiřadí na místo původního a počítá se další iterace, a jestliže je větší, program je u konce a časové konstanty se vypočítají z poměru, který ještě podmínce vyhovoval.

Zde je program:

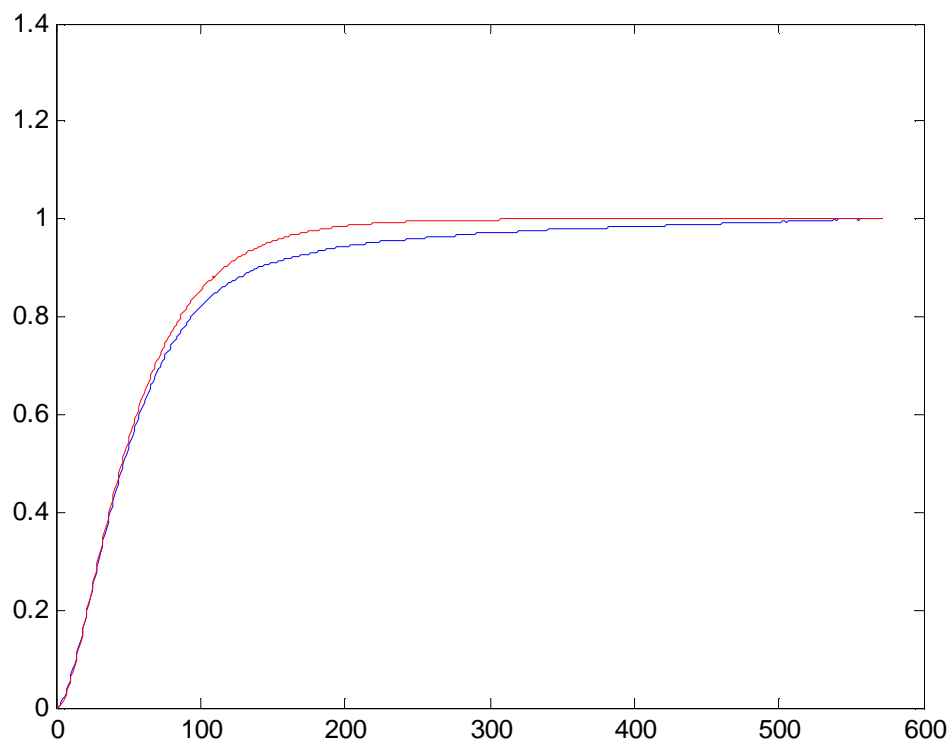
	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0.0023	0.0063	0.0107	0.0164	0.0228	0.0305
2							

df, f, tau_k jsou nastaveny na nulu a slouží k ukládání mezivýsledků, eps reprezentuje onu podmínku, slouží k porovnání aktuálně vypočítaného a stávajícího poměru časových konstant a je přednastaven na 0.0001, tau je poměr časových konstant $13,959/46,531=0,29993552$, y_infl je pořadnice inflexního bodu s hodnotou 0,2120.

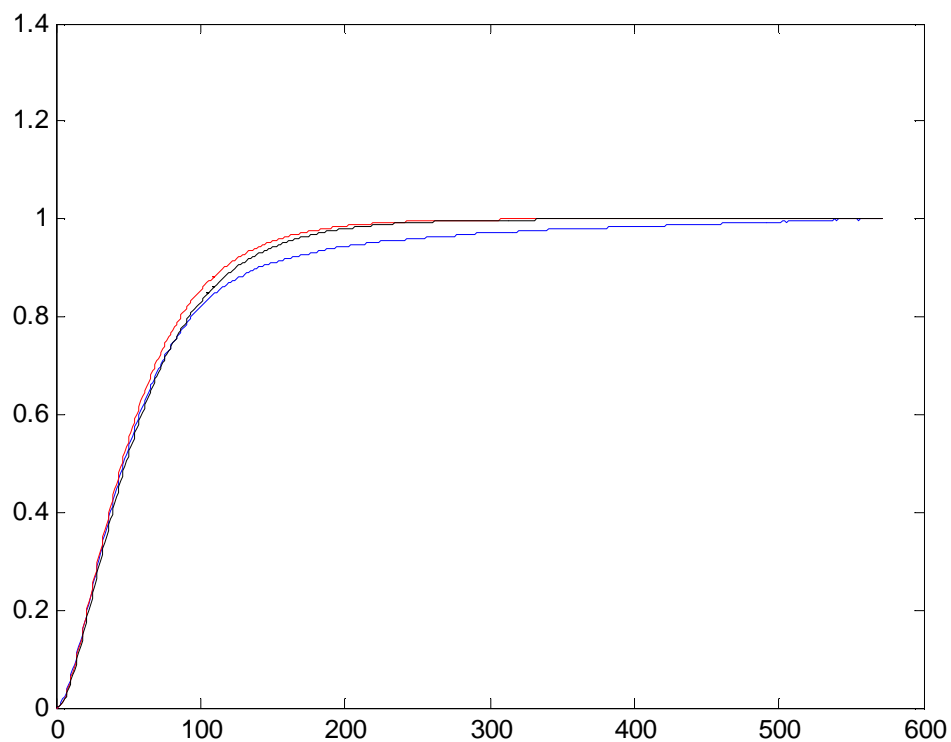
Když program spustíme tak se najdou časové konstanty hned po první iteraci: T1=42.9428; T2=13.6849

Name ▲	Value	Min	Max
T1	42.9428	42.9428	42.9428
T2	13.6849	13.6849	13.6849

Pro kontrolu si vykreslíme grafy:

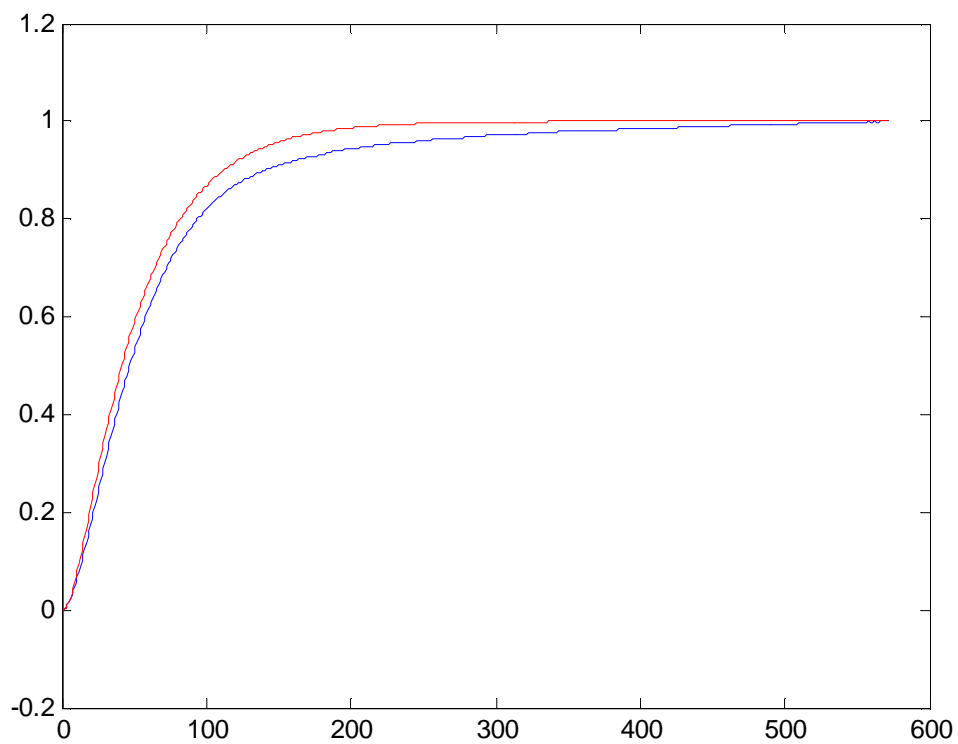


Obr. 20. Přechodová charakteristika normovaná (modrá) a aproximovaná Newtonovou metodou (červená)

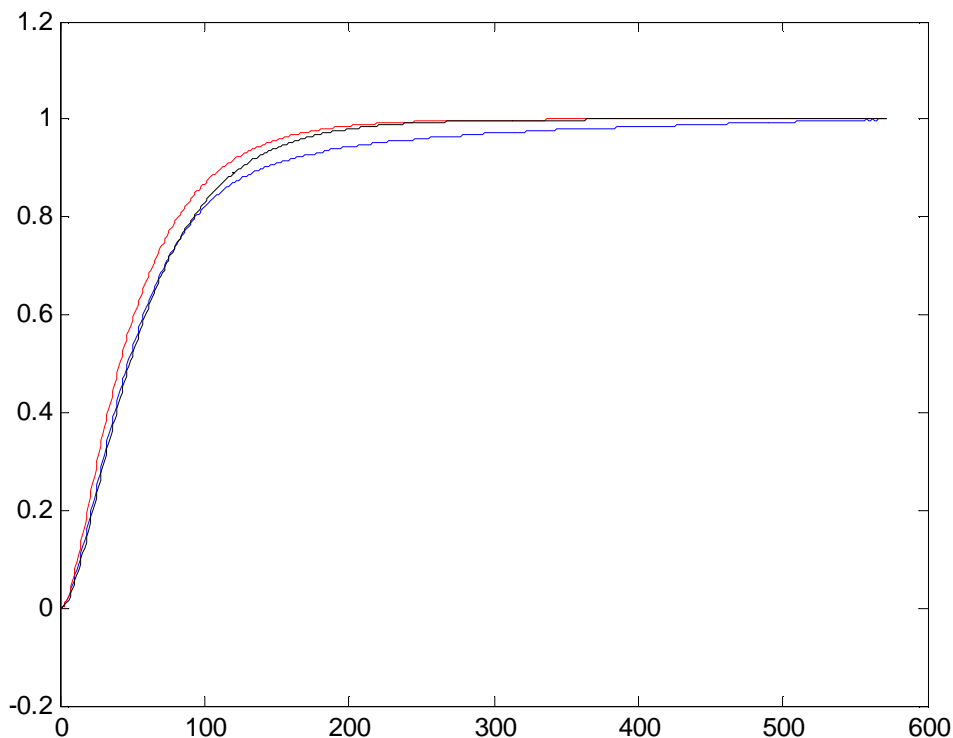


Obr. 21. Přejchodová charakteristika normovaná (modrá), Strejcova (černá), Newtonova (červená)

Když nyní změním ϵ na hodnotu 0,1 vypočítají se T1, T2 po 7. iteraci: T1=43.5919; T2=9.4752. Pro kontrolu si vykreslíme si grafy:



Obr. 22. Přejchodová charakteristika normovaná (modrá) a aproximovaná Newtonovou metodou 2 (červená)



Obr. 23. Přejchodová charakteristika normovaná (modrá), Strejcova (černá), Newtonova 2 (červená)

2.4.3 Gauss-Newtonova metoda

Gauss-Newtonova metoda pracuje podobně jako gradientní metoda, také se minimalizuje součet čtverců aproximované a naměřené přechodové charakteristiky. Program je naprogramován tak, že se každou iteraci hledají nové T_1 a T_2 , a porovnávají se na základě nerovnosti $S(T_1^{k+1}, T_2^{k+1}) < S(T_1^k, T_2^k)$ s těmi původními a pokud podmínka vyhovuje, nové hodnoty se přiřadí na místo těch původních, pokud podmínka nevyhovuje, sníží se velikost kroku.

jen snižuje velikost kroku, a konečně ve 14. iteraci podmínka vyhovuje a T1k, T2k s přiřazuje do T1, T2. Dále se pak jen snižuje velikost kroku a konečně ve 29. iteraci se ustálí T2 na hodnotě 13.3913s a ve 32. iteraci se ustálí T1 na hodnotě 49.8383s. Obě tyto hodnoty jsou ze 14. iterace, kdy vyhovovala podmínka:

1.iterace:

T1	46.5310	46.5310	46.5310
T1k	2.7140e+04	2.7140...	2.7140...
T2	13.9590	13.9590	13.9590
T2k	-4.6367e+03	-4.636...	-4.636...
X	<1x572 double>	0	571
Xi	0.4500	0.4500	0.4500

2.iterace:

T1	46.5310	46.5310	46.5310
T1k	1.3593e+04	1.3593...	1.3593...
T2	13.9590	13.9590	13.9590
T2k	-2.3114e+03	-2.311...	-2.311...
X	<1x572 double>	0	571
Xi	0.2250	0.2250	0.2250

3.iterace:

T1	46.5310	46.5310	46.5310
T1k	6.8199e+03	6.8199...	6.8199...
T2	13.9590	13.9590	13.9590
T2k	-1.1487e+03	-1.148...	-1.148...
X	<1x572 double>	0	571
Xi	0.1125	0.1125	0.1125







4.iterace:

T1	46.5310	46.5310	46.5310
T1k	3.4332e+03	3.4332...	3.4332...
T2	13.9590	13.9590	13.9590
T2k	-567.3735	-567.3...	-567.3...
X	<1x572 double>	0	571
Xi	0.0563	0.0563	0.0563







5.iterace:

T1	46.5310	46.5310	46.5310
T1k	1.7399e+03	1.7399...	1.7399...
T2	13.9590	13.9590	13.9590
T2k	-276.7073	-276.7...	-276.7...
X	<1x572 double>	0	571
Xi	0.0281	0.0281	0.0281







6.iterace:

 T1	46.5310	46.5310	46.5310
 T1k	893.2046	893.20...	893.20...
 T2	13.9590	13.9590	13.9590
 T2k	-131.3741	-131.3...	-131.3...
 X	<1x572 double>	0	571
 Xi	0.0141	0.0141	0.0141







7.iterace:

 T1	46.5310	46.5310	46.5310
 T1k	469.8678	469.86...	469.86...
 T2	13.9590	13.9590	13.9590
 T2k	-58.7076	-58.70...	-58.70...
 X	<1x572 double>	0	571
 Xi	0.0070	0.0070	0.0070







8.iterace:

 T1	46.5310	46.5310	46.5310
 T1k	258.1994	258.19...	258.19...
 T2	13.9590	13.9590	13.9590
 T2k	-22.3743	-22.37...	-22.37...
 X	<1x572 double>	0	571
 Xi	0.0035	0.0035	0.0035







9.iterace:

 T1	46.5310	46.5310	46.5310
 T1k	258.1994	258.19...	258.19...
 T2	13.9590	13.9590	13.9590
 T2k	-22.3743	-22.37...	-22.37...
 X	<1x572 double>	0	571
 Xi	0.0035	0.0035	0.0035







10.iterace:

 T1	46.5310	46.5310	46.5310
 T1k	99.4481	99.4481	99.4481
 T2	13.9590	13.9590	13.9590
 T2k	4.8757	4.8757	4.8757
 X	<1x572 double>	0	571
 Xi	8.7891e-04	8.7891...	8.7891...







11.iterace:

 T1	46.5310	46.5310	46.5310
 T1k	72.9895	72.9895	72.9895
 T2	13.9590	13.9590	13.9590
 T2k	9.4173	9.4173	9.4173
 X	<1x572 double>	0	571
 Xi	4.3945e-04	4.3945...	4.3945...







12.iterace:

 T1	46.5310	46.5310	46.5310
 T1k	59.7603	59.7603	59.7603
 T2	13.9590	13.9590	13.9590
 T2k	11.6882	11.6882	11.6882
 X	<1x572 double>	0	571
 Xi	2.1973e-04	2.1973...	2.1973...







13.iterace:

 T1	46.5310	46.5310	46.5310
 T1k	53.1456	53.1456	53.1456
 T2	13.9590	13.9590	13.9590
 T2k	12.8236	12.8236	12.8236
 X	<1x572 double>	0	571
 Xi	1.0986e-04	1.0986...	1.0986...







14.iterace:

 T1	49.8383	49.8383	49.8383
 T1k	49.8383	49.8383	49.8383
 T2	13.3913	13.3913	13.3913
 T2k	13.3913	13.3913	13.3913
 X	<1x572 double>	0	571
 Xi	1.0986e-04	1.0986...	1.0986...







15.iterace:

 T1	49.8383	49.8383	49.8383
 T1k	53.5033	53.5033	53.5033
 T2	13.3913	13.3913	13.3913
 T2k	12.7336	12.7336	12.7336
 X	<1x572 double>	0	571
 Xi	5.4932e-05	5.4932...	5.4932...







16.iterace:

 T1	49.8383	49.8383	49.8383
 T1k	51.6708	51.6708	51.6708
 T2	13.3913	13.3913	13.3913
 T2k	13.0624	13.0624	13.0624
 X	<1x572 double>	0	571
 Xi	2.7466e-05	2.7466...	2.7466...







17.iterace:

 T1	49.8383	49.8383	49.8383
 T1k	50.7546	50.7546	50.7546
 T2	13.3913	13.3913	13.3913
 T2k	13.2269	13.2269	13.2269
 X	<1x572 double>	0	571
 Xi	1.3733e-05	1.3733...	1.3733...







18.iterace:

 T1	49.8383	49.8383	49.8383
 T1k	50.2964	50.2964	50.2964
 T2	13.3913	13.3913	13.3913
 T2k	13.3091	13.3091	13.3091
 X	<1x572 double>	0	571
 Xi	6.8665e-06	6.8665...	6.8665...







19.iterace:

 T1	49.8383	49.8383	49.8383
 T1k	50.0674	50.0674	50.0674
 T2	13.3913	13.3913	13.3913
 T2k	13.3502	13.3502	13.3502
 X	<1x572 double>	0	571
 Xi	3.4332e-06	3.4332...	3.4332...







20.iterace:

 T1	49.8383	49.8383	49.8383
 T1k	49.9528	49.9528	49.9528
 T2	13.3913	13.3913	13.3913
 T2k	13.3707	13.3707	13.3707
 X	<1x572 double>	0	571
 Xi	1.7166e-06	1.7166...	1.7166...







21.iterace:

 T1	49.8383	49.8383	49.8383
 T1k	49.8956	49.8956	49.8956
 T2	13.3913	13.3913	13.3913
 T2k	13.3810	13.3810	13.3810
 X	<1x572 double>	0	571
 Xi	8.5831e-07	8.5831...	8.5831...







22.iterace:

 T1	49.8383	49.8383	49.8383
 T1k	49.8670	49.8670	49.8670
 T2	13.3913	13.3913	13.3913
 T2k	13.3862	13.3862	13.3862
 X	<1x572 double>	0	571
 Xi	4.2915e-07	4.2915...	4.2915...







23.iterace:

 T1	49.8383	49.8383	49.8383
 T1k	49.8526	49.8526	49.8526
 T2	13.3913	13.3913	13.3913
 T2k	13.3887	13.3887	13.3887
 X	<1x572 double>	0	571
 Xi	2.1458e-07	2.1458...	2.1458...







24.iterace:

 T1	49.8383	49.8383	49.8383
 T1k	49.8455	49.8455	49.8455
 T2	13.3913	13.3913	13.3913
 T2k	13.3900	13.3900	13.3900
 X	<1x572 double>	0	571
 Xi	1.0729e-07	1.0729...	1.0729...







25.iterace:

 T1	49.8383	49.8383	49.8383
 T1k	49.8419	49.8419	49.8419
 T2	13.3913	13.3913	13.3913
 T2k	13.3907	13.3907	13.3907
 X	<1x572 double>	0	571
 Xi	5.3644e-08	5.3644...	5.3644...







26.iterace:

 T1	49.8383	49.8383	49.8383
 T1k	49.8401	49.8401	49.8401
 T2	13.3913	13.3913	13.3913
 T2k	13.3910	13.3910	13.3910
 X	<1x572 double>	0	571
 Xi	2.6822e-08	2.6822...	2.6822...







27.iterace:

 T1	49.8383	49.8383	49.8383
 T1k	49.8392	49.8392	49.8392
 T2	13.3913	13.3913	13.3913
 T2k	13.3911	13.3911	13.3911
 X	<1x572 double>	0	571
 Xi	1.3411e-08	1.3411...	1.3411...







28.iterace:

 T1	49.8383	49.8383	49.8383
 T1k	49.8388	49.8388	49.8388
 T2	13.3913	13.3913	13.3913
 T2k	13.3912	13.3912	13.3912
 X	<1x572 double>	0	571
 Xi	6.7055e-09	6.7055...	6.7055...







29.iterace:

 T1	49.8383	49.8383	49.8383
 T1k	49.8385	49.8385	49.8385
 T2	13.3913	13.3913	13.3913
 T2k	13.3913	13.3913	13.3913
 X	<1x572 double>	0	571
 Xi	3.3528e-09	3.3528...	3.3528...







30.iterace:

 T1	49.8383	49.8383	49.8383
 T1k	49.8384	49.8384	49.8384
 T2	13.3913	13.3913	13.3913
 T2k	13.3913	13.3913	13.3913
 X	<1x572 double>	0	571
 Xi	1.6764e-09	1.6764...	1.6764...







31.iterace:

 T1	49.8383	49.8383	49.8383
 T1k	49.8384	49.8384	49.8384
 T2	13.3913	13.3913	13.3913
 T2k	13.3913	13.3913	13.3913
 X	<1x572 double>	0	571
 Xi	8.3819e-10	8.3819...	8.3819...

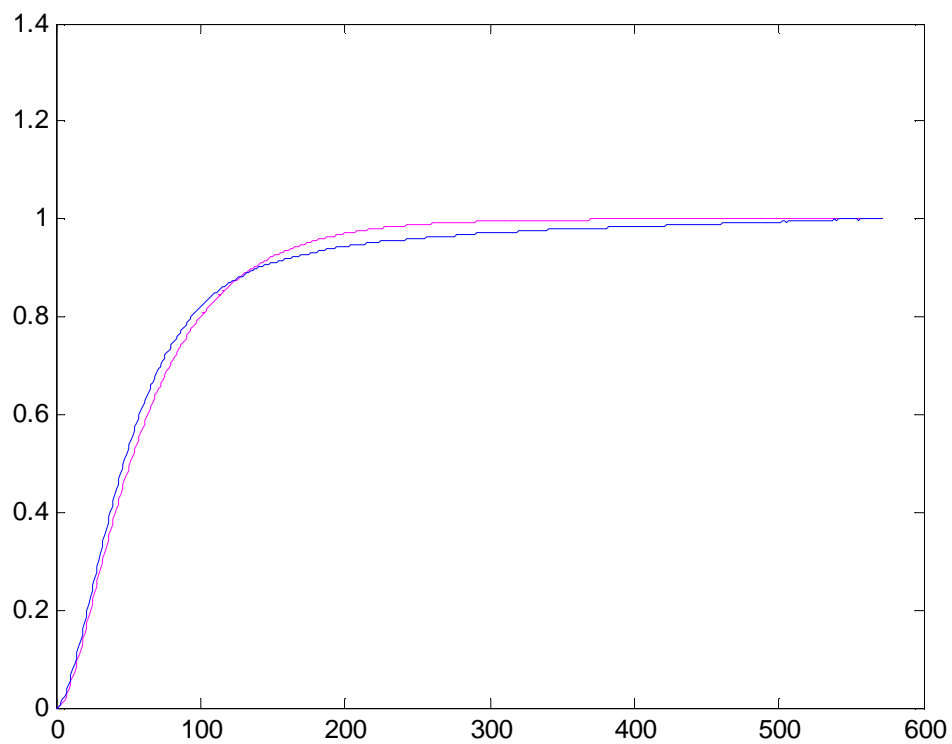
32.iterace:

 T1	49.8383	49.8383	49.8383
 T1k	49.8383	49.8383	49.8383
 T2	13.3913	13.3913	13.3913
 T2k	13.3913	13.3913	13.3913
 X	<1x572 double>	0	571
 Xi	4.1910e-10	4.1910...	4.1910...

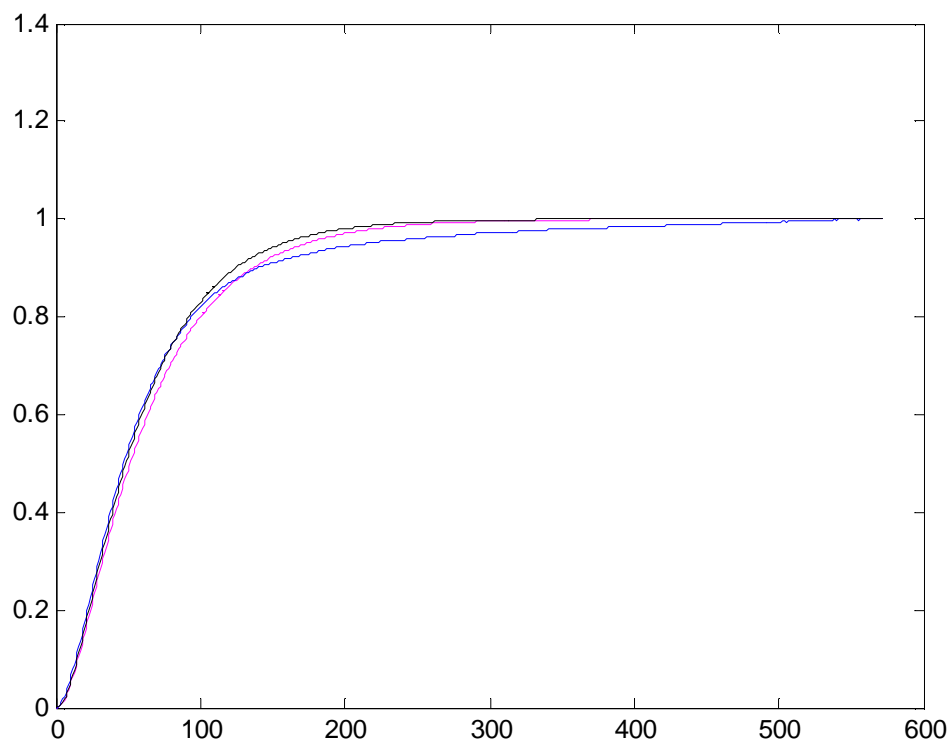
33.iterace:

 T1	49.8383	49.8383	49.8383
 T1k	49.8383	49.8383	49.8383
 T2	13.3913	13.3913	13.3913
 T2k	13.3913	13.3913	13.3913
 X	<1x572 double>	0	571
 Xi	2.0955e-10	2.0955...	2.0955...

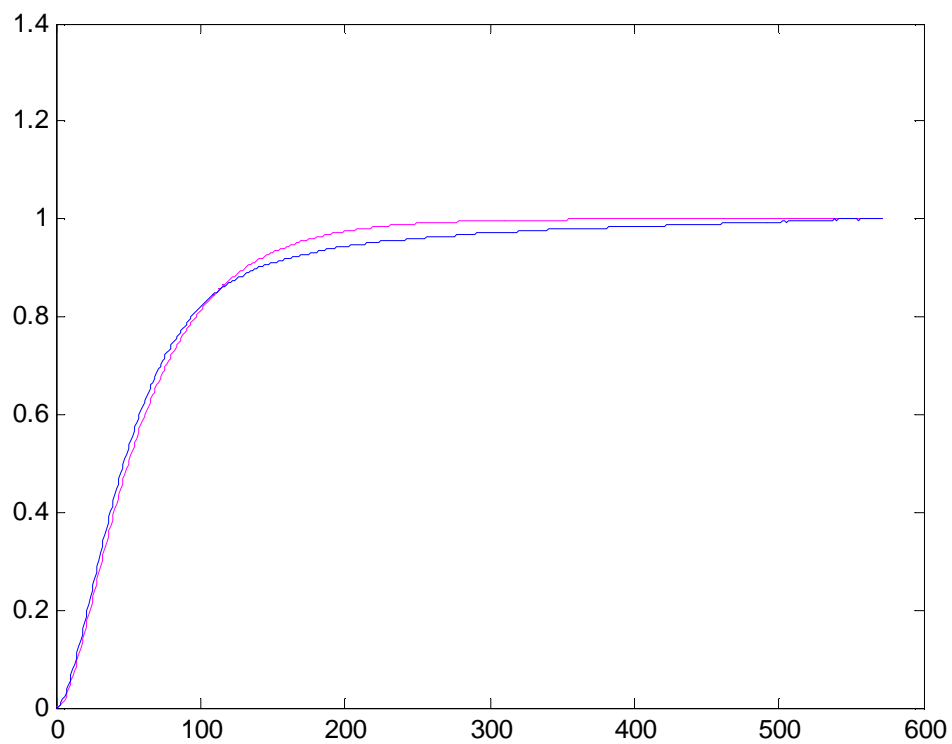
Když nyní vyzkoušíme dát velikost kroku 0.1, tak se hodnota T2 ustálí ve 25. iteraci a T1 se ustálí ve 28. iteraci, obě tyto hodnoty jsou z 10. kroku, kdy vyhovovala podmínka, a jsou to T1=52.4107 a T2=12.9497.



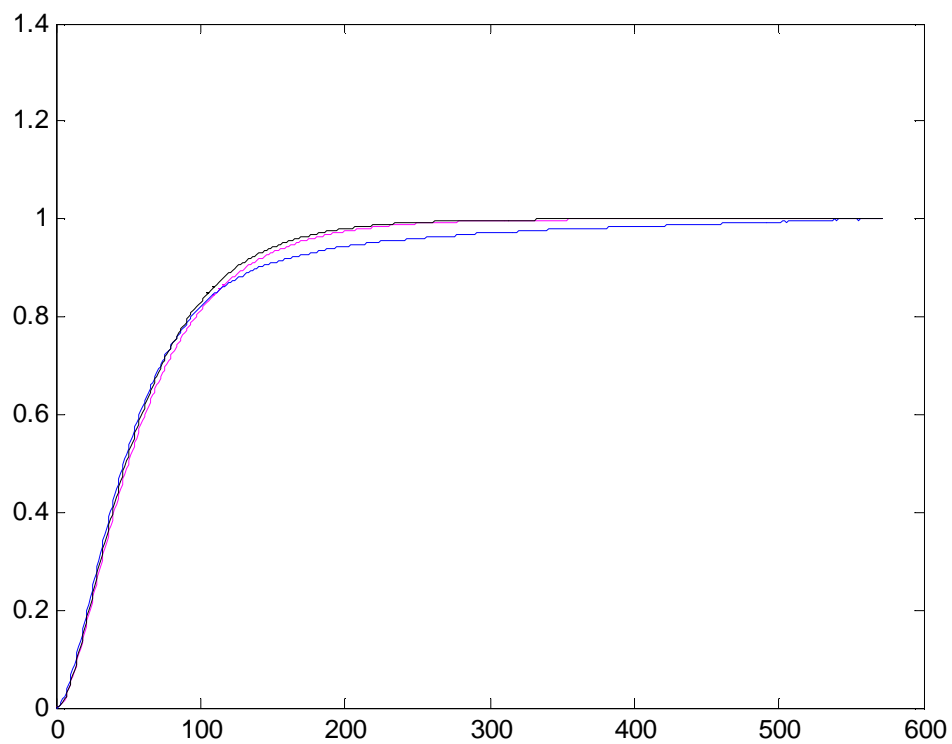
Obr. 23. Přechodová charakteristika normovaná (modrá) s aproximovanou pomocí Gauss-Newtonovy metody, při velikosti kroku 0.1 (růžová)



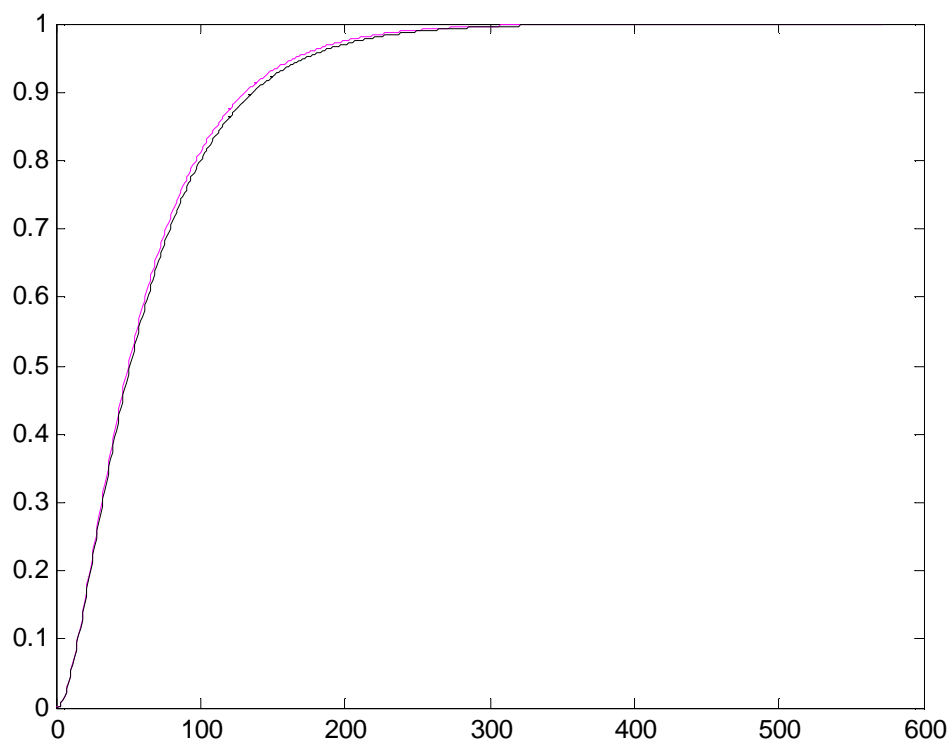
Obr. 24. Přejchodová charakteristika normovaná (modrá), Strejcova (černá), Gauss-Newtonova-velikost kroku 0.1 (růžová)



Obr. 25. Přejchodová charakteristika normovaná (modrá) s aproximovanou pomocí Gauss-Newtonovy metody, při velikosti kroku 0.9 (růžová)



Obr. 26. Přejchodová charakteristika normovaná (modrá), Strejcova (černá), Gauss-Newtonova-velikost kroku 0.9 (růžová)



Obr. 27. Porovnání aproximovaných charakteristik Gauss-Newtonovou metodou pro krok 0.1 (černá) a 0.9 (růžová)

METODA	T1	T2	J	upřesnění
Strejcova	46.531	13.959	0.00045344	
Gradientní	48.5482	14.1985	0.00043690	FI=10
Newtonova	42.9428	13.6849	0.00068494	eps=0.0001
Newtonova	43.5919	9.4752	0.0011	eps=0.1
Gauss-Newtonova	49.8383	13.3913	0.00040951	Xi=0.9
Gauss-Newtonova	52.4107	12.9497	0.00044837	Xi=0.1

Tab. 14. Přehled výsledků aproximací pomocí jednotlivých numerických metod

ZÁVĚR

Na závěr si ještě zhodnotíme jak byly naše aproximace v porovnání s naměřenou charakteristikou úspěšné. Můžeme použít vztah $J = \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m (f_i - y_{mi})^2$, kde f_i jsou pořadnice aproximované charakteristiky a y_{mi} jsou hodnoty normované charakteristiky. V tabulce 14 jasně vidíme, že aproximace Gauss-Newtonovou a gradientní metodou byly ještě přesnější než aproximace pomocí počátečních odhadů. Naproti tomu aproximace Newtonovou metodou byla horší než počátečními odhady. Můžeme tedy říct, že aproximace přechodových charakteristik je mocným prostředkem pro zjišťování dynamických vlastností systémů.

ZÁVĚR V ANGLIČTINĚ

In the end we strike a balance approximation of step responses as compared to measured step responses. We can use the formula $J = \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m (f_i - y_{mi})^2$, when f_i are the ordinate of approximation of step responses and y_{mi} are values of measured of step responses. In the table 555 we can see, that approximation of Gauss-Newton's and gradient method was more successful than approximation Strejc's method. By contrast approximation of Newton's method was worse than approximation Strejc's method. We can say that approximation of step responses is a powerful means for identification of systems.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] BOBÁL, V. *Identifikace systémů*. UTB ve Zlíně, 2009. ISBN 978-80-7318-888-7.
- [2] BOBÁL, V. *Identifikace systémů*. VUT v Brně, 1989. ISBN 80-214-0125-7.
- [3] KUBALČÍK, M. *Cvičení z předmětu Identifikace Systémů*. UTB ve Zlíně, 2006. ISBN 80-7318-497-4.

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

ξ	koeficient tlumení
τ	časová konstanta
∞	nekonečno
∂f	derivace funkce
Δu_i	skoková změna vstupní veličiny při i-tém měření
$\nabla f(x^k)$	gradient funkce v k-tém kroku
q	residuum
T	časová konstanta
Td	dopravní zpoždění
h(t)	přechodová funkce
y	Výstupní veličina
u	vstupní veličina
\sum	suma
p_i	kořeny charakteristické rovnice
A_m	maximální překmit
in	inflexní bod
f_i	pořadnice (i=kolikátá)
K	zesílení soustavy
λ	parametr krok (u gradientní FI, u Gauss-Newtonovy Xi)

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr. 6. Přejchodová charakteristika soustavy prvního řádu	14
Obr. 7. a) Přejchodová charakteristika soustavy prvního řádu s dopravním zpožděním, b) Aproximace přechodové charakteristiky vyššího řádu charakteristikou prvního řádu s dopravním zpožděním	16
Obr. 8. Přejchodová charakteristika kmitavého členu	18
Obr. 4. Přejchodová charakteristika statické soustavy vyššího řádu	20
Obr. 9. Graf pro určení poměru časových konstant	25
Obr. 6. Přejchodová charakteristika astatické soustavy	26
Obr. 7. Přejchodová charakteristika s tečnou v inflexním bodě	28
Obr. 8. Přejchodová charakteristika s 50% skokovou změnou	37
Obr. 9. Přejchodová charakteristika s 50% skokovou změnou	37
Obr. 10. Přejchodová charakteristika s 75% skokovou změnou	39
Obr. 11. Přejchodová charakteristika s 75% skokovou změnou	39
Obr. 12. Přejchodová charakteristika s 100% skokovou změnou	41
Obr. 13. Přejchodová charakteristika s 100% skokovou změnou	41
Obr. 14. Zprůměrovaná přechodová charakteristik	44
Obr. 15. Normovaná přechodová charakteristika	45
Obr. 16. Přejchodová charakteristika aproximována metodou prof. Strejce	49
Obr. 17. Přejchodová charakteristika normovaná (modrá) a aproximovaná metodou prof. Strejce (černá)	50
Obr. 18. Přejchodová charakteristika normovaná (modrá) a aproximovaná gradientní metodou (zelená).....	55
Obr. 19. Přejchodová charakteristika aproximovaná gradientní (zelená) a Strejcovou metodou (černá)	56
Obr. 20. Přejchodová charakteristika normovaná (modrá), Strejcova (černá), Gradientní (zelená)	57
Obr. 21. Přejchodová charakteristika normovaná (modrá) a aproximovaná Newtonovou metodou (červená)	60
Obr. 22. Přejchodová charakteristika normovaná (modrá), Strejcova (černá), Newtonova (červená)	61
Obr. 23. Přejchodová charakteristika normovaná (modrá) a aproximovaná Newtonovou metodou 2 (červená)	62
Obr. 24. Přejchodová charakteristika normovaná (modrá), Strejcova (černá), Newtonova 2 (červená)	63
Obr. 25. Přejchodová charakteristika normovaná (modrá) s aproximovanou pomocí Gauss-Newtonovy metody, při velikosti kroku 0.1 (růžová)	71
Obr. 26. Přejchodová charakteristika normovaná (modrá), Strejcova (černá), Gauss-Newtonova-velikost kroku 0.1 (růžová)	72
Obr. 27. Přejchodová charakteristika normovaná (modrá) s aproximovanou pomocí Gauss-Newtonovy metody, při velikosti kroku 0.9 (růžová)	73

Obr. 28. Přejchodová charakteristika normovaná (modrá), Strejcova (černá), Gauss-Newtonova- velikost kroku 0.9 (růžová)	74
Obr. 29. Porovnání aproximovaných charakteristik Gauss-Newtonovou metodou pro krok 0.1 (černá) a 0.9 (růžová)	75

SEZNAM TABULEK

Tab. 3. Hodnoty maximální překmitu v závislost na koeficientu tlumení	19
Tab. 4. Tabulka hodnot pro vyhodnocování statických soustav n- tého řádu se stejnými časovými konstantami	22
Tab. 3. Tabulka hodnot pro vyhodnocování astatických soustav	27
Tab. 4. Tabulka závislosti poměru časových konstant na pořadnici inflexního bodu pro soustavu druhého řádu	29
Tab. 5. Počáteční a konečné hodnoty přechodových charakteristik s 50% skokovou změnou	38
Tab. 6. Počáteční a konečné hodnoty přechodových charakteristik s 75% skokovou změnou	40
Tab. 7. Počáteční a konečné hodnoty přechodových charakteristik s 100% skokovou změnou	42
Tab. 8. Počáteční a konečné hodnoty zprůměrované přechodové charakteristiky	43
Tab. 9. Hodnoty pro určení inflexního bodu	46
Tab. 50. Hodnoty pro lineární regresi	46
Tab. 11. Lineární regrese, výstup	47
Tab. 16. Tabulka závislosti poměru časových konstant na pořadnici inflexního bodu pro soustavu druhého řádu	47
Tab. 17. Hledání minimální hodnoty vztahu $S = [y(t^i) - 0.72\Delta y(t^m)]^2$	48
Tab. 18. Přehled výsledků aproximací pomocí jednotlivých numerických metod	75

SEZNAM PŘÍLOH