

Diferenciální počet funkcí dvou proměnných – tvorba úloh pro výukové účely

The Differential Calculus of Two Variables –
the Creation of Tasks and Examples for Teaching Purposes

Zuzana Koudelková



Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky
akademický rok: 2014/2015

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: Zuzana Koudelková
Osobní číslo: A12031
Studijní program: B3902 Inženýrská informatika
Studijní obor: Informační a řídicí technologie
Forma studia: prezenční

Téma práce: Diferenciální počet funkcí dvou proměnných – tvorba úloh pro výukové účely

Téma anglicky: The Differential Calculus of Two Variables – the Creation of Tasks and Examples for Teaching Purposes

Zásady pro vypracování:

1. Popište stručně teorii týkající se diferenciálu, Taylorova rozvoje a lokálních extrémů reálných funkcí dvou reálných proměnných.
2. Sestavte přehled snadno řešitelných úloh, které se vztahují k předchozím pojmům a které se běžně vyskytují ve známých sbírkách úloh a na webových stránkách. U příkladů na nalezení lokálních extrémů se omezte na polynomické funkce. Hlavní pozornost věnujte příkladům týkajícím se lokálním extrémům.
3. Nalezené úlohy rozdělte podle možnosti do skupin podle vhodně zvolených charakteristik výpočtů použitých při jejich řešení.
4. Pro vybrané úlohy navrhnete náhradu konkrétních reálných koeficientů reálnými parametry a popište podmínky, které musí navržené parametry splňovat, aby byly úlohy snadno řešitelné.
5. Za pomoci softwaru Mathematica naleznete takové hodnoty parametrů, které vyhovují výše zjištěným podmínkám a pro něž vycházejí nekomplikované výsledky.
6. Sepište přehled nově nalezených úloh.

Rozsah bakalářské práce:

Rozsah příloh:

Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

1. DOŠLÁ, Zuzana a Ondřej DOŠLÝ. Diferenciální počet funkcí více proměnných. 3. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2006, ISBN 80-210-4159-5.
2. ELIÁŠ, Jozef, HORVÁTH, Ján a KAJAN, Juraj. Zbierka úloh z vyššej matematiky. 3. vyd. Bratislava: Alfa, 1980.
3. FIALKA, Miloslav. Diferenciální počet funkcí více proměnných s aplikacemi: Výklad, řešené příklady, cvičení. Vyd. 3. Zlín: Univerzita Tomáše Bati, 2008, ISBN 978-80-7318-665-4.
4. KRUPKOVÁ, Vlasta. Diferenciální a integrální počet funkcí více proměnných: cvičení. 1. vyd. Brno: VUTIM, 1999, ISBN 8021415428.
5. OSTRAVSKÝ, Jan. Diferenciální počet funkce více proměnných. Nekonečné číselné řady. Vyd. 4., nezm. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2009, ISBN 978-80-7318-856-6.

Vedoucí bakalářské práce:

Ing. Pavel Martinek, Ph.D.

Ústav matematiky

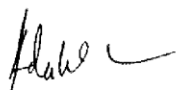
Datum zadání bakalářské práce:

6. března 2015

Termín odevzdání bakalářské práce:

22. května 2015

Ve Zlíně dne 6. března 2015



doc. Mgr. Milan Adámek, Ph.D.

děkan

L.S.



prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.

ředitel ústavu

Prohlašuji, že

- beru na vědomí, že odevzdáním diplomové/bakalářské práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb. o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších právních předpisů, bez ohledu na výsledek obhajoby;
- beru na vědomí, že diplomová/bakalářská práce bude uložena v elektronické podobě v univerzitním informačním systému dostupná k prezenčnímu nahlédnutí, že jeden výtisk diplomové/bakalářské práce bude uložen v příruční knihovně Fakulty aplikované informatiky Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně a jeden výtisk bude uložen u vedoucího práce;
- byl/a jsem seznámen/a s tím, že na moji diplomovou/bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších právních předpisů, zejm. § 35 odst. 3;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 1 autorského zákona má UTB ve Zlíně právo na uzavření licenční smlouvy o užití školního díla v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 2 a 3 autorského zákona mohu užít své dílo – diplomovou/bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití jen připouští-li tak licenční smlouva uzavřená mezi mnou a Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně s tím, že vyrovnání případného přiměřeného příspěvku na úhradu nákladů, které byly Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše) bude rovněž předmětem této licenční smlouvy;
- beru na vědomí, že pokud bylo k vypracování diplomové/bakalářské práce využito softwaru poskytnutého Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně nebo jinými subjekty pouze ke studijním a výzkumným účelům (tedy pouze k nekomerčnímu využití), nelze výsledky diplomové/bakalářské práce využít ke komerčním účelům;
- beru na vědomí, že pokud je výstupem diplomové/bakalářské práce jakýkoliv softwarový produkt, považují se za součást práce rovněž i zdrojové kódy, popř. soubory, ze kterých se projekt skládá. Neodevzdání této součásti může být důvodem k neobhájení práce.

Prohlašuji,

- že jsem na diplomové/bakalářské práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval. V případě publikace výsledků budu uveden jako spoluautor.
- že odevzdaná verze diplomové práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG jsou totožné.

Ve Zlíně

.....
podpis diplomanta

ABSTRAKT

Bakalářská práce se zabývá úlohami z diferenciálního počtu funkce dvou proměnných, konkrétně úlohami na výpočet diferenciálu, Taylorova polynomu a lokálních extrémů. Jednak uvádí výběr příkladů často se vyskytujících v literatuře, jednak za pomoci softwaru Wolfram Mathematica vytváří úlohy nové, splňující požadavek snadné řešitelnosti. Přínosem této práce je hlavně použití nově nalezených úloh pro výukové účely.

Klíčová slova: diferenciální počet funkcí dvou proměnných, lokální extrémy, Taylorův polynom, diferenciál, Wolfram Mathematica 8.0.

ABSTRACT

This bachelor thesis deals with examples from differential calculus of two variables, namely examples of differential, Taylor polynomial and local extrema. It shows some selected examples which can be frequently seen in literature. Further, new examples are found with help of software Wolfram Mathematica so that demand of easy solvability is satisfied. The contribution of this thesis is mainly in use of the newly found examples for teaching purposes.

Keywords: differential calculus of two variables, local extrema, Taylor polynomial, differential, Wolfram Mathematica 8.0.

Touto cestou bych ráda poděkovala vedoucímu bakalářské práce panu Ing. Pavlu Martin-
kovi, Ph.D. za odborné vedení, ochotu, čas a pozornost, kterou mi věnoval při vypracování
této práce.

Rovněž bych ráda poděkovala mé rodině za podporu při vypracování této bakalářské práce
a celém studiu.

Prohlašuji, že odevzdaná verze bakalářské/diplomové práce a verze elektronická nahraná
do IS/STAG jsou totožné.

OBSAH

ÚVOD	9
I TEORETICKÁ ČÁST	10
1 LOKÁLNÍ EXTRÉMY REÁLNÝCH FUNKCÍ DVOU REÁLNÝCH PROMĚNNÝCH	11
2 DIFERENCIÁL	15
2.1 TOTÁLNÍ DIFERENCIÁL	15
2.2 DIFERENCIÁLY VYŠŠÍCH ŘÁDŮ	16
3 TAYLORŮV POLYNOM	18
II PRAKTICKÁ ČÁST	20
4 PŘÍKLADY NA VÝPOČET LOKÁLNÍCH EXTRÉMŮ	21
4.1 VÝPOČET STACIONÁRNÍCH BODŮ ZALOŽENÝ NA DOSAZOVACÍ METODĚ	21
4.1.1 Řešené příklady z uvedených zdrojů.....	21
4.1.2 Řešení pomocí softwaru Wolfram Mathematica 8.0.....	22
4.1.2.1 Popis programu	22
4.1.2.2 Výsledky	24
4.2 VÝPOČET STACIONÁRNÍCH BODŮ ZALOŽENÝ NA ŘEŠENÍ KVADRATICKÉ ROVNICE.....	28
4.2.1 Řešení pomocí softwaru Wolfram Mathematica 8.0.....	29
4.2.1.1 Popis programu	29
4.2.1.2 Výsledky	32
4.3 METODA VÝPOČTU STACIONÁRNÍCH BODŮ POMOCÍ ROZKLADU	37
4.3.1 Řešené příklady z uvedených zdrojů.....	37
4.3.2 Řešení pomocí softwaru Wolfram Mathematica 8.0.....	37
4.3.2.1 Popis programu	37
4.3.2.2 Výsledky	38
5 PŘÍKLADY NA VÝPOČET DIFERENCIÁLU	43
5.1 ŘEŠENÍ POMOCÍ SOFTWARU WOLFRAM MATHEMATICA 8.0	43
5.1.1 Popis programu	43
5.1.2 Výsledky	43
5.1.2.1 Příklad 1	44
5.1.2.2 Příklad 2	44
5.1.2.3 Příklad 3	45
5.1.2.4 Příklad 4	45
5.1.2.5 Příklad 5	46
6 PŘÍKLADY NA VÝPOČET TAYLOROVA POLYNOMU	47
6.1 ŘEŠENÍ POMOCÍ SOFTWARU WOLFRAM MATHEMATICA 8.0	47
6.1.1 Popis programu	47
6.1.2 Výsledky	47
6.1.2.1 Příklad 1	48
6.1.2.2 Příklad 2	49
6.1.2.3 Příklad 3	51
6.1.2.4 Příklad 4	52
6.1.2.5 Příklad 5	53

ZÁVĚR	55
SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY.....	56
SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK.....	57
SEZNAM OBRÁZKŮ	58
SEZNAM TABULEK.....	59
SEZNAM PŘÍLOH.....	60

ÚVOD

Bakalářská práce se zabývá hledáním lehce řešitelných úloh týkajících se diferenciálu, Taylorova polynomu a lokálních extrémů reálných funkcí dvou reálných proměnných. Cílem práce je najít takové úlohy, aby jejich výsledky vycházely nekomplikovaně a mohly být použity pro výukové účely.

Práce je rozdělena do dvou základních částí, a to teoretické a praktické. V teoretické části bakalářské práce jsou objasněny pojmy a definice týkající se výpočtu lokálních extrémů reálných funkcí dvou reálných proměnných, totálního diferenciálu i Taylorova polynomu, které jsou zaznamenány do jednotlivých kapitol. Na konci každé kapitoly je uveden vzorový příklad, který slouží k pochopení metody výpočtu dané úlohy.

Praktická část práce je zaměřena hlavně na programy vytvořené pomocí softwaru Wolfram Mathematica. Ve všech kapitolách, které se týkají jedné z metod výpočtu uvedených výše, je popsán zdrojový kód programu a výsledky, které jsou pro přehlednost zapsány do tabulek.

I. TEORETICKÁ ČÁST

1 LOKÁLNÍ EXTRÉMY REÁLNÝCH FUNKCÍ DVOU REÁLNÝCH PROMĚNNÝCH

Předpokládáme, že čtenář rozumí pojmům, jako jsou parciální derivace, determinant matice nebo limita funkce.

Jednou z nejdůležitějších částí diferenciálního počtu je vyšetřování extrémů funkcí. Je tomu tak proto, že v každodenním životě se setkáváme s řešením extremálních úloh. Např. každé ekonomické rozhodování se řídí pravidlem minimalizace nákladů a maximalizace zisku. Rovněž přírodovědné děje probíhají tak, že jistá veličina nabývá nejmenší nebo největší hodnoty [1].

Definice 1. 1. ([1])

Funkce $f : R^2 \rightarrow R$ nabývá v bodě $A \in R^2$ lokálního maxima (minima), jestliže existuje okolí bodu $O(A)$ bodu A takové, že pro každé $x \in O(A)$ platí $f(x) \leq f(A)$ ($f(x) \geq f(A)$).

Jsou-li v těchto vztazích pro $x \neq 0$ ostré nerovnosti, mluvíme o ostrých lokálních maximech a minimech.

Definice 1. 2. ([1])

Nechť $f : R^2 \rightarrow R$. Řekneme, že bod $A \in R^2$ je stacionární bod funkce f , jestliže v bodě A existují všechny parciální derivace funkce f a platí:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(A) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Věta 1.1. (Nutná podmínka existence lokálního extrému) ([1])

Nechť $f : R^2 \rightarrow R$ má v bodě $A \in R^2$ lokální extrém. Pak všechny parciální derivace funkce, které v tomto bodě existují, jsou rovny nule.

Věta 1.2. (Postačující podmínka pro existenci lokálního extrému) ([8])

Nechť funkce $f : R^2 \rightarrow R$ má v bodě $[x_0, y_0]$ a nějakém jeho okolí spojitě parciální derivace druhého řádu a nechť $[x_0, y_0]$ je její stacionární bod. Označíme symbolem H následující determinant

$$H(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}.$$

Nastane právě jedna z možností:

- $H(x_0, y_0) > 0$ a $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$. Potom má funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ ostré lokální minimum.
- $H(x_0, y_0) > 0$ a $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$. Potom má funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ ostré lokální maximum.
- $H(x_0, y_0) < 0$. Potom funkce f nemá v bodě $[x_0, y_0]$ extrém.
- $H(x_0, y_0) = 0$. Pak nelze rozhodnout o existenci a druhu lokálního extrému pomocí druhých parciálních derivací.

Poznámka 1.1.

Determinant $H(x_0, y_0)$, který je uveden ve Větě 1.2 se nazývá Hessův determinant neboli Hessián.

Vzorový příklad ([5]):

$$f(x, y) = x^3 + xy^2 - 2xy - 5x$$

1. Vypočítáme parciální derivace

$$f'_x = 3x^2 + y^2 - 2y - 5$$

$$f'_y = 2xy - 2x$$

2. Parciální derivace položíme rovny nule, abychom našli stacionární body.

$$3x^2 + y^2 - 2y = 5$$

$$2xy - 2x = 0$$

Z druhé rovnice:

$$2x(y - 1) = 0$$

Z toho plyne, $x = 0 \vee y = 1$

Do první rovnice dosadíme $x = 0$:

$$y^2 - 2y - 5 = 0$$

$$y_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{24}}{2}$$

$$y = 1 \pm \sqrt{6}$$

Dále dosadíme do první rovnice $y = 1$:

$$3x^2 - 6 = 0$$

$$3x^2 = 6$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

Nalezli jsme čtyři stacionární body

$$A = [0, 1 - \sqrt{6}], B = [0, 1 + \sqrt{6}], C = [\sqrt{2}, 1], D = [-\sqrt{2}, 1]$$

3. Vypočítáme druhé parciální derivace:

$$f''_{xx} = 6x$$

$$f''_{xy} = 2y - 2$$

$$f''_{yy} = 2x$$

4. Vypočítáme Hessův determinant:

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} 6x & 2y - 2 \\ 2y - 2 & 2x \end{vmatrix}$$

Za x a y dosadíme souřadnice jednotlivých stacionárních bodů.

$$H(A) = \begin{vmatrix} 0 & -2\sqrt{6} \\ -2\sqrt{6} & 0 \end{vmatrix} = -24$$

$$H(B) = \begin{vmatrix} 0 & 2\sqrt{6} \\ 2\sqrt{6} & 0 \end{vmatrix} = -24$$

$$H(C) = \begin{vmatrix} 6\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{vmatrix} = 24$$

$$H(D) = \begin{vmatrix} -6\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -2\sqrt{2} \end{vmatrix} = 24$$

$$f''_{xx}(A) = 0$$

$$f''_{xx}(B) = 0$$

$$f''_{xx}(C) = 6\sqrt{2}$$

$$f''_{xx}(D) = -6\sqrt{2}$$

V bodě C nastává minimum funkce f, v bodě D nastává maximum funkce f, v bodě A a B nenastává lokální extrém.

2 DIFERENCIÁL

2.1 Totální diferenciál

Definice 2.1.1 ([10])

O funkci $z = f(x, y)$ řekneme, že je v bodě $[x_0, y_0]$ diferencovatelná nebo má v tomto bodě totální diferenciál, je-li možno jejímu přírůstku $\Delta z = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)$ dát v určitém okolí bodu $[x_0, y_0]$ tvar

$$\Delta z = Ah + Bk + \rho\tau(h, k),$$

kde A, B jsou konstanty, $\rho = \sqrt{h^2 + k^2}$ a $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} \tau(h, k) = 0$.

Definice 2.1.2 ([10])

Je-li funkce $z = f(x, y)$ v $[x_0, y_0]$ diferencovatelná, nazývá se výraz

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

totální diferenciál funkce $z = f(x, y)$.

Poznámka 2.1.2

Přírůstky dx a dy můžeme napsat jako $dx = (x - x_0)$ nebo $dy = (y - y_0)$. Pokud je funkce f hladká tzn., že na otevřené množině M má funkce f spojité všechny parciální derivace 1. řádu, potom má funkce f v každém tomto bodě množiny M diferenciál

$$df(x, y) = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy.$$

Totální diferenciál se využívá mimo jiné i pro přibližný výpočet funkčních hodnot, které se vypočítají pomocí vzorce

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Vzorový příklad ([11]):

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{xy}, A = [3, 2]$$

1. Vypočítáme parciální derivace 1. řádu

$$f'_x = \frac{2x(xy) - (x^2 - y^2)y}{x^2y^2}$$

$$f'_y = \frac{-2y(xy) - (x^2 - y^2)x}{x^2y^2}$$

2. Dosadíme bod A do parciálních derivací 1. řádu

$$f'_x = \frac{13}{18}$$

$$f'_y = -\frac{13}{12}$$

3. Do rovnice totálního diferenciálu dosadíme hodnoty z předchozích vztahů

$$df(x, y) = \frac{13}{18}dx - \frac{13}{12}dy$$

2.2 Diferenciály vyšších řádů

Definice 2.3 ([10])

Nechť funkce $z = f(x, y)$ má v okolí bodu $[x_0, y_0]$ totální diferenciál a necht' parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

mají totální diferenciál v bodě $[x_0, y_0]$. Pak říkáme, že $f(x, y)$ má v bodě $[x_0, y_0]$ totální diferenciál druhého řádu (stručně jen druhý diferenciál). Tímto diferenciálem rozumíme výraz

$$d^2z = h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0).$$

Místo h a k píšeme často dx , dy .

Definice 2.4 ([10])

Nechť $f(x, y)$ a všechny její parciální derivace do $(n-2)$ -ho řádu mají v okolí bodu $[x_0, y_0]$ totální diferenciál. Nechť parciální derivace $(n-1)$ -ního řádu mají totální diferenciál v bodě $[x_0, y_0]$. Pak říkáme, že funkce $f(x, y)$ má v bodě $[x_0, y_0]$ totální diferenciál n -tého řádu (stručně n -tý diferenciál), a tímto diferenciálem rozumíme výraz

$$d^n z = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f = h^n \frac{\partial^n f}{\partial x^n} + \binom{n}{1} h^{n-1} k \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \partial y} + \dots + \binom{n}{n-1} h k^{n-1} \frac{\partial^n f}{\partial x \partial y^{n-1}} + k^n \frac{\partial^n f}{\partial y^n}.$$

Vzorový příklad ([11]) :

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$$

1. Vypočítáme parciální derivace 1. a 2. řádu

$$f'_x = \frac{2y}{(x + y)^2}$$

$$f'_y = \frac{-2x}{(x + y)^2}$$

$$f''_{xx} = \frac{-4y}{(x + y)^3}$$

$$f''_{xy} = \frac{2(x - y)}{(x + y)^3}$$

$$f''_{yy} = \frac{4x}{(x + y)^3}$$

2. Do rovnice totálního diferenciálu druhého řádu dosadíme hodnoty z předchozích vztahů

$$d^2 f(x, y) = \frac{-4y}{(x + y)^3} dx^2 + \frac{4(x - y)}{(x + y)^3} dx dy + \frac{4x}{(x + y)^3} dy^2$$

3 TAYLORŮV POLYNOM

Věta 3.1 ([10])

Nechť funkce $z = f(x, y)$ má v každém bodě uzavřené úsečky u , spojující body $[x_0, y_0]$, $[x_0 + h, y_0 + k]$, totální diferenciály do $(n+1)$ -ního řádu včetně. Pak

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0, y_0)}{1!} + \dots + \frac{\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0, y_0)}{n!} + R_{n+1},$$

kde (nejčastěji používaný) Lagrangeův tvar zbytku R_{n+1} je

$$R_{n+1} = \frac{\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(c, d)}{(n+1)!}.$$

Přitom bod $[c, d]$ je (blíže nikterak neurčeným) vnitřním bodem uvedené úsečky u . Indexy x_0, y_0 , resp. c, d vyznačují, v kterém bodě je třeba počítat derivace.

Funkci

$$T_n(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0, y_0)}{1!} + \dots + \frac{\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0, y_0)}{n!}$$

nazýváme Taylorovým polynomem n -tého stupně.

Poznámka 3.1

Funkce R_{n+1} neboli Taylorův zbytek vzniká, když funkci f nahradíme Taylorovým polynomem. Vzniklou chybu nedokážeme spočítat, ale v mnoha případech ji umíme alespoň odhadnout.

Taylorův polynom slouží pro přibližný výpočet funkčních hodnot dané funkce v okolí bodu $[x_0, y_0]$.

Vzorový příklad ([11]):

Spočítejte Taylorův polynom $T_1(x, y)$ funkce $f(x, y) = \ln(7x - 3y)$ v bodě $A = [1, 2]$

1. Vypočítáme parciální derivace dané funkce a jejich přírůstky

$$f'_x = \frac{7}{7x - 3y}$$

$$f'_y = \frac{-3}{7x - 3y}$$

$$dx = (x - 1)$$

$$dy = (y - 2)$$

2. Dosadíme bod A do parciálních derivací

$$f'_x(1, 2) = 7$$

$$f'_y(1, 2) = -3$$

3. Vypočítáme diferenciál v bodě A

$$df(1, 2) = 7(x - 1) - 3(y - 2) = 7x - 3y - 1$$

4. Dosadíme do vzorce pro Taylorův polynom

$$T_1(x, y) = 7x - 3y - 1$$

II. PRAKTICKÁ ČÁST

4 PŘÍKLADY NA VÝPOČET LOKÁLNÍCH EXTRÉMŮ

V této části bakalářské práce jsem nejprve vytipovala skupiny lokálních extrémů, podle způsobu řešení rovnic vedoucích ke stacionárním bodům. Nalezla jsem tři způsoby výpočtu, které jsem nazvala: „Výpočet stacionárních bodů založený na dosazovací metodě“, „Výpočet stacionárních bodů založený na řešení kvadratické rovnice“ a „Výpočet stacionárních bodů pomocí rozkladu“.

4.1 Výpočet stacionárních bodů založený na dosazovací metodě

První skupina pro výpočet stacionárních bodů je založena na metodě řešení soustavy dvou rovnic o dvou neznámých pomocí dosazování. Tzn., že se z jedné rovnice vyjádří jedna proměnná, která se následně dosadí do druhé rovnice. Jedná se o nejjednodušší způsob výpočtu stacionárních bodů. Viz. Příklad 1.1.

4.1.1 Řešené příklady z uvedených zdrojů

Příklad 1.1 ([5]): $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2 + 5x + 2y$

$$f'_x = 2x + 2y + 5$$

$$f'_y = 2x + 6y + 2$$

$$2x + 2y + 5 = 0$$

$$2x + 6y + 2 = 0$$

Z jedné rovnice vyjádříme x a dosadíme do druhé.

$$x = \frac{-2y - 5}{2}$$
$$\frac{-4y - 10}{2} + 6y + 2 = 0$$

Příklad 1.2 ([5]): $f(x, y) = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + x + y$

Příklad 1.3 ([7]): $f(x, y) = x^3 - 3xy + 3y^2$

Příklad 1.4 ([3]): $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$

Příklad 1.5 ([5]): $f(x, y) = 2x^3 - 3xy + 2y^3 + 1$

Příklad 1.6 ([2]): $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 6x - 9y$

4.1.2 Řešení pomocí softwaru Wolfram Mathematica 8.0

4.1.2.1 Popis programu

Nejprve jsem si naprogramovala vlastní funkci *Vypocet* a za ní v hranatých závorkách vstupní proměnné funkce $[a_, b_, c_]$, které symbolizují hledané koeficienty. Funkce *Vypocet* je naprogramována pomocí funkce *Module*, kde jsou umístěny všechny příkazy.

Jako první jsem ve zdrojovém kódu programu nadefinovala funkci, se kterou budu pracovat. Následuje výpočet parciálních derivací podle x i y , které jsou důležité pro výpočet stacionárních bodů. Ty se spočítají pomocí funkce *Solve*, kterou má Mathematica implementovanou. Potom je naprogramován Hessův determinant. Je zde ošetřeno, že Hessián každého stacionárního bodu musí být větší než -200 a zároveň menší než 200 . Viz. Obr. 1.

```
Vypocet[a_, b_, c_] := Module[{},

  Clear[x]; Clear[y];
  (*Nadefinování funkce*)
  f[x, y] = a * x3 - b * x * y + c * y2;
  rovnice = a * x3 - b * x * y + c * y2;

  (*Parciální derivace*)
  prv = D[f[x, y], x];
  druh = D[f[x, y], y];

  (*Výpočet stacionárních bodů*)
  Quiet[body = Solve[{prv == 0, druh == 0}, {x, y}]];
  (*Výpočet Hessiánu*)
  d = {{D[f[x, y], x, x], D[f[x, y], x, y]}, {D[f[x, y], y, x], D[f[x, y], y, y]}};
  d1 = D[f[x, y], x, x];
  d2 = Det[d];
  oddeleni = {x, y} /. body;
  deter = d2 /. body;
  (*Vybere jen ty determinanty, které jsou v rozmezí -200 až 200*)
  vyber = Select[deter, # ≥ -200 && # ≤ 200 &];
```

Obr. 1. Vytvoření funkce

Následuje cyklus *For*, který prochází stacionární body a dosazuje je do Hessiánu, který se ukládá do pomocné proměnné, aby se následně použil v podmínce. V další fázi programu jsem se zabývala, již podmínkami, díky nimž budou vycházet stacionární body jako celá čísla. Stacionární body jsem proto otestovala funkcí, která testuje, zda jsou zadané čísla čísla celými. Ta se nazývá *IntegerQ*. Také je v podmínce ošetřeno, aby se Hessián nerovnal nule. Pokud by se rovnal nule, nelze rozhodnout o existenci a typu lokálního extrému pomocí druhých parciálních derivací. Poslední podmínka ověřuje nenulovost

hledaných koeficientů. Koeficienty se nesmí rovnat nule, protože soustava rovnic, která vede ke stacionárním bodům, by byla příliš jednoduchá.

Jestliže jsou podmínky splněny, program vypíše na výstup hledané koeficienty, stacionární body, Hessův determinant, funkční hodnotu a nakonec pro každý stacionární bod lokální extrém.

```

If[Length[vyber] == 2,
  Quiet[For[g = 1, g ≤ Length[oddeleni], g++,

    (*Prohledávání stacionárních
    bodů ve Foru a dosazení do pomocné proměnné vypocet*)
    vypocet = Block[{x = prox[[g, 1]], y = prox[[g, 2]], d2];

    (*Testování stacionárních bodů
    na celá čísla a také aby se koeficienty nerovnaly nule*)
    If[IntegerQ[oddeleni[[1, 1]]] && IntegerQ[oddeleni[[1, 2]]] &&
      IntegerQ[oddeleni[[2, 1]]] && IntegerQ[oddeleni[[2, 2]]] && a ≠ 0 && b ≠ 0 && c ≠ 0,

      (*Vypsání koeficientů, stac. bodů, hessiánu *)
      Print[Grid[{"koef. A", "koef. B", "koef. C"}, {a, b, c}],
        Frame → All, Background → {None, {LightGreen, LightGray}}]];
      Print[Text[Style["Stacionární body jsou:", Bold, Large], Background → LightRed]];
      Print[body];
      Print["Hessův determinant je: " MatrixForm[d]];
      Print[Text[Style["Pro bod:", Bold, 22], Background → LightRed]];
      Print[{oddeleni[[g, 1]], oddeleni[[g, 2]]}];

      (*Vypočítání funkční hodnoty*)
      funk = Block[{x = oddeleni[[g, 1]], y = oddeleni[[g, 2]], rovnice];
      Print[Text["Je funkční hodnota: ", Background → LightRed]]; Print[funk];

      (*Vypočítání Hessiánu*)
      Print[Text["Je Determinant", Background → LightRed]];
      vypocet = Block[{x = oddeleni[[g, 1]], y = oddeleni[[g, 2]], d2];
      vypocet2 = Block[{x = oddeleni[[g, 1]], y = oddeleni[[g, 2]], d1];
      Print[vypocet];

      (* Podmínky, které určují jaký extrém nastal*)
      If[vypocet < 0, Print[Style["Funkce f nemá v bodě extrém.", Red, 19, Bold]]];
      If[vypocet > 0 && vypocet2 > 0,
        Print[Style["Funkce f má v bodě ostré lokální minimum.", Red, 19, Bold]]];
      If[vypocet > 0 && vypocet2 < 0, Print[Style[
        "Funkce f má v bodě ostré lokální maximum.", Red, 19, Bold]]];

    ]]]];

```

Obr. 2. Podmínka pro testování, zda jsou koeficienty celá čísla

Pod funkcí *Vypocet* se nachází cyklus *For*, který slouží k procházení koeficientů *a*, *b*, *c*. Koeficienty se prochází od -10 do 10. V cyklu *For* se volá funkce *Vypocet* a díky ní dostáváme výsledky na výstup.

```
(*Prohledávání koeficientů od -10 do 10*)
For[a = -10, a ≤ 10, a++, For[b = -10, b ≤ 10, b++, For[c = -10, c ≤ 10, c++,
  Vypocet[a, b, c]]
]]
```

Obr. 3. Prohledávání koeficientů

4.1.2.2 Výsledky

Pro otestování rovnic jsem si zvolila Příklad 1.3, kde jsem místo konkrétních reálných čísel dosadila koeficienty a až c. Koeficienty se procházely v rozmezí od -10 do 10.

Po proběhnutí programu dostáváme na výstup výsledky, které jsem pro přehlednost zapsala do tabulky. Tabulka má pět sloupců, v prvním sloupci je zapsaná funkce, se kterou jsem pracovala, v druhém sloupci jsou zaznamenány koeficienty funkce, třetí sloupec obsahuje stacionární body funkce pro dané koeficienty, ve čtvrtém sloupci je pro daný stacionární bod zapsaný extrém a v pátém sloupci je zapsána funkční hodnota jen pro stacionární body s extrémem. Pokud je v tabulce napsáno, že nenastal extrém, znamená to, že Hessův determinant je menší než nula.

Tab. 1. Nové příklady pro lokální extrémy funkce dvou proměnných – dosazovací metoda

Funkce	Koeficienty			Stacionární body	Lokální extrém	Funkční hodnota
	a	b	c			
$f(x, y) = ax^3 - bxy + cy^2$	-6	-6	-1	[0, 0]	Nenastal extrém	
				[1, 3]	Lokální maximum	3
	-6	-6	1	[-1, 3]	Lokální minimum	-3
				[0, 0]	Nenastal extrém	
	-6	6	-1	[0, 0]	Nenastal extrém	
				[1, -3]	Lokální maximum	3
	-6	6	1	[-1, -3]	Lokální minimum	-3
				[0, 0]	Nenastal extrém	
	-3	-6	-1	[0, 0]	Nenastal extrém	
				[2, 6]	Lokální maximum	12
	-3	-6	1	[-2, 6]	Lokální minimum	-12
				[0, 0]	Nenastal extrém	
	-3	6	-1	[0, 0]	Nenastal extrém	
				[2, -6]	Lokální maximum	12
	-3	6	1	[-2, -6]	Lokální minimum	-12
				[0, 0]	Nenastal extrém	

Funkce	Koefficienty			Stacionární body	Lokální extrém	Funkční hodnota
	a	b	c			
$f(x, y) = ax^3 - bxy + cy^2$	-2	-6	-3	[0, 0]	Nenastal extrém	
				[1, 1]	Lokální maximum	1
	-2	-6	-1	[0, 0]	Nenastal extrém	
				[3, 9]	Lokální maximum	27
	-2	-6	1	[-3, 9]	Lokální minimum	-27
				[0, 0]	Nenastal extrém	
	-2	-6	3	[-1, 1]	Lokální minimum	-1
				[0, 0]	Nenastal extrém	
	-2	6	-3	[0, 0]	Nenastal extrém	
				[1, -1]	Lokální maximum	1
	-2	6	-1	[0, 0]	Nenastal extrém	
				[3, -9]	Lokální maximum	27
	-2	6	1	[-3, -9]	Lokální minimum	-27
				[0, 0]	Nenastal extrém	
	-2	6	3	[-1, -1]	Lokální minimum	-1
				[0, 0]	Nenastal extrém	
	-1	-6	-3	[0, 0]	Nenastal extrém	
				[2, 2]	Lokální maximum	4
	-1	-6	-1	[0, 0]	Nenastal extrém	
				[6, 18]	Lokální maximum	108
	-1	-6	1	[-6, 18]	Lokální minimum	-108
				[0, 0]	Nenastal extrém	
	-1	-6	3	[-2, 2]	Lokální minimum	-4
				[0, 0]	Nenastal extrém	
	-1	6	-3	[0, 0]	Nenastal extrém	
				[2, -2]	Lokální maximum	4
	-1	6	-1	[0, 0]	Nenastal extrém	
				[6, -18]	Lokální maximum	108
	-1	6	1	[-6, -18]	Lokální minimum	-108
				[0, 0]	Nenastal extrém	
	-1	6	3	[-2, -2]	Lokální minimum	-4
				[0, 0]	Nenastal extrém	
	1	-6	-3	[-2, -2]	Lokální maximum	4
				[0, 0]	Nenastal extrém	
	1	-6	-1	[-6, -18]	Lokální maximum	108
				[0, 0]	Nenastal extrém	
1	-6	1	[0, 0]	Nenastal extrém		
			[6, -18]	Lokální minimum	-108	
1	-6	3	[0, 0]	Nenastal extrém		
			[2, -2]	Lokální minimum	-4	

Funkce	Koefficienty			Stacionární body	Lokální extrém	Funkční hodnota
	a	b	c			
$f(x, y) = ax^3 - bxy + cy^2$	1	6	-3	[-2, 2]	Lokální maximum	4
				[0, 0]	Nenastal extrém	
	1	6	-1	[-6, 18]	Lokální maximum	108
				[0, 0]	Nenastal extrém	
	1	6	1	[0, 0]	Nenastal extrém	
				[6, 18]	Lokální minimum	-108
	1	6	3	[0, 0]	Nenastal extrém	
				[2, 2]	Lokální minimum	-4
	2	-6	-3	[-1, -1]	Lokální maximum	1
				[0, 0]	Nenastal extrém	
	2	-6	-1	[-3, -9]	Lokální maximum	27
				[0, 0]	Nenastal extrém	
	2	-6	1	[0, 0]	Nenastal extrém	
				[3, -9]	Lokální minimum	-27
	2	-6	3	[0, 0]	Nenastal extrém	
				[1, -1]	Lokální minimum	-1
	2	6	-3	[-1, 1]	Lokální maximum	1
				[0, 0]	Nenastal extrém	
	2	6	-1	[-3, 9]	Lokální maximum	27
				[0, 0]	Nenastal extrém	
	2	6	1	[0, 0]	Nenastal extrém	
				[3, 9]	Lokální minimum	-27
	2	6	3	[0, 0]	Nenastal extrém	
				[1, 1]	Lokální minimum	-1
	3	-6	-1	[-2, -6]	Lokální maximum	12
				[0, 0]	Nenastal extrém	
	3	-6	1	[0, 0]	Nenastal extrém	
				[2, -6]	Lokální minimum	-12
	3	6	-1	[-2, 6]	Lokální maximum	12
				[0, 0]	Nenastal extrém	
	3	6	1	[0, 0]	Nenastal extrém	
				[2, 6]	Lokální minimum	-12
6	-6	-1	[-1, -3]	Lokální maximum	3	
			[0, 0]	Nenastal extrém		
6	-6	1	[0, 0]	Nenastal extrém		
			[1, -3]	Lokální minimum	-3	
6	6	-1	[-1, 3]	Lokální maximum	3	
			[0, 0]	Nenastal extrém		

Funkce	Koefficienty			Stacionární body	Lokální extrém	Funkční hodnota
	a	b	c			
$f(x, y) = ax^3 - bxy + cy^2$	6	6	1	[0, 0]	Nenastal extrém	
				[1, 3]	Lokální minimum	-3

Z příkladu $f(x, y) = ax^3 + bxy^2 + cxy + dx$, který se nachází v podkapitole 4.3, se při rovnosti nule koeficientu c dostala úloha $f(x, y) = ax^3 + bxy^2 + dx$, které spadá do skupiny pro výpočet stacionárních bodů založený na dosazovací metodě. Viz Tab. 2.

Tab. 2. Získané úlohy z jiné metody pro výpočet stacionárních bodů

Funkce	Koefficienty				Stacionární body	Lokální extrém	Funkční hodnota
	a	b	c	d			
$f(x, y) = ax^3 + bxy^2 + dx$	-3	-1	0	9	[0, -3]	Nenastal extrém	
					[0, 3]	Nenastal extrém	
					[-1, 0]	Lokální minimum	-6
					[1, 0]	Lokální maximum	6
	-2	-6	0	6	[0, -1]	Nenastal extrém	
					[0, 1]	Nenastal extrém	
					[-1, 0]	Lokální minimum	-4
					[1, 0]	Lokální maximum	4
	-1	-3	0	3	[0, -1]	Nenastal extrém	
					[0, 1]	Nenastal extrém	
					[-1, 0]	Lokální minimum	-2
					[1, 0]	Lokální maximum	2
	1	3	0	-3	[0, -1]	Nenastal extrém	
					[0, 1]	Nenastal extrém	
					[-1, 0]	Lokální maximum	2
					[1, 0]	Lokální minimum	-2
	2	6	0	-6	[0, -1]	Nenastal extrém	
					[0, 1]	Nenastal extrém	
					[-1, 0]	Lokální maximum	4
					[1, 0]	Lokální minimum	-4
3	1	0	-9	[0, -3]	Nenastal extrém		
				[0, 3]	Nenastal extrém		
				[-1, 0]	Lokální maximum	6	
				[1, 0]	Lokální minimum	-6	

4.2 Výpočet stacionárních bodů založený na řešení kvadratické rovnice

Druhá skupina způsobu řešení rovnic vedoucím ke stacionárním bodům lokálních extrémů se zakládá na výpočtu kvadratické rovnice, která vypadá následovně: $ax^2 + bx + c = 0$, kde koeficienty a , b a c jsou reálná čísla. Kvadratickou rovnici řešíme za pomoci diskriminantu $D = b^2 - 4ac$.

Mohou nastat tři možnosti:

1. Diskriminant se rovná nule potom je řešení rovnice $x = \frac{-b}{2a}$
2. Diskriminant je větší jak nula dostáváme rovnici $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
3. Diskriminant je menší jak nula dostáváme řešení v oboru komplexních čísel

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a}$$

Viz. Příklad 2.1

Příklad 2.1 ([9]): $f(x, y) = 2x^3 + 3x^2 + y^3 - 3y - 12x$

$$f'_x = 6x^2 + 6x - 12$$

$$f'_y = 3y^2 - 3$$

$$6x^2 + 6x - 12 = 0$$

$$3y^2 - 3 = 0$$

Z druhé rovnice se dá snadno vyjádřit y a první rovnici řešíme jako kvadratickou. Nejprve vypočítáme diskriminant.

$$D = 6^2 - (4 \cdot 6 \cdot (-12))$$

$$D = 324$$

Poté dosadíme diskriminant do rovnice.

$$x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{324}}{12}$$

$$x_1 = -2$$

$$x_2 = 1$$

4.2.1 Řešení pomocí softwaru Wolfram Mathematica 8.0

4.2.1.1 Popis programu

Začátek zdrojového kódu programu je stejný jako u metody dosazování, zvolila jsem si vlastní název funkce *Vypocet* spolu se vstupními parametry, které reprezentují hledané koeficienty. Za nimi následuje funkce *Module*, ve které jsou implementovány všechny výpočty i podmínky.

Nejprve je v těle funkce *Module* nadefinovaná funkce, se kterou pracujeme, následuje výpočet parciálních derivací, díky nimž můžeme zjistit stacionární body. Program pokračuje příkazem na výpočet Hessiánu. Je zde ošetřeno, aby Hessián každého stacionárního bodu byl větší než -200 a zároveň menší než 200, a také aby diskriminant kvadratické funkce nebyl větší jak 100. V cyklu *For* se prochází výpočet Hessiánu, který se později použije v podmínce. Také jsou v tomto cyklu vnořeny dvě podmínky.

```
Vypocet[a_, b_, c_, d_, e_] := Module[{},
  Clear[x]; Clear[y];

  (*Nadefinování funkce*)
  f[x, y] = a * x3 + b * x2 + c * y3 + d * y + e * x;
  rovnice = a * x3 + b * x2 + c * y3 + d * y + e * x;

  (*Parciální derivace*)
  prv = D[f[x, y], x];
  druh = D[f[x, y], y];

  (*Výpočet stacionárních bodů*)
  Quiet[body = Solve[{prv == 0, druh == 0}, {x, y}]];
  oddeleni = {x, y} /. body;
  disk = b2 + 3 * a * e;

  (*Výpočet Hessiánu*)
  hess = {{D[f[x, y], x, x], D[f[x, y], x, y]}, {D[f[x, y], y, x], D[f[x, y], y, y}}];
  d1 = D[f[x, y], x, x];
  d2 = Det[hess];
  deter = d2 /. body;

  (*Vybere jen ty determinanty, které jsou v rozmezí -200 až 200*)
  Quiet[vyber = Select[deter, # >= -200 && # <= 200 &]];

  Quiet[For[g = 1, g <= Length[oddeleni], g++,

    (*Prohledávání stacionárních
    bodů ve Foru a dosazení do pomocné proměnné vypocet*)
    vypocet = Block[{x = oddeleni[[g, 1]], y = oddeleni[[g, 2]]}, d2];
```

Obr. 4. Začátek zdrojového kódu programu

První podmínka je splněna, pokud rovnice vede pouze ke dvěma stacionárním bodům. Stacionární body jsou následně otestovány, aby měly celočíselné souřadnice, a také aby se Hessův determinant nerovnal nule (v případě, že by se determinant rovnal nule, nelze rozhodnout o existenci a typu lokálního extrému pomocí druhých parciálních derivací). Poslední podmínka určuje, kdy mohou být koeficienty rovny nule, tak abychom zajistili, že řešení soustavy dvou rovnic bude náležet do jedné ze tří skupin pro výpočet lokálního extrému. Pokud jsou všechny podmínky splněny, tak se začne vypisovat Hessián, stacionární body a pro každý stacionární bod lokální extrém.

```
(*Pokud rovnice vede ke 2 stacionárním bodům, podmínka pokračuje*)
Quiet[If[Length[oddeleni] == 2,

(*Pokud jsou vybrané determinanty(z podmínky -200 až 200) 2, podmínka pokračuje*)
If[Length[vyber] == 2,

(*Testování stacionárních bodů na celá čísla,
aby nebyl determinant roven 0 a taky aby diskriminant nebyl větší jak 100*)
If[IntegerQ[oddeleni[[1, 1]]] && IntegerQ[oddeleni[[1, 2]]] && IntegerQ[
  oddeleni[[2, 1]]] && IntegerQ[oddeleni[[2, 2]]] && vypocet != 0 && diskrim < 100,

(*Ošetření koeficientů, kdy se můžou rovnat nule*)
If[(a != 0 && b != 0 && c != 0 && d != 0 && e != 0) || (a != 0 && b != 0 && c != 0 && d == 0 && e != 0),

(*Vypsání koeficientů, stac. bodů, hessiánu *)
Print[Grid[{"koef. A", "koef. B", "koef. C", "koef. D", "koef. E"},
  {a, b, c, d, e}], Frame -> All, Background -> {None, {LightGreen, LightGray}}];
Print[Text[Style["Stacionární body jsou:", Bold, Large], Background -> LightRed]];
Print[body];
Print["Hessův determinant: " MatrixForm[hess]]; Print["Determinant"]; Print[d2];

(*Procházení jednotlivých stacionárních bodů*)
For[g = 1, g <= Length[oddeleni], g++,
  Print[Text[Style["Pro bod:", Bold, 22], Background -> LightRed]];
  Print[{oddeleni[[g, 1]], oddeleni[[g, 2]]}];

(*Výpočet funkční hodnoty*)
funk = Block[{x = oddeleni[[g, 1]], y = oddeleni[[g, 2]]}, rovnice];
Print[Text["Je funkční hodnota: ", Background -> LightRed]];
Print[funk];
Print[Text["Je Determinant", Background -> LightRed]];
vypocet = Block[{x = oddeleni[[g, 1]], y = oddeleni[[g, 2]]}, d2];
vypocet2 = Block[{x = oddeleni[[g, 1]], y = oddeleni[[g, 2]]}, d1];
Print[vypocet];

(* Podmínky, které určují jaký extrém nastal*)
If[vypocet < 0, Print[Style["Funkce f nemá v bodě extrém.", Red, 19, Bold]]];
If[vypocet > 0 && vypocet2 > 0,
  Print[Style["Funkce f má v bodě ostré lokální minimum.", Red, 19, Bold]]];
If[vypocet > 0 && vypocet2 < 0, Print[Style[
  "Funkce f má v bodě ostré lokální maximum.", Red, 19, Bold]]];]]]]]]];
```

Obr. 5. První podmínka

Druhá podmínka je splněna právě tehdy, když rovnice má čtyři stacionární body. Poté se postupuje stejně jako u první podmínky. Otestují se stacionární body, aby měly celočíselné koeficienty, také aby se Hessián nerovnal nule (v případě, že by se rovnal nule nelze rozhodnout o existenci a kvalitě lokálního extrému pomocí druhých parciálních derivací). Poslední podmínka určuje, kdy mohou být koeficienty rovny nule, tak abychom zajistili, že řešení soustavy dvou rovnic bude náležet do jedné ze tří skupin pro výpočet lokálního extrému. Pokud jsou všechny podmínky splněny, tak se začne vypisovat Hessián, stacionární body a pro každý stacionární bod lokální extrém.

```
(*Pokud rovnice vede ke 4 stacionárním bodům, podmínka pokračuje*)
Quiet[If[Length[oddeleni] == 4,

(*Pokud jsou vybrané determinanty
(z podmínky -200 až 200) 4, podmínka pokračuje*)
If[Length[vyber] == 4,

(*Testování stacionárních bodů na celá čísla,
aby nebyl determinant roven 0 a taky aby diskriminant nebyl větší jak 100*)
If[IntegerQ[oddeleni[[1, 1]]] && IntegerQ[oddeleni[[1, 2]]] &&
IntegerQ[oddeleni[[2, 1]]] && IntegerQ[oddeleni[[2, 2]]] &&
IntegerQ[oddeleni[[3, 1]]] && IntegerQ[oddeleni[[3, 2]]] && IntegerQ[
oddeleni[[4, 1]]] && IntegerQ[oddeleni[[4, 2]]] && vypocet != 0 && diskre <= 100 ,

(*Ošetření koeficientů, kdy se můžou rovnat nule*)
If[(a != 0 && b != 0 && c != 0 && d != 0 && e != 0) ||
(a != 0 && b != 0 && c != 0 && d == 0 && e != 0),

(*Vypsání koeficientů, stac. bodů, hessiánu *)
Print[Grid[{"koef. A", "koef. B", "koef. C", "koef. D", "koef. E"}, {a, b, c,
d, e}], Frame -> All, Background -> {None, {LightGreen, LightGray}}]];
Print[Text[Style["Stacionární body jsou:", Bold, Large],
Background -> LightRed]]; Print[body];
Print["Hessův determinant: " MatrixForm[hess]];
Print["Determinant"]; Print[d2];

(*Procházení jednotlivých stacionárních bodů*)
For[g = 1, g <= Length[oddeleni], g++,
Print[Text[Style["Pro bod:", Bold, 22], Background -> LightRed]];
Print[{oddeleni[[g, 1]], oddeleni[[g, 2]]}];

(*Výpočet funkční hodnoty*)
funk = Block[{x = oddeleni[[g, 1]], y = oddeleni[[g, 2]]}, rovnice];
Print[Text["Je funkční hodnota: ", Background -> LightRed]];
Print[funk];
Print[Text["Je Determinant", Background -> LightRed]];
vypocet = Block[{x = oddeleni[[g, 1]], y = oddeleni[[g, 2]]}, d2];
vypocet2 = Block[{x = oddeleni[[g, 1]], y = oddeleni[[g, 2]]}, d1];
Print[vypocet];

(* Podmínky, které určují jaký extrém nastal*)
If[vypocet < 0, Print[Style["Funkce f nemá v bodě extrém.", Red, 19, Bold]]];
If[vypocet > 0 && vypocet2 > 0,
Print[Style["Funkce f má v bodě ostré lokální minimum.", Red, 19, Bold]]];
If[vypocet > 0 && vypocet2 < 0, Print[Style[
"Funkce f má v bodě ostré lokální maximum.", Red, 19, Bold]]];]]]]]]]]];
```

Obr. 6. Druhá podmínka

Pod funkcí *Vypocet* se nachází cyklus For, který slouží k procházení koeficientů a, b, c, d a e. Koeficienty se prochází od -10 do 10. V cyklu For se volá funkce *Vypocet* a díky ní dostáváme výsledky na výstup.

```
(*Prohledávání koeficientů od -10 do 10*)
For[a = -10, a ≤ 10, a++, For[b = -10, b ≤ 10, b++,
  For[c = -10, c ≤ 10, c++, For[d = -10, d ≤ 10, d++, For[e = -10, e ≤ 10, e++,
    Vypocet[a, b, c, d, e]]]]]]
```

Obr. 7. Prohledávání koeficientů

4.2.1.2 Výsledky

Pro otestování rovnic jsem si zvolila Příklad 2.1, kde jsem místo konkrétních reálných čísel dosadila koeficienty a až e. Koeficienty se procházely v rozmezí od -10 do 10.

Pokud jeden z koeficientů je roven nule a má za následek změnu metody hledání stacionárních bodů, přiřadila jsem tyto data ke správné metodě.

Po proběhnutí programu jsem všechny data zaznamenala do tabulky. Viz Tab. 3. Po proběhnutí programu dostáváme na výstup výsledky, které jsem pro přehlednost zapsala do tabulky. Tabulka má pět sloupců, v prvním sloupci je zapsaná funkce, se kterou jsem pracovala, v druhém sloupci jsou zaznamenány koeficienty funkce, třetí sloupec obsahuje stacionární body funkce pro dané koeficienty, ve čtvrtém sloupci je pro daný stacionární bod zapsaný extrém a v pátém sloupci je zapsána funkční hodnota jen pro stacionární body s extrémem. Pokud je v tabulce napsáno, že nenastal extrém, znamená to, že Hessův determinant je menší než nula.

Tab. 3. Nové příklady pro lokální extrémy funkce dvou proměnných – výpočet stacionárních bodů pomocí kvadratické rovnice

Funkce	Koeficienty					Stacionární body	Lokální extrém	Funkční hodnota
	a	b	c	d	e			
$f(x, y) = ax^3 + bx^2 + cy^3 + dy + ex$	-1	-6	-3	9	-9	[-3, -1]	Lokální minimum	-6
						[-1, -1]	Nenastal extrém	
						[-3, 1]	Nenastal extrém	
						[-1, 1]	Lokální maximum	10

Funkce	Koefficienty					Stacionární body	Lokální extrém	Funkční hodnota
	a	b	c	d	e			
$f(x, y) = ax^3 + bx^2 + cy^3 + dy + ex$	-1	-6	-2	6	-9	[-3, -1]	Lokální minimum	-4
						[-1, -1]	Nenastal extrém	
						[-3, 1]	Nenastal extrém	
						[-1, 1]	Lokální maximum	8
	-1	-6	-1	3	-9	[-3, -1]	Lokální minimum	-2
						[-1, -1]	Nenastal extrém	
						[-3, 1]	Nenastal extrém	
						[-1, 1]	Lokální maximum	6
	-1	-6	1	-3	-9	[-3, -1]	Nenastal extrém	
						[-1, -1]	Lokální maximum	6
						[-3, 1]	Lokální minimum	-2
						[-1, 1]	Nenastal extrém	
	-1	-6	2	-6	-9	[-3, -1]	Nenastal extrém	
						[-1, -1]	Lokální maximum	8
						[-3, 1]	Lokální minimum	-4
						[-1, 1]	Nenastal extrém	
	-1	-6	3	-9	-9	[-3, -1]	Nenastal extrém	
						[-1, -1]	Lokální maximum	10
						[-3, 1]	Lokální minimum	-6
						[-1, 1]	Nenastal extrém	
	-1	-3	-2	6	9	[-3, -1]	Lokální minimum	-31
						[1, -1]	Nenastal extrém	
						[-3, 1]	Nenastal extrém	
						[1, 1]	Lokální maximum	9
	-1	-3	-1	3	9	[-3, -1]	Lokální minimum	-29
						[1, -1]	Nenastal extrém	
						[-3, 1]	Nenastal extrém	
						[1, 1]	Lokální maximum	7
	-1	-3	1	-3	9	[-3, -1]	Nenastal extrém	
						[1, -1]	Lokální maximum	7
						[-3, 1]	Lokální minimum	-29
						[1, 1]	Nenastal extrém	
	-1	-3	2	-6	9	[-3, -1]	Nenastal extrém	
						[1, -1]	Lokální maximum	9
						[-3, 1]	Lokální minimum	-31
						[1, 1]	Nenastal extrém	
	-1	3	-2	6	9	[-1, -1]	Lokální minimum	-9
						[3, -1]	Nenastal extrém	
						[-1, 1]	Nenastal extrém	
						[3, 1]	Lokální maximum	31

Funkce	Koefficienty					Stacionární body	Lokální extrém	Funkční hodnota
	a	b	c	d	e			
$f(x, y) = ax^3 + bx^2 + cy^3 + dy + ex$	-1	3	-1	3	9	[-1, -1]	Lokální minimum	-7
						[3, -1]	Nenastal extrém	
						[-1, 1]	Nenastal extrém	
						[3, 1]	Lokální maximum	29
	-1	3	1	-3	9	[-1, -1]	Nenastal extrém	
						[3, -1]	Lokální maximum	29
						[-1, 1]	Lokální minimum	-7
						[3, 1]	Nenastal extrém	
	-1	3	2	-6	9	[-1, -1]	Nenastal extrém	
						[3, -1]	Lokální maximum	31
						[-1, 1]	Lokální minimum	-9
						[3, 1]	Nenastal extrém	
	-1	6	-3	9	-9	[1, -1]	Lokální minimum	-10
						[3, -1]	Nenastal extrém	
						[1, 1]	Nenastal extrém	
						[3, 1]	Lokální maximum	6
	-1	6	-2	6	-9	[1, -1]	Lokální minimum	-8
						[3, -1]	Nenastal extrém	
						[1, 1]	Nenastal extrém	
						[3, 1]	Lokální maximum	4
	-1	6	-1	3	-9	[1, -1]	Lokální minimum	-6
						[3, -1]	Nenastal extrém	
						[1, 1]	Nenastal extrém	
						[3, 1]	Lokální maximum	2
	-1	6	1	-3	-9	[1, -1]	Nenastal extrém	
						[3, -1]	Lokální maximum	2
						[1, 1]	Lokální minimum	-6
						[3, 1]	Nenastal extrém	
	-1	6	2	-6	-9	[1, -1]	Nenastal extrém	
						[3, -1]	Lokální maximum	4
						[1, 1]	Lokální minimum	-8
						[3, 1]	Nenastal extrém	
	-1	6	3	-9	-9	[1, -1]	Nenastal extrém	
						[3, -1]	Lokální maximum	6
						[1, 1]	Lokální minimum	-10
						[3, 1]	Nenastal extrém	
	1	-6	-3	9	9	[1, -1]	Nenastal extrém	
						[3, -1]	Lokální minimum	-6
						[1, 1]	Lokální maximum	10
						[3, 1]	Nenastal extrém	

Funkce	Koefficienty					Stacionární body	Lokální extrém	Funkční hodnota
	a	b	c	d	e			
$f(x, y) = ax^3 + bx^2 + cy^3 + dy + ex$	1	-6	-2	6	9	[1, -1]	Nenastal extrém	
						[3, -1]	Lokální minimum	-4
						[1, 1]	Lokální maximum	8
						[3, 1]	Nenastal extrém	
	1	-6	-1	3	9	[1, -1]	Nenastal extrém	
						[3, -1]	Lokální minimum	-2
						[1, 1]	Lokální maximum	6
						[3, 1]	Nenastal extrém	
	1	-6	1	-3	9	[1, -1]	Lokální maximum	6
						[3, -1]	Nenastal extrém	
						[1, 1]	Nenastal extrém	
						[3, 1]	Lokální minimum	-2
	1	-6	2	-6	9	[1, -1]	Lokální maximum	8
						[3, -1]	Nenastal extrém	
						[1, 1]	Nenastal extrém	
						[3, 1]	Lokální minimum	-4
	1	-6	3	-9	9	[1, -1]	Lokální maximum	10
						[3, -1]	Nenastal extrém	
						[1, 1]	Nenastal extrém	
						[3, 1]	Lokální minimum	-6
	1	-3	-2	6	-9	[-1, -1]	Nenastal extrém	
						[3, -1]	Lokální minimum	-31
						[-1, 1]	Lokální maximum	9
						[3, 1]	Nenastal extrém	
	1	-3	-1	3	-9	[-1, -1]	Nenastal extrém	
						[3, -1]	Lokální minimum	-29
						[-1, 1]	Lokální maximum	7
						[3, 1]	Nenastal extrém	
	1	-3	1	-3	-9	[-1, -1]	Lokální maximum	7
						[3, -1]	Nenastal extrém	
						[-1, 1]	Nenastal extrém	
						[3, 1]	Lokální minimum	-29
	1	-3	2	-6	-9	[-1, -1]	Lokální maximum	9
						[3, -1]	Nenastal extrém	
						[-1, 1]	Nenastal extrém	
						[3, 1]	Lokální minimum	-31
	1	3	-2	6	-9	[-3, -1]	Nenastal extrém	
						[1, -1]	Lokální minimum	-9
						[-3, 1]	Lokální maximum	31
						[1, 1]	Nenastal extrém	

Funkce	Koefficienty					Stacionární body	Lokální extrém	Funkční hodnota
	a	b	c	d	e			
$f(x, y) = ax^3 + bx^2 + cy^3 + dy + ex$	1	3	-1	3	-9	[-3, -1]	Nenastal extrém	
						[1, -1]	Lokální minimum	-7
						[-3, 1]	Lokální maximum	29
						[1, 1]	Nenastal extrém	
	1	3	1	-3	-9	[-3, -1]	Lokální maximum	29
						[1, -1]	Nenastal extrém	
						[-3, 1]	Nenastal extrém	
						[1, 1]	Lokální minimum	-7
	1	3	2	-6	-9	[-3, -1]	Lokální maximum	31
						[1, -1]	Nenastal extrém	
						[-3, 1]	Nenastal extrém	
						[1, 1]	Lokální minimum	-9
	1	6	-3	9	9	[-3, -1]	Nenastal extrém	
						[-1, -1]	Lokální minimum	-10
						[-3, 1]	Lokální maximum	6
						[-1, 1]	Nenastal extrém	
	1	6	-2	6	9	[-3, -1]	Nenastal extrém	
						[-1, -1]	Lokální minimum	-8
						[-3, 1]	Lokální maximum	4
						[-1, 1]	Nenastal extrém	
	1	6	-1	3	9	[-3, -1]	Nenastal extrém	
						[-1, -1]	Lokální minimum	-6
						[-3, 1]	Lokální maximum	2
						[-1, 1]	Nenastal extrém	
	1	6	1	-3	9	[-3, -1]	Lokální maximum	2
						[-1, -1]	Nenastal extrém	
						[-3, 1]	Nenastal extrém	
						[-1, 1]	Lokální minimum	-6
	1	6	2	-6	9	[-3, -1]	Lokální maximum	4
						[-1, -1]	Nenastal extrém	
						[-3, 1]	Nenastal extrém	
						[-1, 1]	Lokální minimum	-8
	1	6	3	-9	9	[-3, -1]	Lokální maximum	6
						[-1, -1]	Nenastal extrém	
						[-3, 1]	Nenastal extrém	
						[-1, 1]	Lokální minimum	-10

4.3 Metoda výpočtu stacionárních bodů pomocí rozkladu

Poslední skupina pro vyšetřování lokálních extrémů je založena na principu vytknutí jednoho členu, který je obsažen v každém sčítanci levé strany rovnice. Po vytknutí získáváme z rovnice součinnový tvar, ze kterého můžeme snadno vyjádřit proměnné. Viz. Příklad 2.1.

Součinnový tvar, který získáme vytknutím členu, může také vést na jinou metodu vyšetřování lokálních extrémů, a to na metodu dosazování, nebo po vytknutí můžeme dostat kvadratickou rovnici.

Příklad 3.1 ([5]): $f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$

$$f'_x = 6x^2 + y^2 + 10x$$

$$f'_y = 2xy + 2y$$

$$6x^2 + y^2 + 10x = 0$$

$$2xy + 2y = 0$$

Z druhé rovnice vytkneme $2y$:

$$2y(x+1) = 0$$

Zjistíme, že $y = 0 \vee x = -1$, které postupně dosadíme do první rovnice.

4.3.1 Řešené příklady z uvedených zdrojů

Příklad 3.1 ([4]): $f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$

Příklad 3.2 ([6]): $f(x, y) = 2x^3 + 9xy^2 + 15x^2 + 27y^2$

Příklad 3.3 ([4]): $f(x, y) = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$

Příklad 3.4 ([5]): $f(x, y) = x^3 + xy^2 - 2xy - 5x$

4.3.2 Řešení pomocí softwaru Wolfram Mathematica 8.0

4.3.2.1 Popis programu

Program pro vyhledávání lokálních extrémů metodou vytýkání je stejný jako u metody kvadratické rovnice. Viz. 4.2.1.1.

4.3.2.2 Výsledky

Pro otestování rovnic jsem si zvolila Příklad 3.1 a Příklad 3.4, kde jsem místo konkrétních reálných čísel dosadila koeficienty a až e. Koeficienty se procházely v rozmezí od -10 do 10.

Pokud jeden z koeficientů je roven nule a má za následek změnu metody hledání stacionárních bodů, přiřadila jsem tyto data ke správné metodě.

Po proběhnutí programu dostáváme na výstup výsledky, které jsem pro přehlednost zapsala do tabulky. Viz. Tab. 4. Tabulka má pět sloupců, v prvním sloupci je zapsaná funkce, se kterou jsem pracovala, v druhém sloupci jsou zaznamenány koeficienty funkce, třetí sloupec obsahuje stacionární body funkce pro dané koeficienty, ve čtvrtém sloupci je pro daný stacionární bod zapsaný extrém a v pátém sloupci je zapsána funkční hodnota jen pro stacionární body s extrémem. Pokud je v tabulce napsáno, že nenastal extrém, znamená to, že Hessián je menší než nula. Jelikož funkce $f(x, y) = ax^3 + bxy^2 + cx^2 + dy^2$ má mnoho výsledků, proto jsem do tabulky Tab. 4. uvedla pouze několik příkladů, zbytek příkladů se nachází v souboru prikklad3.1.pdf, který se nachází na přiloženém CD.

Tab. 4. Nové příklady pro lokální extrémy funkce dvou proměnných – metoda rozkladu

Funkce	Koeficienty				Stacionární body	Lokální extrém	Funkční hodnota
	a	b	c	d			
$f(x, y) = ax^3 + bxy^2 + cx^2 + dy^2$	-6	1	-9	-1	[-1, 0]	Nenastal extrém	
					[0, 0]	Lokální maximum	0
					[1, -6]	Nenastal extrém	
					[1, 6]	Nenastal extrém	
	-6	1	-9	2	[-2, -6]	Nenastal extrém	
					[-2, 6]	Nenastal extrém	
					[-1, 0]	Lokální minimum	-3
					[0, 0]	Nenastal extrém	
	-6	1	9	-2	[0, 0]	Nenastal extrém	
					[1, 0]	Lokální maximum	3
					[2, -6]	Nenastal extrém	
					[2, 6]	Nenastal extrém	
	-6	1	9	1	[-1, -6]	Nenastal extrém	
					[-1, 6]	Nenastal extrém	
					[0, 0]	Lokální minimum	0
					[1, 0]	Nenastal extrém	

Funkce	Koefficienty				Stacionární body	Lokální extrém	Funkční hodnota
	a	b	c	d			
$f(x, y) = ax^3 + bxy^2 + cx^2 + dy^2$	-3	-1	-9	-1	[-2, 0]	Lokální minimum	-12
					[-1, -3]	Nenastal extrém	
					[-1, 3]	Nenastal extrém	
					[0, 0]	Lokální maximum	0
	-3	-1	9	1	[0, 0]	Lokální minimum	0
					[1, -3]	Nenastal extrém	
					[1, 3]	Nenastal extrém	
					[2, 0]	Lokální maximum	12
	-2	-6	-6	-6	[-2, 0]	Lokální minimum	-8
					[-1, -1]	Nenastal extrém	
					[-1, 1]	Nenastal extrém	
					[0, 0]	Lokální maximum	0
	-2	-6	6	6	[0, 0]	Lokální minimum	0
					[1, -1]	Nenastal extrém	
					[1, 1]	Nenastal extrém	
					[2, 0]	Lokální maximum	8
	-2	1	-3	-2	[-1, 0]	Nenastal extrém	
					[0, 0]	Lokální maximum	0
					[2, -6]	Nenastal extrém	
					[2, 6]	Nenastal extrém	
	-2	1	-3	3	[-3, -6]	Nenastal extrém	
					[-3, 6]	Nenastal extrém	
					[-1, 0]	Lokální minimum	-1
					[0, 0]	Nenastal extrém	
	-2	1	3	-3	[0, 0]	Nenastal extrém	
					[1, 0]	Lokální maximum	1
					[3, -6]	Nenastal extrém	
					[3, 6]	Nenastal extrém	
	-2	1	3	2	[-2, -6]	Nenastal extrém	
					[-2, 6]	Nenastal extrém	
					[0, 0]	Lokální minimum	0
					[1, 0]	Nenastal extrém	
-2	2	-6	-2	[-2, 0]	Nenastal extrém		
				[0, 0]	Lokální maximum	0	
				[1, -3]	Nenastal extrém		
				[1, 3]	Nenastal extrém		

Funkce	Koefficienty				Stacionární body	Lokální extrém	Funkční hodnota
	a	b	c	d			
$f(x, y) = ax^3 + bxy^2 + cxy + dx$	-3	-1	8	-7	[0, 1]	Nenastal extrém	
					[0, 7]	Nenastal extrém	
					[-1, 4]	Lokální minimum	-6
					[1, 4]	Lokální maximum	6
	-3	-1	4	5	[0, -1]	Nenastal extrém	
					[0, 5]	Nenastal extrém	
					[-1, 2]	Lokální minimum	-6
					[1, 2]	Lokální maximum	6
	-3	-1	2	8	[0, -2]	Nenastal extrém	
					[0, 4]	Nenastal extrém	
					[-1, 1]	Lokální minimum	-6
					[1, 1]	Lokální maximum	6
	-3	-1	-2	8	[0, -4]	Nenastal extrém	
					[0, 2]	Nenastal extrém	
					[-1, -1]	Lokální minimum	-6
					[1, -1]	Lokální maximum	6
	-3	-1	-4	5	[0, -5]	Nenastal extrém	
					[0, 1]	Nenastal extrém	
					[-1, -2]	Lokální minimum	-6
					[1, -2]	Lokální maximum	6
	-3	-1	-8	-7	[0, -7]	Nenastal extrém	
					[0, -1]	Nenastal extrém	
					[-1, -4]	Lokální minimum	-6
					[1, -4]	Lokální maximum	6
	3	1	8	7	[0, -7]	Nenastal extrém	
					[0, -1]	Nenastal extrém	
					[-1, -4]	Lokální maximum	6
					[1, -4]	Lokální minimum	-6
	3	1	4	-5	[0, -5]	Nenastal extrém	
					[0, 1]	Nenastal extrém	
					[-1, -2]	Lokální maximum	6
					[1, -2]	Lokální minimum	-6
	3	1	2	-8	[0, -4]	Nenastal extrém	
					[0, 2]	Nenastal extrém	
					[-1, -1]	Lokální maximum	6
					[1, -1]	Lokální minimum	-6
3	1	-2	-8	[0, -2]	Nenastal extrém		
				[0, 4]	Nenastal extrém		
				[-1, 1]	Lokální maximum	6	
				[1, 1]	Lokální minimum	-6	

Funkce	Koefficienty				Stacionární body	Lokální extrém	Funkční hodnota
	a	b	c	d			
$f(x, y) = ax^3 + bxy^2 + cxy + dx$	3	1	-4	-5	[0, -1]	Nenastal extrém	
					[0, 5]	Nenastal extrém	
					[-1, 2]	Lokální maximum	6
					[1, 2]	Lokální minimum	-6
	3	1	-8	7	[0, 1]	Nenastal extrém	
					[0, 7]	Nenastal extrém	
					[-1, 4]	Lokální maximum	6
					[1, 4]	Lokální minimum	-6
	-3	-1	6	0	[0, 0]	Nenastal extrém	
					[0, 6]	Nenastal extrém	
					[-1, 3]	Lokální minimum	-6
					[1, 3]	Lokální maximum	6
	-3	-1	-6	0	[0, -6]	Nenastal extrém	
					[0, 0]	Nenastal extrém	
					[-1, -3]	Lokální minimum	-6
					[1, -3]	Lokální maximum	6
	-1	-3	6	0	[0, 0]	Nenastal extrém	
					[0, 2]	Nenastal extrém	
					[-1, 1]	Lokální minimum	-2
					[1, 1]	Lokální maximum	2
	-1	-3	-6	0	[0, -2]	Nenastal extrém	
					[0, 0]	Nenastal extrém	
					[-1, -1]	Lokální minimum	-2
					[1, -1]	Lokální maximum	2
	1	3	6	0	[0, -2]	Nenastal extrém	
					[0, 0]	Nenastal extrém	
					[-1, -1]	Lokální maximum	2
					[1, -1]	Lokální minimum	-2
	1	3	-6	0	[0, 0]	Nenastal extrém	
					[0, 2]	Nenastal extrém	
					[-1, 1]	Lokální maximum	2
					[1, 1]	Lokální minimum	-2
3	1	6	0	[0, -6]	Nenastal extrém		
				[0, 0]	Nenastal extrém		
				[-1, -3]	Lokální maximum	6	
				[1, -3]	Lokální minimum	-6	

Funkce	Koefficienty				Stacionární body	Lokální extrém	Funkční hodnota
	a	b	c	d			
$f(x, y) = ax^3 + bxy^2 + cxy + dx$	3	1	-6	0	[0, 0]	Nenastal extrém	
					[0, 6]	Nenastal extrém	
					[-1, 3]	Lokální maximum	6
					[1, 3]	Lokální minimum	-6

5 PŘÍKLADY NA VÝPOČET DIFERENCIÁLU

V této kapitole bakalářské práce jsem se zabývala výpočtem diferenciálu. Nejprve jsem naprogramovala v softwaru Wolfram Mathematica funkci na výpočet totálního diferenciálu a také výpočet totálního diferenciálu v určitém bodě. Manuální způsobem jsem vytipovala různé příklady funkcí pro výpočet totálního diferenciálu, které jsou lehce řešitelné. Tzn., že jejich parciální derivace nejsou příliš rozsáhlé a dosazení bodu do parciálních derivací vede k celočíselným hodnotám

5.1 Řešení pomocí softwaru Wolfram Mathematica 8.0

5.1.1 Popis programu

Zdrojový kód programu se skládá z funkce *Diferencial*, která má dvě vstupní proměnné a a b , přičemž tyto proměnné jsou použity jako souřadnice bodu, ve kterém se bude počítat totální diferenciál. Celá funkce *Diferencial* je naprogramována pomocí funkce *Module*, kde jsou umístěny výpočty.

Na začátku je umístěna funkce pro výpočet totálního diferenciálu, následují parciální derivace dané funkce a dosazení bodu do parciálních derivací. Zdrojový kód programu pokračuje podmínkou, která posuzuje, zda jsou parciální derivace v daném bodě celá čísla. Pokud jsou parciální derivace celá čísla, program pokračuje dál, pokud ne skončí. V podmínce jsou vnořené příkazy pro výpis funkce, parciálních derivací, parciálních derivací v daném bodě a hlavně výpočet totálního diferenciálu.

Za funkcí *Diferencial* se nachází cyklus *For*, který prochází souřadnice bodu dosazovaného do totálního diferenciálu, od -3 do 3.

5.1.2 Výsledky

Všechny vzniklé příklady, které jsem dostala z programu, jsem zaznamenala jako 5.1.2.1 Příklad 1 až 5.1.2.5 Příklad 5, kde jsem uvedla vždy funkci pro výpočet totálního diferenciálu, její parciální derivace, vypočítaný totální diferenciál a nakonec tabulku, kde v prvním sloupci je vždy zapsaný bod A, v druhém sloupci je zaznamenán totální diferenciál v bodě A.

5.1.2.1 Příklad 1

$$f(x, y) = x^2 y^2 + \ln\left(\frac{x}{y}\right)$$

Parciální derivace:

$$f'_x = \frac{1}{x} + 2xy^2, \quad f'_y = -\frac{1}{y} + 2x^2 y$$

Totální diferenciál:

$$df = \left(\frac{1}{x} + 2xy^2\right)dx + \left(-\frac{1}{y} + 2x^2 y\right)dy$$

Tab. 5. Totální diferenciál v bodě A – Příklad 1

Bod A	Totální diferenciál v bodě A
[-1, -1]	$df(A) = -3dx - dy$
[-1, 1]	$df(A) = -3dx + dy$
[1, -1]	$df(A) = 3dx - dy$
[1, 1]	$df(A) = 3dx + dy$

5.1.2.2 Příklad 2

$$f(x, y) = \sin(x + y) + \cos(x^3 + y)$$

Parciální derivace:

$$f'_x = \cos(x + y) - 3x^2 \sin(x^3 + y), \quad f'_y = \cos(x + y) - \sin(x^3 + y)$$

Totální diferenciál:

$$df = (\cos(x + y) - 3x^2 \sin(x^3 + y))dx + (\cos(x + y) - \sin(x^3 + y))dy$$

Tab. 6. Totální diferenciál v bodě A – Příklad 2

Bod A	Totální diferenciál v bodě A
[-1, 1]	$df(A) = dx + dy$
[0, 0]	$df(A) = dx + dy$
[1, -1]	$df(A) = dx + dy$

5.1.2.3 Příklad 3

$$f(x, y) = \ln\left(\frac{y^3}{x}\right) + e^{x+y}$$

Parciální derivace:

$$f'_x = e^{x+y} - \frac{1}{x}, \quad f'_y = e^{x+y} + \frac{3}{y}$$

Totální diferenciál:

$$df = \left(e^{x+y} - \frac{1}{x}\right)dx + \left(e^{x+y} + \frac{3}{y}\right)dy$$

Tab. 7. Totální diferenciál v bodě A – Příklad 3

Bod A	Totální diferenciál v bodě A
[-1, 1]	$df(A) = 2dx + 4dy$
[1, -1]	$df(A) = -2dy$

5.1.2.4 Příklad 4

$$f(x, y) = xy^2 + x^3 \cos(y)$$

Parciální derivace:

$$f'_x = y^2 + 3x^2 \cos(y), \quad f'_y = 2xy - x^3 \sin(y)$$

Totální diferenciál:

$$df = (y^2 + 3x^2 \cos(y))dx + (2xy - x^3 \sin(y))dy$$

Tab. 8. Totální diferenciál v bodě A – Příklad 4

Bod A	Totální diferenciál v bodě A
[-3,0]	$df(A) = 27dx$
[-2, 0]	$df(A) = 12dx$
[-1, 0]	$df(A) = 3dx$
[0, -3]	$df(A) = 9dx$
[0, -2]	$df(A) = 4dx$
[0, -1]	$df(A) = dx$
[0, 0]	$df(A) = 0$
[0, 1]	$df(A) = dx$
[0, 2]	$df(A) = 4dx$
[0, 3]	$df(A) = 9dx$
[1, 0]	$df(A) = 3dx$
[2, 0]	$df(A) = 12dx$
[3, 0]	$df(A) = 27dx$

5.1.2.5 Příklad 5

$$f(x, y) = \sqrt{x}y + \ln(y^2)$$

Parciální derivace:

$$f'_x = \frac{y}{2\sqrt{x}}, \quad f'_y = \sqrt{x} + \frac{2}{y}$$

Totální diferenciál:

$$df = \left(\frac{y}{2\sqrt{x}} \right) dx + \left(\sqrt{x} + \frac{2}{y} \right) dy$$

Tab. 9. Totální diferenciál v bodě A – Příklad 5

Bod A	Totální diferenciál v bodě A
[1, -2]	$df(A) = -dx$
[1, 2]	$df(A) = dx + 2dy$

6 PŘÍKLADY NA VÝPOČET TAYLOROVA POLYNOMU

V poslední kapitole bakalářské práce jsem se zabývala příklady na výpočet Taylorova polynomu druhého a třetího stupně. Nejdříve jsem naprogramovala v softwaru Wolfram Mathematica funkci na výpočet Taylorova polynomu druhého i třetího stupně. Manuální způsobem jsem vytypovala různé příklady funkcí pro výpočet Taylorova polynomu, které jsou lehce řešitelné. Tzn., že jejich parciální derivace nejsou příliš rozsáhlé a dosazení bodu do parciálních derivací je celé číslo.

6.1 Řešení pomocí softwaru Wolfram Mathematica 8.0

6.1.1 Popis programu

Zdrojový kód programu se skládá z funkce *Taylor*, která má dvě vstupní proměnné a , b , přičemž tyto proměnné jsou použity jako souřadnice bodu, ve kterém se bude počítat Taylorův polynom, jak druhého stupně, tak i třetího stupně. Celá funkce *Taylor* je naprogramována pomocí funkce *Module*, kde jsou umístěny výpočty.

Na začátku je umístěn příklad pro výpočet Taylorova polynomu, následují parciální derivace prvního, druhého a třetího řádu dané funkce a dosazení bodu do parciálních derivací. Zdrojový kód programu pokračuje podmínkou, která posuzuje, zda jsou parciální derivace v daném bodě celá čísla, pokud jsou parciální derivace celá čísla, program pokračuje dál, pokud ne skončí. V podmínce jsou vnořené příkazy na výpis funkce, parciálních derivací, parciálních derivací v daném bodě a hlavně výpočet Taylorova polynomu druhého a třetího řádu.

Za funkcí *Taylor* se nachází cyklus *For*, který prochází souřadnice bodu dosazujícího do totálního diferenciálu, od -3 do 3.

6.1.2 Výsledky

Všechny vzniklé příklady, které jsem dostala z programu, jsem zaznamenala jako 6.1.2.1 Příklad 1 až 6.1.2.5 Příklad 5, kde jsem uvedla vždy příklad na výpočet Taylorovopolynomu, parciální derivace 1. až 3. stupně a nakonec dvě tabulky. První tabulka obsahuje vždy v prvním sloupci bod, ve kterém hledáme Taylorův polynom, a v druhém sloupci je zapsán Taylorův polynom druhého stupně. Druhá tabulka má taktéž v prvním sloupci bod A , ve kterém hledáme Taylorův polynom, ale druhý sloupec obsahuje Taylorův polynom třetího stupně.

6.1.2.1 Příklad 1

$$f(x, y) = x^2 y + \ln\left(\frac{x}{y}\right)$$

Parciální derivace:

$$f'_x = \frac{1}{x} + 2xy, \quad f'_y = -\frac{1}{y} + x^2$$

$$f''_{xx} = -\frac{1}{x^2} + 2y, \quad f''_{yy} = \frac{1}{y^2}, \quad f''_{xy} = 2x$$

$$f'''_{xxx} = \frac{2}{x^3}, \quad f'''_{yyy} = -\frac{2}{y^3}, \quad f'''_{xyy} = 0, \quad f'''_{xxy} = 2$$

Taylorův polynom druhého stupně:

Tab. 10. Taylorův polynom druhého stupně v bodě A – Příklad 1

Bod A	Taylorův polynom druhého stupně v bodě A
[-1, -1]	$T_2(x, y) = -1 - 4x - \frac{3x^2}{2} + y - 2xy + \frac{y^2}{2}$
[1, 1]	$T_2(x, y) = 1 + \frac{x^2}{2} - 3y + 2xy + \frac{y^2}{2}$

Taylorův polynom třetího stupně:

Tab. 11. Taylorův polynom třetího stupně v bodě A – Příklad 1

Bod A	Taylorův polynom třetího stupně v bodě A
[-1, -1]	$T_3(x, y) = -3x - \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 3y + x^2 y + \frac{3y^2}{2} + \frac{y^3}{3}$
[1, 1]	$T_3(x, y) = 3x - \frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - 3y + x^2 y + \frac{3y^2}{2} - \frac{y^3}{3}$

6.1.2.2 Příklad 2

$$f(x, y) = xy - x + e^{-xy}$$

Parciální derivace:

$$f'_x = -1 + y + e^{-xy} y, f'_y = x + e^{-xy} x$$

$$f''_{xx} = e^{-xy} y^2, f''_{yy} = e^{-xy} x^2, f''_{xy} = 1 + e^{-xy} + e^{-xy} xy$$

$$f'''_{xxx} = e^{-xy} y^3, f'''_{yyy} = e^{-xy} x^3, f'''_{xyy} = 2e^{-xy} x + e^{-xy} x^2 y, f'''_{xxy} = 2e^{-xy} y + e^{-xy} xy^2$$

Taylorův polynom druhého stupně:

Tab. 12. Taylorův polynom druhého stupně v bodě A – Příklad 2

Bod A	Taylorův polynom druhého stupně v bodě A
[-3, 0]	$T_2(x, y) = 1 - x + 2xy + \frac{9y^2}{2}$
[-2, 0]	$T_2(x, y) = 1 - x + 2xy + 2y^2$
[-1, 0]	$T_2(x, y) = 1 - x + 2xy + \frac{y^2}{2}$
[0, -3]	$T_2(x, y) = 1 - x + \frac{9x^2}{2} + 2xy$
[0, -2]	$T_2(x, y) = 1 - x + 2x^2 + 2xy$
[0, -1]	$T_2(x, y) = 1 - x + \frac{x^2}{2} + 2xy$
[0, 0]	$T_2(x, y) = 1 - x + 2xy$
[0, 1]	$T_2(x, y) = 1 - x + \frac{x^2}{2} + 2xy$
[0, 2]	$T_2(x, y) = 1 - x + 2x^2 + 2xy$
[0, 3]	$T_2(x, y) = 1 - x + \frac{9x^2}{2} + 2xy$
[1, 0]	$T_2(x, y) = 1 - x + 2xy + \frac{y^2}{2}$

Bod A	Taylorův polynom druhého stupně v bodě A
[2, 0]	$T_2(x, y) = 1 - x + 2xy + 2y^2$
[3, 0]	$T_2(x, y) = 1 - x + 2xy + \frac{9y^2}{2}$

Taylorův polynom třetího stupně:

Tab. 13. Taylorův polynom třetího stupně v bodě A – Příklad 2

Bod A	Taylorův polynom druhého stupně v bodě A
[-3, 0]	$T_3(x, y) = 1 - x + 2xy - \frac{9y^2}{2} - 3xy^2 - \frac{9y^3}{2}$
[-2, 0]	$T_3(x, y) = 1 - x + 2xy - 2y^2 - 2xy^2 - \frac{4y^3}{3}$
[-1, 0]	$T_3(x, y) = 1 - x + 2xy - \frac{y^2}{2} - xy^2 - \frac{y^3}{6}$
[0, -3]	$T_3(x, y) = 1 - x - \frac{9x^2}{2} - \frac{9x^3}{2} + 2xy - 3x^2y$
[0, -2]	$T_3(x, y) = 1 - x - 2x^2 - \frac{4x^3}{3} + 2xy - 2x^2y$
[0, -1]	$T_3(x, y) = 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + 2xy - x^2y$
[0, 0]	$T_3(x, y) = 1 - x + 2xy$
[0, 1]	$T_3(x, y) = 1 - x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + 2xy + x^2y$
[0, 2]	$T_3(x, y) = 1 - x - 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + 2xy + 2x^2y$
[0, 3]	$T_3(x, y) = 1 - x - \frac{9x^2}{2} + \frac{9x^3}{2} + 2xy + 3x^2y$
[1, 0]	$T_3(x, y) = 1 - x + 2xy - \frac{y^2}{2} + xy^2 + \frac{y^3}{6}$
[2, 0]	$T_3(x, y) = 1 - x + 2xy - 2y^2 + 2xy^2 + \frac{4y^3}{3}$
[3, 0]	$T_3(x, y) = 1 - x + 2xy - \frac{9y^2}{2} + 3xy^2 + \frac{9y^3}{2}$

6.1.2.3 Příklad 3

$$f(x, y) = xy^2 + x^3 \cos(y)$$

Parciální derivace:

$$f'_x = y^2 + 3x^2 \cos(y), f'_y = 2xy - x^3 \sin(y)$$

$$f''_{xx} = 6x \cos(y), f''_{yy} = 2x - x^3 \cos(y), f''_{xy} = 2y - 3x^2 \sin(y)$$

$$f'''_{xxx} = 6 \cos(y), f'''_{yyy} = x^3 \sin(y), f'''_{xyy} = 2 - 3x^2 \cos(y), f'''_{xxy} = -6x \sin(y)$$

Taylorův polynom druhého stupně:

Tab. 14. Taylorův polynom druhého stupně v bodě A – Příklad 3

Bod A	Taylorův polynom druhého stupně v bodě A
[-3, 0]	$T_2(x, y) = -27 - 27x - 9x^2 + \frac{21y^2}{2}$
[-2, 0]	$T_2(x, y) = -8 - 12x - 6x^2 + 2y^2$
[-1, 0]	$T_2(x, y) = -1 - 3x - 3x^2 - \frac{y^2}{2}$
[0, 0]	$T_2(x, y) = 0$
[1, 0]	$T_2(x, y) = 1 - 3x + 3x^2 + \frac{y^2}{2}$
[2, 0]	$T_2(x, y) = 8 - 12x + 6x^2 - 2y^2$
[3, 0]	$T_2(x, y) = 27 - 27x + 9x^2 - \frac{21y^2}{2}$

Taylorův polynom třetího stupně:

Tab. 15. Taylorův polynom třetího stupně v bodě A – Příklad 3

Bod A	Taylorův polynom třetího stupně v bodě A
[-3, 0]	$T_3(x, y) = x^3 - 27y^2 - \frac{25xy^2}{2}$
[-2, 0]	$T_3(x, y) = x^3 - 8y^2 - 5xy^2$
[-1, 0]	$T_3(x, y) = x^3 - y^2 - \frac{xy^2}{2}$
[0, 0]	$T_3(x, y) = x^3 + xy^2$
[1, 0]	$T_3(x, y) = x^3 + y^2 - \frac{xy^2}{2}$
[2, 0]	$T_3(x, y) = x^3 + 8y^2 - 5xy^2$
[3, 0]	$T_3(x, y) = x^3 + 27y^2 - \frac{25xy^2}{2}$

6.1.2.4 Příklad 4

$$f(x, y) = e^{-xy} + e^{x+y}$$

Parciální derivace:

$$f'_x = e^{x+y} + e^{xy} y, f'_y = e^{x+y} + e^{xy} x$$

$$f''_{xx} = e^{x+y} + e^{xy} y^2, f''_{yy} = e^{x+y} + e^{xy} x^2, f''_{xy} = e^{x+y} + e^{xy} xy + e^{xy}$$

$$f'''_{xxx} = e^{x+y} + e^{xy} y^3, f'''_{yyy} = e^{x+y} + e^{xy} x^3,$$

$$f'''_{xyy} = e^{x+y} + 2e^{xy} x + e^{xy} x^2 y, f'''_{xxy} = e^{x+y} + 2e^{xy} y + e^{xy} xy^2$$

Taylorův polynom druhého stupně:

Tab. 16. Taylorův polynom druhého stupně v bodě A – Příklad 4

Bod A	Taylorův polynom druhého stupně v bodě A
[0, 0]	$T_2(x, y) = 2 + x + \frac{x^2}{2} + y + 2xy + \frac{y^2}{2}$

Taylorův polynom třetího stupně:

Tab. 17. Taylorův polynom třetího stupně v bodě A – Příklad 4

Bod A	Taylorův polynom třetího stupně v bodě A
[0, 0]	$T_3(x, y) = 2 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + y + 2xy + \frac{x^2y}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{xy^2}{2} + \frac{y^3}{6}$

6.1.2.5 Příklad 5

$$f(x, y) = \sin(xy) + \ln(y)$$

Parciální derivace:

$$f'_x = \cos(xy)y, \quad f'_y = \cos(xy)x + \frac{1}{y}$$

$$f''_{xx} = -y^2 \sin(xy), \quad f''_{yy} = -\sin(xy)x^2 - \frac{1}{y^2}, \quad f''_{xy} = \cos(xy) - \sin(xy)xy$$

$$f'''_{xxx} = -y^3 \cos(xy), \quad f'''_{yyy} = \frac{2}{y^3} - x^3 \cos(xy),$$

$$f'''_{xyy} = -x^2 y \cos(xy) - 2x \sin(xy), \quad f'''_{xxy} = -xy^2 \cos(xy) - 2y \sin(xy)$$

Taylorův polynom druhého stupně:

Tab. 18. Taylorův polynom druhého stupně v bodě A – Příklad 5

Bod A	Taylorův polynom druhého stupně v bodě A
[0, 1]	$T_2(x, y) = -\frac{3}{2} + 2y + xy - \frac{y^2}{2}$

Taylorův polynom třetího stupně:

Tab. 19. Taylorův polynom třetího stupně v bodě A – Příklad 5

Bod A	Taylorův polynom třetího stupně v bodě A
[0, 1]	$T_3(x, y) = -\frac{11}{6} - \frac{x^3}{6} + 3y + xy - \frac{3y^2}{2} + \frac{y^3}{3}$

ZÁVĚR

Cílem bakalářská práce bylo najít snadno řešitelné úlohy pro výpočet diferenciálu, Taylorova polynomu a lokálních extrémů funkcí dvou reálných proměnných. Nejprve byly v teoretické části vysvětleny pojmy a definice vztahující se k metodám výpočtu výše uvedených úloh diferenciálního počtu dvou proměnných. V praktické části bakalářské práce byly jednotlivé metody zapsány do třech kapitol.

Kapitola pro hledání příkladů lokálních extrémů byla rozdělena na tři podkapitoly podle způsobu řešení rovnic vedoucích ke stacionárním bodům. V každé podkapitole byly nejprve zapsány příklady, které se běžně vyskytují na webových stránkách nebo v matematických sbírkách. Poté byl popsán zdrojový kód programu a výsledky, které zde reprezentují nově nalezené úlohy, byly zapsány do tabulek.

Další kapitoly se týkají nalezení lehce řešitelných příkladů pro výpočet totálního diferenciálu a Taylorova polynomu. Je zde popsán princip funkce programu a na závěr jsou zapsány výsledky. V tomto případě bylo nalezeno pět příkladů pro oba typy úloh.

Výsledky této práce mohou být využity pro pedagogické účely, např. v písemných pracích.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] DOŠLÁ, Zuzana a Ondřej DOŠLÝ. Diferenciální počet funkcí více proměnných. 3. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2006, ISBN 80-210-4159-5.
- [2] ELIÁŠ, Jozef, HORVÁTH, Ján a KAJAN, Juraj. Zbierka úloh z vyššej matematiky. 3. vyd. Bratislava: Alfa, 1980.
- [3] KRUPKOVÁ, Vlasta. Diferenciální a integrální počet funkcí více proměnných: cvičení. 1. vyd. Brno: VUTIM, 1999, ISBN 8021415428.
- [4] OSTRAVSKÝ, Jan. Diferenciální počet funkce více proměnných. Nekonečné číselné řady. Vyd. 4., nezm. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2009, ISBN 978-80-7318-856-6.
- [5] MATEMATIKA online: Řešené příklady. [online]. [cit. 2014-11-30]. Dostupné z: <http://mathonline.fme.vutbr.cz/Lokalni-vazane-a-globalni-extremy/sc-97-sr-1-a-98/default.aspx>
- [6] MA2: Řešené příklady: Funkce více proměnných: Extrémy. [online]. s. 7 [cit. 2014-11-29]. Dostupné z: <https://math.feld.cvut.cz/habala/teaching/veci-ma2/ma2r3.pdf>
- [7] Lokální extrémy funkcí více proměnných. [online]. s. 5 [cit. 2014-11-30]. Dostupné z: http://lide.uhk.cz/prf/ucitel/lipovji1/teaching/lokalni_extremy.pdf
- [8] VANČUROVÁ, Lucie. Diferenciální počet funkce více proměnných sbírka řešených a neřešených příkladů. [online]. Zlín, 2011 [cit. 2015-04-02]. Dostupné z: http://digilib.k.utb.cz/bitstream/handle/10563/18277/van%c4%8durov%c3%a1_2011_bp.zip?sequence=1&isAllowed=y. Bakalářská práce. UTB ve Zlíně.
- [9] KOLÁŘOVÁ, Edita. MATEMATIKA 2: Sbíрка úloh. [online]. [cit. 2015-11-30]. Dostupné z: <http://www.umat.feec.vutbr.cz/~kolara/bmadvanovaverze.pdf>
- [10] REKTORYS, Karel. *Přehled užití matematiky*. 7. vyd. Praha: Prometheus, 2000, xxxii, 720 s. Edice odborné literatury. ISBN 978-80-7196-180-2.
- [11] KLAŠKA, Jiří. *Cvičení z matematiky II, sbírka řešených úloh* [online]. 2002, 56 s.[cit. 2015-05-03]. Dostupné z: <http://www.ulozto.cz/xztNHPH/cviceni-z-matematiky-ii-resene-ulohy-rndr-jiri-klaska-pdf>

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

R	množina všech reálných čísel
R^2	dvourozměrný prostor reálných čísel
$O(A)$	okolí bodu A
H	Hessův determinant
df	diferenciál funkce f
$d^n f$	diferenciál n -tého řádu funkce f
f'_x	parciální derivace funkce podle x
$\frac{\partial f}{\partial x}$	parciální derivace funkce podle x
T_n	Taylorův polynom n -tého stupně
$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$	limita funkce f v bodě (a, b)

SEZNAM OBRÁZKŮ

<i>Obr. 1. Vytvoření funkce</i>	<i>22</i>
<i>Obr. 2. Podmínka pro testování, zda jsou koeficienty celá čísla</i>	<i>23</i>
<i>Obr. 3. Prohledávání koeficientů.....</i>	<i>24</i>
<i>Obr. 4. Začátek zdrojového kódu programu</i>	<i>29</i>
<i>Obr. 5. První podmínka</i>	<i>30</i>
<i>Obr. 6. Druhá podmínka.....</i>	<i>31</i>
<i>Obr. 7. Prohledávání koeficientů.....</i>	<i>32</i>

SEZNAM TABULEK

<i>Tab. 1. Nové příklady pro lokální extrémů funkce dvou proměnných – dosazovací metoda</i>	<i>24</i>
<i>Tab. 2. Získané úlohy z jiné metody pro výpočet stacionárních bodů</i>	<i>27</i>
<i>Tab. 3. Nové příklady pro lokální extrémů funkce dvou proměnných –výpočet stacionárních bodů pomocí kvadratické rovnice.....</i>	<i>32</i>
<i>Tab. 4. Nové příklady pro lokální extrémů funkce dvou proměnných – metoda rozkladu</i>	<i>38</i>
<i>Tab. 5. Totální diferenciál v bodě A – Příklad 1</i>	<i>44</i>
<i>Tab. 6. Totální diferenciál v bodě A – Příklad 2</i>	<i>45</i>
<i>Tab. 7. Totální diferenciál v bodě A – Příklad 3</i>	<i>45</i>
<i>Tab. 8. Totální diferenciál v bodě A – Příklad 4</i>	<i>46</i>
<i>Tab. 9. Totální diferenciál v bodě A – Příklad 5</i>	<i>46</i>
<i>Tab. 10. Taylorův polynom druhého stupně v bodě A – Příklad 1</i>	<i>48</i>
<i>Tab. 11. Taylorův polynom třetího stupně v bodě A – Příklad 1</i>	<i>48</i>
<i>Tab. 12. Taylorův polynom druhého stupně v bodě A – Příklad 2</i>	<i>49</i>
<i>Tab. 13. Taylorův polynom třetího stupně v bodě A – Příklad 2</i>	<i>50</i>
<i>Tab. 14. Taylorův polynom druhého stupně v bodě A – Příklad 3</i>	<i>51</i>
<i>Tab. 15. Taylorův polynom třetího stupně v bodě A – Příklad 3</i>	<i>52</i>
<i>Tab. 16. Taylorův polynom druhého stupně v bodě A – Příklad 4</i>	<i>53</i>
<i>Tab. 17. Taylorův polynom třetího stupně v bodě A – Příklad 4</i>	<i>53</i>
<i>Tab. 18. Taylorův polynom druhého stupně v bodě A – Příklad 5</i>	<i>54</i>
<i>Tab. 19. Taylorův polynom třetího stupně v bodě A – Příklad 5</i>	<i>54</i>

SEZNAM PŘÍLOH

Veškeré výsledky z příkladu $f(x, y) = ax^3 + bxy^2 + cx^2 + dy^2$ a také všechny vytvořené programy na vyhledávání snadno řešitelných úloh jsou umístěny na přiloženém CD.