

Využití Laplaceovy transformace při řešení diferenciálních rovnic

Usage of Laplace transform
for solving differential equations

Karol Majcin

Bakalářská práce
2014



Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky
akademický rok: 2013/2014

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Karol Majcin**
Osobní číslo: **A11138**
Studijní program: **B3902 Inženýrská informatika**
Studijní obor: **Informační a řídicí technologie**
Forma studia: **prezenční**

Téma práce: **Využití Laplaceovy transformace při řešení
diferenciálních rovnic**

Zásady pro vypracování:

1. Definujte Laplaceovu transformaci a zpětnou Laplaceovu transformaci a uveďte jejich základní vlastnosti.
2. Uveďte základní pojmy z teorie obyčejných diferenciálních rovnic.
3. Popište princip Laplaceovy transformace při řešení obyčejných diferenciálních rovnic vyšších řádů s konstantními koeficienty.
4. Porovnejte tento způsob řešení s metodou variace konstant a metodou neurčitých koeficientů.
5. Užití Laplaceovy transformace demonstруйте na vybraných modelech dynamických systémů popsaných obyčejnými diferenciálními rovnicemi.

Rozsah bakalářské práce:

Rozsah příloh:

Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

1. **BRONSON, Richard, Gabriel B COSTA a Richard BRONSON. Schaums outlines of differential equations. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 2006. ISBN 00-714-5687-2.**
2. **ŠTECHA, Jan a Vladimír HAVLENA. Teorie dynamických systémů I: přednášky. Vyd. 2. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2002. ISBN 80-010-1971-3.**
3. **REKTORYS, Karel. Přehled užití matematiky. 7. vyd. Praha: Prometheus, 2000. ISBN 80-719-6179-5.**
4. **KALAS, Josef. Obyčejné diferenciální rovnice. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 1995. ISBN 80-210-1130-0.**
5. **PÍRKO, Zdeněk a Jan VEIT. Laplaceova transformace: základy teorie a užití v elektrotechnice. 2., opr. vyd. Praha: SNTL – Nakladatelství technické literatury, 1972.**

Vedoucí bakalářské práce:

Mgr. Jana Řezníčková, Ph.D.

Ústav matematiky

Datum zadání bakalářské práce:

28. února 2014

Termín odevzdání bakalářské práce:

13. června 2014

Ve Zlíně dne 28. února 2014


prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.
děkan




prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.
ředitel ústavu

ABSTRAKT

Cílem bakalářské práce je seznámení s Laplaceovou transformací a jejím použitím při řešení obyčejných diferenciálních rovnic a jejich soustav. Na vybraných typech obyčejných diferenciálních rovnic budou ukázány různé metody řešení – metoda variace konstant, metoda neurčitých koeficientů a Laplaceova transformace. Řešení obyčejných diferenciálních rovnic bude využito při modelování dynamických systémů.

Klíčová slova: Laplaceova transformácia, spätná Laplaceova transformácia, obyčajná diferenciálna rovnica, sústava diferenciálnych rovníc, homogénna rovnica, nehomogénna rovnica, charakteristická rovnica, charakteristický polynóm, charakteristický determinant, fundamentálny systém, fundamentálna matica.

ABSTRACT

The aim of this bachelor thesis is to present Laplace transform and its application in using ordinary differential equations and their systems. Different methods of solving - variation of constants method, method of undetermined coefficients and Laplace transform - will be shown on selected types of ordinary differential equations. Finally, solving of ordinary differential equations will be used in models dynamic systems.

Keywords: Laplace transform, inverse Laplace transform, ordinary differential equation, system of differential equations, homogeneous equation, non homogeneous equation, characteristic equation, characteristic polynomial, characteristic determinant, fundamental system, fundamental matrix.

Rád by som poďakoval pani Mgr. Jane Řezníčkovej, Ph.D. za odborné vedenie, cenné rady, poskytnutú literatúru a za všetok čas strávený pri konzultovaní danej problematiky. Ďalej by som chcel poďakovať svojej rodine a priateľke za podporu pri štúdiu a písaní tejto práce.

Obsah

ÚVOD	8
I TEORETICKÁ ČASŤ	8
1 Laplaceova transformácia	10
1.1 VETY O PRIAMEJ LAPLACEOVEJ TRANSFORMÁCIÍ	11
1.2 SPÄTNÁ LAPLACEOVA TRANSFORMÁCIA	14
2 Obyčajná diferenciálna rovnica	15
2.1 VŠEOBECNÉ A PARTIKULÁRNE RIEŠENIE ODR	15
2.2 LINEÁRNA ODR PRVÉHO RÁDU	16
2.2.1 Metóda variácie konštanty	17
2.3 LINEÁRNA ODR n -TÉHO RÁDU S KONŠTANTNÝMI KOEFICIENTAMI	18
2.3.1 Metóda neurčitých koeficientov	19
2.3.2 Riešenie LODR s konštantnými koeficientami pomocou Laplaceovej transformácie	20
2.4 SÚSTAVA LINEÁRNÝCH OBYČAJNÝCH DIFERENCIÁLNYCH ROVNÍC (LODR) PRVÉHO RÁDU S KONŠTANTNÝMI KOEFICIENTAMI	21
2.4.1 Riešenie sústav LODR prvého rádu s konštantnými koeficientami pomocou vlastných čísel a vlastných vektorov	23
2.4.2 Riešenie sústav LODR prvého rádu s konštantnými koeficientami pomocou Laplaceovej Transformácie	26
3 Slovník Laplaceovej transformácie	27
II PRAKTICKÁ ČASŤ	27
4 Odvodenie niektorých funkcií slovníka LT	29
5 Riešené príklady LODR	33
5.1 RIEŠENÉ PRÍKLADY LODR PRVÉHO RÁDU	33
5.2 RIEŠENÉ PRÍKLADY LODR DRUHÉHO RÁDU	39
5.3 RIEŠENÉ PRÍKLADY SÚSTAV LODR PRVÉHO RÁDU	47
5.4 MODEL PARALELNÉHO OBVODU RL	61
5.5 MODEL ODPRUŽENIA KOLESA AUTOMOBILU	64
ZÁVER	68
ZOZNAM POUŽITEJ LITERATÚRY	69
ZOZNAM POUŽITÝCH SYMBOLOV A SKRATIEK	70
ZOZNAM OBRÁZKOV	71
ZOZNAM PRÍLOH	72

ÚVOD

Pri riešení obyčajných lineárnych diferenciálnych rovníc s konštantnými koeficientami a ich sústav klasickými metódami (metóda variácie konštant, metóda neurčitých koeficientov) sa často stretávame s príliš zložitými výpočtami. Týmto komplikáciám sa môžeme vyhnúť použitím Laplaceovej transformácie, pomocou ktorej prevedieme diferenciálnu rovnicu na rovnicu algebraickú, ktorá sa rieši omnoho jednoduchšie.

Laplaceova transformácia je jedna z druhov integrálnych transformácií, ktoré po prvýkrát použil v roku 1737 švajčiarsky matematik a fyzik Leonard Euler pri riešení diferenciálnych rovníc. V roku 1812 ju odvodil a podrobnejšie popísal francúzsky matematik Pierre Simon de Laplace.

Táto bakalárska práca sa skláda z dvoch častí. V teoretickej časti je definovaná Laplaceova transformácia a jej základné vlastnosti, prehľad známych pojmov z teórie obyčajných diferenciálnych rovníc a podrobný popis riešenia lineárnych diferenciálnych rovníc s konštantnými koeficientami a ich sústav pomocou Laplaceovej transformácie, variácie konštant a metódy neurčitých koeficientov. V praktickej časti som odvodil základné funkcie slovníka LT a následne som riešil vybrané príklady, na ktorých som ukázal rôzne metódy riešenia LODR a ich sústav. Nakoniec sa Laplaceova transformácia využíva na riešenie reálnych dynamických systémov popísaných LODR s konštantnými koeficientami.

I. TEORETICKÁ ČASŤ

1 Laplaceova transformácia

Jedná sa o určitý druh **integrálnej transformácie**, kde $K : A_1 \times A_2 \rightarrow \mathbb{C}$ je komplexná funkcia definovaná na kartézskom súčine množín $A_1 \subset \mathbb{R}$, $A_2 \subset \mathbb{C}$. Túto funkciu nazveme **jadrom**. Ďalej existuje \mathcal{T}_0 množina funkcií $f : A_1 \rightarrow \mathbb{C}$ takých, aby integrál závislý na parametre

$$F(s) = \int_{A_1} K(t, s) f(t) dt \quad (1)$$

konvergoval aspoň pre jedno $s \in A_2$. Potom **integrálnou transformáciou s jadrom** K nazývame zobrazenie $\mathcal{T} : \mathcal{T}_0 \rightarrow K_0$, ktoré každej funkcii $f \in \mathcal{T}_0$ priraduje funkciu $F \in K_0$, definovanú na neprázdnej časti množiny A_2 rovnosťou (1), K_0 je množina funkcií komplexnej premennej.

Laplaceovu transformáciu dostaneme, keď zvolíme za A_1 interval $(0, +\infty)$ na reálnej osi, za A_2 množinu komplexných čísel \mathbb{C} a za jadro K funkciu $K(t, s) = e^{-st}$.

Existuje f časová funkcia jednej reálnej premennej taká, že integrál na pravej strane nasledujúcej rovnosti konverguje aspoň pre jedno komplexné s . Potom časovú funkciu $f(t)$ nazývame **predmetom** a funkciu $F(s)$ komplexnej premennej s definovanú rovnosťou

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (2)$$

nazývame **Laplaceovým obrazom** funkcie $f(t)$. Vzťah medzi predmetom a obrazom značíme pomocou symbolu Laplaceovej transformácie

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}, f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\},$$

kde \mathcal{L}^{-1} je operátor **spätnej Laplaceovej transformácie**. Množina komplexných funkcií reálnej premennej takých, že definičný integrál Laplaceovej transformácie (2) konverguje aspoň pre jedno komplexné s , nazývame triedou predmetov a označujeme ju symbolom \mathcal{L}_0 , a že funkcia f je predmetom, zapisujeme $f \in \mathcal{L}_0$.

Nutné podmienky pre existenciu predmetu (funkcie jednej reálnej premennej $f(t)$).

- a) Funkcia musí byť aspoň po častiach spojitá, tj. na každom intervale konečnej dĺžky $\langle 0, +\infty \rangle$ má konečný počet bodov nespojitosti a v týchto bodoch existuje konečná limita funkcie $f(t)$ zľava aj zprava.

- b) Funkcia musí vyhovovať podmienke exponenciálneho rádu s indexom rastu ξ_0 , tj. pre všetky $t \geq t_0$ existuje $M > 0$ tak, že platí

$$|f(t)| \leq Me^{\xi_0 t}.$$

- c) Funkcia je nulová pre záporný čas, teda je definovaná takto:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pre } t \leq 0, \\ f(t) & \text{pre } t > 0. \end{cases}$$

1.1 Vety o priamej Laplaceovej transformácii

1. Veta o linearite Laplaceovej transformácie

Nech funkcie $f_i, i = 1, 2, \dots, n$, sú predmety ($f_i \in \mathcal{L}_0$) a nech $c_i, i = 1, 2, \dots, n$, sú komplexné konštanty. Potom tiež funkcia $f = \sum_{i=1}^n c_i f_i$ je predmetom. Pre obraz funkcie f platí

$$\mathcal{L} \left\{ \sum_{i=1}^n c_i f_i \right\} = \sum_{i=1}^n c_i \mathcal{L} \{ f_i \}$$

Veta o linearite v tomto znení platí len pre lineárnu kombináciu konečného počtu funkcií.

2. Veta o substitúcii

Nech $f(t) \in \mathcal{L}_0$ je predmet, $a \in \mathbb{C}$ konštanta. Označíme $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. Potom funkcia $g(t) = e^{at} f(t)$, je taktiež predmetom a pre jej obraz $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$ platí $G(s) = F(s - a)$, tj

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s - a), \quad \text{kde } F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}. \quad (3)$$

Odvodenie vety:

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{at} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(s-a)t} dt = F(s - a)$$

3. Veta o posunutí-translácii predmetu

Nech $f(t) \in \mathcal{L}_0$ je predmet a jeho obraz $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, a je konštanta, funkcia $g(t)$ je definovaná tak, že

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{pre } t < a, \\ f(t-a) & \text{pre } t \geq a. \end{cases}$$

Potom pre $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$ platí

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\} = e^{-as}F(s).$$

Odvodenie vety:

Platí

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t-a)e^{-s(t-a)} dt = \int_0^{+\infty} f(t-a)e^{-st}e^{as} dt,$$

potom

$$e^{-as}F(s) = \int_0^{+\infty} f(t-a)e^{-st} dt = \mathcal{L}\{f(t-a)\}.$$

4. Veta o derivácii obrazu

Nech $f(t) \in \mathcal{L}_0$ je predmet a jeho obraz $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$. Potom funkcia $g(t) = tf(t)$ je taktiež predmet a po označení $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$ platí

$$\begin{aligned} G(s) &= -F'(s) \\ \mathcal{L}\{tf(t)\} &= -F'(s), \text{ kde } F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}. \end{aligned}$$

Odvodenie vety:

Platí

$$F'(s) = \frac{dF}{ds} = \frac{d}{ds} \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt = \frac{\partial}{\partial s} \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt = - \int_0^{+\infty} tf(t)e^{-st} dt,$$

po úprave

$$-F'(s) = \mathcal{L}\{tf(t)\}.$$

5. Vety o limitách

(a) Prvá veta o limite

Nech $f(t) \in \mathcal{L}_0$, potom pre obraz $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ platí

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0.$$

(b) Veta o počiatočnej hodnote

Nech $f \in \mathcal{L}_0$ a nech existuje konečná $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0+)$, potom pre obraz $F = \mathcal{L}\{f\}$ platí

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = f(0+).$$

(c) Veta o koncovej hodnote

Nech $f \in \mathcal{L}_0$ a nech existuje konečná $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$, potom pre obraz $F = \mathcal{L}\{f\}$ platí

$$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t).$$

6. Veta o obraze n -tej derivácie

Základnou myšlienkou je použitie integrácie per partes, potom pre prvú deriváciu

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'(t)\} &= \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^p f'(t)e^{-st} dt = \left| \begin{array}{ll} u = e^{-st} & u' = -se^{-st} \\ v' = f'(t) & v = f(t) \end{array} \right| = \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} [f(t)e^{-st}]_0^p - \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^p -sf(t)e^{-st} dt = \\ &= s \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^p f(t)e^{-st} dt + \lim_{t \rightarrow \infty} [f(t)e^{-st}] - f(0) = sF(s) - f(0) \end{aligned}$$

sme získali vzťah

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0).$$

Pre druhú deriváciu použitím dvakrát integrácie per partes platí

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0).$$

Potom pre n -tú deriváciu,

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{(n-1)}f(0) - s^{(n-2)}f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0). \quad (4)$$

7. Veta o obraze integrálu

Nech $f(t) \in \mathcal{L}_0$ a $g(t)$ je primitívna funkcia, $g(t) = \int_0^t f(x) dx$. Potom tiež $g(t) \in \mathcal{L}_0$ a $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$ a platí

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(x) dx\right\} = \frac{F(s)}{s}, \quad \text{kde } F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}.$$

Dôkaz vychádza z vety o derivácii, pretože funkcia $f(t)$ je integrovateľná, $g(t)$ je spojitá, $g(0) = 0$ a má deriváciu na celom intervale, $g'(t) = f(t) \in \mathcal{L}_0$. Preto podľa vety o obraze derivácie

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = sG(s) - g(0) = sG(s),$$

čo je tvrdenie vety.

1.2 Spätná Laplaceova transformácia

Pomocou spätnej Laplaceovej transformácie hľadáme predmet $f(t)$ k obrazu $F(s)$, kde $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ je racionálne lomená funkcia, kde je čitateľ nižšieho stupňa ako menovateľ. Nech menovateľ má práve j rôznych koreňov s_k , $k = 1, 2, \dots, j$, takže $Q(s) = a_j(s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_j)$, $a_j \neq 0$, kde jednonásobné korene menovateľa sa nazývajú **póly** prvého rádu a n -násobné korene menovateľa sú póly m -tého rádu. Korene čitateľa sa nazývajú **nuly**. Potom jedna z možností ako nájsť predmet je pomocou súčtu reziduí, kde súčtom reziduí sa rozumie súčet reziduí vo všetkých singulárnych bodoch funkcie $F(s)$.

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \sum \text{res} [F(s)e^{st}]. \quad (5)$$

Vo vzorci (5) sa sčítajú reziduá celého súčinu $F(s)e^{st}$. Ide však o reziduá v singulárnych bodoch funkcie $F(s)$, pretože e^{st} nemá žiadne singulárne body. Ak funkcia $F(s)$ má póly prvého rádu, potom

$$\text{res} [F(s)e^{st}]_{s=s_k} = \lim_{s \rightarrow s_k} [(s - s_k)F(s)e^{st}]$$

a pre póly n -tého rádu

$$\text{res} [F(s)e^{st}]_{s=s_k} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} [(s - s_k)^n F(s)e^{st}].$$

Predmet $f(t)$ môžeme nájsť aj pomocou rozkladu funkcie $F(s)$ na parciálne zlomky a následne s využitím slovníka Laplaceovej transformácie, čo je tabuľka, v ktorej v jednom stĺpci sú uvedené Laplaceove obrazy a v druhom stĺpci sú príslušné predmety. Časť slovníka je pripojená na konci teoretickej časti.

Pri vypracovaní teorie Laplaceovej transformácie boli použité tieto zdroje [2][5][6]

2 Obyčejná diferenciální rovnice

Diferenciální rovnice (DR) je rovnice, v ktorej neznámou je funkcia, a ktorá vyjadruje vzťah tejto funkcie k jej deriváciám.

Obyčejná diferenciální rovnice (ODR) - je diferenciální rovnice, v ktorej neznámou je funkcia jednej premennej.

Sústava diferenciálních rovníc - jedná sa o n diferenciálních rovníc pre m neznámých funkcií.

Rád diferenciální rovnice - je rád najvyššej derivácie neznámej funkcie v danej diferenciální rovnici.

Obyčejná diferenciální rovnice n -tého rádu s neznámou funkciou y premennej t je v tvare

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (6)$$

alebo v explicitnom tvare vzhľadom na najvyššiu deriváciu neznámej funkcie

$$y^{(n)} = f(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}). \quad (7)$$

Riešením diferenciální rovnice (7) je každá funkcia $y = g(t)$, ktorá má derivácie do rádu $n - 1$ a vyhovuje identicky rovnici (7).

Cauchyho úloha je počiatková úloha, kde hľadáme riešenie rovnice (7), ktoré vyhovuje počiatkovým podmienkam

$$y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1, y''(t_0) = y_2, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1},$$

kde $t_0, y_0, y_1, y_2 \dots y_{n-1}$ sú konštanty.

2.1 Všeobecné a partikulárne riešenie ODR

1. **Všeobecné riešenie rovnice (7)** nazývame sústavu kriviek s rovnicou

$$\Phi(t, y, C_1, C_2, \dots, C_{(n)}) = 0, \quad (8)$$

ktoré obsahujú n parametrov $C_1, C_2, \dots, C_{(n)}$, pričom pri vylúčení týchto parametrov z rovnice $\Phi = 0$ a z ich n derivácií podľa t dostaneme danú rovnicu (6).

2. **Partikulárne riešenie rovnice** (7) nazývame každé riešenie, ktoré dostaneme zo všeobecného riešenia (8), ak dosadíme určité čísla za konštanty $C_1, C_2, \dots, C_{(n)}$.

2.2 Lineárna ODR prvého rádu

Lineárna obyčajná diferenciálna rovnica (LODR) prvého rádu je rovnica v tvare

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t), \quad (9)$$

kde $a(t)$ a $b(t)$ sú spojité funkcie premennej t . Potom sa rovnica (9) nazýva:

- a) **homogénna** LODR prvého rádu, ak je $b(t) \equiv 0$,
- b) **nehomogénna** LODR prvého rádu, ak je $b(t) \neq 0$.

Homogénnu LODR prvého rádu v tvare

$$y'(t) = a(t)y(t), \quad (10)$$

riešime metódou separácie premenných. Pre $y(t) \neq 0$ dostávame

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= a(t)y(t), \\ \int \frac{dy(t)}{y(t)} &= \int a(t) dt, \\ \ln |y(t)| &= \int a(t) dt + C, \\ y(t) &= \pm e^C e^{\int a(t) dt}, \end{aligned}$$

kde miesto $\pm e^C$ položíme C . Malo by teda byť $C \neq 0$, ale pre $C = 0$ dostaneme funkciu $y(t) = 0$, ktorá je taktiež riešením (10). Preto rovnica (10) má všeobecné riešenie v tvare

$$y(t) = C e^{\int a(t) dt}, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (11)$$

Nehomogénnu LODR prvého rádu (9) riešime pomocou metódy variácie konštanty.

2.2.1 Metóda variácie konštanty

Metóda prebieha v dvoch krokoch:

1. Zhomogenizujeme rovnicu (9), tj. položíme $b(t) = 0$, dostaneme tak rovnicu (10) a určíme jej všeobecné riešenie (11).
2. Všeobecné riešenie úplnej nehomogénnej LODR (9) budeme hľadať v tvare

$$y(t) = C(t)e^{\int a(t) dt}, \quad (12)$$

ktorá sa líši od (11) tým, že konštantu C sme nahradili zatiaľ neurčenou funkciou $C(t)$.

Funkciu $C(t)$ určíme tak, že vzťah (12) aj s jeho deriváciou

$$y'(t) = C'(t)e^{\int a(t) dt} + C(t)a(t)e^{\int a(t) dt},$$

dosadíme do pôvodnej rovnice (9), dostaneme

$$C'(t)e^{\int a(t) dt} = b(t),$$

po úprave

$$C'(t) = b(t)e^{-\int a(t) dt}.$$

Integráciou dostaneme

$$C(t) = \int b(t)e^{-\int a(t) dt} dt + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Po dosadení funkcie $C(t)$ do (12) dostaneme všeobecné riešenie pre (9).

2.3 Lineárna ODR n -tého rádu s konštantnými koeficientami

Lineárna obyčajná diferenciálna rovnica (LODR) n -tého rádu s konštantnými koeficientami je rovnica v tvare

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t), \quad (13)$$

kde $a_n \neq 0$, a_0, a_1, \dots, a_n , sú konštanty, $y(t)$ je hľadaná funkcia a $f(t)$ je funkcia definovaná a spojitá na intervale I .

Rovnica (13) sa nazýva:

a) **homogénna** LODR n -tého rádu s konštantnými koeficientami, ak je $f(t) \equiv 0$.

Jej tvar je

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0 \quad (14)$$

b) **nehomogénna** LODR n -tého rádu s konštantnými koeficientami, ak je $f(t) \neq 0$.

Pre homogénnu rovnicu (14) predpokladáme riešenie v tvare

$$y(t) = e^{\lambda t}, \quad (15)$$

po dosadení tejto funkcie a jej derivácií za $y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)$ do (14) a po vydelení celej rovnice výrazom $e^{\lambda t}$ dostaneme tzv. **charakteristickú rovnicu** pre premennú λ

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0. \quad (16)$$

1. Ak má charakteristická rovnica všetky korene $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ reálne a navzájom rôzne, potom **fundamentálny systém** homogénnej rovnice (14) je daný funkciami

$$y_1(t) = e^{\lambda_1 t}, y_2(t) = e^{\lambda_2 t}, \dots, y_n(t) = e^{\lambda_n t},$$

kde fundamentálnym systémom riešení sa rozumie n -tica riešení, ktoré sú lineárne nezávislé.

Nech funkcie $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ sú riešenia rovnice (13) a sú lineárne nezávislé v intervale I , potom determinant

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \cdots & y_n'(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix},$$

tzv. **Wronského determinant (wronskián)**, je v celom intervale I rôzny od nuly.

A potom všeobecné riešenie homogénnej rovnice (14) má tvar

$$y_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}, y_2(t) = C_2 e^{\lambda_2 t}, \dots, y_n(t) = C_n e^{\lambda_n t},$$

kde C_1, C_2, \dots, C_n sú vhodne zvolené konštanty.

2. Ak je niektorý koreň λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) k -násobný, potom mu vo fundamentálnom systéme odpovedá k lineárne nezávislých funkcií v tvare

$$y_1(t) = e^{\lambda_i t}, y_2(t) = t e^{\lambda_i t}, \dots, y_k(t) = t^{k-1} e^{\lambda_i t}.$$

Pre nehomogénnu LODR (13) budeme riešenie hľadať pomocou metódy neurčitých koeficientov.

2.3.1 Metóda neurčitých koeficientov

Metóda, kde pravá strana rovnice (13) je so špeciálnou pravou stranou v tvare

$$f(t) = e^{at} [P_n(t) \sin(bt) + Q_m(t) \cos(bt)],$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$, $P_n(t)$ je polynóm n -tého stupňa, $Q_m(t)$ je polynóm m -tého stupňa, obidva s reálnymi koeficientami, a taktiež je prípustné $P_n(t) \equiv 0$, $Q_m(t) \equiv 0$.

Všeobecné riešenie bude v tvare

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t), \tag{17}$$

kde $y_H(t)$ je riešenie zhomogenizovanej rovnice (tj. $f(t) = 0$), ktoré nájdeme pomocou charakteristickej rovnice (16), a $y_P(t)$ je partikulárne riešenie, ktoré budeme hľadať v tvare

$$y_P(t) = t^k e^{at} [R_r(t) \sin(bt) + S_r(t) \cos(bt)], \tag{18}$$

kde k je násobnosť čísla $a + ib$ ako koreňa charakteristickej rovnice a $R_r(t)$ a $S_r(t)$ sú polynómy s neurčitými koeficientami rovnakého stupňa ako maximálny stupeň z polynómov $P_n(t), Q_m(t)$, $r = \max\{n, m\}$. Polynómy s neurčitými koeficientami sú v tvare

$$\begin{aligned} \text{polynóm 0. stupňa } R_0(t) &= A, \quad A \in \mathbb{R}, \\ \text{polynóm 1. stupňa } R_1(t) &= At + B, \quad A, B \in \mathbb{R}, \\ \text{polynóm 2. stupňa } R_2(t) &= At^2 + Bt + C, \quad A, B, C \in \mathbb{R}, \\ &\dots \end{aligned} \tag{19}$$

Takto zvolené riešenie (18) zderivujeme n -krát podľa rádu DR (13) a toto riešenie aj s deriváciami dosadíme do (13). Porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách, exponenciálnych funkcií, alebo lineárne nezávislých funkcií $\cos(t), \sin(t)$ dostaneme partikulárne riešenie $y_P(t)$ a po dosadení do (17) získame všeobecné riešenie pre nehomogénnu rovnicu (13).

2.3.2 Riešenie LODR s konštantnými koeficientami pomocou Laplaceovej transformácie

Rovnicu (13) s počiatočnými podmienkami $y(0) = b_0, y'(0) = b_1, y^{(n-1)}(0) = b_{n-1}, b_0, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{R}$, teraz vyriešime pomocou LT.

Riešením takejto diferenciálnej rovnice je spojitá funkcia aj so svojimi deriváciami až do radu $n-1$, ktorá vyhovuje Cauchyho počiatočnej úlohe. Vo všetkých bodoch, v ktorých je pravá strana spojitá, má táto úloha práve jedno riešenie. Obraz tohoto riešenia označíme $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ a obraz danej funkcie na pravej strane $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.

Postup riešenia

Na ľavú stranu rovnice (13) použijeme vetu o derivácií a obraz pravej strany získame pomocou slovníka LT, alebo pomocou integrálu (2). Dostaneme tak obraz danej diferenciálnej rovnice (13), čo je algebraická rovnica v tvare

$$\begin{aligned} a_n[s^n Y(s) - s^{n-1}b_0 - \dots - sb_{n-2} - b_{n-1}] + \dots + a_2[s^2 Y(s) - sb_0 - b_1] + \\ + a_1[sY(s) - b_0] + a_0 Y(s) = F(s), \end{aligned}$$

po úprave

$$(a_n s^n + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0) Y(s) = F(s) + P_{n-1}(s),$$

kde $P_{n-1}(s)$ je polynóm stupňa najviac $n-1$. Potom obraz riešenia danej diferenciálnej rovnice

$$Y(s) = \frac{F(s) + P_{n-1}(s)}{Q_n(s)}, \tag{20}$$

Riešením sústavy rovníc (21) rozumieme taký stĺpcový vektor funkcií

$$\mathbf{y}_n = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad (24)$$

ktorý má prvú deriváciu a po dosadení do sústavy rovníc (21) budú všetky rovnice v (21) identicky splnené.

Riešenia (24) sústavy (22) nazývame nezávislými (resp. závislými) riešeniami, podľa toho, či sú vektory (24) nezávislé (resp. závislé).

Každý systém nezávislých riešení v počte n uvažovanej sústavy (23) nazývame **fundamentálnym systémom riešení sústavy** (23) v tvare

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \dots \\ \mathbf{y}_n \end{pmatrix}, \quad (25)$$

potom všeobecné riešenie pre (21) v maticovom tvare je

$$\mathbf{y} = \mathbf{Y}\mathbf{c}, \quad (26)$$

kde

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} \quad (27)$$

a $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$.

Cauchyho úloha pre sústavu LODR s konštantnými koeficientami je počiatková úloha, kde hľadáme riešenie maticovej rovnice (22), ktoré vyhovuje počiatkovej podmienke

$$\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0,$$

kde t_0 je konštanta a \mathbf{y}_0 je vektor konštánt.

Riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice n -tého rádu s konštantnými koeficientami (13) je ekvivalentné s riešením sústavy lineárnych rovníc v tvare

$$y'_1 = y_2, y'_2 = y_3, \dots, y'_{n-1} = y_n, \quad (28)$$

$$y'_n = -(a_1 y_n + a_2 y_{n-1} + \dots + a_n y_1) + f(t).$$

Ak je teda stĺpcový vektor

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \quad (29)$$

riešením sústavy (28), potom zrejme je

$$y_2 = y'_1, y_3 = y'_2 = y''_1, \dots, y_n = y'_{n-1} = y_1^{(n-1)}, y'_n = y_1^{(n)},$$

$$y_1^{(n)} = -(a_1 y_1^{(n-1)} + a_2 y_1^{(n-2)} + \dots + a_n y_1) + f(t).$$

To znamená, že funkcia $y = y_1(t)$ je riešením lineárnej diferenciálnej rovnice (13). Obrátene, ak je y ľubovoľné riešenie rovnice (13), potom ak položíme

$$y_1 = y, y_2 = y'_1 = y', \dots, y_n = y'_{n-1} = y^{(n-1)},$$

predstavuje vektor (29) riešenie sústavy (28). Preto vlastnosti týkajúce sa riešenia rovnice (13) sú zvláštnym prípadom príslušných vlastností sústavy (21).

2.4.1 Riešenie sústav LODR prvého rádu s konštantnými koeficientami pomocou vlastných čísel a vlastných vektorov

Homogénnu sústavu (23) s konštantnou maticou A riešime nasledovne. V prvom kroku nájdeme vlastné čísla matice A pomocou tzv. **charakteristického determinantu** homogénnej sústavy (23)

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}, \quad (30)$$

kde I značí jednotkovú maticu rádu n . Charakteristický determinant položíme rovný

nule

$$|A - \lambda I| = 0, \quad (31)$$

získame tak **charakteristickú rovnicu** homogénnej sústavy (23) a jej korene $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sú **vlastné čísla** matice A .

Ku každému vlastnému číslu λ_k matice A prislúcha aspoň jeden **vlastný vektor** \mathbf{h}_k tejto matice v tvare

$$\mathbf{h}_k = \begin{pmatrix} h_{1k} \\ h_{2k} \\ \dots \\ h_{nk} \end{pmatrix}.$$

Ak:

- a) Všetky vlastné čísla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ matice A sú vzájomne rôzne, existuje celkom n nezávislých vlastných vektorov $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_n$ tejto matice. Potom existuje fundamentálny systém nezávislých riešení danej lineárnej sústavy (23) v tvare

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{h}_1 e^{\lambda_1 t}, \mathbf{y}_2 = \mathbf{h}_2 e^{\lambda_2 t}, \dots, \mathbf{y}_n = \mathbf{h}_n e^{\lambda_n t}. \quad (32)$$

- b) Pre m -násobný koreň charakteristickej rovnice homogénnej sústavy (23) má vlastný vektor tvar

$$\mathbf{h}(t) = \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ \dots \\ P_n(t) \end{pmatrix},$$

kde $P_1(t), P_2(t), \dots, P_n(t)$ sú polynómy stupňa $m - 1$. Potom všeobecné riešenie sústavy (23) má tvar

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(t) e^{\lambda t}. \quad (33)$$

- c) Pre m -násobné komplexne združené charakteristické korene $\lambda = \alpha \pm i\beta$ má sústava (23) nezávislé riešenia v tvare,

$$\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{h}_1(t) e^{\alpha t} \cos(\beta t), \mathbf{u}_2(t) = \mathbf{h}_2(t) e^{\alpha t} \sin(\beta t), \quad (34)$$

kde $\mathbf{h}_1(t), \mathbf{h}_2(t)$ sú polynómy najviac stupňa $m - 1$. Taktiež súčet týchto riešení je riešenie (23)

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{u}_1(t) + \mathbf{u}_2(t) = [\mathbf{h}_1(t) \cos \beta t + \mathbf{h}_2(t) \sin(\beta t)] e^{\alpha t}. \quad (35)$$

Pre každé vlastné číslo matice A určíme vektory \mathbf{h} , alebo $\mathbf{h}(t)$ tak, že riešenie (33) aj s jeho deriváciou

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{h}'(t)e^{\lambda t} + \mathbf{h}(t)\lambda e^{\lambda t}$$

dosadíme do rovnice (23) a vyriešime sústavu lineárnych rovníc.

Všeobecné riešenie sústavy rovníc (23) je potom lineárna kombinácia riešení pre každé vlastné číslo matice A v tvare

$$\mathbf{y}(t) = c_1\mathbf{y}_1(t) + c_2\mathbf{y}_2(t) + \cdots + c_n\mathbf{y}_n(t), \quad (36)$$

alebo v maticovom tvare

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t)\mathbf{c}.$$

Pre nehomogénnu sústavu rovníc (21) budeme všeobecné riešenie hľadať pomocou metódy variácie konštánt v tvare

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t)\mathbf{c}(t), \quad (37)$$

ktorá sa líši od (26) tým, že sme stĺpcový vektor konštánt \mathbf{c} nahradili stĺpcovým vektorom zatiaľ neurčených funkcií $\mathbf{c}(t)$.

Vektor funkcií $\mathbf{c}(t)$ určíme tak, že riešenie (37) aj s jeho deriváciou

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{Y}'(t)\mathbf{c}(t) + \mathbf{Y}(t)\mathbf{c}'(t)$$

dosadíme do sústavy (22) a dostaneme

$$\mathbf{Y}(t)\mathbf{c}'(t) = \mathbf{f}(t),$$

po úprave

$$\mathbf{c}'(t) = \mathbf{Y}^{-1}(t)\mathbf{f}(t),$$

kde $\mathbf{Y}^{-1}(t)$ je inverzná matica k matici $\mathbf{Y}(t)$.

Integráciou dostaneme

$$\mathbf{c}(t) = \int \mathbf{Y}^{-1}(t)\mathbf{f}(t) dt + \mathbf{C}, \quad \mathbf{C} \in \mathbb{R},$$

po dosadení vektoru funkcií $\mathbf{c}(t)$ do (37) dostaneme všeobecné riešenie nehomogénnej sústavy (21).

3 Slovník Laplaceovej transformácie

$$f(t) \quad \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$$1 \quad \frac{1}{s} \quad (1)$$

$$e^{at} f(t) \quad F(s - a) \quad (2)$$

$$f(t - a) \quad e^{-as} F(s) \quad (3)$$

$$\delta(t) \quad 1 \quad (4)$$

$$\delta(t - t_0) \quad e^{-st_0} \quad (5)$$

$$t^n \quad (n \in \mathbb{N}^0) \quad \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (6)$$

$$\sin \omega t \quad \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (7)$$

$$\cos \omega t \quad \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (8)$$

$$e^{at} \quad \frac{1}{s - a} \quad (9)$$

$$\sinh \omega t \quad \frac{\omega}{s^2 - \omega^2} \quad (10)$$

$$\cosh \omega t \quad \frac{s}{s^2 - \omega^2} \quad (11)$$

$$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a - b} \quad \frac{1}{(s - a)(s - b)} \quad (12)$$

$$\frac{ae^{at} - be^{bt}}{a - b} \quad \frac{s}{(s - a)(s - b)} \quad (13)$$

$$te^{at} \quad \frac{1}{(s - a)^2} \quad (14)$$

$$t^n e^{at} \quad \frac{n!}{(s - a)^{n+1}} \quad (15)$$

$$f(t) \quad \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$$e^{at} \sin \omega t \quad \frac{\omega}{(s - a)^2 + \omega^2} \quad (16)$$

$$e^{at} \cos \omega t \quad \frac{s - a}{(s - a)^2 + \omega^2} \quad (17)$$

$$e^{at} \sinh \omega t \quad \frac{\omega}{(s - a)^2 - \omega^2} \quad (18)$$

$$e^{at} \cosh \omega t \quad \frac{s - a}{(s - a)^2 - \omega^2} \quad (19)$$

$$t \sin \omega t \quad \frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2} \quad (20)$$

$$t \cos \omega t \quad \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2} \quad (21)$$

$$t \sinh \omega t \quad \frac{2\omega s}{(s^2 - \omega^2)^2} \quad (22)$$

$$t \cosh \omega t \quad \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 - \omega^2)^2} \quad (23)$$

$$\frac{\sin at}{t} \quad \arctan \frac{a}{s} \quad (24)$$

$$t^{(n)} f(t) \quad (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n} \quad (25)$$

$$f'(t) \quad sF(s) - f(0) \quad (26)$$

$$f^n(t) \quad s^n F(s) - s^{(n-1)} f(0) -$$

$$\dots - f^{(n-1)}(0) \quad (27)$$

II. PRAKTICKÁ ČASŤ

4 Odvodenie niektorých funkcií slovníka LT

Obrazy vybraných predmetov budeme hľadať pomocou priamej Laplaceovej transformácie

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

Obraz LT funkcie $f(t) = \delta(t)$:

Kde $\delta(t)$ je Diracov impuls (Dirac Delta function), ktorý je definovaný

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{pre } t \neq 0, \\ 1 & \text{pre } t = 0. \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_0^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-st} dt = 1$$

LT obraz je $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$.

Obraz LT funkcie $f(t) = 1$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{1\} &= \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^p 1 \cdot e^{-st} dt = \lim_{p \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^p = \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-sp}}{s} + \frac{e^{-s \cdot 0}}{s} \right] = -0 + \frac{1}{s} = \frac{1}{s} \end{aligned}$$

LT obraz časovej funkcie $f(t) = 1$ je funkcia komplexnej premennej $F(s) = \frac{1}{s}$.

Obraz LT funkcie $f(t) = t$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t\} &= \int_0^{\infty} te^{-st} dt = \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^p te^{-st} dt = \left| \begin{array}{ll} u = t & u' = 1 \\ v' = e^{-st} & v = -\frac{e^{-st}}{s} \end{array} \right| = \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \left[-\frac{te^{-st}}{s} \right]_0^p - \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^p -\frac{e^{-st}}{s} \cdot 1 dt = \\ &= [-0 + 0] + \frac{1}{s} \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^p e^{-st} \cdot 1 dt = \\ &= \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

LT obraz funkcie $f(t) = t$ je funkcia komplexnej premennej $F(s) = \frac{1}{s^2}$.

Obraz LT funkcie $f(t) = e^{at}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t\} &= \int_0^\infty e^{at} e^{-st} dt = \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^p e^{-(s-a)t} dt = \lim_{p \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-(s-a)t}}{(s-a)} \right]_0^p = \\ &= \left[-0 + \frac{e^{-(s-a) \cdot 0}}{(s-a)} \right] = \frac{1}{s-a}\end{aligned}$$

LT obraz funkcie $f(t) = e^{at}$ je funkcia komplexnej premennej $F(s) = \frac{1}{s-a}$, tento obraz je možné získať aj pomocou vety o substitúcií (3).

Obraz LT funkcie $f(t) = t^n$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t\} &= \int_0^\infty t^n e^{-st} dt = \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^p t^n e^{-st} dt = \left| \begin{array}{ll} u = t^n & u' = nt^{n-1} \\ v' = e^{-st} & v = -\frac{e^{-st}}{s} \end{array} \right| = \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \left[-\frac{t^n e^{-st}}{s} \right]_0^p + \frac{n}{s} \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^p t^{n-1} e^{-st} dt = \left| \begin{array}{l} st = a \\ s dt = da \\ dt = \frac{da}{s} \end{array} \right| = \\ &= \frac{n}{s} \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^{sp} \left(\frac{a}{s}\right)^{n-1} e^{-a} \frac{da}{s} = \frac{n}{s^{n+1}} \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^{sp} a^{n-1} e^{-a} da = \frac{n}{s^{n+1}} \cdot \Gamma(n) = \\ &= \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}},\end{aligned}$$

kde $\Gamma(n)$ je Gamma funkcia, ktorá je definovaná

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty a^{n-1} e^{-a} da.$$

Pri riešení som postupoval na začiatku metódou per partes, ktorá viedla na funkciu podobnej Gamma funkcii, preto som použil substitúciu, ktorá upravila tento tvar a pomocou vlastnosti $n\Gamma(n) = \Gamma(n+1) = n!$ som odvodil vzťah $\frac{n!}{s^{n+1}}$, kde $n \in \mathbb{N}$.

Obraz LT funkcie $f(t) = \sin(\omega t)$:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} &= \int_0^{\infty} \sin(\omega t)e^{-st} dt = \\
 &= \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^p \sin(\omega t)e^{-st} dt = \left| \begin{array}{ll} u = \sin(\omega t) & u' = \omega \cos(\omega t) \\ v' = e^{-st} & v = -\frac{e^{-st}}{s} \end{array} \right| = \\
 &= \lim_{p \rightarrow \infty} \left[-\frac{\sin(\omega t)e^{-st}}{s} \right]_0^p - \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^p -\frac{e^{-st}\omega \cos(\omega t)}{s} dt = [-0 + 0] + \\
 &+ \frac{\omega}{s} \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^p \cos(\omega t)e^{-st} dt = \left| \begin{array}{ll} u = \cos(\omega t) & u' = -\omega \sin(\omega t) \\ v' = e^{-st} & v = -\frac{e^{-st}}{s} \end{array} \right| = \\
 &= \frac{\omega}{s} \lim_{p \rightarrow \infty} \left[-\frac{\cos(\omega t)e^{-st}}{s} \right]_0^p - \frac{\omega}{s} \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^p +\frac{e^{-st}\omega \sin(\omega t)}{s} dt = \\
 &= \frac{\omega}{s} \left[-0 + \frac{1}{s} \right] - \frac{\omega^2}{s^2} \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^p \sin(\omega t)e^{-st} dt = \frac{\omega}{s^2} - \frac{\omega^2}{s^2} \cdot I = \\
 I + \frac{\omega^2}{s^2} I &= \frac{\omega}{s^2} \\
 I &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.
 \end{aligned}$$

Pri riešení som použil dvakrát metódu per partes, potom som využil substitúciu integrálu $\lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^p \sin(\omega t)e^{-st} dt = I$ a následne upravil do výsledného tvaru.

LT obraz funkcie $f(t) = \sin(\omega t)$ je funkcia komplexnej premennej $F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$.

Obraz LT funkcie $f(t) = e^{at} \sin(\omega t)$:

Obraz funkcie $\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$, potom podľa vety o substitúcií (3) je obraz

funkcie $\mathcal{L}\{e^{at} \sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{(s - a)^2 + \omega^2}$

Obraz LT funkcie $f(t) = \cos(\omega t)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} &= \int_0^{\infty} \cos(\omega t)e^{-st} dt = \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^p \cos(\omega t)e^{-st} dt = \left| \begin{array}{ll} u = \cos(\omega t) & u' = -\omega \sin(\omega t) \\ v' = e^{-st} & v = -\frac{e^{-st}}{s} \end{array} \right| = \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \left[-\frac{\cos(\omega t)e^{-st}}{s} \right]_0^p - \frac{\omega}{s} \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^p e^{-st} \sin(\omega t) dt = \\ &= \frac{1}{s} - \frac{\omega}{s} \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega^2 - \omega^2 + s^2}{s(s^2 + \omega^2)} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

Pri riešení som použil metódu per partes, a potom som využil integrál z predchádzajúceho obrazu funkcie $\sin(\omega t)$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^p \sin(\omega t)e^{-st} dt = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

a následne upravil do výsledného tvaru.

LT obraz funkcie $f(t) = \cos(\omega t)$ je funkcia komplexnej premennej $F(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$.

Obraz LT funkcie $f(t) = e^{at} \cos(\omega t)$:

Obraz funkcie $\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ rovnako ako pri $\sin(\omega t)$, podľa vety o substitúcií (3) je obraz

$$\text{funkcie } \mathcal{L}\{e^{at} \cos(\omega t)\} = \frac{s - a}{(s - a)^2 + \omega^2}$$

5 Riešené príklady LODR

5.1 Riešené príklady LODR prvého rádu

Príklad 5.1 Nájdite riešenie rovnice

$$y'(t) + 2y(t) = 2t \quad (38)$$

s nulovou počiatočnou podmienkou ($y(0) = 0$).

Jedná sa o lineárnu LODR 1. rádu $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$,

$$y'(t) = -2y(t) + 2t,$$

kde $a(t) = -2$, $b(t) = 2t$. Rovnicu vyriešime metódou variácie konštanty.

Rovnicu (38) najskôr zhomogenizujeme, tj. položíme $b(t) = +2t = 0$, a nájdeme jej všeobecné riešenie $y(t) = Ce^{\int a(t) dt}$, $C \in \mathbb{R}$. Pretože $a(t) = -2$, dostávame

$$y(t) = Ce^{\int -2 dt} = Ce^{-2t}, C \in \mathbb{R}$$

Teraz hľadáme všeobecné riešenie pre (38) v tvare

$$y(t) = C(t)e^{-2t}. \quad (39)$$

Toto riešenie zderivujeme $y'(t) = C'(t)e^{-2t} - 2C(t)e^{-2t}$ a dosadíme (39) aj s deriváciou do (38)

$$C'(t)e^{-2t} - 2C(t)e^{-2t} + 2C(t)e^{-2t} = 2t,$$

po úprave $C'(t) = 2te^{2t}$.

Funkciu $C(t)$ nájdeme integráciou pomocou metódy per partes

$$C(t) = \int 2te^{2t} dt = \left| \begin{array}{ll} u' = e^{2t} & u = \frac{e^{2t}}{2} \\ v = 2t & v' = 2 \end{array} \right| = te^{2t} - \int e^{2t} dt = te^{2t} - \frac{e^{2t}}{2} + C,$$

$$C(t) = e^{2t} \left(t - \frac{1}{2} \right) + C, C \in \mathbb{R}.$$

Dosadením $C(t)$ do (39) dostaneme všeobecné riešenie rovnice (38)

$$y(t) = t - \frac{1}{2} + Ce^{-2t}. \quad (40)$$

Teraz dosadíme počiatočnú podmienku $y(0) = 0$

$$0 = 0 - \frac{1}{2} + C \cdot e^0 \Rightarrow C = \frac{1}{2}.$$

Túto konštantu dosadíme do (40) a dostaneme tak partikulárne riešenie pre (38)

$$\underline{y(t) = t - \frac{1}{2} + \frac{e^{-2t}}{2}}.$$

Rovnicu (38), ktorá má konštantné koeficienty, teraz vyriešime pomocou Laplaceovej transformácie.

Obraz ľavej strany rovnice získame pomocou vety o derivácií,

$$\mathcal{L}\{y'(t) + 2y(t)\} = sY(s) - y(0) + 2Y(s) = sY(s) + 2Y(s),$$

obraz pravej strany rovnice získame použitím slovníka LT.

$$\mathcal{L}\{2t\} = \frac{2}{s^2},$$

potom obraz rovnice (38) bude

$$sY(s) + 2Y(s) = \frac{2}{s^2},$$

po vyjadrení $Y(s)$

$$Y(s) = \frac{2}{s^2(s+2)}.$$

Predmet $y(t)$ k obrazu $Y(s)$ nájdeme pomocou súčtu rezíduí.

Charakteristický polynóm rovnice (38) $s^2(s+2) = 0$ je polynóm 3. stupňa a má pól druhého rádu $s_1 = 0$ a jeden pól prvého rádu $s_2 = -2$.

Výpočet spätnej LT pomocou rezíduí:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \sum \operatorname{res} [Y(s)e^{st}]_{s=s_k} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} [(s-s_k)^n Y(s)e^{st}],$$

v našom prípade

$$y(t) = \sum \operatorname{res} \left[\frac{2}{s^2(s+2)} e^{st} \right]_{s=s_k},$$

pričom pre pól druhého rádu $s_1 = 0$ je nutné spraviť prvú deriváciu

$$\begin{aligned} y(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left[s^2 \frac{2}{s^2(s+2)} e^{st} \right] + \lim_{s \rightarrow -2} \left[(s+2) \frac{2}{s^2(s+2)} e^{st} \right] = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{2te^{st}(s+2) - 2e^{st}}{(s+2)^2} \right] + \lim_{s \rightarrow -2} \left[\frac{2}{s^2} e^{st} \right] = \frac{2t \cdot 2 - 2}{4} + \frac{1}{2} e^{-2t}. \end{aligned}$$

Potom partikulárne riešenie je v tvare

$$\underline{y(t) = t - \frac{1}{2} + \frac{e^{-2t}}{2}}.$$

Príklad 5.2 Nájďte riešenie rovnice

$$2y'(t) + 3y(t) = e^{4t} \quad (41)$$

s nulovou počiatočnou podmienkou.

Jedná sa o lineárnu LODR 1. rádu s konštantnými koeficientami $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$,

$$y(t)' = -\frac{3}{2}y(t) + \frac{1}{2}e^{4t},$$

ktorú vyriešime metódou variácie konštanty ako v predchádzajúcom príklade.

Zhomogenizujeme rovnicu (41), vyriešime ju a budeme hľadať všeobecné riešenie v tvare

$$y(t) = C(t)e^{-\frac{3}{2}t}. \quad (42)$$

Toto riešenie zderivujeme $y'(t) = C'(t)e^{-\frac{3}{2}t} - \frac{3}{2}C(t)e^{-\frac{3}{2}t}$ a dosadíme (42) aj s deriváciou do (41)

$$2C'(t)e^{-\frac{3}{2}t} - 3C(t)e^{-\frac{3}{2}t} + 3C(t)e^{-\frac{3}{2}t} = e^{4t},$$

po úprave $C'(t) = \frac{1}{2}e^{\frac{11}{2}t}$.

Funkciu $C(t)$ nájdeme pomocou integrácie

$$C(t) = \frac{1}{2} \int e^{\frac{11}{2}t} dt = \frac{1}{11} e^{\frac{11}{2}t} + C, C \in \mathbb{R},$$

po zintegrování dostávame tvar

$$C(t) = \frac{1}{11}e^{\frac{11}{2}t} + C.$$

Dosadením $C(t)$ do (42) dostaneme všeobecné riešenie rovnice (41)

$$y(t) = \frac{1}{11}e^{4t} + Ce^{-\frac{3}{2}t}$$

a po dosadení poč. podmienky dostávame partikulárne riešenie v tvare

$$\underline{y(t) = \frac{1}{11}e^{4t} - \frac{1}{11}e^{-\frac{3}{2}t}.}$$

Rovnicu (41) s konštantnými koeficientami, ktorú vyriešime pomocou Laplaceovej transformácie.

Obraz ľavej strany rovnice získame pomocou vety o deriváciách,

$$\mathcal{L}\{2y'(t) + 3y(t)\} = 2sY(s) - 2y(0) + 3Y(s) = 2sY(s) + 3Y(s),$$

obraz pravej strany rovnice získame použitím slovníka LT

$$\mathcal{L}\{e^{4t}\} = \frac{1}{s-4},$$

potom obraz rovnice (41) bude

$$2sY(s) + 3Y(s) = \frac{1}{s-4},$$

po vyjadrení $Y(s)$

$$Y(s) = \frac{1}{2(s-4)(s+\frac{3}{2})}.$$

Predmet $y(t)$ k obrazu $Y(s)$ nájdeme pomocou súčtu rezíduí.

Charakteristický polynóm rovnice (41), $2(s-4)(s+\frac{3}{2}) = 0$ je polynóm 2. stupňa a má dva reálne póly $s_1 = -4$ a $s_2 = -\frac{3}{2}$.

Výpočet spätnej LT pomocou rezíduí:

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum \operatorname{res} \left[\frac{1}{2(s-4)(s+\frac{3}{2})} e^{st} \right]_{s=s_k} = \lim_{s \rightarrow 4} \left[\frac{1}{2(s+\frac{3}{2})} e^{st} \right] + \lim_{s \rightarrow -\frac{3}{2}} \left[\frac{1}{2(s-4)} e^{st} \right] = \\ &= \frac{1}{11}e^{4t} - \frac{1}{11}e^{-\frac{3}{2}t}. \end{aligned}$$

Potom partikulárne riešenie je v tvare

$$\underline{y(t) = \frac{1}{11}e^{4t} - \frac{1}{11}e^{-\frac{3}{2}t}.$$

Príklad 5.3 Nájdite riešenie rovnice

$$y'(t) + 4y(t) = \sin(2t) \quad (43)$$

s nulovou počiatočnou podmienkou.

Jedná sa o lineárnu LODR 1. rádu, ktorú vyriešime metódou variácie konštanty.

Rovnicu (43) zhomogenizujeme, tj. položíme $b(t) = \sin(2t) = 0$, jej všeobecné riešenie je v tvare

$$y(t) = Ce^{-4t}, C \in \mathbb{R}.$$

Teraz hľadáme všeobecné riešenie pre (43) v tvare

$$y(t) = C(t)e^{-4t}. \quad (44)$$

Toto riešenie zderivujeme $y'(t) = C'(t)e^{-4t} - 4C(t)e^{-4t}$ a dosadíme (44) aj s deriváciou do (43)

$$C'(t)e^{-4t} - 4C(t)e^{-4t} + 4C(t)e^{-4t} = \sin(2t)$$

po úprave $C'(t) = e^{4t} \sin(2t)$.

Funkciu $C(t)$ nájdeme integráciou pomocou metódy per partes

$$\begin{aligned} C(t) &= \int e^{4t} \sin(2t) dt = \left| \begin{array}{ll} u = \sin(2t) & u' = 2 \cos(2t) \\ v' = e^{4t} & v = \frac{e^{4t}}{4} \end{array} \right| = \\ &= \frac{e^{4t} \sin(2t)}{4} - \int \frac{e^{4t} \cos(2t)}{2} dt = \left| \begin{array}{ll} u = \cos(2t) & u' = -2 \sin(2t) \\ v' = \frac{e^{4t}}{2} & v = \frac{e^{4t}}{8} \end{array} \right| = \\ &= \frac{e^{4t} \sin(2t)}{4} - \frac{e^{4t} \cos(2t)}{8} - \frac{1}{4} \int e^{4t} \sin(2t) dt, \end{aligned}$$

integrál $\int e^{4t} \sin(2t) dt$ označíme ako I , potom

$$I + \frac{1}{4}I = \frac{e^{4t} \sin(2t)}{4} - \frac{e^{4t} \cos(2t)}{8}$$

$$I = \frac{4}{5} \left(\frac{e^{4t} \sin(2t)}{4} - \frac{e^{4t} \cos(2t)}{8} \right) + C$$

$$C'(t) = \int e^{4t} \sin(2t) dt = \frac{e^{4t} \sin(2t)}{5} - \frac{e^{4t} \cos(2t)}{10} + C.$$

Dosadením $C(t)$ do (44) dostaneme všeobecné řešení rovnice (43)

$$y(t) = Ce^{-4t} + \frac{\sin(2t)}{5} - \frac{\cos(2t)}{10}, \quad C \in \mathbb{R},$$

po dosazení počáteční podmínky dostaneme partikulární řešení pre (43)

$$\underline{y(t) = \frac{e^{-4t}}{10} + \frac{\sin(2t)}{5} - \frac{\cos(2t)}{10}, \quad C \in \mathbb{R}.}$$

Riešenie lineárnej LODR 1. rádu s konštantnými koeficientami (43) pomocou Laplaceovej transformácie.

Obraz ľavej strany rovnice získame pomocou vety o derivácií,

$$\mathcal{L}\{y'(t) + 4y(t)\} = sY(s) - y(0) + 4Y(s) = sY(s) + 4Y(s),$$

obraz pravej strany rovnice získame použitím slovníka LT.

$$\mathcal{L}\{\sin(2t)\} = \frac{2}{s^2 + 4},$$

potom obraz rovnice (43) bude

$$sY(s) + 4Y(s) = \frac{2}{s^2 + 4},$$

po vyjadrení $Y(s)$

$$Y(s) = \frac{2}{(s^2 + 4)(s + 4)}.$$

Predmet $y(t)$ k obrazu $Y(s)$ nájdeme pomocou rozkladu na parciálne zlomky s využitím slovníka LT.

$$\begin{aligned} \frac{2}{(s^2 + 4)(s + 4)} &= \frac{As + B}{s^2 + 4} + \frac{C}{s + 4} \\ 2 &= (As + B)(s + 4) + C(s^2 + 4) \\ 2 &= As^2 + 4As + Bs + 4B + Cs^2 + 4C \\ s^0: \quad &4B + 4C = 2 \\ s^1: \quad &4A + B = 0 \\ s^2: \quad &A + C = 0. \end{aligned}$$

Porovnaním koeficientov dostaneme

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{10}, \\ B &= \frac{2}{5}, \\ C &= \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

Potom spätnou LT pomocou slovníka získame partikulárne riešenie v tvare

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ +\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{s^2 + 4} - \frac{1}{10} \cdot \frac{s}{s^2 + 4} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{s + 4} \right\} \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{5} \sin(2t) - \frac{1}{10} \cos(2t) + \frac{1}{10} e^{-4t}}}. \end{aligned}$$

5.2 Riešené príklady LODR druhého rádu

Príklad 5.4 Nájdite riešenie rovnice

$$y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = 0 \tag{45}$$

s počiatočnými podmienkami $y(0) = 1, y'(0) = 1$.

Jedná sa o lineárnu homogénnu diferenciálnu rovnicu 2. rádu s konštantnými koeficientami, ktorú vyriešime pomocou charakteristickej rovnice

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

a má dva komplexne združené korene $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$,

potom všeobecné riešenie rovnice (45) má tvar

$$y(t) = C_1 e^t \cos(t) + C_2 e^t \sin(t), \quad C \in \mathbb{R}. \quad (46)$$

Konštanty C_1, C_2 dopočítame z počiatkových podmienok.

Dosadením podmienky $y(0) = 1$ do rovnice (45) dostávame

$$1 = C_1 + 0 \Rightarrow C_1 = 1.$$

Podmienku $y'(0) = 1$ dosadíme do derivácie (46),

tj. do vzťahu

$$y'(t) = C_1 e^t \cos(t) - C_1 e^t \sin(t) + C_2 e^t \sin(t) + C_2 e^t \cos(t).$$

Potom

$$1 = C_1 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0.$$

Partikulárne riešenie je teda

$$\underline{y(t) = e^t \cos(t)}.$$

Rovnicu (45) vyriešime pomocou Laplaceovej transformácie.

Obraz ľavej strany rovnice získame pomocou vety o deriváciách,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y''(t) - 2y'(t) + 2y(t)\} &= s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) - 2(sY(s) - y(0)) + 2Y(s) = \\ &= s^2 Y(s) - s - 2sY(s) + 1 + 3Y(s) \end{aligned}$$

a vyjadríme $Y(s)$

$$Y(s) = \frac{s - 1}{s^2 - 2s + 2}.$$

Predmet $y(t)$ k obrazu $Y(s)$ nájdeme pomocou súčtu rezíduí.

Charakteristický polynóm rovnice (45), $s^2 - 2s + 2 = 0$ je polynóm 2. stupňa a má dva komplexne združené póly $s_{1,2} = 1 \pm i$,

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum \operatorname{res} \left[\frac{s - 1}{(s - 1 + i)(s - 1 - i)} e^{st} \right]_{s=s_k} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 1+i} \left[\frac{s - 1}{(s - 1 + i)} e^{st} \right] + \lim_{s \rightarrow 1-i} \left[\frac{s - 1}{(s - 1 - i)} e^{st} \right] = \frac{1}{2} e^t (e^{it} + e^{-it}) = \\ &= e^t \cos(t). \end{aligned}$$

Potom partikulárne riešenie je v tvare

$$\underline{y(t) = e^t \cos(t)}.$$

Príklad 5.5 Nájdite riešenie rovnice

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 4e^{-3t}, \quad (47)$$

s počiatočnými podmienkami $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

Jedná sa o nehomogénnu lineárnu LODR 2. rádu s konštantnými koeficientami a vyriešime ju pomocou neurčitých koeficientov. Pravá strana je v tvare $f(t) = P_n(t)e^{at}$, kde $P_n(t)$ je polynóm n -tého stupňa, $a \in \mathbb{R}$.

Všeobecné riešenie rovnice (47) má tvar

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t),$$

kde $y_H(t)$ je všeobecné riešenie zhomogenizovanej rovnice a $y_P(t)$ je partikulárne riešenie nehomogénnej rovnice a má tvar

$$y_P(t) = t^k Q_n(t)e^{at},$$

kde k je násobnosť čísla a ako koreňa charakteristickej rovnice a $Q_n(t)$ je polynóm s neurčitými koeficientami rovnakého stupňa ako polynóm $P_n(t)$.

Zhomogenizujeme rovnicu (47) (tj. $f(t) = 0$)

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 0. \quad (48)$$

Charakteristická rovnica má tvar $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ a jej korene sú $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$.

Potom všeobecné riešenie (48) má tvar

$$y_H(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Teraz nájdeme partikulárne riešenie $y_P(t)$ rovnice (47). Platí $f(t) = 4e^{-3t}$,

kde $P_n(t) = P_0(t) = 4$ je polynóm 0. stupňa, a preto $Q_n(t) = A$.

Ďalej a nie je koreňom charakteristickej rovnice, preto $k = 0$. Teda

$$\begin{aligned}y_P(t) &= t^0 Ae^{-3t} = Ae^{-3t} \\y'_P(t) &= -3Ae^{-3t} \\y''_P(t) &= 9Ae^{-3t}.\end{aligned}$$

Vypočítané derivácie $y'_P(t), y''_P(t)$ spätne dosadíme do rovnice (47)

$$\begin{aligned}9Ae^{-3t} - 9Ae^{-3t} + 2Ae^{-3t} &= 4e^{-3t} \\2Ae^{-3t} &= 4e^{-3t}.\end{aligned}$$

Porovnáme koeficienty pri funkcii e^{-3t} na ľavej a pravej strane a dostaneme $A = 2$, tj. $y_P(t) = 2e^{-3t}$.

Všeobecné riešenie rovnice (47) je potom

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{-2t} + 2e^{-3t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Dopočítame konštanty C_1, C_2 z počiatočných podmienok.

Prvú počiatočnú podmienku dosadíme do všeobecného riešenia rovnice (47)

$$y(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{-2t} + 2e^{-3t}$$

a druhú počiatočnú podmienku dosadíme do jej derivácie

$$y'(t) = -C_1e^{-t} - 2C_2e^{-2t} - 6e^{-3t}.$$

Získame sústavu rovníc

$$\begin{aligned}0 &= C_1 + C_2 + 2 \\0 &= -C_1 - 2C_2 - 6,\end{aligned}$$

z ktorej dostaneme $C_2 = -4, C_1 = 2$. Potom partikulárne riešenie rovnice (47) je v tvare

$$\underline{\underline{y_P(t) = 2e^{-t} - 4e^{-2t} + 2e^{-3t}}}.$$

Rovnicu (47) teraz vyriešime pomocou Laplaceovej transformácie. Obraz ľavej strany rovnice získame pomocou vety o deriváciách,

$$\mathcal{L}\{y''(t) + 3y'(t) + 2y(t)\} = s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s)$$

a obraz pravej strany rovnice získame použitím slovníka LT.

$$\mathcal{L}\{4e^{-3t}\} = \frac{4}{s+3},$$

potom obraz rovnice (47) bude

$$s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = \frac{4}{s+3},$$

po vyjadrení $Y(s)$

$$Y(s) = \frac{4}{(s+1)(s+2)(s+3)}.$$

Predmet $y(t)$ k obrazu $Y(s)$ nájdeme pomocou súčtu rezíduí.

Charakteristický polynóm rovnice (47) $(s+1)(s+2)(s+3) = 0$ je polynóm 3. stupňa a má tri póly prvého rádu $s_1 = -1$, $s_2 = -2$, $s_3 = -3$.

Výpočet spätnej LT pomocou rezíduí:

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum \operatorname{res} \left[\frac{4}{(s+1)(s+2)(s+3)} e^{st} \right]_{s=s_k} \\ &= \lim_{s \rightarrow -1} \left[\frac{4}{(s+2)(s+3)} e^{st} \right] + \lim_{s \rightarrow -2} \left[\frac{4}{(s+1)(s+3)} e^{st} \right] + \lim_{s \rightarrow -3} \left[\frac{4}{(s+1)(s+2)} e^{st} \right] \\ &= 2e^{-t} - 4e^{-2t} + 2e^{-3t}. \end{aligned}$$

Potom partikulárne riešenie je v tvare

$$\underline{y(t) = 2e^{-t} - 4e^{-2t} + 2e^{-3t}.$$

Príklad 5.6 Nájdite riešenie rovnice

$$y''(t) + 2y'(t) = t \sin(t). \quad (49)$$

spočiatočnými podmienkami $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Jedná sa o nehomogénnu lineárnu LODR 2. rádu s konštantnými koeficientami a pravou stranou v tvare

$$f(t) = e^{at}[P_n(t) \sin(bt) + Q_m(t) \cos(bt)]$$

a vyriešime ju pomocou neurčitých koeficientov, kde $P_n(t) = P_1(t)$ je polynóm prvého stupňa, $Q_m(t)$ je nulový polynóm a $a = 0$.

Všeobecné riešenie rovnice (49) má tvar

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t),$$

kde $y_H(t)$ je všeobecné riešenie zhomogenizovanej rovnice a $y_P(t)$ je partikulárne riešenie nehomogénnej rovnice a má tvar

$$y_P(t) = t^k e^{at} [R_r(t) \sin(bt) + S_r(t) \cos(bt)],$$

kde k je násobnosť čísla $a + ib$ ako koreňa charakteristickej rovnice a $R_r(t)$ a $S_r(t)$ sú polynómy s neurčitými koeficientami rovnakého stupňa ako maximálny stupeň z polynómov $P_n(t), Q_m(t)$, $r = \max\{n, m\}$.

Zhomogenizujeme rovnicu (49) (tj. $f(t) = 0$)

$$y''(t) + 2y'(t) = 0. \quad (50)$$

Charakteristická rovnica má tvar $\lambda^2 + 2\lambda = 0$ a jej korene sú $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2$.

Potom všeobecné riešenie (50) má tvar

$$y_H(t) = C_1 + C_2 e^{-2t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Teraz nájdeme partikulárne riešenie $y_P(t)$ rovnice (49). Platí $f(t) = t \sin(t)$,

kde $P_n(t) = P_1(t) = t$ je polynóm prvého stupňa, a preto $R_n(t) = At + B$,

$S_n(t) = Ct + D$. Ďalej $a + ib = 1$ a nie je koreňom charakteristickej rovnice, preto $k = 0$. Teda

$$\begin{aligned} y_P(t) &= (At + B) \sin(t) + (Ct + D) \cos(t) \\ &= At \sin(t) + B \sin(t) + Ct \cos(t) + D \cos(t) \\ y'_P(t) &= A(\sin(t) + t \cos(t)) + B \cos(t) + C(\cos(t) - t \sin(t)) - D \sin(t) \\ y''_P(t) &= A(2 \cos(t) - t \sin(t)) - B \sin(t) + C(-2 \sin(t) - t \cos(t)) - D \cos(t). \end{aligned}$$

Vypočítané derivácie $y'_P(t), y''_P(t)$ spätne dosadíme do rovnice (49)

$$\begin{aligned} &A(\sin(t) + t \cos(t)) + B \cos(t) + C(\cos(t) - t \sin(t)) - D \sin(t) + \\ &2(A(2 \cos(t) - t \sin(t)) - B \sin(t) + C(-2 \sin(t) - t \cos(t)) - D \cos(t)) = t \sin(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(2A + 2B + 2C - D) \cos(t) + (2A - C)t \cos(t) + \\ &(2A - B - 2C - 2D) \sin(t) + (-A - 2C)t \sin(t) = t \sin(t). \end{aligned}$$

Porovnáme koeficienty pri (lineárne nezávislých) funkciách $\sin(t), \cos(t)$ a dostaneme

$$A = -\frac{1}{5}, B = \frac{14}{25}, C = -\frac{2}{5}, D = -\frac{2}{25}.$$

Všeobecné riešenie rovnice (49) je potom

$$\begin{aligned} y(t) &= y_H(t) + y_P(t) \\ &= C_1 + C_2 e^{-2t} - \frac{1}{5}t \sin(t) + \frac{14}{25} \sin(t) - \frac{2}{5}t \cos(t) - \frac{2}{25} \cos(t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dopočítame konštanty C_1, C_2 z počiatočných podmienok.

Prvú počiatočnú podmienku dosadíme do všeobecného riešenia rovnice (49)

$$y(t) = C_1 + C_2 e^{-2t} - \frac{1}{5}t \sin(t) + \frac{14}{25} \sin(t) - \frac{2}{5}t \cos(t) - \frac{2}{25} \cos(t)$$

a druhú počiatočnú podmienku dosadíme do jej derivácie

$$y'(t) = -2C_2 e^{-2t} + \frac{2}{5}t \sin(t) - \frac{3}{25} \sin(t) - \frac{1}{5}t \cos(t) + \frac{4}{25} \cos(t)$$

Získame sústavu rovníc

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 + C_2 - \frac{2}{25} \\ 0 &= -2C_2 + \frac{4}{25}, \end{aligned}$$

z ktorej dostaneme $C_2 = \frac{2}{25}, C_1 = 0$. Potom partikulárne riešenie rovnice (47) je v tvare

$$\underline{y_P(t) = \frac{2}{25} e^{-2t} - \frac{1}{5}t \sin(t) + \frac{14}{25} \sin(t) - \frac{2}{5}t \cos(t) - \frac{2}{25} \cos(t).}$$

Rovnicu (49) teraz vyriešime pomocou Laplaceovej transformácie.

Obraz ľavej strany rovnice získame pomocou vety o deriváciách,

$$\mathcal{L}\{y''(t) + 2y'(t)\} = s^2 Y(s) + 2sY(s)$$

a obraz pravej strany rovnice získame použitím slovníka LT.

$$\mathcal{L}\{t \sin(t)\} = \frac{2s}{(s^2 + 1)^2},$$

potom obraz rovnice (49) bude

$$s^2 Y(s) + 2sY(s) = \frac{2s}{(s^2 + 1)^2},$$

po vyjadrení $Y(s)$

$$Y(s) = \frac{2}{(s+2)(s^2+1)^2}.$$

Predmet $y(t)$ k obrazu $Y(s)$ nájdeme napríklad pomocou rozkladu na parciálne zlomky s využitím slovníka LT.

$$\frac{2}{(s+2)(s^2+1)^2} = \frac{A}{s+2} + \frac{Bx+C}{(s^2+1)^2} + \frac{Dx+E}{s^2+1},$$

$$A = \frac{2}{25}, B = -\frac{2}{5}, C = \frac{4}{5}, D = -\frac{2}{25}, E = \frac{4}{25}.$$

Potom

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{25} \cdot \frac{1}{(2+s)} - \frac{2}{5} \cdot \frac{s-2}{(s^2+1)^2} - \frac{2}{25} \cdot \frac{s-2}{(s^2+1)} \right\},$$

obrazy upravíme na tvar zo slovníka LT

$$\frac{2}{25} \cdot \frac{1}{(2+s)} \Rightarrow e^{at}, \quad -\frac{1}{5} \cdot \frac{2s}{(s^2+1)^2} \Rightarrow t \sin(\omega t),$$

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{(s^2+1)^2} = -\frac{2}{5} \cdot \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{(s^2+1)} \Rightarrow t \cos(\omega t) + \sin(\omega t),$$

$$-\frac{2}{25} \cdot \frac{s-2}{(s^2+1)} = -\frac{2}{25} \cdot \frac{s}{(s^2+1)} + \frac{4}{25} \cdot \frac{1}{(s^2+1)} \Rightarrow \cos(\omega t) + \sin(\omega t).$$

Potom

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{25} \cdot \frac{1}{(2+s)} - \frac{1}{5} \cdot \frac{2s}{(s^2+1)^2} - \frac{2}{5} \cdot \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{(s^2+1)} - \frac{2}{25} \cdot \frac{s}{(s^2+1)} + \frac{4}{25} \cdot \frac{1}{(s^2+1)} \right\},$$

$$y(t) = \frac{2}{25} e^{-2t} - \frac{1}{5} t \sin(t) + \frac{2}{5} \sin(t) - \frac{2}{5} t \cos(t) - \frac{2}{25} \cos(t) + \frac{4}{25} \sin(t),$$

po úprave je partikulárne riešenie v tvare

$$\underline{y(t) = \frac{2}{25} e^{-2t} - \frac{1}{5} t \sin(t) + \frac{14}{25} \sin(t) - \frac{2}{5} t \cos(t) - \frac{2}{25} \cos(t).}$$

5.3 Riešené príklady sústav LODR prvého rádu

Príklad 5.7 Nájdite riešenie sústavy rovníc

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= -3y_1(t) + 4y_2(t) - 2y_3(t) \\ y_2'(t) &= 1y_1(t) + y_3(t) \\ y_3'(t) &= 6y_1(t) - 6y_2(t) + 5y_3(t) \end{aligned} \quad (51)$$

s počiatočnými podmienkami $y_1'(0) = 2$, $y_2'(0) = 3$, $y_3'(0) = -1$.

Sústavu DR prvého rádu vyriešime metódou vlastných čísel a vlastných vektorov. Sústavu (51) zapíšeme do maticového tvaru

$$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t), \quad (52)$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

a nájdeme determinant matice $(A - \lambda I)$, kde I je jednotková matica, a ten položíme rovný nule.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -3 - \lambda & 4 & -2 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 6 & -6 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0.$$

Získame tri vlastné čísla charakteristickej rovnice sústavy

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1.$$

Pre $\lambda_1 = 2$ riešenie budeme hľadať v tvare

$$\mathbf{y}_1(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Vypočítame jeho deriváciu

$$\mathbf{y}_1'(t) = \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \\ 2c \end{pmatrix} e^{2t}$$

a spätne dosadíme do maticovej rovnice (52)

$$\begin{pmatrix} 2a \\ 2b \\ 2c \end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Po úprave dostávame systém lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} 2a &= -3a + 4b - 2c, \\ 2b &= +a + c, \\ 2c &= +a - 6b + 5c, \end{aligned}$$

ktorý má nekonečne veľa riešení s jedným voliteľným parametrom $p \in \mathbb{R}$, tj. riešenie môžeme napísať v tvare

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ b &= p \\ c &= 2p. \end{aligned}$$

Zvolíme napr. $b = 1$, potom $c = 2$ a

$$\mathbf{y}_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^t.$$

Pre $\lambda_2 = 1$ riešenie budeme hľadať v tvare

$$\mathbf{y}_2(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} e^t \Rightarrow \mathbf{y}'_2(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} e^t$$

a znovu dosadíme do maticovej rovnice (52)

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} e^t.$$

Po úprave dostávame systém lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} a &= -3a + 4b - 2c & a &= p \\ b &= +a + c & \Rightarrow & b = p \\ c &= +a - 6b + 5c & c &= 0, \end{aligned}$$

kde $p \in \mathbb{R}$ je parameter. Pre voľbu $a = 1$ máme $b = 1$, a teda

$$\mathbf{y}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t.$$

Pre $\lambda_3 = -1$ riešenie budeme hľadať v tvare

$$\mathbf{y}_3(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} e^{-t} \Rightarrow \mathbf{y}'_3(t) = \begin{pmatrix} -a \\ -b \\ -c \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Znovu dosadíme do maticovej rovnice (52)

$$\begin{pmatrix} -a \\ -b \\ -c \end{pmatrix} e^{-t} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} e^{-t},$$

po úprave dostávame systém lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} -a &= -3a + 4b - 2c & a &= p \\ -b &= +a + c & \Rightarrow & b = 0 \\ -c &= +a - 6b + 5c & c &= -p, \end{aligned}$$

kde $p \in \mathbb{R}$ je parameter. Pre voľbu $a = 1$ máme $c = -1$, a teda

$$\mathbf{y}_3(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Všeobecné riešenie sústavy rovníc (51) je potom

$$\mathbf{y}(t) = C_1 \mathbf{y}_1(t) + C_2 \mathbf{y}_2(t) + C_3 \mathbf{y}_3(t) = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Jednotlivé všeobecné riešenia sústavy rovníc (51) sú

$$\begin{aligned} y_1(t) &= C_2 e^t + C_3 e^{-t}, \\ y_2(t) &= C_1 e^{2t} + C_2 e^t, \\ y_3(t) &= 2C_1 e^{2t} - C_3 e^{-t}. \end{aligned} \tag{53}$$

Dosadíme počiatočné podmienky a tak získame systém lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} 2 &= C_2 + C_3 \\ 3 &= C_1 + C_2 \\ -1 &= 2C_1 - C_3, \end{aligned}$$

ktorý má riešenie $C_1 = -2, C_2 = 5, C_3 = -3$.

Dosadením vypočítaných konštánt do všeobecného riešenia (53) dostaneme partikulárne riešenie sústavu rovníc (51)

$$\begin{aligned} y_1(t) &= +5e^t - 3e^{-t}, \\ y_2(t) &= -2e^{2t} + 5e^t, \\ y_3(t) &= -4e^{2t} + 3e^{-t}. \end{aligned}$$

Vyriešime nehomogénnu sústavu LODR s konštantnými koeficientami v tvare

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'_1(t) &= -3\mathbf{y}_1(t) + 4\mathbf{y}_2(t) - 2\mathbf{y}_3(t) + 1 \\ \mathbf{y}'_2(t) &= 1\mathbf{y}_1(t) + \mathbf{y}_3(t) - 3 \\ \mathbf{y}'_3(t) &= 6\mathbf{y}_1(t) - 6\mathbf{y}_2(t) + 5\mathbf{y}_3(t) + 2 \end{aligned} \quad (54)$$

kde vektor pravej strany je v tvare

$$\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Jej riešenie budeme hľadať metódou variácie konštánt. Využijeme fundamentálnu maticu $\mathbf{Y}(t)$ získanú zo sústavy (51), ktorá je zhomogenizovaná k sústave (54)

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} 0 & e^t & e^{-t} \\ e^{2t} & e^t & 0 \\ 2e^{2t} & 0 & -e^{-t} \end{pmatrix}. \quad (55)$$

Riešenie homogénnej sústavy je

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t)\mathbf{c}$$

a všeobecné riešenie nehomogénnej sústavy rovníc (54) budeme hľadať v tvare

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t)\mathbf{c}(t), \quad (56)$$

kde sme vektor konštánt \mathbf{c} nahradili zatiaľ neurčeným vektorom funkcií $\mathbf{c}(t)$.

Vektor funkcií $\mathbf{c}(t)$ určíme tak, že riešenie (56) aj s jeho deriváciou

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{Y}'(t)\mathbf{c}(t) + \mathbf{Y}(t)\mathbf{c}'(t),$$

dosadíme do sústavy (22) a dostaneme

$$\mathbf{Y}(t)\mathbf{c}'(t) = \mathbf{f}(t),$$

po úprave

$$\mathbf{c}'(t) = \mathbf{Y}^{-1}(t)\mathbf{f}(t),$$

$$\mathbf{c}'(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & -e^{-2t} & e^{-2t} \\ -e^{-t} & 2e^{-t} & -e^{-t} \\ 2e^t & -2e^t & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6e^{-2t} \\ -9e^{-t} \\ 10e^t \end{pmatrix}.$$

Integráciou dostaneme

$$\mathbf{c}(t) = \int \mathbf{c}'(t) dt + \mathbf{C}, \quad \mathbf{C} \in \mathbb{R},$$

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} 6e^{-2t} + C_1 \\ -9e^{-t} + C_2 \\ 10e^t + C_3 \end{pmatrix}.$$

Po dosadení vektora funkcií $\mathbf{c}(t)$ do (56) dostaneme všeobecné riešenie nehomogénnej sústavy (54) v tvare

$$\begin{aligned} y_1(t) &= C_2 e^t + C_3 e^{-t} + 19, \\ y_2(t) &= C_1 e^{2t} + C_2 e^t + 6, \\ y_3(t) &= 2C_1 e^{2t} - C_3 e^{-t} - 16. \end{aligned} \tag{57}$$

Po dosadení počiatočných podmienok do (57) a vyriešení lineárnej sústavy rovníc dostaneme partikulárne riešenie pre (54) v tvare

$$\begin{aligned} y_1(t) &= -4e^t - 13e^{-t} + 19, \\ y_2(t) &= e^{2t} - 4e^t + 6, \\ y_3(t) &= 2e^{2t} + 13e^{-t} - 16. \end{aligned}$$

Sústavu rovníc (51) teraz vyriešime pomocou LT.

Na sústavu rovníc aplikujeme Laplaceovu transformáciu a dostaneme maticovú rovnicu v tvare

$$s\mathbf{Y}(s) = A\mathbf{Y}(s) + \mathbf{F}(s) + \mathbf{b},$$

po úprave

$$\mathbf{Y}(s) = (sI - A)^{-1} [\mathbf{F}(s) + \mathbf{b}], \quad (58)$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & -6 & 5 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{F}(s) = 0, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Vyriešime maticovú rovnicu (58)

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(s) &= \begin{pmatrix} s+3 & -4 & 2 \\ -1 & s & -1 \\ -6 & 6 & s-5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(s+1)(s-1)(s-2)} \begin{pmatrix} s^2 - 5s + 6 & 4s - 8 & -2s + 4 \\ 1 + s & s^2 - 2s - 3 & s + 1 \\ 6s - 6 & -6s + 6 & s^2 + 3s - 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{(s+1)(s-1)(s-2)} \begin{pmatrix} s^2 + 4s - 16 \\ 3s^2 - 5s - 8 \\ -s^2 - 9s + 10 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Spätnou Laplaceovou transformáciou dostaneme partikulárne riešenie

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 5e^t - 3e^{-t} + 0 \\ 5e^t + 0 - 2e^{2t} \\ 0 + 3e^{-t} - 4e^{2t} \end{pmatrix},$$

kde jednotlivé funkcie majú tvar

$$\begin{aligned} y_1(t) &= 5e^t - 3e^{-t} \\ y_2(t) &= 5e^t - 2e^{2t} \\ y_3(t) &= 3e^{-t} - 4e^{2t}. \end{aligned}$$

Pre nehomogénnu sústavu rovníc (54) s vektorom funkcií na pravej strane

$$\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Získame jeho obraz

$$\mathbf{F}(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s} \\ \frac{-3}{s} \\ \frac{2}{s} \end{pmatrix},$$

potom obraz riešenia podľa (58) bude

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(s) &= \frac{1}{(s+1)(s-1)(s-2)} \begin{pmatrix} s^2 - 5s + 6 & 4s - 8 & -2s + 4 \\ 1 + s & s^2 - 2s - 3 & s + 1 \\ 6s - 6 & -6s + 6 & s^2 + 3s - 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{s} + 2 \\ \frac{-3}{s} + 3 \\ \frac{2}{s} - 1 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-2s^2 - 9s + 19}{s(1 - s^2)} \\ \frac{3s^2 - 11s + 12}{s(s-1)(s-2)} \\ \frac{-s^2 - 8 + 32}{s(s+1)(s-2)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Spätnou Laplaceovou transformáciou $Y(s)$ dostaneme partikulárne riešenie pre nehomogénnu sústavu (54) v tvare

$$\begin{aligned} y_1(t) &= -4e^t - 13e^{-t} + 19, \\ y_2(t) &= e^{2t} - 4e^t + 6, \\ y_3(t) &= 2e^{2t} + 13e^{-t} - 16. \end{aligned} \tag{59}$$

Príklad 5.8 Nájdiť riešenie sústavy rovníc

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'_1(t) &= \mathbf{y}_1(t) - \mathbf{y}_2(t) + \mathbf{y}_3(t) \\ \mathbf{y}'_2(t) &= \mathbf{y}_1(t) + \mathbf{y}_2(t) - \mathbf{y}_3(t) \\ \mathbf{y}'_3(t) &= -\mathbf{y}_2(t) + 2\mathbf{y}_3(t) \end{aligned} \tag{60}$$

s počiatočnými podmienkami $\mathbf{y}'_1(0) = 2$, $\mathbf{y}'_2(0) = -2$, $\mathbf{y}'_3(0) = 1$.

Sústavu DR prvého rádu vyriešime metódou vlastných čísel a vlastných vektorov.

Sústavu (60) zapíšeme do maticového tvaru

$$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t), \tag{61}$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a najdeme determinant matice $(A - \lambda I)$, kde I je jednotková matice, a ten položíme rovný nule.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1 - \lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(\lambda - 1)^2 = 0.$$

Získame tri vlastné čísla charakteristickej rovnice sústavy

$$\lambda_1 = 2, \lambda_{2,3} = 1.$$

Pre $\lambda_1 = 2$ budeme riešenie hľadať v tvare

$$\mathbf{y}_1(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} e^{2t}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}'_1(t) = \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \\ 2c \end{pmatrix} e^{2t}$$

a spätne dosadíme do maticovej rovnice (61)

$$\begin{pmatrix} 2a \\ 2b \\ 2c \end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Po úprave dostávame systém lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} 2a &= +a - b + c \\ 2b &= +a + b - c \\ 2c &= -b + 2c, \end{aligned}$$

a jeho riešenie je $b = 0, c = a = 1$,

potom

$$\mathbf{y}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Pre $\lambda_{2,3} = 1$ budeme riešenie hľadať v tvare

$$\mathbf{y}_{2,3}(t) = \begin{pmatrix} at + b \\ ct + d \\ et + f \end{pmatrix} e^t \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}'_{2,3}(t) = \begin{pmatrix} a + at + b \\ c + ct + d \\ e + et + f \end{pmatrix} e^t$$

a znovu dosadíme do maticovej rovnice rovnice (61)

$$\begin{pmatrix} a + at + b \\ c + ct + d \\ e + et + f \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} at + b \\ ct + d \\ et + f \end{pmatrix} e^t,$$

po úprave dostávame systém lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} 0 &= +a +d -f +ct -et \\ 0 &= +c -b +f -at +et \\ 0 &= d +e -fb +ct -et, \end{aligned}$$

ktorý má nekonečne veľa riešení s dvomi voliteľným parametrami $p, q \in \mathbb{R}$, tj. riešenie môžeme napísať v tvare

$$\begin{aligned} a &= p \\ b &= p + q \\ c &= p \\ d &= q - p \\ e &= p \\ f &= q. \end{aligned}$$

1. voľba napr. $e = 1, f = 1 \Rightarrow d = 0, c = 1, b = 2, a = 1$,

a potom

$$\mathbf{y}_2(t) = \begin{pmatrix} t + 2 \\ t \\ t + 1 \end{pmatrix} e^t.$$

2. voľba napr. $e = 0, f = 1 \Rightarrow d = 1, c = 0, b = 1, a = 0$,

a potom

$$\mathbf{y}_3(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t.$$

Všeobecné riešenie sústavy (60) je potom

$$\mathbf{y}(t) = C_1 \mathbf{y}_1(t) + C_2 \mathbf{y}_2(t) + C_3 \mathbf{y}_3(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + \left[C_2 \begin{pmatrix} t + 2 \\ t \\ t + 1 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] e^t.$$

Jednotlivé všeobecné riešenia sústavy rovníc (60)

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= C_1 e^{2t} + C_2 t e^t + 2C_2 e^t + C_3 e^t \\
y_2(t) &= C_2 t e^t + C_3 e^t \\
y_3(t) &= C_1 e^{2t} + C_2 t e^t + C_2 e^t + C_3 e^t,
\end{aligned} \tag{62}$$

Dosadením počiatočných podmienok do všeobecného riešenia (62) získame partikulárne riešenie pre sústavu rovníc (51)

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= 2e^{2t} + te^t \\
y_2(t) &= (t - 2)e^t \\
y_3(t) &= 2e^{2t} + (t - 1)e^t.
\end{aligned}$$

Sústavu rovníc (60) teraz vyriešime pomocou LT.

Na sústavu rovníc (60) aplikujeme Laplaceovu transformáciu a dostaneme maticovú rovnicu v tvare

$$s\mathbf{Y}(s) = A\mathbf{Y}(s) + \mathbf{F}(s) + \mathbf{b},$$

po úprave,

$$\mathbf{Y}(s) = (sI - A)^{-1} [\mathbf{F}(s) + \mathbf{b}], \tag{63}$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{F}(s) = \mathbf{0}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vyriešime maticovú rovnicu (63)

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y}(s) &= \begin{pmatrix} s-1 & 1 & -1 \\ -1 & s-1 & 1 \\ 0 & 1 & s-2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{(s-1)^2(s-2)} \begin{pmatrix} s^2-3s+1 & -s+1 & s \\ -2+s & s^2-3s+2 & -s+2 \\ -1 & -s+1 & s^2-2s+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{(s-1)^2(s-2)} \begin{pmatrix} 2s^2-3s \\ -2s+3 \\ s^2-2 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

spätnou Laplaceovou transformáciou dostaneme partikulárne riešenie

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 2e^{2t} + te^t \\ te^t - 2e^t \\ 2e^{2t} + te^t - e^t \end{pmatrix},$$

kde jednotlivé výsledné funkcie

$$\begin{aligned} y_1(t) &= 2e^{2t} + te^t \\ y_2(t) &= te^t - 2e^t \\ y_3(t) &= 2e^{2t} + te^t - e^t. \end{aligned}$$

Príklad 5.9 Nájdiť riešenie sústavy rovníc

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'_1(t) &= \mathbf{y}_1(t) - \mathbf{y}_2(t) - \mathbf{y}_3(t) \\ \mathbf{y}'_2(t) &= \mathbf{y}_1(t) + \mathbf{y}_2(t) \\ \mathbf{y}'_3(t) &= 3\mathbf{y}_1(t) + \mathbf{y}_3(t) \end{aligned} \tag{64}$$

s počiatočnými podmienkami $\mathbf{y}'_1(0) = 1$, $\mathbf{y}'_2(0) = -1$, $\mathbf{y}'_3(0) = 2$.

Sústavu DR prvého rádu vyriešime metódou vlastných čísel a vlastných vektorov.

Sústavu (60) zapíšeme do maticového tvaru

$$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t), \tag{65}$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a nájdeme determinant matice $(A - \lambda I)$, kde I je jednotková matica, a ten položíme rovný nule.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1 - \lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(\lambda - 1)^2 = 0.$$

Získame tri vlastné čísla charakteristickej rovnice sústavy

$$\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = 1 \pm 2i.$$

Pre $\lambda_1 = 1$ budeme riešenie hľadať v tvare

$$\mathbf{y}_1(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} e^t, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}'_1(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} e^{2t}$$

a spätne dosadíme do maticovej rovnice (65)

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Po úprave dostávame systém lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} a &= +a - b - c \\ b &= +a + b \\ c &= 3a + c, \end{aligned}$$

ktorý má nekonečne veľa riešení s jedným voliteľným parametrom $p \in \mathbb{R}$, tj. riešenie môžeme napísať v tvare

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ b &= p \\ c &= -p, \end{aligned}$$

zvolíme napr. $b = 1, \Rightarrow a = 0, c = -1$,

potom

$$\mathbf{y}_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t.$$

Pre $\lambda_2 = 1 + 2i$ budeme riešenie hľadať v tvare

$$\mathbf{y}_{2,3}(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} e^{(1+2i)t} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}'_2(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} (1 + 2i)e^{(1+2i)t}$$

a znovu dosadíme do maticovej rovnice rovnice (65)

$$(1 + 2i) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} e^{(1+2i)t} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} e^{(1+2i)t},$$

po úprave dostávame systém lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} a + 2ai &= +a -b -c \\ b + 2bi &= +a +b \\ c + 2ci &= 3a +c, \end{aligned}$$

ktorý má nekonečne veľa riešení s voliteľným parametrom $p \in \mathbb{R}$, tj. riešenie môžeme napísať v tvare

$$\begin{aligned} a &= \frac{2ip}{3} \\ b &= \frac{p}{3} \\ c &= p, \end{aligned}$$

zvolíme napr. $c = 3$, $\Rightarrow b = 1$, $a = 2i$,

potom

$$\mathbf{y}_2(t) = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{(1+2i)t} \Rightarrow \mathbf{y}_3(t) = \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{(1-2i)t}$$

pomocou Eulerového vzťahu $e^{ati} = \cos(at) + i \sin(at)$ dostaneme

$$\mathbf{y}_2(t) = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^t (\cos(2t) + i \sin(2t)) = \begin{pmatrix} 2i \cos(2t) - 2 \sin(2t) \\ \cos(2t) + i \sin(2t) \\ 3 \cos(2t) + 3i \sin(2t) \end{pmatrix},$$

ktoré rozdelíme na reálnu a imaginárnu časť a všeobecné riešenie sústavy (64) je potom

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \mathbf{y}_1(t) + \operatorname{Re}\{\mathbf{y}_2(t)\} + \operatorname{Im}\{\mathbf{y}_2(t)\} \\ &= \left[C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -2 \sin(2t) \\ \cos(2t) \\ 3 \cos(2t) \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 2 \cos(2t) \\ \sin(2t) \\ 3i \sin(2t) \end{pmatrix} \right] e^t. \end{aligned}$$

Jednotlivé všeobecné riešenia sústavy rovníc (64)

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^t [-2C_2 \sin(2t) + 2C_3 \cos(2t)], \\ y_2(t) &= e^t [C_1 + C_2 \cos(2t) + C_3 \sin(2t)], \\ y_3(t) &= e^t [-C_1 + 3C_2 \cos(2t) + 3C_3 \sin(2t)]. \end{aligned} \tag{66}$$

Dosadením počiatočných podmienok do všeobecného riešenia (66) získame partikulárne riešenie pre sústavu rovníc (64)

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^t \frac{1}{2} [-\sin(2t) + 2 \cos(2t)], \\ y_2(t) &= e^t \frac{1}{4} [-5 + \cos(2t) + 2 \sin(2t)], \\ y_3(t) &= e^t \frac{1}{4} [5 + 3 \cos(2t) + 6 \sin(2t)]. \end{aligned}$$

Sústavu rovnic (64) teraz vyriešime pomocou LT.

Na sústavu rovnic (64) aplikujeme Laplaceovu transformáciu a dostaneme maticovú rovnicu v tvare

$$s\mathbf{Y}(s) = A\mathbf{Y}(s) + \mathbf{F}(s) + \mathbf{b},$$

po úprave,

$$\mathbf{Y}(s) = (sI - A)^{-1} [\mathbf{F}(s) + \mathbf{b}], \quad (67)$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{F}(s) = \mathbf{0}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Vyriešime maticovú rovnicu (67)

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(s) &= \begin{pmatrix} s-1 & 1 & 1 \\ -1 & s-1 & 0 \\ -3 & 0 & s-1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{(s-1)(s^2-2s+5)} \begin{pmatrix} s^2-2s-11 & -s+1 & -s+1 \\ s-1 & s^2-2s+4 & -1 \\ -3s-3 & -3 & s^2-2s+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{(s-1)(s^2-2s+5)} \begin{pmatrix} s^2-3s+2 \\ -s^2+3s-7 \\ 2s^2-s+4 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

spätnou Laplaceovou transformáciou dostaneme partikulárne riešenie

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \sin(2t)e^t + \cos(2t)e^t \\ -\frac{5}{4} + \frac{1}{4} \cos(2t)e^t + \frac{1}{2} \sin(2t)e^t \\ \frac{5}{4} + \frac{3}{4} \cos(2t)e^t + \frac{3}{2} \sin(2t)e^t \end{pmatrix},$$

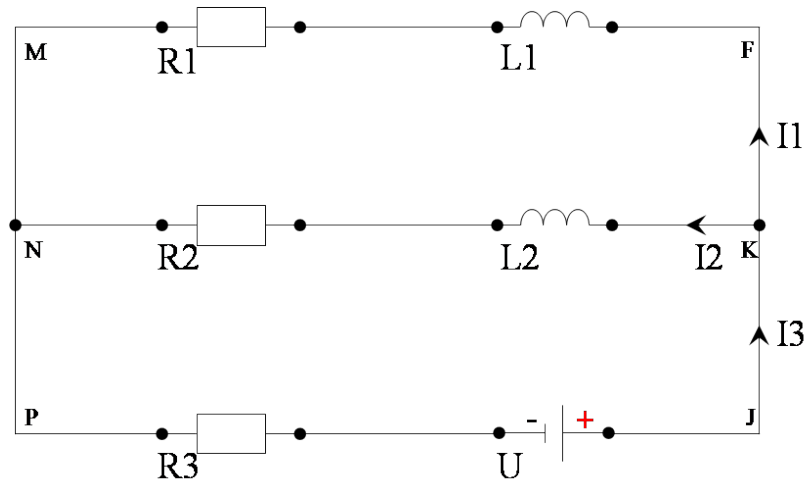
kde jednotlivé výsledné funkcie

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^t \frac{1}{2} [-\sin(2t) + 2 \cos(2t)], \\ y_2(t) &= e^t \frac{1}{4} [-5 + \cos(2t) + 2 \sin(2t)], \\ y_3(t) &= e^t \frac{1}{4} [5 + 3 \cos(2t) + 6 \sin(2t)]. \end{aligned}$$

Príklady boli čerpané z [1]

5.4 Model paralelného obvodu RL

Je daný elektrický obvod na obrázku 5.4.1. Nájďte časové závislosti prúdu v jednotlivých vetvách obvodu, ak je v čase $t = 0 \text{ s}$, $i_1(0) = i_2(0) = 0 \text{ A}$. Kde $R_1 = 20 \Omega$, $R_2 = 10 \Omega$, $R_3 = 20 \Omega$, $L_1 = 4 \text{ H}$, $L_2 = 2 \text{ H}$, $U = 120 \text{ V}$.



Obr. 5.4.1. Schéma paralelného elektrického obvodu RL

Podľa **prvého Kirchhoffovho zákona**: Súčet prúdov vstupujúcich do uzla sa rovná súčtu prúdov z uzla vystupujúcich (súčet prúdov v ktoromkoľvek uzle elektrického obvodu sa rovná nule)

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0.$$

Pre uzol K , potom $i_3(t) = i_1(t) + i_2(t)$.

Podľa **druhého Kirchhoffovho zákona**: Súčet napätí zdrojov v uzavretej slučke sa rovná súčtu úbytkov napätí na spotrebičoch (celkový súčet napätí v uzavretej slučke sa rovná nule).

$$\sum_{i=1}^n U_i = 0.$$

Napätie na odpore podľa Ohmovho zákona

$$U = RI$$

a napätie na cievke (induktore) je podľa Faradayovho zákona elektromagnetickej indukcie

$$U = L \frac{di(t)}{dt}, \quad (68)$$

potom platí

pre sľučku J,K,N,P,J :

$$-U + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + R_2 i_2(t) + R_3 [i_1(t) + i_2(t)] = 0,$$

pre sľučku K,L,M,N,K :

$$-R_2 i_2(t) - L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + R_1 i_1(t) = 0.$$

Po dosadení a úprave dostaneme nehomogénnu sústavu dvoch rovníc prvého rádu s konštantnými koeficientami, ktorú vyriešime pomocou Laplaceovej transformácie.

$$\begin{aligned} i_1'(t) &= -10i_1(t) - 5i_2(t) + 30, \\ i_2'(t) &= -10i_1(t) - 15i_2(t) + 60, \end{aligned}$$

na sústavu rovníc aplikujeme Laplaceovu transformáciu a dostaneme maticovú rovnicu v tvare

$$s\mathbf{I}(s) = \mathbf{A}\mathbf{I}(s) + \mathbf{F}(s) + \mathbf{b},$$

po úprave,

$$\mathbf{I}(s) = (sE - \mathbf{A})^{-1} [\mathbf{F}(s) + \mathbf{b}], \quad (69)$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -10 & -5 \\ -10 & -15 \end{pmatrix}, \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{F}(s) = \begin{pmatrix} \frac{30}{s} \\ \frac{60}{s} \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

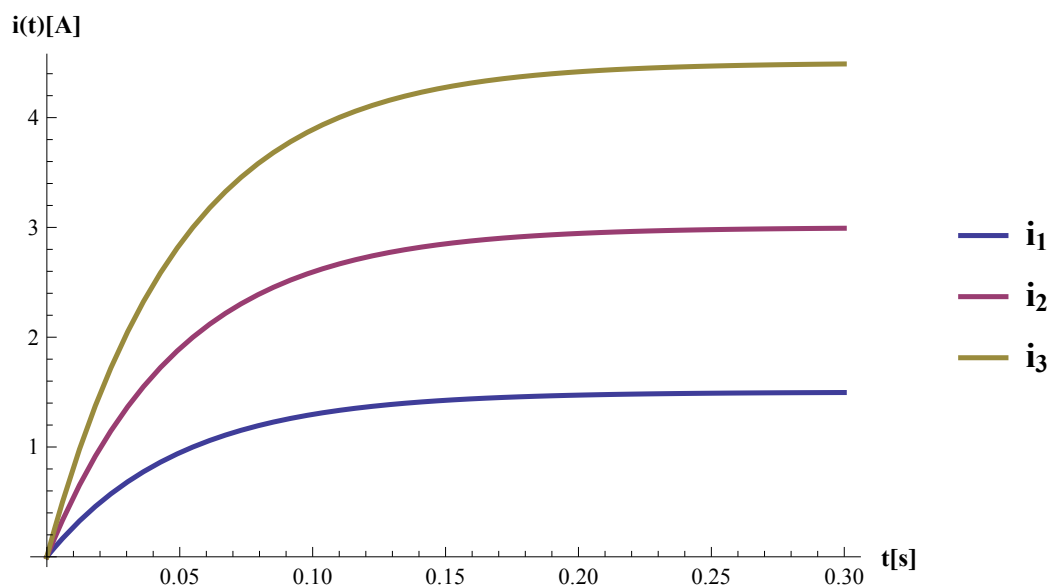
Potom

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(s) &= \begin{pmatrix} s+10 & 5 \\ 10 & s+15 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{30}{s} \\ \frac{60}{s} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{(s+20)(s+5)} \begin{pmatrix} s+15 & -5 \\ -10 & s+10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{30}{s} \\ \frac{60}{s} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{30}{s(s+20)} \\ \frac{60}{s(s+20)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pomocou spätnej LT získame časovú závislosť prúdov v jednotlivých vetvách, ktoré sú zobrazené v grafe na obrázku 5.4.2.

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \frac{3}{2}(1 - e^{-20t}), \\ i_2(t) &= 3(1 - e^{-20t}), \\ i_3(t) &= \frac{9}{2}(1 - e^{-20t}). \end{aligned}$$

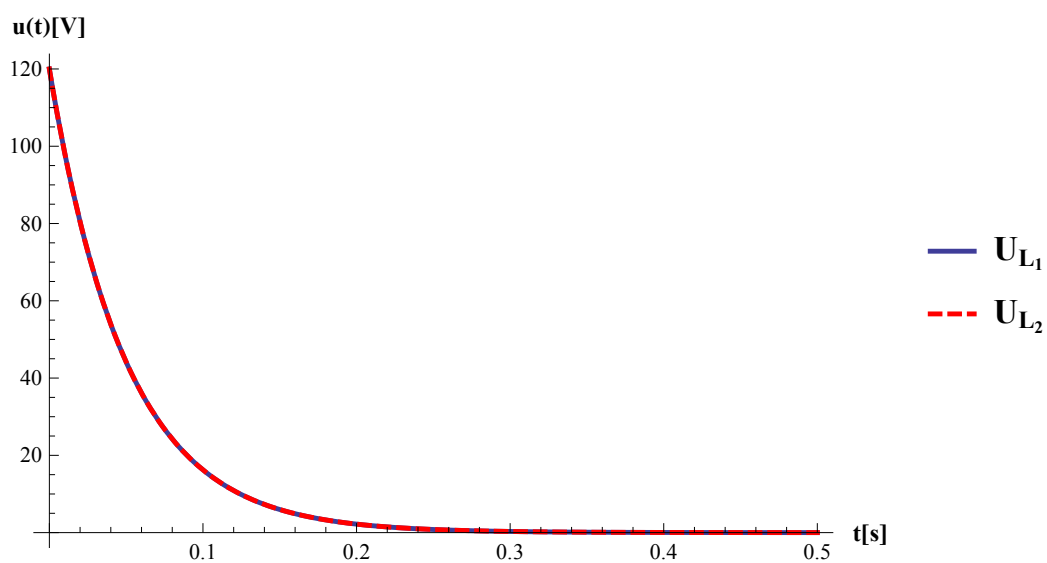
A keďže prúd nie je konštantný, tak sa na cievke indukuje napätie podľa (68).



Obr. 5.4.2. Graf priebehu prúdov pre uzol K.

$$U_{L1} = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} = 120e^{-20t},$$

$$U_{L2} = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} = 120e^{-20t}.$$

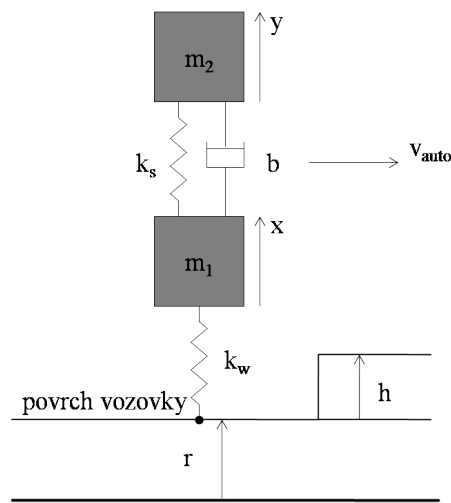


Obr. 5.4.3. Graf priebehu napätia na cievkach

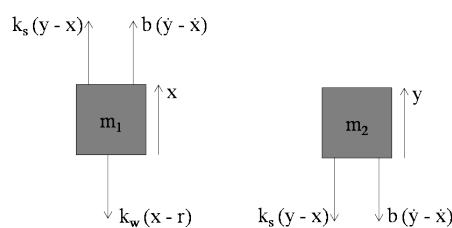
5.5 Model odpružení kola automobilu

Ide o jedno-dimenzionálny vertikálny pohyb jednej štvrtiny váhy automobilu nad jedným kolesom. Štvorkolesový automobil s váhou 1580 kg, vrátane štyroch kolies, kde jedno koleso má váhu 20 kg, potom pre jednu štvrtinu karosérie auta $m_2 = 375 \text{ kg}$ a koleso $m_1 = 20 \text{ kg}$. Tuhosť pružiny karosérie je $k_s = 130\,000 \frac{\text{N}}{\text{m}}$, koeficient útlmu $b = 9\,800 \frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{m}}$, tuhosť pneumatiky kola $k_w = 1\,000\,000 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ a nulové počiatkové podmienky.

Podľa **Newtonového pohybového zákona** platí, že sila \mathbf{F} sa rovná časovej zmene



Obr. 5.5.1. Schéma modelu odprużenia



Obr. 5.5.2. Podrobná schéma modelu odprużenia

hybnosti \mathbf{p} a suma všetkých síl pôsobiacich na teleso sa rovná výslednej sile pôsobiacej na toto teleso. Potom pre jedno-dimenzionálny pohyb platí

$$F = m \frac{dv}{dt} = ma.$$

Po použití tohto zákona máme sústavu dvoch LODR druhého rádu s konštantnými koeficientami v tvare

$$\begin{aligned} m_1 x''(t) &= -k_w[x(t) - r(t)] + k_s[y(t) - x(t)] + b[y'(t) - x'(t)], \\ m_2 y''(t) &= -k_s[y(t) - x(t)] - b[y'(t) - x'(t)]. \end{aligned} \quad (70)$$

Túto sústavu rovníc prevedieme na sústavu štyroch rovníc prvého rádu podľa (28), potom

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) & y(t) &= x_3(t) \\ x'_1(t) &= x_2(t) & x'_3(t) &= x_4(t) \end{aligned} \quad (71)$$

$$\begin{aligned} x'_1(t) &= x_2(t) \\ x'_2(t) &= -\frac{k_w}{m_1}[x_1(t) - r(t)] + \frac{k_s}{m_1}[x_3(t) - x_1(t)] + \frac{b}{m_1}[x_4(t) - x_2(t)] \\ x'_3(t) &= x_4(t) \\ x'_4(t) &= -\frac{k_s}{m_2}[x_3(t) - x_1(t)] - \frac{b}{m_2}[x_4(t) - x_2(t)] \end{aligned} \quad (72)$$

po úprave

$$\begin{aligned} x'_1(t) &= x_2(t) \\ x'_2(t) &= -\frac{k_w - k_s}{m_1}x_1(t) - \frac{b}{m_1}x_2(t) + \frac{k_s}{m_1}x_3(t) + \frac{b}{m_1}x_4(t) + \frac{k_w}{m_1}r(t) \\ x'_3(t) &= x_4(t) \\ x'_4(t) &= \frac{k_s}{m_2}x_1(t) + \frac{b}{m_2}x_2(t) - \frac{k_s}{m_2}x_3(t) - \frac{b}{m_2}x_4(t) \end{aligned} \quad (73)$$

Po dosadení máme nehomogénnu sústavu štyroch rovníc prvého rádu s konštantnými koeficientami, kde pravá strana je Diracov impuls $\delta(t)$ a vzrieme ju pomocou Laplaceovej transformácie. Na sústavu rovníc (72) aplikujeme Laplaceovu transformáciu a dostaneme maticovú rovnicu v tvare

$$s\mathbf{Y}(s) = A\mathbf{Y}(s) + \mathbf{F}(s) + \mathbf{b},$$

po úprave,

$$\mathbf{Y}(s) = (sE - A)^{-1}[\mathbf{F}(s) + \mathbf{b}], \quad (74)$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -56500 & -490 & 6500 & 490 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1040}{3} & \frac{392}{15} & -\frac{1040}{3} & -\frac{392}{15} \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{F}(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 50000 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

Vyriešime maticovú rovnicu (74). Platí

$$\mathbf{Y}(s) = \begin{pmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 56500 & s + 490 & -6500 & -490 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ -\frac{1040}{3} & -\frac{392}{15} & \frac{1040}{3} & s + \frac{392}{15} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 50000 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{5000}{s^4 + \frac{7742}{15}s^3 + \frac{170540}{3}s^2 + \frac{3920 \cdot 10^3}{3}s + \frac{52 \cdot 10^6}{3}} \begin{pmatrix} s^2 + \frac{392}{15}s + \frac{1040}{3} \\ s^3 + \frac{392}{15}s^2 + \frac{1040}{3}s \\ \frac{392}{15}s + \frac{1040}{3} \\ \frac{392}{15}s^2 + \frac{1040}{3}s \end{pmatrix}. \quad (75)$$

Spätanou Laplaceovou transformáciou obrazu $\mathbf{Y}(s)$ dostaneme výslednú vektorovú funkciu $\mathbf{y}(t)$ pre vstupný Diracov impuls, ktorá ma tvar

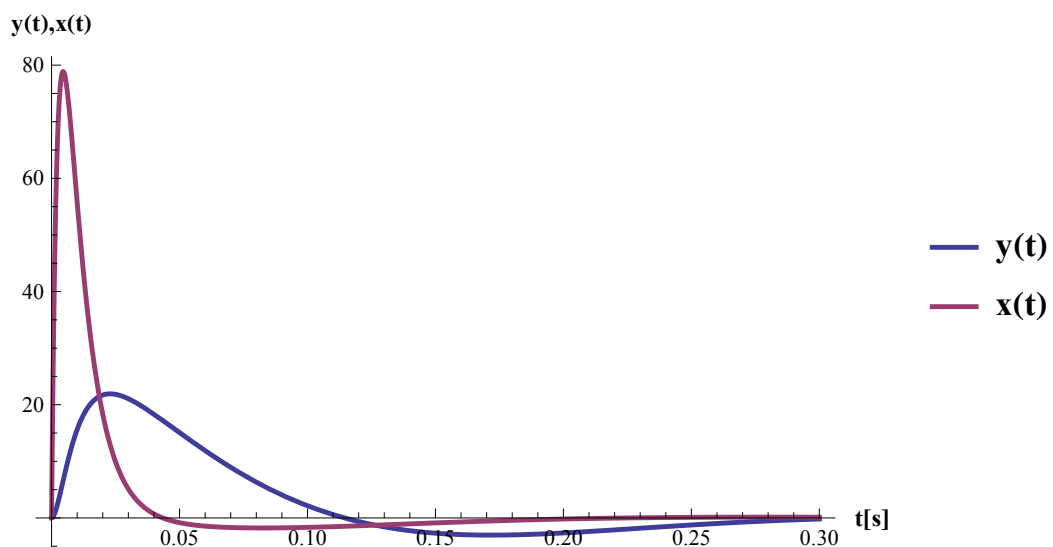
$$\mathbf{y}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{Y}(s)\} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix}.$$

Neznáma funkcia $x(t)$ zodpovedá podľa substitúcie (71) funkcii $x_1(t)$ vektoru $\mathbf{y}(t)$ a neznáma funkcia $y(t)$ zodpovedá funkcii $x_3(t)$ vektoru $\mathbf{y}(t)$. Časove priebehy funkcií

$$y(t) = 0.0953187 + (0.0656706 - 0.0526542i) \left(-e^{(-12.5822-15.6136i)t}\right) + \\ - (0.0656706 + 0.0526542i)e^{(-12.5822+15.6136i)t} + \\ - 0.00380027e^{-372.592t} + 0.0398229e^{-118.343t},$$

$$x(t) = (0.00792949 - 0.0135496i)e^{(-12.5822+15.6136i)t} + \\ + (0.00792949 + 0.0135496i)e^{(-12.5822-15.6136i)t} + \\ + 0.0526283e^{-372.592t} - 0.163806e^{-118.343t} + 0.0953187$$

sú znázornené na nasledujúcom obrázku 5.5.3 .



Obr. 5.5.3. Graf priebehu pohybu telesa m_1 (koleso) a m_2 (karoséria) ako reakcia systému na Diracov impuls

Teraz budeme uvažovať situáciu, že koleso auta vybehne na chodník o výške h a vygeneruje silu, ktorá pôsobí na systém, takže pravá strana (vstup) bude funkcia $h(t) = 1$ a jej obraz $H(s) = \frac{1}{s}$, ktorým vynásobíme vektor obrazov (75) a budeme hľadať funkcie $x_h(t)$, $y_h(t)$ ako riešenie sústavy (70) s pravou stranou $h(t)$. Po spätnej LT obrazu $Y(s)H(s)$, potom

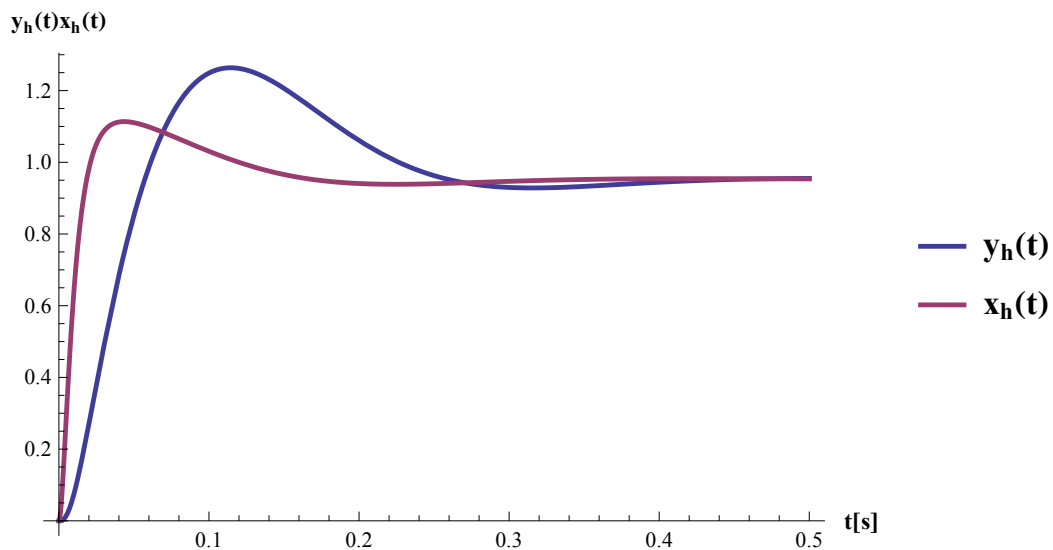
$$\mathbf{y}_h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{Y}(s)H(s)\} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{y}_h(t)$ je vektor riešení pre sústavu rovníc (72) s pravou stranou $h(t)$, takže funkcia $x_h(t)$ zodpovedá podľa (71) funkcii $x_1(t)$ (pohyb kolesa) a funkcia $y_h(t)$ zodpovedá funkcii $x_3(t)$ (pohyb karosérie). Časové priebehy funkcií

$$y_h(t) = (0.656706 - 0.526542i) (-e^{(-12.5822-15.6136i)t}) + \\ - (0.656706 + 0.526542i)e^{(-12.5822+15.6136i)t} - 0.0380027e^{-372.592t} + \\ + 0.398229e^{-118.343t} + 0.953187,$$

$$x_h(t) = (0.0792949 - 0.135496i)e^{(-12.5822+15.6136i)t} + \\ + (0.0792949 + 0.135496i)e^{(-12.5822-15.6136i)t} + \\ + 0.526283e^{-372.592t} - 1.63806e^{-118.343t} + 0.953187.$$

sú znázornené na nasledujúcom obrázku 5.5.4.



Obr. 5.5.4. Graf priebehu pohybu telesa m_1 (koleso) a m_2 (karoséria) ako reakcia systému na jednotkový skok $h(t)$

Príklady boli vybrané z [7][5].

ZÁVER

Hlavným cieľom bakalárskej práce bolo ukázať použitie Laplaceovej transformácie pri riešení lineárnych diferenciálnych rovníc s konštantnými koeficientami a ich sústav, ktorými popisujeme chovanie dynamických systémov ako sú jednoduché, či rozvetvené elektrické obvody, pohybové mechanické deje, alebo aplikácie v ekonomike, biológii, chémii a veľa ďalších. V práci som sa práve preto zaoberal rôznymi metódami riešenia týchto rovníc a ich sústav.

Ukázalo sa, že Laplaceova transformácia je veľmi užitočný matematický aparát, napriek tomu v niektorých prípadoch je výhodnejšie použiť iné metódy. Jednou z nich je metóda variácie konštánt, ktorá je výpočetne náročnejšia, ale univerzálnejšia v tom, že dokáže riešiť aj iné typy diferenciálnych rovníc. Ďalej som popisoval metódu neurčitých koeficientov, ktorá je najmenej univerzálna, pretože je použiteľná iba pre špeciálny tvar pravej strany. Všetky uvedené metódy su popísané v teoretickej časti.

V praktickej časti som najskôr použitím Laplaceovej transformácie odvodil obrazy niektorých základných funkcií zo slovníka LT. Potom som vyriešil vybrané typy LODR s konštantnými koeficientami a ich sústavy rôznymi metódami. V poslednej časti bakalárskej práce som sa venoval dynamickým systémom popísaných sústavami LODR, kde som využil prevod dvoch rovníc druhého rádu na sústavu štyroch rovníc, čo viedlo k jednoduchšiemu výpočtu.

Celú bakalársku prácu som písal v typografickom systéme $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$, k vykreslovaniu grafov a vykonaniu zložitejších výpočtov som použil prostredie Wolfram Mathematica, zdrojové súbory sú uvedené v priloženom CD.

Literatúra

- [1] BRONSON, Richard. Gabriel B COSTA a Richard BRONSON. *Schaum's outlines of differential equations*, 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 2006. ISBN 00-714-5687-2.
- [2] ŠTECHA, Jan a Vladimír HAVLENA. *Teorie dynamických systémů : přednášky*, Vyd. 2. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2002. ISBN 80-010-1971-3.
- [3] REKTORYS, Karel. *Přehled užití matematiky*, 7. vyd. Praha: Prometheus, 2000. ISBN 80-719-6179-5.
- [4] KALAS, Josef. *Obyčejné diferenciální rovnice*, 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 1995. ISBN 80-210-1130-0.
- [5] PÍRKO, Zdeněk a Jan VEIT. *Laplaceova transformace: základy teorie a užití v elektrotechnice*, 2., opr. vyd. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1972.
- [6] VEIT, Jan. *Integrální transformace*, 1. vyd. Praha: SNTL, 1979, 118 s.
- [7] FRANKLIN, Gene F. *Feedback control of dynamic systems*, 5th ed. Upper Saddle River: Pearson Education, 2006, xvii, 910 s. ISBN 01-314-9930-0.

ZOZNAM POUŽITÝCH SYMBOLOV A SKRATIEK

\mathbb{N}	množina prirodzených čísel
\mathbb{N}^0	množina prirodzených čísel s nulou
\mathbb{R}	množina reálnych čísel
\mathbb{C}	množina komplexných čísel
\mathcal{L}_0	množina predmetov v Laplaceovej transformácii
\mathcal{L}	operátor Laplaceovej transformácie
\mathcal{L}^{-1}	operátor spätnej Laplaceovej transformácie
A^{-1}	inverzná matica k matici A
$x \in M$	x patrí do M
i	imaginárna jednotka
ODR	obyčajná diferenciálna rovnica
LODR	lineárna obyčajná diferenciálna rovnica
resp.	respektíve
tj.	to jest

Zoznam obrázkov

Obr. 5.4.1. Schéma paralelného elektrického obvodu RL	61
Obr. 5.4.2. Graf priebehu prúdov pre uzol K.	63
Obr. 5.4.3. Graf priebehu napätia na cievkach	63
Obr. 5.5.1. Schéma modelu odpruženia	64
Obr. 5.5.2. Podrobná schéma modelu odpruženia	64
Obr. 5.5.3. Graf priebehu pohybu telesa m_1 (koleso) a m_2 (karoséria) ako reakcia systému na Diracov impuls	66
Obr. 5.5.4. Graf priebehu pohybu telesa m_1 (koleso) a m_2 (karoséria) ako reakcia systému na jednotkový skok $h(t)$	67

ZOZNAM PRÍLOH

P I. \LaTeX zdrojový kód, obrázky, grafy

\LaTeX zdrojový kód, obrázky, grafy sú na priloženom CD

PRÍLOHA P I. \LaTeX ZDROJOVÝ KÓD, OBRÁZKY, GRAFY

Príloha obsahuje zdrojové súbory grafov z prostredia Wolframu Mathematicu, obrázky nákresov a zdrojový súbor \LaTeX