Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta humanitních studií

Edukační přístupy k tematizaci okruhu – logika, množiny, relace v preprimárním a primárním vzdělávání

Kristína Ovary Bulková
Anna Tirpáková
Lubomír Sedláček

Zlín 2023

KATALOGIZACE V KNIZE - NÁRODNÍ KNIHOVNA ČR

Ovary Bulková, Kristína
Edukační přístupy k tematizaci okruhu - logika, množiny, relace v preprimárním a primárním vzdělávání / Kristína Ovary Bulková, Anna Tirpáková, Lubomír Sedláček. -- Vydání první. -- Zlín : Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2023. -- 1 online zdroj
Nad názvem: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, Fakulta humanitních studií. -- Obsahuje bibliografii

ISBN 978-80-7678-218-1 (online ; pdf)

* 51 * 510.633 * 510.22 * 37.016.026 * 373.2 * 373.3.016 * (075.8)
– matematika
– výroková logika
– teorie množin
– předmětová didaktika
– předškolní výchova
– učivo základních škol
– učebnice vysokých škol

510 - Obecné úvahy o matematice [13]
37.016 - Učební osnovy. Vyučovací předměty. Učebnice [22]

Recenzenti: prof. RNDr. Josef Molnár, CSc., prof. RNDr. Michal Munk, Ph.D

ISBN 978-80-7678-218-1

Úvod

Jedním ze základních záměrů vyučování matematiky na 1. stupni základních škol, a s tím související přípravou v předškolním vzdělávání, je budování pojmu přirozeného čísla. Právě pojem přirozeného čísla je velmi komplexní. Na to, aby žáci uvedený pojem správně pochopili, je potřebné poznat i další pomocné pojmy.

Učitel by měl ovládat základní pojmy teorie množin a logiky přinejmenším na intuitivní úrovni. Cílem této učebnice je prohloubit vědomosti budoucích učitelů v mateřské škole a budoucích učitelů na 1. stupni ZŠ z oblasti výrokové logiky a teorie množin.

Od čtenáře nevyžadujeme speciální matematické znalosti, cílem je podpořit a rozvíjet logické myšlení, které je nezbytné nejen v matematice, ale také v jiných vzdělávacích oborech nebo vyučovaných předmětech.

První tři kapitoly obsahují matematický základ výrokové logiky a teorie množin, které jsou potřebné pro pochopení úlohy rozvoje matematických představ u dětí předškolního a mladšího školního věku. V každé kapitole je vysvětlený matematický obsah doplněný o příklady s popsaným řešením a úlohami pro zopakování. Kapitola je zakončená cvičením pro upevnění učiva.

Poslední kapitola obsahuje metodické poznámky, vysvětlující aplikaci matematických vědomostí pro správný rozvoj matematického myšlení do tvorby aktivit a úloh v mateřské škole a na 1. stupni ZŠ.

Jak už bylo zmíněno, tyto pojmy můžeme chápat jako prostředek na budování poznatků o přirozených číslech a ne jako cíl vyučování. Pomocí poznatků, které souvisejí s pojmem množina, se systematicky a cílevědomě rozvíjejí matematické vědomosti žáků.

Myšlení žáků se rozvíjí také tím, že poznatky se osvojují na základě indukce a zobecňování, činnostmi, pokusem, logickou úvahou, deduktivním způsobem apod. Logické myšlení se rozvíjí také seznamováním se s některými prvky logiky bez používaní odborných termínů.

1. ZÁKLADNÍ POJMY VÝROKOVÉ LOGIKY

Logika (**výroková logika**) se zabývá studiem různých forem myšlení a vyjadřování a pravidly správného usuzování. Mezi základní pojmy výrokové logiky patří pojmy ***výrok***, ***pravdivostní hodnota výroku***, ***výroková formule*** a ***výroková forma***.

1.1 Matematický jazyk a symbolika

Matematický jazyk je množina všech matematických termínů a symbolů a konečná množina gramatických pravidel. **Matematické termíny** označují *matematické objekty*, operace s matematickými objekty a *vztahy mezi matematickými objekty*. **Matematickým objektem** se myslí prvek materiálu matematického myšlení; jednodušeji řečeno je to objekt, který je zkoumaný matematikou. Příkladem matematického objektu je číslo, čtverec, vektor, funkce, matice, souměrnost, tranzitivita apod.

Matematika bývá často nazývána **jazykem přírody**. Aby však mohla být matematika považovaná za jazyk, musí mít stanovený svůj komunikační systém, slovní zásobu, gramatiku, syntax a lidi, kteří ji používají a rozumějí jí. Obecně jazyk v sobě obsahuje následující komponenty:

- Musí existovat slovní zásoba slov nebo symbolů.
- Slovům a symbolům musí byt přiřazený význam.
- Jazyk využívá gramatiku, což je soubor pravidel, které naznačují, jak se používá slovní zásoba.
- Syntax organizuje symboly do liniových staveb nebo problémů.
- Vyprávění a diskurz se skládá z řetězců syntaktických výroků.
- Musí existovat (nebo existovala) skupina lidí, která používá symboly a rozumí jim.

Matematika splňuje všechny tyto požadavky. Symboly, jejich význam, syntax a gramatika jsou stejné na celém světě. Matematici, vědci a další používají matematiku na komunikaci konceptů. Matematika popisuje sebe (v oblasti nazývané meta-matematika), jevy z reálného světa a abstraktní pojmy.

Matematický slovník čerpá z různých abeced a obsahuje symboly, které jsou pro matematiku jedinečné. Každá matematická rovnice nebo každý matematický zápis se dá vyjádřit slovně tak, že se vytvoří věta s podstatným jménem a slovesem, stejně jako věta v mluveném jazyce. Například: $3 + 5 = 8$ se dá vyjádřit jako „Tři přidané k pěti se rovná osmi." Matematická gramatika a syntax jsou, podobně jako slovní zásoba, mezinárodně platné. Bez ohledu na to, ze které země pocházíte nebo jakým jazykem mluvíte, jsou struktura matematického jazyka a způsob, jakým se matematické zápisy formulují, stejné. Uveďme si postupně tuto strukturu ve třech důležitých bodech:

- Matematické zápisy čteme zleva doprava.
- Parametry a proměnné vyjadřujeme písmeny hlavně latinské abecedy, ale v určitých případech jsou některé proměnné, ale i konkrétní pojmy vyjádřené písmeny řecké abecedy, například hustotu písmenem ϱ.
- Závorky používáme pro určení pořadí, ve kterém jednotlivé matematické operace provádíme, jinak řečeno, ve kterém matematické objekty navzájem interagují.

Pochopení toho, jak fungují matematické věty, je užitečné při vyučování nebo učení se matematice. Studenti často považují čísla, ale hlavně symboly a parametry jako zastrašující prvky, a právě uvedení rovnic do známého jazyka umožní, aby byl předmět přístupnější. V zásadě je to jako překlad cizího jazyka do jazyka známého. Extrahování podstatných jmen, sloves a modifikátorů z mluveného / psaného jazyka a jejich překlad do matematické rovnice je cennou zručností. Slovní úlohy tak zlepšují porozumění a zvyšují zručnosti při řešení problémů.

A jak již bylo zmíněno dříve, matematika je stejná na celém světě a může působit jako univerzální jazyk. Vzorec, rovnice nebo jiné vyjádření má stejný význam bez ohledu na jiný jazyk. Matematika tímto způsobem pomáhá lidem učit se a komunikovat, i když existují další komunikační bariéry.

1.2 Výrok

Výrokem rozumíme každou oznamovací větu, pro kterou může nastat jenom jedna z možností – může být pravdivá nebo nepravdivá.

Každý výrok má tedy svou pravdivostní hodnotu. Za výroky nepovažujeme nadpisy, rozkazovací a tázací věty, ale také oznamovací věty, které nejsou úplné nebo jsou nejasně formulované. Jinak řečeno, za výroky považujeme jenom taková srozumitelná tvrzení, která můžeme z hlediska pravdivosti ohodnotit.

Pravdivostní hodnotu výroku můžeme definovat jako znak pro označení dvou možných kvalit výroku: „pravdy“ (1) nebo „nepravdy“ (0).

Na základě příslušných „kvalit“ přiřazujeme výrokům jejich pravdivostní hodnotu. Tedy pravdivý výrok má pravdivostní hodnotu „pravda“ – označujeme 1 a nepravdivý výrok má pravdivostní hodnotu „nepravda“ – označujeme 0.

Výroky budeme označovat malým písmem latinské abecedy: a, b, c, …, p, q, r, …, x, y, z.

Následující příklady jsou ukázky oznamovacích vět, které jsou výroky a tedy je možné jim přiřadit pravdivostní hodnotu.

Příklad 1.1. Jsou uvedeny následující výroky:

- a: „Číslo 4 je dělitelné dvěma.“,
- b: „Pro libovolná reálná čísla a, b platí: $a + b = b + a$.“,
- c: „$1 > 7$.“,
- d: „Zlín je hlavní město České republiky.“,
- e: „Ve vesmíru existuje život mimo Sluneční soustavu.“.

Pro první dva výroky a, b platí, že jsou pravdivé, zatímco další dva výroky c, d jsou nepravdivé. I když výrok c je ve formě matematického zápisu, stále splňuje podmínky výroku. Tento zápis totiž představuje oznamovací větu s konkrétními údaji: „Číslo 1 je větší jako 7.“. To, že jsou v zápise uvedeny konkrétní hodnoty, je podstatné pro určení pravdivostní hodnoty výroku. Tvrzení e je podle definice výrok, ale zatím nemůžeme rozhodnout o jeho pravdivosti. Výroky, u nichž neumíme v daném okamžiku jednoznačně rozhodnout, zda jsou pravdivé nebo nepravdivé, avšak v zásadě jedna z obou těchto možností musí nastat, se nazývají **hypotézy**.

U dalšího příkladu uvedeme ukázky takových oznamovacích vět, resp. tvrzení, které nejsou výroky.

Příklad 1.2. Následující tvrzení nejsou výroky:

- f: „Přímky p, q jsou rovnoběžné.“,
- g: „Prší.“,
- h: „Přirozené číslo x je dělitelné pěti.“.

Abychom mohli tato tvrzení označit jako výroky, bylo by je potřeba doplnit o několik informací. Ukázka g nekonkretizuje místo nebo čas k tomu, abychom dokázali určit pravdivost tvrzení. Při ukázkách f a h se může zdát, že se jedná o výroky. Ale zkusme si položit následující otázky: O jaké dvě přímky p, q v rovině se jedná, a o jaké přirozené číslo? Hovoříme o všech dvojicích přímek v rovině? Existují totiž přímky, ve druhém případě přirozená čísla, pro která je toto tvrzení pravdivé, ale i přímky, nebo přirozená čísla, pro která je tvrzení nepravdivé.

Úloha 1.1. U následujících tvrzení určete, zda se jedná o výrok. Pokud ano, určete jeho pravdivostní hodnotu. V případě, že tvrzení není výrokem, odůvodněte proč.

a) Součet dvou sudých čísel je taky sudé číslo.
b) Kolik je hodin?
c) Dnes venku prší.
d) Číslo 4 je dělitelné třemi.
e) Město, kde bydlím.
f) Čtverec má 4 strany různých délek.
g) Pozor!

Řešení: *a) pravdivý výrok; b) není výrok – tázací věta; c) výrok, ale jeho pravdivost posuďte sami; d) nepravdivý výrok; e) není výrok – neúplná věta; f) nepravdivý výrok; g) není výrok – rozkazovací věta.*

1.3 Složený výrok a výroková formule

V dané podkapitole představíme čtyři logické spojky, které jsou označované jako binární logické operace. Spojují totiž dva jednoduché výroky, které budeme nazývat **elementární výroky**.

Při spojování jednoduchých (elementárních) výroků používáme následující binární logické spojky (tzv. operátory výrokové logiky):

$$\begin{array}{ccl} \wedge & - & \text{konjunkce,} \\ \vee & - & \text{disjunkce,} \\ \Rightarrow & - & \text{implikace,} \\ \Leftrightarrow & - & \text{ekvivalence.} \end{array}$$

Jestli p, q jsou výroky, pak pomocí logických spojek (tzv. operátorů výrokové logiky) je možné vytvářet nové výroky, tzv. **složené výroky**.

Základní složené výroky vytvořené pomocí uvedených spojek jsou:
a) konjunkce výroků p, q: zapisujeme $p \wedge q$, čteme „p a q“ resp. „p a zároveň q“,
b) disjunkce výroků p, q: zapisujeme $p \vee q$, čteme „p nebo q“,
c) implikace výroků p, q: zapisujeme $p \Rightarrow q$, čteme „p implikuje q“, resp. „z p vyplývá q“, resp. „jestliže platí p, potom platí i q“,
d) ekvivalence výroků p, q: zapisujeme $p \Leftrightarrow q$, čteme „p je ekvivalentní s q“, resp. „p právě tehdy, když q“, resp. „p tehdy a jen tehdy, když q“.

Pro každou z binárních logických spojek uvedeme příklad složeného výroku, který vytvoříme z elementárních výroků

p: „Venku dnes prší.“ q: „Škola začíná v 8.00 ráno.“

a popsaných logických spojek.

Příklad 1.3. Složený výrok vytvořený pomocí logické spojky konjunkce zapíšeme a čteme:

$p \wedge q$: „Venku dnes prší a škola začíná v 8.00 ráno.“
„Venku dnes prší a zároveň škola začíná v 8.00 ráno.“

Příklad 1.4. Složený výrok vytvořený pomocí logické spojky disjunkce zapíšeme a čteme:

$p \vee q$: „Venku dnes prší nebo škola začíná v 8.00 ráno.“

Poznámka 1.1. V matematice má logická spojka „nebo“ poněkud odlišný význam jako v běžné komunikaci. Rozdíl je v tom, že v rámci výrokové logiky nemá logická spojka disjunkce vylučovací význam. Uvažujme například složený výrok $a \vee b$: „Přijde Jana nebo Viktorie.“ (resp. „Přijde Jana nebo přijde Viktorie.“). V hovorové komunikaci to může být chápáno jako, že přijde jen jedna ze jmenovaných. Když ale budeme hovořit o disjunkci ve výrokové logice, spojka „nebo“ nebude chápaná ve vylučovacím významu. Ve výrokové logice tak můžou platit oba elementární výroky, ze kterých je disjunkce složená. Tedy přijde jedna ze jmenovaných, ale také se může stát, že přijdou obě.

Poznámka 1.2. V odborné literatuře se můžeme setkat i s tzv. „ostrou disjunkcí“, která má právě tento vylučovací charakter.

Příklad 1.5. Složený výrok vytvořený pomocí logické spojky implikace zapíšeme a čteme:

$p \Rightarrow q$: „Jestliže venku dnes prší, pak škola začíná v 8.00 ráno.“

Poznámka 1.3. Implikace je jedinou z binárních logických spojek, u které je potřeba brát v úvahu pořadí položených elementárních výroků. Uvažujme složený výrok $p \Rightarrow q$ z předcházejícího příkladu. Levá část, tedy elementární výrok p, představuje podmiňující část implikace a pravá část, tedy elementární výrok q, je podmíněnou částí implikace. V případě, že vyměníme pořadí elementárních výroků, dostaneme následující složený výrok:

$p \Rightarrow q$: „Jestliže škola začíná v 8.00 ráno, pak venku dnes prší.“

Příklad 1.6. Složený výrok vytvořený pomocí logické spojky ekvivalence zapíšeme a čteme:

$p \Leftrightarrow q$: „Venku dnes prší právě tehdy, když škola začíná v 8.00 ráno.“

Úloha 1.2. Nechť jsou dány elementární výroky x, y, z:

- x: „Autobus stojí na každé zastávce.“,
- y: „Zastávky mimo centrum jsou na znamení.“,
- z: „Vystupující zazvoní na řidiče.“.

Slovně zformulujte složené výroky:

a) $x \vee y$,
b) $y \Rightarrow z$,
c) $x \Leftrightarrow z$,
d) $z \wedge x$.

Řešení: *a) $x \vee y$: „Autobus stojí na každé zastávce nebo zastávky mimo centrum jsou na znamení.“; b) $y \Rightarrow z$: „Jestli zastávky mimo centrum jsou na znamení, pak vystupující zazvoní na řidiče.“; c) $x \Leftrightarrow z$: „Autobus stojí na každé zastávce právě tehdy, když vystupující zazvoní na řidiče.“; d) $z \wedge x$: „Vystupující zazvoní na řidiče a autobus stojí na každé zastávce.“*

Nechť p, q v zápisech složených výroků $p \vee q$, $p \wedge q$, $p \Rightarrow q$ a $p \Leftrightarrow q$ nepředstavují konkrétní výroky. Uvažujme, že p, q mohou zastupovat libovolné výroky, které mohou být pravdivé, nebo nepravdivé. Potom p, q označujeme jako **výrokové proměnné** a zápisy $p \vee q$, $p \wedge q$, $p \Rightarrow q$ a $p \Leftrightarrow q$ jsou příklady tzv. **výrokových formulí**.

Výroková formule představuje zápis, který obsahuje *výrokové proměnné*, *logické spojky* a případně *závorky*, přičemž po dosazení libovolných výroků za výrokové proměnné dostaneme výrok.

Příklad 1.7. Výrokovými formulemi jsou například následující zápisy:

a) $(x \Rightarrow y) \vee z$,
b) $(a \vee b) \Leftrightarrow (b \vee a)$.

Za výrokovou formuli není možné považovat následující zápisy:

c) $x \Rightarrow$,
d) $\wedge b$,
e) $p \wedge q \vee r$.

Závorky ve výrokových formulích mají důležitou roli, protože určují – stejně jako i v jiných oblastech v matematice – pořadí operací. Logické spojky zastupují operace ve výrokové logice.

1.4 Negace výroků a výrokových formulí

V předcházející podkapitole jsme zavedli čtyři binární logické spojky: konjunkci, disjunkci, implikaci a ekvivalenci. Tyto logické spojky označujeme jako binární, protože jejich použitím spojujeme vždy dvě výrokové proměnné. Existuje však ještě logická spojka negace, k jejímuž použití nám postačuje jedna výroková proměnná. Z tohoto důvodu je negace označovaná jako unární logická spojka.

Negace výroku představuje tvrzení, které popírá původní výrok a tedy mění jeho pravdivostní hodnotu. Použití negace jako unární logické spojky označujeme apostrofem nad danou výrokovou proměnnou nebo výrokovou formulí (ozn.$'$)

Poznámka 1.4. Výrokovou formuli $p \wedge q$ (jako i jiné další s využitím dalších binárních logických spojek) můžeme negovat $(p \wedge q)'$. Je-li p je výroková proměnná, pak negaci výrokové proměnné p' považujeme také za výrokovou formuli.

V následujících příkladech postupně ukážeme, jak můžeme negaci použít na elementární výroky a výrokové formule.

Příklad 1.8. Utvořme negaci z daných elementárních výroků:

- p: „Venku dnes prší.“ ,
- q: „Škola začíná v 8.00 ráno.“ .

Negaci můžeme vytvořit dvěma způsoby:

- Formálně (triviálně): použitím slovního spojení „*Není pravda, že platí ...*“ před daný elementární výrok. Při označení výrokových proměnných můžeme taktéž používat slovní spojení „*Neplatí* p.“, resp. „p *negované*“.
- Konstruktivně: přeformulováním elementárního výroku tak, abychom změnili jeho pravdivostní hodnotu, ale nezměnili podstatu tvrzení.

V našem případě budeme používat konstruktivní způsob negace. Při negaci elementárních výroků postačuje přidat před sloveso ve větě předponu *ne–*.

p: „Venku dnes prší.“	p': „Venku dnes neprší.“
q: „Škola začíná v 8.00 ráno.“	q': „Škola nezačíná v 8.00 ráno.“

Příklad 1.9. V tabulce 1.1 jsou v levém sloupci čtyři elementární výroky: a, b, c, d. V sloupci napravo jsou uvedeny jejich negace. Jako první (v šedém odstínu) je uvedena triviální negace elementárního výroku. Pod ní je uvedena negace konstruktivní, na kterou se budeme zaměřovat.

Elementární výrok	Negace elementárního výroku
a: „Zlín je hlavním městem České republiky.“	a': „Není pravda, že Zlín je hlavním městem České republiky.“ a': „Zlín není hlavním městem České republiky.“
b : „$2 + 2 = 4$“	b': „Není pravda, že $2 + 2 = 4$.“ b': „$2 + 2 \neq 4$“
c: „Venku nesvítí slunce.“	c': „Není pravda, že venku nesvítí slunce.“ c': „Venku svítí slunce.“
d: „$4 < 3$“	d': „Není pravda, že $4 < 3$.“ d': „$4 \geq 3$“

Tab. 1.1: Ukázka triviální a konstruktivní negace z příkladu 1.9

Výroky a, c představují oznamovací věty, při kterých postačuje změnit jenom přísudek. Výroky b, d jsou vyjádřeny matematicky, kde je při jejich negaci potřebné rozlišit, které symboly zastupují právě přísudek (sloveso) oznamovací věty. Uvažujme například výrok

b: „Dva plus dva <u>se rovná</u> čtyřem.“.

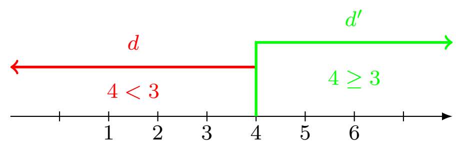
Negaci vyslovíme takto:

b': „Dva plus dva se nerovná čtyřem.“.

Při negaci výroku

d: „Čtyři je menší než tři.“

se negace vztahuje na slovo „menší“. Z tohoto důvodu při negaci elementárního výroku d použijeme slovní spojení „větší nebo rovno“. Pro názornost je situace ilustrována na obrázku 1.1.



Obr. 1.1: Grafické zobrazení slovní konstruktivní negace z příkladu 1.9

Příklad 1.10. Nechť jsou dané elementární výroky p: „Přijde Petr.“ a q: „Přijde Pavel.“. Zapište pomocí matematické symboliky složené výroky:
- v: „Z dvojice přátel Petr a Pavel přijde nejvýše jeden.“,
- u: „Pavel nepřijde bez Petra.“.

Řešení: Jednotlivé výroky přeformulujeme tak, aby byl jejich matematický zápis jasný. První ukázka uvádí, že přijde jeden z dvojice přátel nebo nikdo. Můžeme to přeformulovat následovně: „Přijde Petr a Pavel nepřijde nebo Petr nepřijde a Pavel přijde nebo Petr nepřijde a Pavel nepřijde“. Takhle formulovaný výrok můžeme prostřednictvím matematické symboliky zapsat následovně:

$$v: \text{„}(p \wedge q') \vee (p' \wedge q) \vee (p' \wedge q')\text{“}.$$

Přeformulujme si taktéž složený výrok u tak, abychom mohli jasně určit jeho matematický zápis. Tedy u: Jestliže nepřijde Petr, pak nepřijde ani Pavel. Použitím matematické symboliky složený výrok u můžeme zapsat následovně:

$$u: \text{„}p' \Rightarrow q'\text{“}.$$

Úloha 1.3. Utvořte negace následujících výroků:
- p: „Baťův mrakodrap je nejvyšší stavbou ve městě.“,
- q: „Pes nepatří mezi býložravce.“,
- r: „V novinách není článek, o kterém jsi hovořil.“,
- s: „$3 \cdot 6 = 18$.“,
- t: „$4 \leq 1$.“.

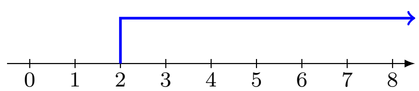
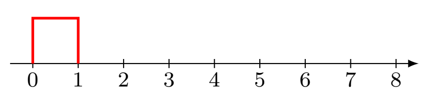
Řešení: *p': „Baťův mrakodrap není nejvyšší stavbou ve městě.“; q': „Pes patří mezi býložravce.“; r': „V novinách je článek, o kterém jsi hovořil.“; s': „$3 \cdot 6 \neq 18$.“; t': „$4 > 1$.“*

Úloha 1.4. Nechť jsou dané následující elementární výroky p: „Přijde Petr.“ a q: „Přijde Pavel.“. Zapište prostřednictvím matematické symboliky a slovně zformulujte následující složené výroky:

$a)$ Petr přijde, ale Pavel nepřijde.
$b)$ Oba nepřijdou.
$c)$ Pavel přijde, když Petr nepřijde.
$d)$ Alespoň jeden nepřijde.
$e)$ Nikdo nepřijde.
$f)$ Z dvojice přátel Petr a Pavel přijde právě jeden.

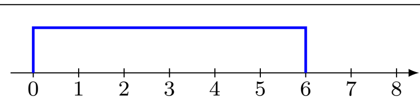
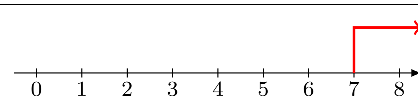
Řešení: *a)* $p \wedge q'$*: „Petr přijde a zároveň Pavel nepřijde.“; b)* $p' \wedge q'$*: „Petr nepřijde a Pavel nepřijde.“; c)* $p' \Rightarrow q$*: „Jestliže nepřijde Petr, pak Pavel přijde.“; d)* $p' \vee q'$*: „Nepřijde Petr nebo nepřijde Pavel.“; e)* $p' \wedge q'$*: „Petr nepřijde a Pavel nepřijde.“; f)* $(p \wedge q') \vee (p' \wedge q)$*: „Přijde Petr a Pavel nepřijde nebo Petr nepřijde a Pavel přijde.“*

Příklad 1.11. Na obrázcích 1.2 – 1.4 jsou graficky znázorněny negace výroků, které jsou definovány na číselných množinách.

výrok v	**negace výroku** v'
Alespoň dva studenti vyřešili zadaný test.	Nejvýše jeden student vyřešil zadaný test.
	

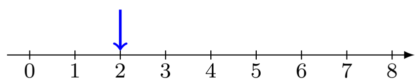
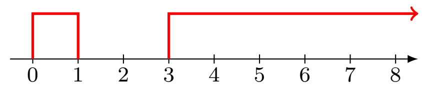
Obr. 1.2: Grafické znázornění výroku v a jeho negace z příkladu 1.11

Počet objektů, tedy studentů, kteří vyřešili zadaný test, je v daném výroku v „alespoň dva“. Je potřebné si uvědomit, co tohle vyjádření počtu znamená. Když test vyřešili alespoň dva studenti, znamená to, že ho vyřešili dva studenti nebo více. Negace výroku v musí pokrývat všechny ostatní možnosti, tedy že test vyřešil jeden student nebo žádný.

výrok w	**negace výroku** w'
Malíř ve svém novém uměleckém díle použil nejvýše 6 barev.	Malíř ve svém novém uměleckém díle použil nejméně sedm barev.
	

Obr. 1.3: Grafické znázornění výroku w a jeho negace z příkladu 1.11

Podobně jako v předchozím případě, graficky znázorníme početnost původního výroku w. Malíř použil ve svém díle šest barev nebo méně. Tedy negace bude pokrývat ostatní možnosti, tj. použil jich sedm nebo více.

výrok y	**negace výroku** y'
Zadaná rovnice má právě dvě řešení.	Rovnice má nejvýše jedno, nebo alespoň tři řešení.
	

Obr. 1.4: Grafické znázornění výroku y a jeho negace z příkladu 1.11

Jestliže výrok y představuje přesně daný počet, pak jeho negace y' bude obsahovat všechna ostatní čísla kromě právě toho daného počtu. Tedy negaci vyjádříme následovně: Rovnice má nejvýše jedno, nebo alespoň tři řešení.

Ve výrokové logice existují různá speciální pravidla pro negaci výrokových formulí. Jedním z nich jsou tzv. de Morganova pravidla.

Negace konjunkce a disjunkce dostaneme použitím **de Morganových pravidel**:

$$(a \wedge b)' \Leftrightarrow {}^{1}(a' \vee b')$$
$$(a \vee b)' \Leftrightarrow (a' \wedge b')$$

Příklad 1.12. Použití de Morganových pravidel pro negaci výrokových formulí konjunkce a disjunkce ukážeme na následujícím příkladu. Použijeme již předtím použité elementární výroky p: „Přijde Petr.“, q: „Přijde Pavel.“ a jejich negace p': „Petr nepřijde.“, q': „Pavel nepřijde.“.

- Konjunkce: $p \wedge q$: „Přijde Petr a přijde Pavel.“ („Přijde Petr i Pavel.“)
- Negace konjunkce: $(p \wedge q)' \sim p' \vee q'$: „Petr nepřijde nebo nepřijde Pavel.“
- Disjunkce: $p \vee q$: „Přijde Petr nebo (přijde) Pavel.“
- Negace disjunkce: $(p \vee q)' \sim p' \wedge q'$: „Petr nepřijde a Pavel nepřijde.“ („Nepřijde Petr ani Pavel.“)

Při negaci implikace a ekvivalence je potřebné postupovat ve dvou krocích. Nejdříve použijeme pravidla **pro implikaci a pro ekvivalenci**:

Obměna implikace: $(a \Rightarrow b) \sim (a' \vee b)$
Obměna ekvivalence: $(a \Leftrightarrow b) \sim (a \wedge b) \vee (a' \wedge b')$

Příklad 1.13. Opět použijeme elementární výroky z předchozího příkladu p, q. V našem případě jsou implikace a ekvivalence a jejich negace definovány takto:

- Implikace: $p \Rightarrow q$: „Jestliže přijde Petr, pak přijde (také) Pavel.“
- Negace implikace: $(p \Rightarrow q)'$: „Petr přijde a zároveň Pavel nepřijde.“
- Ekvivalence: $p \Leftrightarrow q$: „Petr přijde právě tehdy, když přijde Pavel.“
- Negace ekvivalence: $(p \Leftrightarrow q)'$: „Petr a Pavel přijdou nebo nepřijde ani jeden z nich.“

[1] Symbolika se v různých matematických disciplínách může lišit. Matematický symbol „$\sim$“ představuje ve výrokové logice relaci rovnosti, resp. totožnosti a budeme jej dále užívat ve smyslu ekvivalence.

Příklad 1.14. Vytvořme negace výrokových formulí:

a) a: „Mám mladší sestru a staršího bratra.“,
b) b: „Budu se učit nebo půjdu do knihovny.“,
c) c: „Jestliže přijdeš dnes ke mně domů, podíváme se na film.“,
d) d: „Publikum tleskalo právě tehdy, když skončilo vystoupení.“.

Řešení:

- a: „Mám mladší sestru a staršího bratra.“

Uvedená výroková formule je konjunkcí, která spojuje dva elementární výroky: „Mám mladší sestru.“, „Mám staršího bratra.“. Pro negaci dané výrokové formule využijeme de Morganovo pravidlo. Nejdřív vytvoříme negaci jednotlivých elementárních výroků, ale nesmí se zapomenout změnit i logickou spojku. Tedy v našem případě vyměníme konjunkci za disjunkci. Negace výrokové formule a zní:

a': „Nemám mladší sestru nebo nemám staršího bratra.“.

- b: „Budu se učit nebo půjdu do knihovny.“

Podobně jako v předcházející ukázce použijeme de Morganovo pravidlo. Elementární výroky „Budu se učit.“, „Půjdu do knihovny.“ znegujeme a znovu změníme i logickou spojku:

b': „Nebudu se učit a (ani) nepůjdu do knihovny.“.

- c: „Jestliže přijdeš dnes ke mně domů, podíváme se na film.“

Výroková formule představuje implikaci dvou elementárních výroků: „Dnes přijdeš ke mně domů.“ a „Podíváme se na film.“. Pro negaci implikace použijeme následující vztah:

$$\boxed{\text{Negace implikace: } (a \Rightarrow b)' \sim a \wedge b'}$$

Uvedený vztah odvodíme ve dvou krocích. Prvním je obměna implikace na disjunkci elementárních výroků a druhým krokem je de Morganovo pravidlo pro negaci disjunkce. Použitím daného vztahu vyslovíme negaci výrokové formule c takto:

c': „Dnes jdeme ke mně domů a nepodíváme se na film.“.

- d: „Publikum tleskalo právě tehdy, když skončilo vystoupení.“

Pro negaci ekvivalence použijeme následující vztah:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Negace ekvivalence můžeme vyjádřit následovně:}\\ (a \Leftrightarrow b)' \sim (a' \vee b') \wedge (a \vee b)\end{array}}$$

Uvedený vztah platí opět použitím dvou kroků. Prvním je obměna ekvivalence na výrokovou formuli, která obsahuje jenom konjunkci a disjunkci elementárních výroků a druhým krokem použití de Morganova pravidla. Vzhledem k uvedenému vztahu vyslovíme negaci výrokové formule d následovně:

d': „Publikum netleskalo nebo vystoupení neskončilo a zároveň publikum tleskalo nebo vystoupení skončilo.“.

Úloha 1.5. Následující výrokové formule zapište použitím matematické symboliky a utvořte jejich negace:

a) Karel má kalkulačku, ale nemá pero.
b) V neděli půjdeme do kina nebo do divadla.
c) Půjdeme do obchodu nebo nepůjdu ven.
d) Jestliže bude cesta bez zdržení, přijdeme včas.
e) Petr nepřijde nebo mu nefunguje telefon.
f) Koupím svému děvčeti květiny tehdy, když ji pozvu na oběd.
g) Když zatelefonuješ včas, povím ti to.
h) Jestliže Petra nedokončila svou práci, odešla domů.

Řešení: *a) $a \wedge b'$, negace: Karel nemá kalkulačku nebo má pero.; b) $a \vee b$, negace: V neděli nepůjdeme do kina ani do divadla.; c) $a \vee b'$, Nepůjdeme do obchodu a půjdu ven.; d) $a \Rightarrow b$, negace: Cesta bude bez zdržení a nepřijdeme včas.; e) $a' \vee b'$, negace: Petr přijde a telefon mu funguje.; f) $a \Leftrightarrow b$, negace: Nekoupím svému děvčeti květiny nebo ji nepozvu na oběd a zároveň jí koupím květiny nebo ji pozvu na oběd.; g) $a \Rightarrow b$, negace: Zatelefonuješ včas a já ti to nepovím.; h) $a' \Rightarrow b$, negace: Petra práci nedokončila a neodešla domů.*

Úloha 1.6. Utvořte negace následujících implikací:

a) $3 \cdot 5 = 10 \Rightarrow 4 \cdot 5 = 20$,
b) $3 \cdot 5 = 15 \Rightarrow 4 \cdot 5 \neq 20$,
c) $3 \cdot 5 > 10 \Rightarrow 4 \cdot 5 < 20$.

Řešení: *a) $3 \cdot 5 = 10 \wedge 4 \cdot 5 \neq 20$; b) $3 \cdot 5 = 15 \wedge 4 \cdot 5 = 20$; c) $3 \cdot 5 > 10 \wedge 4 \cdot 5 \geq 20$.*

1.5 Pravdivostní hodnoty výrokových formulí

Jak již bylo dříve uvedeno, výroková formule se skládá z výrokových proměnných, logických spojek a závorek. Po dosazení libovolných výroků za výrokové proměnné dostaneme výrok. Pokud rozhodneme o pravdivosti výroku, můžeme mu přiřadit jeho pravdivostní hodnotu. Potom i výrokové formuli můžeme přiřadit pravdivostní hodnotu. **Zda je výroková formule pravdivá, nebo nepravdivá, závisí na pravdivostních hodnotách jednotlivých elementárních výroků**. Pravdivostní hodnoty složených výroků zapisujeme do tzv. **tabulky pravdivostních hodnot** (tab. 1.2).

Elementární výroky		Konjunkce	Disjunkce	Implikace	Ekvivalence	Negace
p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	p'
1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	0	1	1	1

Tab. 1.2: Pravdivostní hodnoty výrokových formulí

V tabulce 1.2 proměnné p, q představují libovolné elementární výroky, které mohou být pravdivé, nebo nepravdivé. V tabulce jsou uvedeny všechny čtyři možnosti, kdy jsou oba elementární výroky pravdivé, nebo jeden z nich je pravdivý a jeden nepravdivý, nebo oba jsou nepravdivé. Z tabulky 1.2 můžeme vyčíst, že:

a) konjunkce $p \wedge q$ elementárních výroků p, q je pravdivá tehdy, když jsou pravdivé i oba elementární výroky p, q;
b) disjunkce $p \vee q$ elementárních výroků p, q je pravdivá tehdy, když je pravdivý alespoň jeden z výroků p, q a také v případě, že jsou pravdivé oba;
c) implikace $p \Rightarrow q$ elementárních výroků p, q je nepravdivá jenom v jediném případě, a to když podmiňující elementární výrok p je pravdivý a elementární výrok q z něj vyplývající je nepravdivý;
d) ekvivalence $p \Leftrightarrow q$ elementárních výroků p, q je pravdivá tehdy, když mají elementární výroky p, q stejnou pravdivostní hodnotu, tudíž jsou oba výroky pravdivé, nebo jsou oba výroky nepravdivé;
e) při negaci se mění pravdivostní hodnota elementárního výroku p, tzn. že když je elementární výrok p pravdivý, pak jeho negace p' je nepravdivý výrok.

Pokud je elementární výrok nebo výroková formule pravdivá, je jim přiřazená pravdivostní hodnota 1. Naopak, v případě, že elementární výrok nebo výroková formule jsou nepravdivé, je jim přiřazená pravdivostní hodnota označením 0.

Pomocí tzv. **tabulky pravdivostních hodnot** výrokové formule je možné zjistit, pro které pravdivostní hodnoty výrokových proměnných vznikne z výrokové formule pravdivý (resp. nepravdivý) výrok. Tenhle proces se nazývá **pravdivostní ohodnocení výrokové formule**.

Příklad 1.15. Uvažujme výrokovou formuli: „Jestliže je přirozené číslo x dělitelné osmi, pak je dělitelné i dvěma.“. Jedná se o implikaci $p \Rightarrow q$ elementárních výroků p, q, kde p: „Přirozené číslo x je dělitelné osmi.“ a q: „Dané přirozené číslo x je dělitelné dvěma.“. Je zřejmé, že uvažovaná výroková formule je pravdivá. Zkusme však za proměnnou x dosadit různá přirozená čísla a zjistíme, jestli bude daná výroková formule pravdivá v každém případě. Mohou nastat následující tři možnosti.

- Za proměnnou x dosadíme číslo, které je násobkem čísla 8 (například 8, 16, 24, ...), takové číslo je dělitelné osmi a také dvěma. Dostáváme tedy implikaci, kde jsou přiděleny pravdivostní hodnoty $1 \Rightarrow 1$, která nám dává pravdivou výrokovou formuli.

- Za proměnnou x dosadíme sudé číslo, které není násobkem čísla 8 (například 2, 4, 6, 10, 12, 14, 18, ...). Takové číslo není dělitelné osmi, ale je dělitelné dvěma. V tomto případě dostaneme implikaci $0 \Rightarrow 1$, která je také pravdivou výrokovou formulí.

- Za proměnou x dosadíme libovolné jiné číslo (tedy libovolné liché číslo), které není dělitelné osmi ani dvěma, jde o implikaci typu $0 \Rightarrow 0$, která je také pravdivou výrokovou formulí.

Příklad 1.16. Ukážeme si, jak zkonstruovat tabulku pravdivostního ohodnocení následující výrokové formule: $(p' \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q')$. Pro zjednodušení zápisu si můžeme jednotlivé části ekvivalence označit jako výrokovou formuli A, levá část ekvivalence, a výrokovou formuli B, pravá část ekvivalence (obr. 1.5):

$$\underbrace{(p' \Rightarrow q)}_{A} \Leftrightarrow \underbrace{(p \Rightarrow q')}_{B}$$

Obr. 1.5: Ukázka rozdělení výrokové formule pro zjednodušení zápisu

Základem tabulky pravdivostních hodnot je vyplnit v tabulce všechny možnosti, které nám pro pravdivostní hodnoty elementárních výroků můžou nastat. Do tabulky uvedeme všechny kombinace pravdivostních hodnot elementárních výroků. V dané výrokové formuli jsou dvě výrokové proměnné, tedy mohou nastat čtyři možnosti.

p	q
1	1
1	0
0	1
0	0

Poznámka 1.5. Počet všech možností se přirozeně odvíjí od počtu proměnných ve výrokové formuli. Čím víc výrokových proměnných výroková formule obsahuje, tím je počet řádků v tabulce pravdivostních hodnot vyšší.

Začneme postupnými kroky ověřovat pravdivostní hodnoty jednotlivých částí výrokové formule. Vidíme, že v zápisu výrokové formule se nacházejí negace proměnných: $(p' \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q')$. Jednotlivé kroky budeme zapisovat do dalších sloupců tabulky pravdivostního ohodnocení.

p	q	p'	q'
1	1	0	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	0	1	1

Nyní můžeme postupně získávat pravdivostní hodnoty jednotlivých částí výrokové formule. Při určovaní pravdivostních hodnot různých i složitějších výrokových formulí budeme vycházet z tabulky pravdivostních hodnot složených výroků a z nich vyplývajících pravidel (tab. 1.2).

Implikujeme 3. sloupec se sloupcem 2. **A**

p	q	p'	q'	$p' \Rightarrow q$
1	1	0	0	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	1	0

Tab. 1.3: Pravdivostní ohodnocení pro implikaci **A** výrokové formule z příkladu 1.16

Začneme s levou částí výrokové formule $(p' \Rightarrow q)$. Jedná se o implikaci dvou elementárních výroků, u nichž je potřebné dodržet směr, ve kterém budeme porovnávat sloupce, třetí sloupec implikujeme se sloupcem druhým (tab. 1.3). Daná implikace je nepravdivá jenom v posledním čtvrtém řádku, kde p' má pravdivostní hodnu 1 a q má pravdivostní hodnotu 0 $(1 \Rightarrow 0)$.

Stejným způsobem získáme pravdivostní hodnotu pravé části výrokové formule $(p \Rightarrow q')$. Jak je znázorněno v tabulce 1.4, v daném případě bude výroková formule nepravdivá v prvním řádku, protože zde má implikace směr prvního a čtvrtého sloupce, výroková proměnná p pravdivostní hodnotu 1 a q' má pravdivostní hodnotu 0 (opět dostáváme $1 \Rightarrow 0$).

Implikujeme
1. sloupec se 4. **A** **B**

p	q	p'	q'	$p' \Rightarrow q$	$p \Rightarrow q'$
1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	0	1

Tab. 1.4: Pravdivostní ohodnocení implikace **B** pro výrokovou formuli z příkladu 1.16

V posledním kroku ověříme pravdivostní hodnoty pátého a šestého sloupce na základě ekvivalence, která je spojuje $(p' \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q')$.

Ekvivalenci máme
mezi 5. a 6. sloupcem $\mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{B}$

p	q	p'	q'	$p' \Rightarrow q$	$p \Rightarrow q'$	$(p' \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q')$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	0

Tab. 1.5: Pravdivostní ohodnocení výrokové formule z příkladu 1.16

Logická spojka ekvivalence je pravdivá jenom v případě, že oba výroky v ekvivalenci mají stejnou pravdivostní hodnotu. Sedmý sloupec tabulky pravdivostních hodnot ukazuje pravdivostní ohodnocení zadané výrokové formule. Výroková formule $(p' \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q')$ se stane pravdivým výrokem, jestli za dvojici proměnných (p, q) dosadíme výroky s pravdivostními hodnotami $(1, 0)$ nebo $(0, 1)$.

Příklad 1.17. Ukažme si pravdivostní ohodnocení výrokové formule

$$(p \vee q)' \Leftrightarrow (p' \wedge q').$$

Řešení:

Z tabulky pravdivostního ohodnocení zadané výrokové formule $(p \vee q)' \Leftrightarrow (p' \wedge q')$ (tab. 1.6) vyplývá, že po dosazení libovolných výroků za proměnné p, q dostaneme **vždy pravdivý výrok**.

p	q	p'	q'	$(p \vee q)'$	$(p' \wedge q')$	$(p \vee q)' \Leftrightarrow (p' \wedge q')$
1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1

Tab. 1.6: Pravdivostní ohodnocení výrokové formule $(p \vee q)' \Leftrightarrow (p' \wedge q')$

Výrokové formule možno z hlediska jejich pravdivostního ohodnocení rozdělit do tří skupin:
$a)$ tautologie,
$b)$ kontradikce,
$c)$ splnitelná výroková formule.

Tautologie je taková výroková formule, ze které po dosazení libovolných výroků za výrokové proměnné vznikne vždy pravdivý výrok.

Kontradikce je výroková formule, ze které po dosazení libovolných výroků za výrokové proměnné dostaneme vždy nepravdivý výrok.

Splnitelná výroková formule je taková výroková formule, která není ani tautologií ani kontradikcí. Tedy v některých případech je výroková formule pravdivá a v některých nepravdivá.

Příklad 1.18. Na základě tabulky pravdivostních hodnot výrokové formule z předchozích příkladů (1.16 a 1.17) rozhodněte, jestli se jedná o splnitelnou formuli, tautologii, nebo kontradikci. Jinak řečeno, ověřte pravdivostní hodnotu uvedené výrokové formule.

Řešení: Tabulka pravdivostních hodnot (tab. 1.5) výrokové formule z příkladu 1.16 $(p' \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q')$ ukazuje, že se jedná o splnitelnou formuli.

Jistě jste si již všimli, že výroková formule z příkladu 1.17 popisuje de Morganův zákon negace disjunkce. Z tabulky pravdivostního ohodnocení 1.6 dané výrokové formule $(p \vee q)' \Leftrightarrow (p' \wedge q')$ vyplývá, že po dosazení libovolných výroků za proměnné p, q dostaneme vždy pravdivý výrok. **Výroková formule je tautologie**. Pomocí tabulky pravdivostních hodnot můžeme také dokázat platnost pravidel ve výrokové logice, v tomto případě, platnost de Morganova pravidla negace disjunkce.

Úloha 1.7. Pomocí tabulky pravdivostního ohodnocení výrokové formule ověřte platnost také ostatních pravidel, které jsme si již uvedli:
$a)$ opačné de Morganovo pravidlo negace konjunkce: $(p \wedge q)' \sim (p' \vee q')$;
$b)$ negace implikace: $(a \Rightarrow b)' \sim (a \wedge b')$;
$c)$ obměna ekvivalence: $(a \Leftrightarrow b) \sim \big[(a \wedge b) \vee (a' \wedge b')\big]$.

Řešení: *Všechny uvedené výrokové formule jsou tautologie, tj. jejich platnost byla dokázána.*

Poznámka 1.6. Jednotlivé druhy výrokových formulí určíme z tabulky jejich pravdivostního ohodnocení. U tautologie jsou v posledním sloupci samé jedničky, u kontradikce samé nuly a u splnitelné výrokové formule jsou v posledním sloupci tabulky pravdivostního ohodnocení nuly i jedničky.

Příklad 1.19. Ukažme si pravdivostní ohodnocení výrokové formule se třemi proměnnými následující výrokové formule: $a \Leftrightarrow (b \wedge c)'$.

Řešení: V prvním kroku určíme pravdivostní hodnoty výrokové formule, která je v závorce. Závorky plní také ve výrokové logice důležitou úlohu, protože určují pořadí vykonávaných operací. Pravdivostní ohodnocení konjunkce realizujeme porovnáním 2. a 3. sloupce. V dalším kroku vytvoříme negaci této konjunkce tak, že změníme pravdivostní hodnoty ze 4. sloupce. V posledním kroku přiřadíme pravdivostní hodnoty celé výrokové formuli tak, že porovnáme pravdivostní hodnoty 1. a 5. sloupce na základě logické spojky ekvivalence.

a	b	c	$b \wedge c$	$(b \wedge c)'$	$a \Leftrightarrow (b \wedge c)'$
1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0
0	0	0	0	1	0

Tab. 1.7: Pravdivostní ohodnocení výrokové formule $a \Leftrightarrow (b \wedge c)'$

Z tabulky 1.7 můžeme určit, že výroková formule $a \Leftrightarrow (b \wedge c)'$ je splnitelná formule. Pravdivý výrok dostaneme ve čtyřech případech, tj. když za trojici proměnných (a, b, c) dosadíme výroky s následujícími pravdivostními hodnotami $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 0, 0)$ a $(0, 1, 1)$.

Poznámka 1.7. Na příkladu 1.19 můžeme vidět, že čím více proměnných výroková formule obsahuje, tím nastává více možností, které můžou při kombinaci pravdivostních hodnot elementárních výroků a, b, c nastat. Počet kombinací můžeme obecně vyvodit následovně.

- pro 1 výrokovou proměnnou p: $2^1 = 2$ možnosti,
- pro 2 výrokové proměnné p, q: $2^2 = 4$ možnosti,
- pro 3 výrokové proměnné p, q, r: $2^3 = 8$ možností,
- pro 4 výrokové proměnné p, q, r, s: $2^4 = 16$ možností, ...

$$\boxed{\text{počet možností (řádků tabulky prav. hodnot)} = 2^{\text{počet proměnných}}}$$

Úloha 1.8. Pomocí tabulky pravdivostního ohodnocení výrokové formule ověřte platnost pravidel, které se ve výrokové logice často používají:

1. komutativní zákony: $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$
   $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$

2. asociativní zákony: $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
   $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
3. distributivní zákony: $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
   $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
4. implikace: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p' \vee q)$
   $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q' \Rightarrow p')$
5. $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow \big[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)\big]$
6. $\big[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)\big] \Leftrightarrow (p \Rightarrow r)$

Řešení: *Všechny uvedené výrokové formule jsou tautologie, tj. jejich platnost byla dokázána.*

Úloha 1.9. Pomocí tabulky pravdivostního ohodnocení výrokové formule ověřte, zda jsou následující výrokové formule skutečně kontradikce.

a) $(p \Rightarrow p') \wedge (p' \Rightarrow p)$;
b) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p' \vee q')$.

Řešení: *Obě uvedené výrokové formule jsou kontradikce.*

Tabulky pravdivostního ohodnocení výrokové formule se používají také při výrokové analýze slovního textu, budeme to ilustrovat na následujícím příkladu.

Příklad 1.20. V dílně jsou tři stroje A, B, C, které pracují podle těchto podmínek:

a) Jestliže pracuje stroj A, pak pracuje také stroj B.
b) Pracuje stroj B nebo pracuje stroj C.
c) Když nepracuje stroj A, nepracuje ani stroj C.

Za jakých podmínek je zabezpečený chod dílny?

Řešení: Označíme si tři základní elementární výroky výrokovými proměnnými, tedy p: „Pracuje stroj A.“, q: „Pracuje stroj B.“ a r: „Pracuje stroj C.“. Pak podmínky nezbytné pro chod dílny můžeme zapsat jako:

$$\text{a) } p \Rightarrow q, \quad \text{b) } q \vee r, \quad \text{c) } p' \Rightarrow r'.$$

Výroková formule $(p \Rightarrow q) \wedge (q \vee r) \wedge (p' \Rightarrow r')$ charakterizuje chod dílny, protože všechny tři podmínky musí platit současně. Pokud dostaneme z výrokové formule pravdivý výrok, pro libovolnou trojici hodnot výroků p, q a r, bude chod dílny zabezpečený.

p	q	r	p'	r'	$p \Rightarrow q$	$q \vee r$	$p' \Rightarrow r'$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \vee r) \wedge (p' \Rightarrow r')$
1	1	1	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1	1	0	0
0	0	0	0	1	1	0	1	0

Tab. 1.8: Pravdivostní ohodnocení výrokové formule z příkladu 1.20

Tabulka 1.8 nám určuje pravdivostní ohodnocení naší formule. Poslední sloupec v tabulce 1.8 nám ukazuje, že chod dílny bude zabezpečen ve třech případech:

1. Pracují všechny tři stroje.
2. Pracují stroje A, B a nepracuje stroj C.
3. Pracuje stroj B a stroje A, C nepracují.

Úloha 1.10. Rozhodněte, kteří žáci ze čtveřice A, B, C, D půjdou na výlet, mají-li být dodrženy tyto podmínky:

a) Alespoň jeden z dvojice B, D na výlet půjde.
b) Nejvýše jeden z dvojice A, C půjde na výlet.
c) Alespoň jeden z dvojice A, D půjde na výlet.
d) Na výlet půjde nejvýše jeden z dvojice B, C.
e) B nepůjde bez A.
f) C půjde tehdy, když půjde D.

Mějte na paměti, že v tabulce pravdivostních hodnot bude 16 možností, které můžou při kombinaci pravdivostních hodnot elementárních výroků a, b, c, d nastat.

Řešení: *Podmínky je možné zapsat do výrokové formule v:* $(b \vee d) \wedge (a \wedge c)' \wedge (a \vee d) \wedge (b \wedge c)' \wedge (a' \Rightarrow b') \wedge (c \Leftrightarrow d)$. *Mají-li být dodržet všechny uvedené podmínky, na výlet ze čtveřice žaků A, B, C, D půjdou žáci A a B, nebo žáci C a D.*

1.6 Výrokové formy a kvantifikované výroky

V následující podkapitole se blíže obeznámíme s tvrzeními, které obsahují neznámou proměnnou. Například, když v tvrzení „Přirozené číslo x je dělitelné pěti." dosadíme za proměnnou x číslo 7, dostaneme větu „Přirozené číslo 7 je dělitelné pěti.". Tento výrok je nepravdivý. Ale dosadíme-li za proměnnou x číslo 10, dostaneme výrok pravdivý. To znamená, že v závislosti od konkrétního přirozeného čísla, které dosadíme za proměnnou x, dostáváme výrok pravdivý, nebo nepravdivý. Vyslovme následující definici.

Výroková forma je tvrzení, které obsahuje alespoň jednu volnou proměnnou. Toto tvrzení se po dosazení konstanty z oboru jejich proměnnosti stane výrokem.

Výrokovou formu budeme označovat velkým písmenem latinské abecedy, přičemž v závorce je uvedená neznámá proměnná, za kterou je možno dosazovat vhodné konstanty: $A(x)$, $B(x)$, … Za výrokové formy považujeme například tvrzení

$$A(x)\text{: „číslo 8 dělí číslo } x\text{“}, \qquad B(x)\text{: „}x - 2 = 6.\text{“}.$$

Poznámka 1.8. Výrokové formy mohou obsahovat i více proměnných, jako například výroková forma: $C(x, y)$: $x + y = 5$. My budeme pracovat jen s výrokovými formami s jednou proměnnou.

S výrokovou formou souvisí další pojmy, jako je **obor proměnné výrokové formy**, **definiční obor výrokové formy** a **obor pravdivosti výrokové formy**, které definujeme následovně.

Obor proměnné výrokové formy $A(x)$ je množina všech objektů, v našem případě konstanty, jejichž hodnoty chceme do výrokové formy $A(x)$ za proměnnou x dosazovat. Označujeme U.

Definiční obor výrokové formy $A(x)$ je množina všech prvků z oboru proměnné, které po dosazení do výrokové formy $A(x)$ za proměnnou x vytvoří z výrokové formy $A(x)$ výrok. Definiční obor výrokové formy $A(x)$ budeme označovat D_A.

Poznámka 1.9. Obor proměnné výrokové formy a definiční obor výrokové formy se ve většině případů rovnají. Rozdíl nastává v případě, že výroková forma obsahuje proměnnou, pro kterou je potřebné zavést specifickou podmínku platnosti výrokové formy.

Obor pravdivosti výrokové formy $A(x)$ je množina všech prvků z definičního oboru, které po dosazení do výrokové formy $A(x)$ za proměnnou x vytvoří z výrokové formy $A(x)$ pravdivý výrok. Obor pravdivosti výrokové formy $A(x)$ budeme označovat A.

Uvedené pojmy budeme ilustrovat na následujících příkladech.

Příklad 1.21. Nechť oborem proměnné výrokové formy $A(x): \; x-1>5$ jsou přirozená čísla menší nebo rovná deseti, tedy $U = \{1,2,3,4,\dots,10\}$. Je-li uvedená výroková forma po dosazení každého z čísel oboru proměnné výrokové formy výrokem, pak platí, že definiční obor a obor výrokové formy se rovnají ($D_A = U$), tj. platí:
$A(1): \; 1-1>5$ – je nepravdivý výrok,
$A(2): \; 2-1>5$ – je nepravdivý výrok,
$A(3): \; 3-1>5$ – je nepravdivý výrok,
$A(4): \; 4-1>5$ – je nepravdivý výrok,
$A(5): \; 5-1>5$ – je nepravdivý výrok,
$A(6): \; 6-1>5$ – je nepravdivý výrok,
$A(7): \; 7-1>5$ – je pravdivý výrok,
$A(8): \; 8-1>5$ – je pravdivý výrok,
$A(9): \; 9-1>5$ – je pravdivý výrok,
$A(10): \; 10-1>5$ – je pravdivý výrok.
Vidíme, že výroková forma $A(x)$ je pravdivým výrokem jenom pro čísla větší než 7 nebo menší či rovna 10.

Poznámka 1.10. Z příkladu 1.21 vyplývá, že obor pravdivosti A výrokové formy je součástí definičního oboru výrokové formy D_A, který určujeme z oboru proměnné výrokové formy U.

Příklad 1.22. Nechť $U = \{0,1,2,3,4,5\}$ je obor proměnné pro následující výrokové formy:
$A(x)$: $x+2 \geq 4$.
$B(x)$: x je záporné číslo.
$C(x)$: x dělí číslo 6.

Abychom určili definiční obor a obor pravdivosti uvedených výrokových forem, postupně dosadíme za proměnnou x všechny prvky oboru proměnné výrokové formy. Pro definiční obory daných výrokových forem potom platí, že D_A a D_B se rovnají oboru proměnné výrokové formy U, teda $D_A = U$ a $D_B = U$. Pro výrokovou formu $C(x)$ to ale neplatí. Obecně v matematice platí, že 0 není je dělitelem žádného celého čísla (kromě 0), tedy nemůže být dělitelem ani čísla 6. V tomto případě tedy neplatí vztah $D_C = U$, ale $D_C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Z definičních oborů zadaných výrokových forem teď můžeme určit také jejich obor pravdivosti. Pro výrokovou formu $A(x)$ vidíme, že jenom ve dvou případech dostáváme nepravdivý výrok a to $A(0)$: $2 \geq 4$ a $A(1)$: $3 \geq 4$. Tedy obor pravdivosti výrokové formy $A(x)$ jsou následující prvky z množiny $A = \{2, 3, 4, 5\}$. Pro ostatní prvky (0 a 1) dostáváme nepravdivý výrok.

Pro prvky z definičního oboru D_B neobsahuje obor pravdivosti výrokové formy $B(x)$ žádné prvky, protože D_B obsahuje jen čísla větší nebo rovna jako 0 (čísla nezáporná). Také tvrzení „$B(0)$: 0 je záporné číslo.“ je nepravdivý výrok. To znamená, že obor pravdivosti výrokové formy $B(x)$ je prázdná množina, kterou označujeme také symbolem $\emptyset$.

Pro určení oboru pravdivosti výrokové formy $C(x)$ dosazujeme hodnoty z definičního oboru výrokové formy D_C. Dostáváme množinu $C = \{1, 2, 3\}$. Pro ostatní hodnoty neplatí, že jsou děliteli čísla 6. Například „$C(4)$: 4 dělí číslo 6“ je taktéž nepravdivý výrok. Naopak „$C(1)$: 1 dělí číslo 6“ je výrok pravdivý.

Získané výsledky můžeme zapsat následovně:
$A(x)$: $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $D_A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{2, 3, 4, 5\}$,
$B(x)$: $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $D_B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \emptyset$,
$C(x)$: $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $D_C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $C = \{1, 2, 3\}$.

Úloha 1.11. Nechť $U = \mathbb{N}$ (množina všech celých kladných čísel, resp. množina přirozených čísel) je obor proměnné pro následující výrokové formy:
$A(x)$: $3 < x \leq 11$.
$B(x)$: $3 \cdot x - 1 = 8$.
$C(x)$: $2 \cdot x - 1 = 14$.
$D(x)$: x je prvočíslo menší než 11.
Určete definiční obory a obory pravdivosti uvedených výrokových forem.

Řešení: *$D_A = \mathbb{N}$, $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$; $D_B = \mathbb{N}$, $B = \{3\}$; $D_C = \mathbb{N}$, C je prázdná množina; $D_D = \{2, 3, 4, 5, \ldots\}$, $D = \{2, 3, 5, 7\}$.*

Jak jsme už uvedli, **samotné výrokové formy nemají pravdivostní hodnotu**. Pro každou výrokovou formu však můžeme definovat množinu objektů, které když dosadíme za proměnnou, dostaneme z výrokové formy výrok. Dosazujeme-li prvky z definičního oboru do výrokové formy, může nastat jeden ze tří případů:
a) Výrok je pravdivý pro všechny prvky z definičního oboru.
b) Výrok je pravdivý pro některé prvky z definičního oboru.
c) Výrok je nepravdivý pro všechny prvky z definičního oboru.
Uvedené možnosti můžeme použitím kvantifikátorů zformulovat tak, abychom dostali platný výrok. Uvedeme ukázku na následujících příkladech.

Příklad 1.23. Nechť $A(x) : x > 0$ je výroková forma, pro kterou je obor proměnné množina přirozených čísel ($U = \mathbb{N}$). Můžeme pozorovat, že taky její definiční obor je množina přirozených čísel $\mathbb{N}$. Jestli ve výrokové formě $A(x)$ dosadíme za proměnnou x libovolné přirozené číslo, dostaneme vždy pravdivý výrok. Toto tvrzení můžeme formulovat několika způsoby:
„Pro **všechna** přirozená čísla x platí $A(x)$.“, resp.
„Pro **libovolné** přirozené číslo x platí $A(x)$.“, resp.
„Pro **každé** přirozené číslo x platí $A(x)$.“.

Symbolicky to budeme zapisovat následujícím způsobem: $\forall x \in \mathbb{N} : x > 0$. Daný zápis doslovně čteme: „Všechna přirozená čísla jsou větší jako nula (resp. …jsou kladná čísla)“.

Symbol $\forall$ nazýváme **obecný kvantifikátor** a výrok $\forall x \in D : A(x)$ nazýváme **obecný výrok**.

Obecný kvantifikátor vyjadřuje skutečnost, že každý uvažovaný objekt má jistou vlastnost, resp. každý prvek z definičního oboru výrokové formy patří taky do oboru pravdivosti dané výrokové formy. Tedy po dosazení libovolného prvku z definičního oboru do výrokové formy, dostaneme pravdivý výrok. Obecný kvantifikátor můžeme číst vícerými způsoby, např. „každý“, „všechny“, „libovolný“. Při vyjádření skutečnosti, že ani jeden uvažovaný objekt nemá danou vlastnost, můžeme použít i „žádný“ nebo „ani jeden“. Je však potřeba dbát na to, abychom nezměnili podstatu výroku.

Příklad 1.24. Nechť $B(x) : x < 5$ je výroková forma s oborem proměnné $U = \mathbb{N}$. Jejím definičním oborem je tedy množina přirozených čísel $\mathbb{N}$. Jestli ve výrokové formě $B(x)$ dosadíme za x například číslo 7, dostaneme nepravdivý výrok. Ale po dosazení přirozených čísel 1, 2, 3, 4 dostaneme výrok pravdivý. Podobně jako v příkladu 1.22, pro některá přirozená čísla dostaneme pravdivý výrok, ale ne pro všechna. Tuhle situaci můžeme vyjádřit následujícími slovními vyjádřeními:

„**Existuje** přirozené číslo x, pro které platí $B(x)$.“, resp.

„**Existuje alespoň jedno** přirozené číslo x, pro které platí $B(x)$.“.

Symbolicky to budeme zapisovat následujícím způsobem: $\exists x \in \mathbb{N} : x < 5$ a čteme „Existuje (alespoň jedno) přirozené číslo, které je menší než pět.“.

Symbol $\exists$ nazýváme **existenční kvantifikátor** a výrok $\exists x \in D : A(x)$ nazýváme **existenční výrok**.

Obecné a existenční výroky jsou tzv. **kvantifikované výroky**. Z předcházejícího vyplývá, že každou výrokovou formu je možné kvantifikovat a právě použitím kvantifikátorů vzniká z výrokové formy výrok. To znamená, že z výrokové formy $A(x)$ můžeme tvořit výroky dvěma způsoby. Prvním způsobem je dosazovaní prvků z definičního oboru výrokové formy za proměnnou x a tím určit obor pravdivosti výrokové formy nebo jednoduchou kvantifikací proměnné x.

Příklad 1.25. Následující výroky obsahují kvantifikátory:

a) *Existuje* šestiúhelník, který má aspoň tři tupé vnitřní úhly.

b) *Možno najít* přirozené číslo, které je dělitelem *každého* prvočísla.

c) *Ani jeden* kořen rovnice $x + 1 = 0$ není kladné číslo.

V každé ukázce jsou slovní spojení, které vyjadřují kvantifikátory označené kurzívou. V případě a) se jedná o jasně formulovaný existenční kvantifikátor. V ostatních dvou ukázkách nejsou explicitně použité kvantifikátory, ale umíme je přeformulovat následovně: V případě b) *Existuje takové přirozené číslo, které je dělitelem každého prvočísla.* V případě c) *Pro každé x, které je kořenem rovnice $x + 1 = 0$, platí, že x není kladné číslo.*

Úloha 1.12. Pomocí kvantifikátorů přeformulujte následující výroky a zapište je použitím kvantifikátorů a matematických symbolů:

a) Některá přirozená čísla jsou větší jako 223.
b) Je možné najít dělitele čísla 15.
c) Žádné přirozené číslo není záporné.
d) Všechna přirozená čísla možno dělit 1.
e) Rovnici $2 \cdot x - 1 = 4$ nevyhovuje žádné přirozené číslo.
f) Nerovnice $x - 3 \leq 2$ má v množině přirozených čísel řešení.

Řešení: *a) Existuje (alespoň jedno) přirozené číslo x, které je větší jako číslo 223 ($\exists x \in \mathbb{N} : x > 223$).; b) Existuje (alespoň jeden) dělitel čísla 15 ($\exists x \in \mathbb{N} : x|15$[2]).; c) Pro každé přirozené číslo x platí, že není záporné, resp. Všechna přirozená čísla jsou kladná ($\forall x \in \mathbb{N} : x > 0$).; d) Pro každé (libovolné) přirozené číslo platí, že 1 je jeho dělitelem ($\forall x \in \mathbb{N} : 1|x$).; e) Pro každé přirozené číslo x platí, že $2 \cdot x - 1 \neq 4$ ($\forall x \in \mathbb{N} : 2 \cdot x - 1 \neq 4$).; f) Existuje takové přirozené číslo x, pro které platí nerovnice $x - 3 \leq 2$ ($\exists x \in \mathbb{N} : x - 3 \leq 2$).*

Úloha 1.13. Přečtěte kvantifikované výroky a rozhodněte o jejich pravdivostní hodnotě.

a) $\forall x \in \mathbb{N} : 2 \cdot x > 1$.
b) $\exists x \in \mathbb{N} : x^2 < 1$.
c) $\exists x \in \mathbb{N} : x + 9 = 1$.

Řešení: *a) Pro každé přirozené číslo x platí, že jeho dvojnásobek je větší jako 1 – pravdivý.; b) Existuje přirozené číslo x, pro které platí, že jeho druhá mocnina je menší než 1 – nepravdivý.; c) Existuje přirozené číslo x, pro které platí rovnost $x + 9 = 1$ – nepravdivý.*

Úloha 1.14. Následující výroky zapište použitím matematické symboliky a rozhodněte o jejich pravdivosti:

a) Existuje trojúhelník, ve kterém je součet vnitřních úhlů roven 180°.
b) Pro každý trojúhelník platí, že součet vnitřních úhlů je větší nebo roven 180°.
c) Existuje trojúhelník, ve kterém součet vnitřních úhlů není roven 180°.
d) V každém trojúhelníku je součet vnitřních úhlů roven 180°.
e) Existuje trojúhelník, ve kterém je součet vnitřních úhlů různý od 180°.

Řešení: *a) $\exists\triangle : \alpha + \beta + \gamma = 180°$; b) $\forall\triangle : \alpha + \beta + \gamma \geq 180°$; c) $\exists\triangle : \alpha + \beta + \gamma \neq 180°$; d) $\forall\triangle : \alpha + \beta + \gamma = 180°$; e) $\exists\triangle : \alpha + \beta + \gamma \neq 180°$*

Kvantifikované výroky můžeme negovat. Existuje princip, na jehož základě můžeme negaci kvantifikovaných výroků provádět velmi jednoduše. Budeme jej ilustrovat na následujících příkladech.

Příklad 1.26. Uvažujme výrok $\forall x \in \mathbb{N} : x^2 > 0$. Výrok čteme „Pro každé přirozené číslo x platí, že jeho druhá mocnina je větší než nula.“ Tento výrok je pravdivý, takže jeho negace musí být nepravdivý výrok. Triviální negací tohohle výroku je: „Není pravda, že pro každé přirozené číslo x platí $x^2 > 0$.“, nebo výrok „Pro každé přirozené číslo x neplatí $x^2 > 0$.“. Stejný význam jako předcházející dva výroky má vyjádření: „Existuje přirozené číslo x, pro které platí, že jeho druhá mocnina je menší nebo rovna nule.“ Tento výrok můžeme symbolicky zapsat jako: $\exists x \in \mathbb{N} : x^2 \leq 0$. Tedy negací výroku $\forall x \in \mathbb{N} : x^2 > 0$ je výrok $\exists x \in \mathbb{N} : x^2 \leq 0$.

[2] V téhle kapitole se setkáváme s relací dělitelnosti. Označujeme ji svislým znakem „|“ mezi dvěma přirozenými čísly a symbol čteme jako „dělí“. Například zápis $x|15$ čteme: přirozené číslo x dělí, nebo je dělitelem, čísla 15.

Příklad 1.27. Určeme negaci výroku $\exists x \in \mathbb{N} : 3+x = 2$. Tedy „Existuje přirozené číslo x, pro které platí rovnost $3 + x = 2$.“. Dostaneme výrok „Není pravda, že existuje přirozené číslo x, pro které platí rovnost $3 + x = 2$.“, nebo výrok „Neexistuje přirozené číslo x, pro které platí rovnost $3 + x = 2$.“. Přeformulováním výroku negace zní: „Pro každé přirozené číslo x platí, že $3 + x \neq 2$.“.

Z předcházejících příkladů vidíme, že **negaci kvantifikovaného výroku** dostaneme ve dvou krocích. V první řadě ve změně kvantifikátoru a následně v úpravě vlastnosti, o které kvantifikovaný výrok hovoří (oba kroky jsou v příkladech podtrženy). Jednoduše řečeno, obecný kvantifikátor nahradíme existenčním a naopak a místo výrokové formy píšeme její negaci (viz tab. 1.9).

	Výrok	**Negace výroku**
Obecný kvantifikátor $\forall$	Pro každý … platí, že je ….	Existuje …, který není ….
Existenční kvantifikátor $\exists$	Existuje alespoň jeden …, který je ….	Pro každý … platí, že není ….

Tab. 1.9: Negace kvantifikovaných výroků

Úloha 1.15. Následující výroky zapište použitím matematické symboliky a rozhodněte o jejich pravdivosti:

a) $\exists x \in \mathbb{N} : x + 1 = 8$.
b) $\forall x \in \mathbb{N} : x^2 > 1$.
c) $\forall x \in \mathbb{N} : 3 \cdot x = 7$.
d) $\forall x \in \mathbb{N} : 2 \cdot x$ je sudé číslo.
e) $\exists x \in \mathbb{N} : 3 \cdot x \leq 1$.

Řešení: *a) Výrok je pravdivý, dané rovnici vyhovuje číslo 7. Negace výroku je $\forall x \in \mathbb{N} : x + 1 \neq 8$. b) Výrok není pravdivý, protože druhá mocnina čísla 1 nepasuje do nerovnice. Vyšla by nerovnice ve tvaru $1 > 1$. Negace výroku je $\exists x \in \mathbb{N} : x^2 \leq 1$. c) Výrok není pravdivý. Neexistuje přirozené číslo také, co by vyhovovalo rovnici. Negace výroku je $\exists x \in \mathbb{N} : 3 \cdot x \neq 7$. d) Výrok je pravdivý, protože dvojnásobek každého přirozeného čísla je sudé číslo. Negace výroku je $\exists x \in \mathbb{N}$: $2 \cdot x$ není sudé číslo. e) Výrok není pravdivý, protože žádné přirozené číslo nevyhovuje nerovnici. Po dosazení libovolného přirozeného čísla dostaneme vždy číslo větší jako 1. Negace výroku tedy zní $\forall x \in \mathbb{N} : 3 \cdot x > 1$.*

Ne vždy se setkáme s přesnou formulací kvantifikovaných výroků. V běžné řeči užíváme jiné slovné spojení jako například „existuje“ nebo „každý“. A taky vytvořenou negaci umíme zformulovat, resp. modifikovat do běžně používaného jazyka. Obecně můžeme tedy vytvořit negaci výroku x v následujících čtyřech krocích:

x:	znění původního výroku.
x_1:	přeformulovaní výroku do matematické terminologie s použitím kvantifikátorů.
${x_1}'$:	negace výroku podle tabulky 1.9.
x':	přeformulování negace původního výroku do „běžné řeči“.

Uvedený postup budeme ilustrovat na následujících příkladech.

Příklad 1.28. Vytvořme negaci výroku a: „Žádný lichoběžník není rovnoramenný.“.

Řešení:

a_1:	Pro každý lichoběžník platí, že není rovnoramenný.
$a_1{}'$:	Existuje lichoběžník, který je rovnoramenný.
a':	Je možné zkonstruovat rovnoramenný lichoběžník.

Úloha 1.16. Utvořte negaci následujících výroků:

a) Všechny násobky čísla 6 jsou sudá čísla.
b) Některé násobky čísla 3 jsou násobky i čísla 6.
c) Žádné prvočíslo není sudé číslo.
d) Každé dvě přímky mohou mít nejvýše jeden společný bod.
e) Tahle posádka kosmické lodě lítala alespoň 82 dní.
f) Možno najít reálné číslo, pro které platí $x < 2$.
g) Žádný člověk neumí mluvit 5 jazyky.
h) Libovolnému trojúhelníku možno zkonstruovat těžnice.

Řešení: *a) Existuje násobek čísla 8, který není sudý. b) Žádné násobky čísla 3 nejsou násobky čísla 6. c) Některé prvočísla jsou sudá čísla. d) Existují přímky, které mají dva, nebo více společných bodů. e) Žádná posádka kosmické lodě nelítala víc jako 81 dní. f) Všechna reálná čísla jsou větší jako 2. g) Někteří lidé umí mluvit 5 jazyky. h) Některým trojúhelníkům neumíme zkonstruovat těžnice.*

1.7 Matematické věty a důkazy matematických vět

Matematické věty jsou pravdivé výroky vyjadřující vědecké poznatky o objektech, které studuje matematika. Za matematickou větu pokládáme jenom výrok, jehož pravdivost je dokázaná, a který přináší závažné teoreticko-matematické poznatky.

Matematické věty obvykle obsahují **výrokovou formu** a **kvantifikátory**, například: $\forall x \in \mathbb{N} : 6|x \Rightarrow 3|x$. (Pro každé přirozené číslo x platí: jestliže je x dělitelné šesti, pak je x dělitelné i třemi). Uvedeme další příklady matematických vět.

Příklad 1.29.

1. Jestliže je přirozené číslo dělitelné osmi, pak je dělitelné i dvěma.
2. Jestliže x, y jsou sudá čísla, pak i $x + y$ je sudé číslo.
3. Číslo 11 je přirozené číslo.
4. $\forall a, b \in \mathbb{R} : (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Na základě uvedených příkladů můžeme vidět, že matematické věty mají různou stavbu. Uvedeme si příklad.

Příklad 1.30. Vraťme se zpět k větě: Pro každé přirozené číslo x platí: jestliže je x dělitelné šesti, pak x je dělitelné i třemi. Protože výroková forma $6|x \Rightarrow 3|x$ je zřejmě pravdivá pro každé přirozené číslo x, uvažovanou větu jsme zformulovali pomocí matematické symboliky a zapsali v následujícím tvaru: $\forall x \in \mathbb{N} : 6|x \Rightarrow 3|x$.

V určitých případech říkáme, že uvedená věta má tvar implikace, například ukázky 1. a 2. z příkladu 1.29.

V případě, že matematická věta má tvar implikace, můžeme ji zapsat i v obecném tvaru

$$\forall x \in D : A(x) \Rightarrow B(x).$$

V této větě je $A(x)$ předpokladem věty a $B(x)$ je tvrzení věty. Říkáme, že $A(x)$ je postačující podmínkou pro $B(x)$, a že $B(x)$ je nutnou podmínkou pro $A(x)$. Například ve větě $\forall x \in \mathbb{N} : 6|x \Rightarrow 3|x$ je postačující podmínkou výroková forma $A(x) : 6|x$ a nutnou podmínkou je výroková forma $B(x) : 3|x$.

Můžeme si položit otázku, jestli předpoklad podmiňuje tvrzení. Za tímhle účelem si to ukážeme na obráceném výroku k obecnému vyjádření matematické věty ve tvaru implikace: $\forall x \in D : A(x) \Rightarrow B(x)$. Vyměňme tedy výrokové formy v daném zápisu:

$$\forall x \in D : B(x) \Rightarrow A(x).$$

Vraťme se k úvodní matematické větě $\forall x \in \mathbb{N} : 6|x \Rightarrow 3|x$, kde obrácený výrok bude mít následující tvar $\forall x \in \mathbb{N} : 3|x \Rightarrow 6|x$. Můžeme vidět, že tento výrok není pravdivý, například zkuste za proměnnou x dosadit číslo 9.

Jak vyplývá z předcházejícího příkladu, obrácená implikace nemusí vždy platit. Jestli však platí obrácená implikace, pak matematická věta má tvar oboustranné implikace, nebo ekvivalence: $\forall x \in D : A(x) \Leftrightarrow B(x)$. Potom platí, že $A(x)$ je nutnou a zároveň postačující podmínkou pro $B(x)$.

Pokud chceme v matematice nějaký výrok prohlásit za větu, musíme ověřit jeho pravdivost. Ověření pravdivosti (platnosti) matematické věty nazýváme **důkaz**. Uvedeme několik druhů důkazů matematických vět: přímý důkaz, nepřímý důkaz, důkaz sporem a důkaz matematickou indukcí.

1.7.1 Přímý důkaz

Přímý důkaz věty ve tvaru implikace je nejčastěji používaným důkazem ve školské matematice. Nejdřív budeme předpokládat, že matematická věta má tvar následující implikace

$$\forall x \in D : A(x) \Rightarrow B(x).$$

Při daném způsobu důkazu se opíráme o pravidlo odvozování. Obvykle uplatňujeme znalost pravdivých implikací, tj. vytvoříme řetězec pravdivých a na sebe navazujících implikací:

$$\begin{aligned} \forall x \in D : &\quad A(x) \Rightarrow C_1(x), \\ \forall x \in D : &\quad C_1(x) \Rightarrow C_2(x), \\ &\quad \vdots \\ \forall x \in D : &\quad C_n(x) \Rightarrow B(x). \end{aligned}$$

Na základě tohoto řetězce pravdivých implikací dostáváme závěr, že platí věta v původním tvaru: $\forall x \in D : A(x) \Rightarrow B(x)$.

Poznámka 1.11. Uvedený zápis řetězce pravdivých implikací můžeme zapsat i ve zjednodušené podobě následovně:

$$A \Rightarrow B_1,\ B_1 \Rightarrow B_2,\ \dots B_n \Rightarrow B,$$

což znamená, že platí i implikace $A \Rightarrow B$.

Metodu přímého důkazu si ukážeme na následujících příkladech.

Příklad 1.31. Dokažte následující tvrzení: *Jestliže je přirozené číslo dělitelné čtyřmi, pak je dělitelné i dvěma.*

Řešení: Tvrzení si můžeme přepsat do matematického zápisu: $\forall x \in \mathbb{N} : 4|x \Rightarrow 2|x$. Pro $\forall x \in \mathbb{N}$ pak platí následující řetězec pravdivých implikací:

$$4|x \Rightarrow x = 4k, k \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 2 \cdot (2k) = 2m, m \in \mathbb{N} \Rightarrow 2|x.$$

Věta je dokázána.

1.7.2 Nepřímý důkaz

K nepřímému důkazu využijeme tautologii platnou ve výrokové logice $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (B' \Rightarrow A')$[3]. Místo implikace $A \Rightarrow B$ budeme dokazovat implikaci ve tvaru $B' \Rightarrow A'$.

Jinými slovy, namísto věty $\forall x \in D : A(x) \Rightarrow B(x)$ dokazujeme obměněnou větu: $\forall x \in D : B'(x) \Rightarrow A'(x)$, která má stejnou pravdivostní hodnotu. Postup nepřímého důkazu si ukážeme na následujícím příkladu.

Příklad 1.32. Dokažte následující tvrzení: *Jestliže celé číslo x^2 je sudé číslo, pak také číslo x je sudé..*

Řešení: Opět si tvrzení můžeme přepsat do matematického zápisu:

$$\forall x \in \mathbb{Z} : x^2 \text{ je sudé } \Rightarrow x \text{ je sudé.}$$

Zadané tvrzení by se pomocí přímého důkazu dokazovalo složitě. Z tohoto důvodu budeme dokazovat obměněnou větu, kterou můžeme zapsat v následujícím tvaru:

$$\forall x \in \mathbb{Z} : x \text{ je liché } \Rightarrow x^2 \text{ je liché.}$$

Takto obměněnou větu budeme dokazovat opět pomocí řetězce pravdivých implikací podobně jako při přímém důkaze. Tvrzení „pro každé $x \in \mathbb{Z}$ platí: x je liché“ můžeme zapsat ve tvaru $x = 2k + 1,\ k \in \mathbb{Z}$. A pokračujeme

$$x = 2k+1, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \cdot \left(2k^2 + 4k\right) + 1 = 2m + 1, m \in \mathbb{Z}.$$

A tedy x^2 je liché číslo. Věta je dokázána.

[3]Platnost tautologie si můžete také ověřit sami pomoci tabulky pravdivostních hodnot.

1.7.3 Důkaz sporem věty ve tvaru implikace

Při důkazu sporem věty ve tvaru implikace předpokládáme neplatnost implikace $A \Rightarrow B$, tj. předpokládáme platnost její **negace**. Víme, že negaci implikace umíme vyjádřit na základě tautologie následovně:

$$(A \Rightarrow B)' \Leftrightarrow (A \wedge B').$$

Z tohoto předpokladu odvodíme řetězcem implikací výrok, který je v rozporu s předpokladem, nebo v závěru důkazu získáme nějaký jiný nepravdivý výrok. Dostaneme spor, který dokazuje tvrzení věty. Důkaz sporem budeme ilustrovat na následujícím příkladu.

Příklad 1.33. Dokažte následující tvrzení: *Jestliže celé číslo x^2 je sudé číslo, pak také číslo x je sudé..*

Řešení: Toto tvrzení jsme již dokázali nepřímým důkazem v předcházejícím příkladě 1.32. Je možné využít i důkaz sporem. Budeme předpokládat, že tvrzení neplatí, tj. předpokládáme, že existuje také celé číslo x takové, že x^2 je sudé číslo a zároveň x je liché číslo. Podle předpokladu je $x = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$. Potom platí, že

$$x^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \cdot \left(2k^2 + 4k\right) + 1 = 2m + 1, m \in \mathbb{Z},$$

a tedy x^2 je liché číslo. Dostali jsme spor s předpokladem, že x^2 je sudé číslo. Spor dokazuje tvrzení věty.

Příklad 1.34. Dokažte následující tvrzení: *Číslo $\sqrt{2}$ je iracionální číslo.*

Řešení: Větu nejdřív zapíšeme ve tvaru implikace:

$$\forall x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \neq \sqrt{2}.$$

Budeme dokazovat sporem. Předpokládejme, že tvrzení věty neplatí, tj. předpokládejme, že existuje racionální číslo x takové, že $x = \sqrt{2}$. Protože x je racionální číslo, $x = \frac{p}{q}$, přičemž platí, že $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ a p, q jsou nesoudělné, tj. jejich největší společný dělitel je 1. Podle předpokladu platí $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$. Po umocnění dostáváme, že $\frac{p^2}{q^2} = 2$. Z této rovnosti vyplývá, že $p^2 = 2q^2$, tedy p^2 je sudé číslo. Podle věty, kterou jsme dokázali v předcházejícím příkladu, je potom i p sudé číslo, tj. $p = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. Po dosazení dostáváme, že $4k^2 = 2q^2$, a z toho vyplývá, že $q^2 = 2k^2$. To ale znamená, že q^2 je sudé číslo. Potom je i číslo q sudé. To je ale spor s předpokladem, že čísla p, q jsou nesoudělná. Spor dokazuje tvrzení věty.

1.7.4 Důkaz matematickou indukcí

Důkaz matematickou indukcí užíváme zpravidla tehdy, jestliže máme ověřit platnost výroku pro jistou podmnožinu množiny všech přirozených čísel. Klasický druh důkazu indukcí se skládá z ověření platnosti následujících dvou kroků:

1. Dokážeme, že výroková forma $V(n)$ platí pro nejmenší možné přirozené číslo n, což je obvykle $n = 1$. Taktéž to můžeme vyjádřit zápisem $V(1)$.
2. Vytvoříme předpoklad, že $V(n)$ platí pro libovolné přirozené číslo $n = k$. Na základě předpokladu následně dokážeme, že výroková forma platí také pro $n = k + 1$, tj. musíme dokázat, že pro každé přirozené číslo k ($k \in \mathbb{N}$) platí implikace $V(k) \Rightarrow V(k + 1)$.

Na základě věty o úplné matematické indukci potom vlastnost $V(n)$ platí pro všechna přirozená čísla n. Důkaz matematickou indukcí budeme ilustrovat na následujících příkladech.

Příklad 1.35. Dokažte, že součet prvních n přirozených čísel se rovná číslu $\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}$.

Řešení: Potřebujeme dokázat, že $\forall n\in\mathbb{N}$ platí následující vlastnost:

$$V(n):\ 1+2+3+\cdots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}.$$

1. Nejdřív ukážeme, že daná vlastnost platí pro $n=1$. Musí platit vztah: $V(1):1=\frac{1\cdot(1+1)}{2}$. Je zřejmé, že tato rovnost platí.

2. Ve druhém kroku budeme předpokládat, že daná vlastnost platí pro $n=k$. Dokážeme, že vlastnost bude platit i pro $n=k+1$. Budeme tedy dokazovat, že pro každé $k\in\mathbb{N}$ platí implikace $V(k)\Rightarrow V(k+1)$.

   Převeďme si to z obecné roviny konkrétně na zadanou vlastnost. Nechť pro každé $k\in\mathbb{N}$ platí vlastnost:

   $$V(k):\ 1+2+3+\cdots+k=\frac{k\cdot(k+1)}{2}.$$

   Pak budeme dokazovat, že také platí:

   $$V(k+1):\ 1+2+3+\cdots+k+k+1=\frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2}.$$

   Pro libovolné přirozené číslo k můžeme odvodit:

   $$\begin{aligned}1+2+3+\cdots+k+k+1&=\frac{k\cdot(k+1)}{2}+k+1=\frac{k\cdot(k+1)+2k+2}{2}\\&=\frac{k^2+k+2k+2}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.\end{aligned}$$

   Využili jsme indukční předpoklad. Tím jsme dokázali, že vlastnost $V(n)$ platí pro všechna přirozená čísla n.

Příklad 1.36. Dokažte, že součet třetích mocnin prvních n přirozených čísel se rovná číslu $\dfrac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}$.

Řešení: Potřebujeme dokázat, že $\forall n\in\mathbb{N}$ platí následující vlastnost:

$$V(n):\ 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}.$$

1. Nejdřív ukážeme, že daná vlastnost platí pro $n=1$. Musí platit vztah: $V(1):1^3=\frac{1^2\cdot(1+1)^2}{4}$. Je zřejmé, že tato rovnost platí.

2. Předpokládejme, že daná vlastnost platí pro $n = k$. Dokážeme, že vlastnost bude platit i pro $n = k + 1$. Budeme tedy dokazovat, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí implikace $V(k) \Rightarrow V(k+1)$.

   Nechť pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí vlastnost:

$$V(k): \; 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = \frac{k^2 \cdot (k+1)^2}{4}.$$

   Pak budeme dokazovat, že také platí:

$$V(k+1): \; 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2 \cdot (k+2)^2}{4}.$$

   Pro libovolné přirozené číslo k můžeme odvodit:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2 \cdot (k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \frac{k^2 \cdot (k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4}$$
$$= \frac{(k+1)^2 \cdot (k^2 + 4k + 4)}{4} = \frac{(k+1)^2 \cdot (k+2)^2}{4}.$$

   Využili jsme indukční předpoklad. Tím jsme dokázali, že vlastnost $V(n)$ platí pro všechna přirozená čísla n.

1.8 Cvičení

1.1. Rozhodněte, zda následující tvrzení jsou výroky:

a) Zlín je hlavní město České republiky.
b) Ticho prosím!
c) $7 < 13$
d) Pro všechna reálná čísla a, b platí: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.
e) Matematika je nudný předmět.
f) Kolikátého je dnes?
g) Číslo 193 je prvočíslo.
h) Číslo x je dělitelné třemi.
i) Dne 2. prosince roku 1805 pil císař Napoleon víno.
j) $a^2 + b^2 = c^2$
k) Modrá je dobrá.

1.2. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou výroky, a těmto přiřaďte odpovídající pravdivostní hodnotu:

a) Číslo 1 234 567 890 je dělitelné devíti.
b) Rovnice $x^2 + 1 = 0$ má řešení.

c) Rovnice $x^2 + 1 = 0$ nemá řešení v množině reálných čísel.

d) Hlavní město Turecka je Istanbul.

e) $3x - 1 = 14 - 2x$.

f) $3x - 1 = 14 - 2x$, je-li $x = 3$.

g) Plocha obdélníkového pozemku o rozměrech 80×125 metrů je 10 hektarů.

h) Každé prvočíslo je liché.

i) Dnes je venku krásně.

j) Dvě různoběžné přímky mají společný právě jeden bod.

k) Tato věta je nepravdivá.

1.3. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou výroky, a těmto přiřaďte odpovídající pravdivostní hodnotu:

a) Kolik se nás zítra sejde na jednání?

b) Nejdelší řeka v Evropě je Dunaj.

c) $31 \cdot 15 < 1250 \div 5$

d) Vůbec mě neposloucháš!

e) Nula patří do množiny všech celých čísel.

f) Supermarket.

g) Každý čtverec je geometrický útvar.

h) Každý geometrický útvar je čtverec.

i) Mluv hlasitěji!

j) Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně.

k) Nejvyšší hora světa je Mount Everest.

l) Planeta Země patří do sluneční soustavy.

m) Půjdu do města sám.

1.4. Z následujících elementárních výroků slovně zformulujte výroky složené:

$$p \wedge s, q \Leftrightarrow p, s \Rightarrow p, p \vee r \vee s, q \wedge s \wedge r, q \Rightarrow r.$$

p : Venku je pěkné počasí.
q : Autobus má několik minut zpoždění.
r : Domů si vezmu taxík.
s : Už nosím jarní kabát.

1.5. Určete, o jaký druh složeného výroku se jedná a zapište jej symbolicky:

a) Zavolá mi po obědě nebo až večer.

b) Přijde moje máma i táta.

c) Jestli se rozlobíme, budeme zlí.

d) Zvonek zazvonil, právě když jsem skončila poradu.

e) Budeme sedět u nás doma nebo u sousedky nebo u tvé mámy.

1.6. Utvořte negace následujících výroků:

a) Nejvýše osm studentů se naučilo na test.

b) Vypiš formuláře a odevzdej je u levého okénka.

c) Tvoje zpráva byla označena jako nevyžádaná.

d) Alespoň tři sousedé hlasovali proti návrhu.

e) Existuje trojúhelník, který má uhlopříčku.

f) Můžeš zůstat do konce nebo vyřešíš dodatečné zadání úkolů.

g) Když si vybereš správně, postoupíš do druhého kola.

h) Rovnoběžné přímky mají společný právě jeden bod.

i) Jestli se budeš učit, dosáhneš lepších výsledků.

j) Každé sudé číslo je dělitelné čtyřmi.

k) Součet sudých čísel je vždy sudé číslo.

1.7. Pomocí tabulky pravdivostního ohodnocení výrokové formule ověřte, jestli se jedná o splnitelnou formuli, tautologii nebo kontradikci:

a) $(a \Rightarrow b) \vee a'$,

b) $(k' \wedge l) \vee (l \Rightarrow k)'$,

c) $p \wedge (r \Leftrightarrow p')'$,

d) $(r' \Rightarrow s) \Leftrightarrow (r \wedge s)'$,

e) $a \vee (b \wedge c)'$,

f) $[x' \vee (z \Leftrightarrow y)]'$,

g) $(x \wedge y) \Rightarrow [(z \Leftrightarrow x)' \vee y]$,

h) $[(b \Rightarrow a) \vee (c \Leftrightarrow a)'] \wedge (a' \Rightarrow c)$,

i) $(a \Rightarrow b)' \Leftrightarrow (a' \vee b)$.

1.8. Maminka šla nakupovat jídlo k večeři, přičemž tvrdila:

- Koupím těstoviny nebo zeleninu.
- Jestliže nekoupím maso, nekoupím ani těstoviny.
- Maso koupím právě tehdy, když nekoupím zeleninu.

Jaké jídlo k večeři maminka koupila?

1.9. Tři kamarádky se dohadují, že půjdou do kavárny, ale nastaly mezi nimi jisté neshody. Půjdou jenom za těchto podmínek:

- Půjde Petra nebo Marie.

- Jestliže půjde Jana, nepůjde Petra.
- Marie půjde právě tehdy, když nepůjde Jana.
- Nepůjde ani jedna z nich, pokud by měla jít sama.

Kdo z kamarádek se nakonec setká v kavárně?

1.10. Kvantifikované výroky přečtěte, rozhodněte o jejich pravdivosti a utvořte jejich negace:

a) $\exists x \in \mathbb{N} : x - 5 = 3$,
b) $\forall x \in \mathbb{N} : x^2 > 1$,
c) $\forall x \in \mathbb{N} : x^2 \geq 1$,
d) $\exists x \in \mathbb{N} : 3x = 7$,
e) $\forall x \in \mathbb{N}$: je-li x sudé, pak i $x + 2$ je sudé,
f) $\forall x \in \mathbb{N} : x - 1 \geq 0 \wedge x + 1 \geq 2$,
g) $\forall x \in \mathbb{N} : x - 5 = 3$.

1.11. Zapište symbolicky následující kvantifikované výroky:

a) Existuje přirozené číslo, které je záporné.
b) Každý trojúhelník má součet vnitřních uhlů rovný $180°$.
c) Některá celá čísla jsou kladná.

1.9 Výsledky cvičení

1.1. a) je to výrok, b) není to výrok, c) je to výrok, d) je to výrok, e) není to výrok, f) není to výrok, g) je to výrok, h) není to výrok, i) je to výrok, j) není to výrok, k) není to výrok.

1.2. a) je to pravdivý výrok, b) není to výrok, c) je to pravdivý výrok, d) je to nepravdivý výrok, e) není to výrok, f) je to pravdivý výrok, g) je to nepravdivý výrok, h) je to nepravdivý výrok, i) není to výrok, protože nemůžeme určit jeho pravdivostní hodnotu, j) je to pravdivý výrok, k) není to výrok.

1.3. a) není to výrok, b) je to nepravdivý výrok, c) je to nepravdivý výrok, d) není to výrok, e) je to pravdivý výrok, f) není to výrok, g) je to pravdivý výrok, h) je to nepravdivý výrok, i) není to výrok, j) není to výrok, k) je to pravdivý výrok, l) je to pravdivý výrok, m) je to výrok, o jehož pravdivosti nelze v tomto okamžiku rozhodnout.

1.4. $p \wedge s$: „Venku je pěkné počasí a já už nosím jarní kabát.“, $q \Leftrightarrow p$: „Autobus má několik minut zpoždění, právě když je venku pěkné počasí.“, $s \Rightarrow p$: „Jestliže už nosím jarní kabát, pak je venku pěkné počasí.“, $p \vee r \vee s$: „Venku je pěkné počasí nebo si domů vezmu taxík nebo už nosím jarní kabát.“, $q \wedge s \wedge r$: „Autobus má několik minut zpoždění, už nosím jarní kabát a domů si vezmu taxík.“, $q \Rightarrow r$: „Jestliže má autobus několik minut zpoždění, pak si vezmu domů taxík.“.

1.5. a) disjunkce, $p \vee q$, b) konjunkce, $p \wedge q$, c) implikace, $p \Rightarrow q$, d) ekvivalence, $p \Leftrightarrow q$, e) disjunkce, $p \vee q \vee r$.

1.6. a) Alespoň devět studentů se naučilo na test.; b) Formuláře nevypisuj nebo je neodevzdej u levého okénka.; c) Tvoje zpráva nebyla označena jako nevyžádaná.; d) Nejvýše dva sousedé hlasovali proti návrhu.; e) Žádný trojúhelník nemá uhlopříčku.; f) Nemůžeš zůstat do konce ani nevyřešíš dodatečné zadání úkolů. g) Vybereš si správně a nepostoupíš do druhého kola.; h) Rovnoběžné přímky nemají společné body nebo mají společné alespoň dva body.; i) Budeš se učit, ale nedosáhneš lepších výsledků.; j) Alespoň jedno sudé číslo není dělitelné čtyřmi.; k) Součet sudých čísel není vždy sudé číslo.

1.7. a) splnitelná formule, b) splnitelná formule, c) splnitelná formule, d) splnitelná formule, e) splnitelná formule, f) splnitelná formule, g) tautologie, h) splnitelná formule, i) kontradikce.

1.8. Maminka koupila maso a těstoviny nebo maminka koupila pouze zeleninu.

1.9. V kavárně se sejde Petra s Marií.

1.10. a) pravdivý výrok, $\forall x \in \mathbb{N} : x - 5 \neq 3$; b) nepravdivý výrok, $\exists x \in \mathbb{N} : x^2 \leq 1$; c) pravdivý výrok, $\exists x \in \mathbb{N} : x^2 < 1$; d) nepravdivý výrok, $\forall x \in \mathbb{N} : 3x \neq 7$; e) pravdivý výrok, $\exists x \in \mathbb{N} : x$ sudé a současně $x + 2$ je liché; f) pravdivý výrok, $\exists x \in \mathbb{N} : x - 1 < 0 \vee x + 1 < 2$; g) nepravdivý výrok, $\exists x \in \mathbb{N} : x - 5 \neq 3$.

1.11. a) $\exists x \in \mathbb{N} : x < 0$; b) $\forall\ \Delta ABC : \alpha + \beta + \gamma = 180°$; c) $\exists x \in \mathbb{Z} : x > 0$.

2. ZÁKLADY TEORIE MNOŽIN

Teorie množin vznikla koncem 19. století zejména zásluhou německého matematika Georga Cantora (1845 – 1918), který pojem množina charakterizoval jako: „každý souhrn dobře rozlišitelných předmětů naší mysli nebo intuice, který chápeme jako celek“. Uvedená formulace však nemohla být základem matematické teorie množin, protože byla příliš obecná. Připouští totiž i možnost existence takových množin, jako je například množina všech množin. Z tohoto důvodu se teorie množin buduje pomocí axiomatické metody, která vychází z jistých tvrzení (tzv. axiómů). V axiómech jsou zformulovány určité vlastnosti základních pojmů, které se nedefinují, ale prohlásí se za pravdivé a z nich se potom odvozují další poznatky. V našem případě je to pojem **množina** a **prvek množiny**.

2.1 Množina a prvek množiny

Množiny budeme označovat velkými písmeny latinské abecedy A, B, C, ..., případně speciálními symboly (např. $\emptyset$).

Objekty, které patří do množiny A, nazýváme prvky množiny A. Prvky množin budeme označovat malými (a, b, c, ...) nebo velkými písmeny (A, B, C, ...), protože i množiny mohou být prvky jiných množin. Skutečnost, že objekt a je prvkem množiny A, zapisujeme $a \in A$. Pokud objekt a není prvkem množiny A, píšeme $a \notin A$. Množina označená symbolem $\emptyset$ má zvláštní postavení mezi množinami a nazývá se prázdná. Je to taková množina, která neobsahuje žádný prvek. Prázdnou množinou je například množina tuleňů žijících na stromech.

Množina je takový soubor objektů (prvků), kdy u každého objektu můžeme jednoznačně určit, zda do daného souboru patří nebo nepatří. Pro každou množinu a pro každý objekt může nastat právě jedna z těchto dvou možností.

Množiny obecně můžeme určit dvěma způsoby:

a) výčtem prvků množiny,

b) zápisem charakteristické vlastnosti množiny.

První způsob je takový, že se vyjmenují nebo zapíší všechny prvky, které do uvažované množiny patří. Například, pokud množina A obsahuje čísla 2, 3, 4, pak prvním způsobem můžeme množinu určit zápisem $A = \{2, 3, 4\}$. Je zřejmé, že ne každou množinu můžeme určit výčtem prvků. Konkrétně není možné vyjmenovat prvky množiny, která obsahuje nekonečně mnoho prvků. V tomto případě musíme množinu určit tak, že uvedeme vlastnost, kterou každý prvek dané množiny má, tedy druhým způsobem. Například množinu kladných celých čísel $\mathbb{Z}^+$ můžeme zapsat následujícím způsobem: $\mathbb{Z}^+ = \{x \in \mathbb{Z}; x > 0\}$. Tento zápis čteme takto: „$\mathbb{Z}^+$ je množina všech celých x, pro které platí $x > 0$“. Množinu $\mathbb{Z}^+$ jsme určili charakteristickou vlastností, která je vyjádřena vztahem $x > 0$.

Příklad 2.1. Množinu B přirozených čísel menších jak 21 můžeme určit oběma způsoby takto:

a) výčtem prvků množiny:

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}.$$

V případě, že množinu prvků tvoří řada po sebe následujících čísel, můžeme použít i zkrácený zápis: $B = \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$.

b) charakteristická vlastnost množiny: $B = \{x \in \mathbb{N}; x < 21\}$, případně $B = \{x \in \mathbb{N}; x \leq 20\}$.

Při určovaní množin charakteristickou vlastností je důležité si uvědomit, že množina je správně určená tehdy, když o každém objektu umíme jednoznačně rozhodnout, zda danou vlastnost má, nebo nemá. Jinými slovy, nastane právě jedna ze dvou možností – do uvažované množiny patří, nebo nepatří.

Pro označení nekonečných číselných množin budeme používat následující standardní označení:

$\mathbb{N}$ – **množina všech přirozených čísel**: množinu přirozených čísel budeme užívat nejčastěji. Jedná se o nekonečnou množinu celých kladných čísel: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, \ldots, n, \ldots\}$. Nula do množiny přirozených čísel nepatří, pokud není dodefinována. Takto dodefinovaná množina přirozených čísel mívá označení $\mathbb{N}_0$.

$\mathbb{Z}$ – **množina všech celých čísel**: daná množina obsahuje posloupnost všech čísel přirozených, čísel k nim opačných a číslo nula: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

$\mathbb{Q}$ – **množina všech racionálních čísel**: množina všech čísel, která lze zapsat ve tvaru zlomku, kde v čitateli jsou čísla celá a ve jmenovateli čísla přirozená.

$\mathbb{R}$ – **množina všech reálných čísel**: reálné číslo je jednoduše řečeno libovolné číslo, které můžeme znázornit na číselné osy (na přímce). Kromě celých čísel tedy můžeme uvažovat i jiná čísla, které se mezi celými čísly mohou nacházet (různá desetinná čísla).

Můžeme si všimnout, že v zápisu určení množiny prostřednictvím charakteristické vlastnosti je definováno, do které z číselných množin budou prvky dané množiny patřit, například v příkladu 2.1 je to množina přirozených čísel. Můžeme však uvažovat také o menších konečných číselných množinách nebo o konkrétním výběru prvků, na kterém budeme množiny určovat. V daném případě budeme hovořit o tzv. základní množině, kterou obecně můžeme označit písmenem $\mathcal{U}$.

Příklad 2.2. Nechť $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, \ldots, 16\}$. Uvažujte množiny definované na základní množině $\mathcal{U}$ a určené charakteristickou vlastností: $A = \{x \in \mathcal{U}; 2 \leq x < 16\}$, $B = \{x \in \mathcal{U}; x \text{ je prvočíslo}\}$, $C = \{x \in \mathcal{U}; x \text{ je dělitelné čtyřmi}\}$. Vypište prvky množin A, B, C.

Řešení:

- $A = \{x \in \mathcal{U}; 2 \leq x < 16\}$: Množina A obsahuje prvky množiny $\mathcal{U}$, které vyhovují vlastnosti $2 \leq x < 16$, a tedy $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$.
- $B = \{x \in \mathcal{U}; x \text{ je prvočíslo}\}$: Prvočíslo je přirozené číslo větší než 1, které je dělitelné jenom samým sebou a číslem 1. V základní množině $\mathcal{U}$ jsou prvočísla $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$.
- $C = \{x \in \mathcal{U}; x \text{ je dělitelné čtyřmi}\}$: Již v předešlé kapitole jsme se setkali s relací „dělí“. Matematicky můžeme množinu zapsat jako $C = \{x \in \mathcal{U}; 4|x\}$ a čteme „čtyři dělí x“. Do množiny C tak patří ty čísla z množiny $\mathcal{U}$, které jsou násobky čísla čtyři: $C = \{4, 8, 12, 16\}$.

Úloha 2.1. Určete všechny prvky následujících množin:

a) $A = \{x \in \mathbb{N}; x \leq 5\}$,

b) $B = \{x \in \mathbb{Z}; -5 \leq x < 5\}$,

c) $C = \{x \in \mathbb{N}; x^2 < 10\}$,

d) $D = \{x \in \mathbb{Z}; 3 \cdot x = 5\}$,
e) $E = \{x \in \mathbb{N}; 2|x \wedge x < 16\}$,
f) $F = \{x \in \mathbb{Q}; 3 \cdot x = 5\}$.

Řešení: *a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; b) $B = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$; c) $C = \{1, 2, 3\}$; d) $D = \emptyset$; e) $E = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$; f) $F = \left\{\frac{5}{3}\right\}$.*

Úloha 2.2. Je dána základní množina $\mathcal{U} = \{x \in \mathbb{N} : x < 23\}$ obsahující následující množiny:
a) $G = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$,
b) $H = \{7, 14, 21\}$,
c) $I = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$,
d) $J = \{1, 4, 9, 16\}$.
Vyjádřete tyto množiny charakteristickou vlastností.

Řešení: *a) $G = \{x \in \mathcal{U}; 5 \leq x \leq 13\}$, uvedenou charakteristickou vlastnost je možné zapsat i pomocí porovnávacích znamének menší $G = \{x \in \mathcal{U}; 4 < x < 14\}$ nebo jejich kombinací; b) $H = \{x \in \mathcal{U}; 7|x\}$; c) $I = \{x \in \mathcal{U}; x \text{ je prvočíslo}\}$; d) $J = \left\{x \in \mathbb{N}; x^2 \in \mathcal{U}\right\}$.*

2.2 Vztahy mezi množinami

Při studiu základů teorie množin je důležitá znalost základních vztahů mezi množinami. V této části budeme definovat základní vztahy mezi množinami: rovnost a ekvivalenci množin, s tím spojenou kardinalitu množin, inkluzi množin a systém množin, kterým je i potenční množina.

Nechť A a B jsou dvě libovolné množiny. Říkáme, že **množina A se rovná množině B** právě tehdy, když množina A obsahuje stejné prvky jako množina B. Zapisujeme $A = B$. Pokud se množiny A a B sobě nerovnají, říkáme, že množiny A a B jsou různé a píšeme $A \neq B$.

Například množiny $A = \{a, b, c, d\}$ a $B = \{d, a, c, b\}$ se rovnají, protože obsahují stejné prvky. Z dané ukázky vyplývá, že nezáleží na způsobu, jakým jsou množiny zapsané, ani na tom, v jakém pořadí jsou vyjmenované prvky množin. Může nastat taková situace, že ten stejný prvek je označen různým názvem nebo je v množině uveden vícekrát. Je potřebné však zdůraznit, že jeden a stejný prvek se v množině může vyskytovat jenom jednou a tedy správně se vyjmenuje jen jedenkrát.

Příklad 2.3. Přirozené číslo 2 můžeme zapsat různým způsobem: $4-2$, 2^1 a podobně. Na základě toho platí, že například množiny $X = \{4-2, 0, 3\}$ a $Y = \{2, 0, 3\}$ se sobě rovnají. Na stejném principu platí, že i množiny $\{x \in \mathbb{N}; x < 11\}$ a $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ se rovnají, protože obsahují stejné prvky.

Poznámka 2.1. Pokud jsou množiny určené charakteristickou vlastností, nemusí být celkem zřejmé, zda se rovnají nebo se nerovnají. Viz následující příklad.

Příklad 2.4. Nechť jsou na množině reálných čísel definované množiny $A \neq \emptyset$, $B = \{x \in \mathbb{R}; x^2 < 0\}$. Protože neexistuje reálné číslo, jehož druhá mocnina je záporné číslo, množina B neobsahuje žádné prvky, tedy je to prázdná množina. Platí $A = B$. Stejně tak i pro množinu $\mathbb{Z}^+ = \{x \in \mathbb{Z}; x > 0\}$ a množinu přirozených čísel $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ platí, že se sobě rovnají. Naopak množiny $A = \{x \in \mathbb{N}; x + 1 = 0\}$ a $B = \{x \in \mathbb{Z}; x + 1 = 0\}$ jsou různé, protože $A = \emptyset$ a $B = \{-1\}$.

Existuje však rozdíl mezi rovností množin a ekvivalencí dvou množin. Platí, že dvě množiny, které jsou ekvivalentní, se nemusí rovnat. Pro určení definice ekvivalentních množin je potřebné si uvést pojem mohutnosti (kardinality) množiny. Mohutnost dané množiny vyjadřuje počet prvků této množiny (ozn. $|A|$, případně se můžeme setkat s označením $\operatorname{card} A$).

Nechť A a B jsou libovolné množiny. Říkáme, že množiny A a B jsou ekvivalentní, pokud mají stejnou mohutnost (ozn. $A \sim B$).

Příklad 2.5. Rozdíl mezi ekvivalencí a rovností množin si budeme ilustrovat na několika množinách. Nechť jsou na základní množině $U = \{x \in \mathbb{N} : 4 < x \leq 33\}$ definovány následující množiny $A = \{x \in U : x \text{ je prvočíslo}\}$, $B = \{x \in U : 4|x\}$, $C = \{5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31\}$ a $D = \{x \in U : 7 \leq x \leq 13\}$. Určeme si prvky množin, které jsou dané charakteristickou vlastností: $A = \{5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31\}$, $B = \{8, 12, 16, 20, 24, 28, 32\}$ a $D = \{7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$. Vidíme, že množiny A a C obsahují stejné prvky, tedy tyto množiny se rovnají $A = C$ a také jsou ekvivalentní $A \sim C$. Množiny B a D mají různé prvky, ale stejnou mohutnost: $|B| = |D| = 7$, takže jsou ekvivalentní $B \sim D$.

Poznámka 2.2. Z uvedeného příkladu můžeme pozorovat, že když se dvě množiny rovnají, potom přirozeně mají i stejný počet prvků a tedy jsou ekvivalentní. Jak již bylo dříve zmíněno, naopak toto tvrzení neplatí. Jsou-li dvě množiny ekvivalentní, neznamená, že mají i stejné prvky.

Další vlastností, kterou si nadefinujeme bude inkluze množin.

Nechť A a B jsou dvě libovolné množiny. Říkáme, že **množina** A **je podmnožinou množiny** B právě tehdy, když každý prvek množiny A je i prvkem množiny B. Zapisujeme $A \subset B$.

Poznámka 2.3. Vztah množin $A \subset B$ můžeme vnímat i obráceně, množina B je **nadmnožinou** množiny A. Prázdná množina je podmnožinou každé množiny.

Zápis $A \subset B$ může znamenat dvě skutečnosti:

- Množiny A a B se nerovnají, ale množina A obsahuje některé prvky, které obsahuje také prvky množiny B. Matematicky zapsáno: $A \subset B$ a $A \neq B$. V daném případě hovoříme o vlastní podmnožině A množiny B.
- Množiny A a B se rovnají, ale také pro ně platí vztah inkluze. Z toho vyplývá, že pro každé dvě množiny A, B platí: $A = B$ právě tehdy, když $A \subset B$ a zároveň $B \subset A$.

Příklad 2.6. Určete množiny A a B, které současně splňují následující podmínky:

a) $\{2,5\} \subset A$, $A \subset \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $A \subset \{2,5,8,9,11\}$;
b) $B \subset \{2,4,6,8,10,14\}$, $B \subset \{6,10,14,18\}$, $\{6\} \subset B$.

Řešení: V obou případech existuje více než jedno řešení. Je potřebné si uvědomit, které prvky se v podmínkách opakují. Tyto prvky pak mohou patřit do dané množiny.
a) Uvedeným podmínkám vyhovují čtyři množiny: $A_1 = \{2,5\}$, $A_2 = \{2,5,8,9\}$, $A_3 = \{2,5,8\}$, $A_4 = \{2,5,9\}$.
b) Uvedeným podmínkám vyhovují čtyři množiny: $B_1 = \{6\}$, $B_2 = \{6,10,14\}$, $B_3 = \{6,10\}$, $B_4 = \{6,14\}$.

Úloha 2.3. Je daná základní množina výčtem prvků:

$$\mathcal{U} = \{1,2,5,6,8,9,11,13,14,15,16,19,22,23,24,25,27,28,31,32,33,35,36\}.$$

Rozhodněte o vzájemných vztazích mezi uvedenými množinami definovaných na základní množině $\mathcal{U}$:

$$G = \{2,6,8\},\ H = \{x \in \mathcal{U} : x \leq 15\},\ I = \{x \in \mathcal{U} : 3x+1 < 46\},$$
$$J = \{x \in \mathcal{U}; x \text{ je prvočíslo}\},\ K = \{x \in \mathcal{U} : x|64\}, L = \{x \in \mathcal{U} : 15|x\},$$
$$M = \{x \in \mathcal{U} : x^2 \leq 100\},\ O = \{x \in \mathcal{U} : x \text{ je sudé číslo}\}.$$

Řešení: *Rovnost množin: $I = L$; ekvivalence množin: $H \sim O$, $J \sim M$; inkluze množin: $I \subset H$, $L \subset H$, $G \subset H$, $G \subset O$, $G \subset M$.*

Příklad 2.7. Jsou dány množiny $A = \{1\}$, $B = \{1,2,3\}$, $C = \{1,2,3,\{1,3\}\}$, $D = \{\{1,3\},\emptyset\}$, $E = \{1,3\}$. Co můžeme říct o uvedených množinách z hlediska jejich vzájemných vztahů: rovnosti a inkluze?

Řešení: Ze zadání vidíme, že prvek 1 je jediným prvkem množiny A a současně je i prvkem množin B, C a E. Potom platí $A \subset B$, $A \subset C$ a $A \subset E$. Každý prvek množiny E je i prvkem množiny B a množiny C, proto platí $E \subset B$ a $E \subset C$. Zároveň vidíme, že množina E je prvkem množiny C a množiny D, tedy můžeme psát $E \in C$ a $E \in D$.

Na základě výsledků z předchozího příkladu 2.7 můžeme vidět, že prvky množin mohou být i jiné množiny. Množiny, jejichž prvky jsou množiny, nazýváme **systémy množin**. Např. množina D je systém množin. Speciálním systémem množin je množina $S = \{\{1\},\{3\},\{1,3\},\emptyset\}$. Prvky tohoto systému jsou všechny podmnožiny množiny $E = \{1,3\}$.

Systém všech podmnožin množiny A sa nazývá **potenční systém množiny A** nebo **potenční množina množiny** A. Označujeme ho symbolem $P(A)$.

Počet všech prvků potenční množiny se odvíjí od množiny, ze které systém množin vytváříme. Pokud množina A obsahuje n prvků, potom její potenční systém $P(A)$ obsahuje 2^n prvků:

- Když $|A| = 1$: $|P(A)| = 2^1 = 2$;
- Když $|A| = 2$: $|P(A)| = 2^2 = 4$;
- Když $|A| = 3$: $|P(A)| = 2^3 = 8$.

Příklad 2.8. Nechť $A = \emptyset$, $B = \{x,y,z\}$. Najděte množiny všech podmnožin množin A a B, tj. potenční systémy množin A a B.

Řešení: V prvním případě potenční množina $P(A)$ bude obsahovat jenom jeden prvek, a to právě prázdnou množinu, tedy $P(A) = \{\emptyset\}$. Pro potenční systém množin množiny B budeme uvažovat každou možnou podmnožinu množiny B, které může obsahovat. Nesmíme zapomenout opět na prázdnou množinu, která je podmnožinou každé množiny: $P(B) = \{\{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}, \emptyset\}$. Nakonec si můžeme ověřit, zda jsme uvedli všechny možné podmnožiny množiny B. Mohutnost množiny B je 3, a tedy mohutnost množiny $P(B) = 2^3 = 8$.

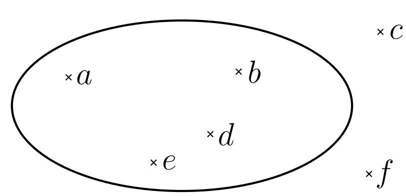
Poznámka 2.4. Je potřeba si dát pozor na zápis prázdné množiny, protože $\emptyset \neq \{\emptyset\}$. Zápis $\emptyset$ představuje symbol pro prázdnou množinu, která neobsahuje žádné prvky, a zápis $\{\emptyset\}$ je jednoprvková množina, která obsahuje prázdnou množinu, jako je uvedeno v příkladu 2.8.

Úloha 2.4. Určete potenční množiny následujících množin:
a) $A = \{-1, 0, 1\}$,
b) $B = \{3, 4\}$,
c) $C = \{100\}$,
d) $D = \emptyset$.

Řešení: *a)* $P(A) = \{\{-1\}, \{0\}, \{1\}, \{-1, 0\}, \{-1, 1\}, \{0, 1\}, \{-1, 0, 1\}, \emptyset\}$; *b)* $P(B) = \{\{3\}, \{4\}, \{3, 4\}, \emptyset\}$; *c)* $P(C) = \{\{100\}, \emptyset\}$; *d)* $P(D) = \{\emptyset\}$.

2.3 Grafické znázornění množin

Při řešení různých reálných situací o množinách je vhodné využít grafické znázornění množin. Nejjednodušším způsobem, jak graficky znázornit množiny, je pomocí tzv. oválových diagramů množin. Diagram se znázorňuje uzavřenou čarou (oválem), přičemž prvky množiny znázorňujeme jako body vevnitř oválu a prvky, které nepatří do množiny, znázorňujeme jako body mimo tento ovál. Oválový diagram na následujícím obrázku (obr. 2.1) vyjadřuje skutečnost, že prvky $\{a, b, d, e\}$ patří uvažované množině a že prvky $\{c, f\}$ do této množiny nepatří.

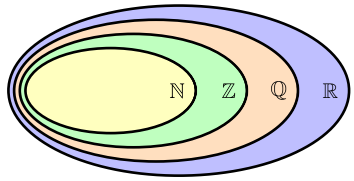


Obr. 2.1: Ukázka oválového diagramu[1]

Příklad 2.9. Znázorněme si pomocí oválových diagramů vzájemný vztah nekonečných číselných množin definovaných v podkapitole 2.1: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Množiny můžeme graficky znázorňovat také pomocí tzv. Vennových diagramů. Pro interpretaci dalších vlastností v rámci teorie množin budeme i my využívat tento typ grafického znázornění množin.

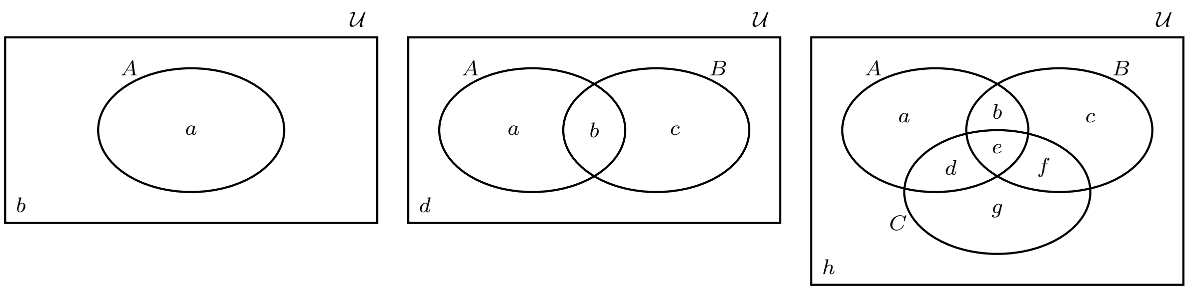
[1] S oválovými diagramy pracují žáci prvních ročníků základní školy.



Obr. 2.2: Inkluze nekonečných číselných množin

Množiny se ve Vennových diagramech znázorňují uzavřenými čárami (kružnicemi nebo elipsami), které se nachází v obdélníku. Tento obdélník představuje množinu obsahující všechny objekty i množiny, které v dané situaci uvažujeme, tedy tzv. **základní množinu**. Uzavřené čáry rozdělují obdélník na určité podmnožiny množiny $\mathcal{U}$.

Na obrázku 2.3 jsou zobrazeny tři ukázky základních množin znázorněných pomocí Vennových diagramů, které obsahují jednu, dvě a tři podmnožiny.



Obr. 2.3: Vennovy diagramy a rozdělení základní množiny na elementární oblasti

Množiny znázorněné na základní množině $\mathcal{U}$ ji rozdělují na několik částí, které nazýváme **elementární oblasti** (pole). Na obrázku jsou elementární pole označené malými písmeny latinské abecedy a jejich počet závisí od počtu podmnožin znázorněných na základní množině $\mathcal{U}$:

- na základní množině je 1 množina: 2 elementární oblasti (a, b);
- na základní množině jsou 2 množiny: 4 elementární oblastí (a, b, c, d);
- na základní množině jsou 3 množiny: 8 elementární oblastí (a, b, c, d, e, f, g, h).

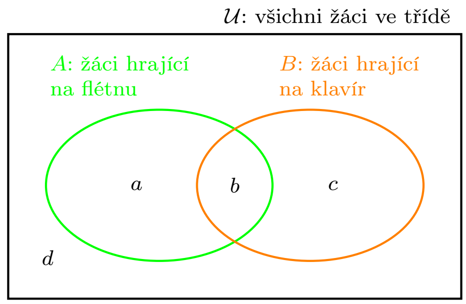
Pokud je na základní množině $\mathcal{U}$ definováno (znázorněno) n množin, pak na Vennově diagramu bude 2^n elementárních oblastí. Žádné dvě elementární oblasti nemají společný prvek, tedy prvky patří právě do jedné z elementárních oblastí základní množiny $\mathcal{U}$. Hovoříme, že elementární oblasti jsou **disjunktní**.

Ukážeme si na konkrétním příkladu, jak elementární oblasti rozdělují základní množinu $\mathcal{U}$ a jak grafické znázornění množin může pomoct při řešení některých slovních úloh.

Příklad 2.10. Ve třídě je 32 žáků, z toho na flétnu umí hrát 26 žáků a na klavír umí hrát 14 žáků. Současně na oba nástroje umí hrát 12 žáků.

a) Kolik žáků neumí hrát ani na jeden nástroj?
b) Kolik žáků umí hrát jen na klavír?
c) Kolik žáků umí hrát jen na flétnu?

Řešení: Příklad bychom mohli řešit i úvahou, ale ukážeme způsob, jak při řešení možno použít Vennův diagram. Vytvořme si Vennův diagram základní množiny $\mathcal{U}$ (obr. 2.4), která označuje množinu všech žáků ve třídě. Množina A označuje množinu těch žáků z třídy, kteří umí hrát na flétnu, a množina B označuje množinu všech žáků ve třídě, kteří umí hrát na klavír.



Obr. 2.4: Vennův diagram Př. 2.10

Označení a, b, c, d představují jednotlivé elementární oblasti a zároveň zastupují počet prvků příslušné elementární oblasti. Pro zjednodušení si můžeme jednotlivé elementární oblasti označit a popsat následovně:

- a je počet žáků, kteří umí hrát jen na flétnu,
- c je počet žáků, kteří umí hrát jen na klavír,
- b je počet žáků, kteří umí hrát na oba nástroje zároveň (na flétnu i na klavír),
- d je počet žáků, kteří neumí hrát ani na jeden nástroj.

Z podmínek úlohy vyplývají následující rovnosti:

- množina všech žáků ve třídě: $a + b + c + d = 32$;
- množina žáků, kteří umí hrát na flétnu: $a + b = 26$;
- množina žáků, kteří umí hrát na klavír: $b + c = 14$;
- žáci, kteří umí hrát na oba nástroje současně: $b = 12$.

Použijeme dosazovací metodu, přitom poznáme počet prvků elementární oblasti b. Po dosazení hodnoty $b = 12$ do výše uvedených rovností dostaneme počty i ostatních elementárních oblastí: $a = 14$, $c = 2$, $d = 4$. Odpovědi na jednotlivé otázky slovní úlohy zní:

a) Čtyři žáci neumí hrát ani na jeden z uvedených nástrojů.
b) Dva žáci umějí hrát jenom na klavír.
c) Jenom na flétnu umí hrát 14 žáků.

Příklad 2.11. Ze 400 zaměstnanců firmy využívá k cestě do zaměstnání 350 zaměstnanců hromadnou dopravu, konkrétně autobus, vlak nebo tramvaj. Pouze tramvají jezdí do zaměstnání 150 zaměstnanců, pouze autobusem 70 zaměstnanců. Autobus využívá celkem 120 zaměstnanců, vlak 100 zaměstnanců a tramvaj 275 zaměstnanců. Alespoň dva z uvedených dopravních prostředků využívá 130 zaměstnanců. Tramvaj i vlak využívá 95 zaměstnanců. Je třeba zjistit, kolik zaměstnanců využívá právě dva z uvedených dopravních prostředků a kolik zaměstnanců jezdí do zaměstnání pouze vlakem.

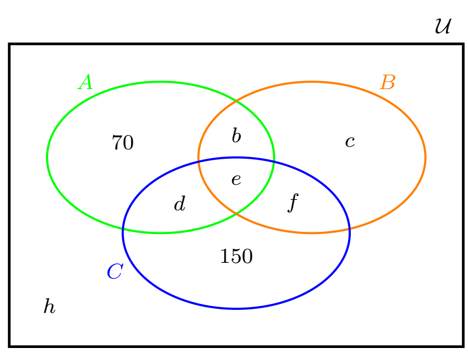
Řešení: Po prvním přečtení zadání úlohy se situace zdá dost nepřehledná. Nejdříve si zavedeme značení množin ve Vennově diagramu.

- Základní množina $\mathcal{U}$ označuje množinu všech zaměstnanců firmy.
- Množina A označuje množinu všech zaměstnanců firmy využívajících autobus.
- Množina B označuje množinu všech zaměstnanců firmy využívajících vlak.
- Množina C označuje množinu všech zaměstnanců firmy využívajících tramvaj.

Vennův diagram obsahuje osm elementárních oblastí a, b, c, d, e, f, g, h. Pomocí elementárních oblastí zapíšeme rovnosti plynoucí z podmínek v zadání.

- Počet všech zaměstnanců: $a+b+c+d+e+f+$ $+g+h=400.$
- Zaměstnanci využívající hromadnou dopravu: $a+b+c+d+e+f+g=350.$
- Zaměstnanci cestující jenom tramvají: $g=150.$
- Zaměstnanci cestující jenom autobusem: $a=70.$
- Cestující autobusem: $a+b+d+e=120.$
- Cestující vlakem: $b+c+e+f=100.$
- Cestující tramvají: $d+e+f+g=275.$
- Cestující alespoň dvěma dopravními prostředky: $b+e+d+f=130.$
- Cestující tramvají a zároveň vlakem: $e+f=95.$

Z rovností si můžeme dosadit konkrétní hodnoty elementárních oblastí přímo do Vennova diagramu (obr. 2.5).

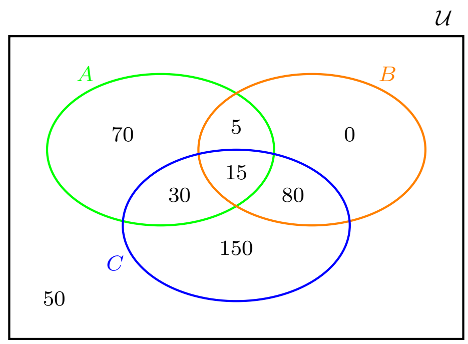


Obr. 2.5: Vennův diagram Př. 2.11

Je potřeba vypočítat, kolik zaměstnanců používá právě dva z uvedených dopravních prostředků, tedy součet $b+d+f$, a kolik zaměstnanců jezdí do zaměstnání jenom vlakem, tedy hodnotu c.

Pro vyřešení daného problému použijeme opět dosazovací metodu. Z první a druhé rovnice plyne, že $h=50$. Dále vidíme například, že z rovnosti $d+e+f+g=d+95+150=275$ plyne $d=30$. Pak z rovnosti $b+e+d+f=b+95+30=130$ dostaneme $b=5$. Podobně z rovnosti $b+c+e+f=5+c+95=100$ plyne $c=0$. Z rovnosti $a+b+d+e=70+5+30+e=120$ získáme $e=15$. Je-li $e+f=95$, pak $f=80$.

Vypočítali jsme si hodnoty všech elementárních oblastí, pro názornost je dosadíme do Vennova diagramu (obr. 2.6).



Obr. 2.6: Vennův diagram Př. 2.11

Z dosazených hodnot si můžeme ověřit správnost řešení, a tedy jestli spočítáme součet prvků ze všech elementárních oblastí, měl by nám vyjít počet všech zaměstnanců: $70 + 5 + 0 + 30 + 15 + 80 + 150 + 50 = 400$. Nyní můžeme odpovědět na otázky zadané slovní úlohy. Právě dva z uvedených dopravních prostředků používá 115 zaměstnanců $(b+d+f)$ a nikdo ze zaměstnanců nejezdí do práce výlučně vlakem (elementární oblast c).

Úloha 2.5. Na základní množině $\mathcal{U} = \{x \in \mathbb{Z} : 0 \leq x < 17\}$ jsou definované následující množiny:

$$A = \{0, 2, 3, 4, 5, 7, 16\}, \quad B = \{1, 3, 8, 9, 11, 15, 16\}, \quad C = \{3, 4, 7, 9, 10, 15, 16\}.$$

Zaznamenejte prvky do Vennova diagramu a vypište prvky elementárních oblastí.

Řešení: $a = \{0, 2, 5\}$, $b = \{\ \}$, $c = \{1, 8, 11\}$, $d = \{4, 7\}$, $e = \{3, 16\}$, $f = \{9, 15\}$, $g = \{10\}$, $h = \{6, 12, 13, 14\}$.

Úloha 2.6. V hotelu je možnost si připlatit k pobytu i snídani a večeři. Ze 48 si 15 účastníků zájezdu připlatilo v hotelu za večeři, za obě služby 13 a 10 účastníků si nepřiplatilo nic. Kolik účastníků si připlatilo za snídani?

Řešení: *Za snídani si připlatilo* 36 *účastníků zájezdu.*

Úloha 2.7. Studenti se měli podrobit třem těžkým zkouškám za sebou. Ze 124 studentů složilo pouze první zkoušku 22 studentů, první a druhou zkoušku složilo 28, druhou a třetí 52, pouze druhou zkoušku 12, první nebo třetí (tj. alespoň jednu z nich) 96 studentů, všechny zkoušky složilo 20 studentů, 30 studentů nesložilo ani první ani druhou zkoušku. Kolik studentů nesložilo ani jednu zkoušku a kolik jich ještě bude skládat jednotlivé zkoušky?

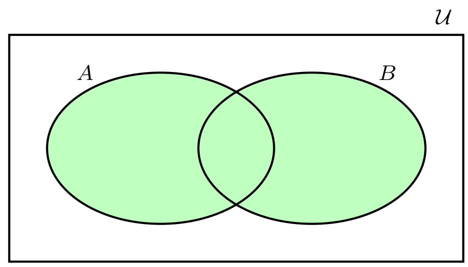
Řešení: *Ani jednu zkoušku nesložilo* 16 *studentů. První zkoušku bude ještě skládat* 74 *studentů, druhou* 52 *studentů a třetí zkoušku bude ještě skládat* 58 *studentů.*

2.4 Operace s množinami

V této části budeme definovat základní množinové operace jako jsou doplněk množiny, sjednocení, průnik a rozdíl množin. Jednotlivé operace budeme ilustrovat pomocí Vennových diagramů a také na příkladech.

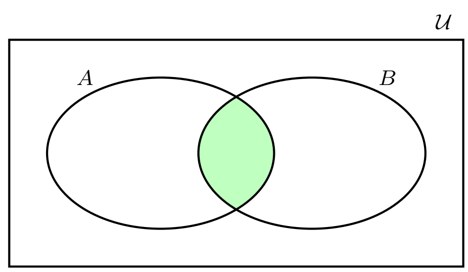
Uvažujme neprázdnou množinu $\mathcal{U}$ a její dvě libovolné podmnožiny A, B.

Sjednocením množin A, B rozumíme množinu všech prvků množiny $\mathcal{U}$, které patří alespoň do jedné z množin A a B (obr. 2.7). Označujeme ji symbolem $A \cup B$. Matematický zápis sjednocení: $A \cup B = \{x \in \mathcal{U}; x \in A \text{ nebo } x \in B\}$.



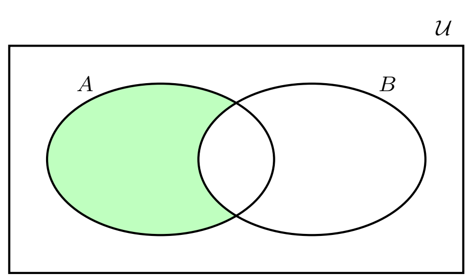
Obr. 2.7: Sjednocení množin A, B znázorněno Vennovým diagramem

Průnikem množin A, B rozumíme množinu všech prvků množiny $\mathcal{U}$, které patří do množiny A a zároveň do množiny B (obr. 2.8). Označujeme ji symbolem $A \cap B$. Matematický zápis průniku: $A \cap B = \{x \in \mathcal{U}; x \in A \text{ a zároveň } x \in B\}$.



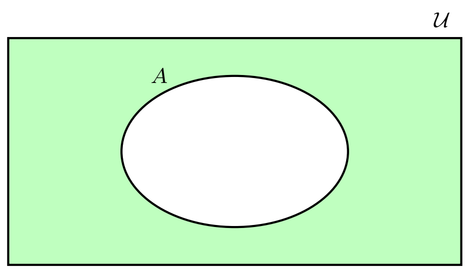
Obr. 2.8: Průnik množin A, B znázorněn Vennovým diagramem

Rozdílem množin A, B rozumíme množinu všech prvků množiny $\mathcal{U}$, které patří do množiny A a zároveň nepatří do množiny B (obr. 2.9). Označujeme ji symbolem $A - B$. Matematický zápis rozdílu množin: $A - B = \{x \in \mathcal{U}; x \in A \text{ a zároveň } x \notin B\}$.



Obr. 2.9: Rozdíl množin A, B znázorněn Vennovým diagramem

Doplňkem (resp. komplementem) množiny A (vzhledem k množině $\mathcal{U}$) nazýváme množinu všech prvků množiny $\mathcal{U}$, které nepatří do množiny A (obr. 2.10). Doplněk množiny A budeme označovat symbolem A'. Matematický zápis doplňku množiny A: $A' = \{x \in \mathcal{U}; x \notin A\}$.



Obr. 2.10: Doplněk množiny A vzhledem k základní množině $\mathcal{U}$ znázorněn Vennovým diagramem

Kromě doplňku množiny se operace mezi množinami váží vždy ke dvěma množinám, které jsou podmnožinami základní množiny $\mathcal{U}$. Uvedeme si nejdůležitější vlastnosti množinových operací.

1. Pro každou podmnožinu A základní množiny $\mathcal{U}$ platí
   $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$, $\quad A \cap \mathcal{U} = A$, $\quad A \cup \emptyset = A$,
   $A \cap \emptyset = \emptyset$, $\quad A \cap A = A$, $\quad A \cup A = A$,
   $A \cup A' = \mathcal{U}$, $\quad A \cap A' = \emptyset$.
2. Pro každé dvě množiny A, B platí
   komutativní zákony:
   $A \cup B = B \cup A$, $\qquad A \cap B = B \cap A$;
   de Morganovy pravidla:
   $(A \cup B)' = A' \cap B'$, $\quad (A \cap B)' = A' \cup B'$.
3. Pro každé tři množiny A, B, C platí
   asociativní zákony:
   $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $\qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
   distributivní zákony:
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $\quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
4. Jestliže $A \neq B$, pak $A - B \neq B - A$.
5. Jestliže $A \subset B$, pak $A - B = \emptyset$.
6. Pro každé dvě disjunktní množiny A, B platí: $A - B = A$, $B - A = B$.

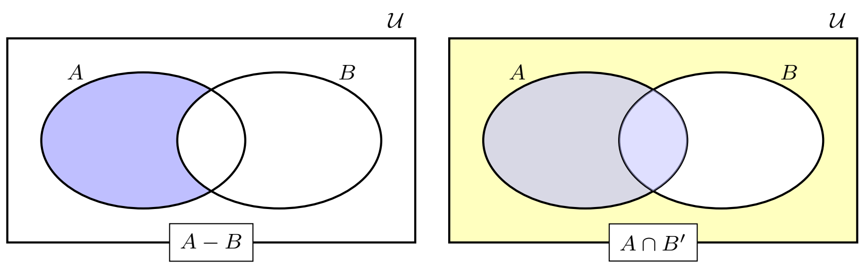
Poznámka 2.5. Již výše bylo zmíněno, že množiny A, B se nazývají disjunktní, pokud nemají žádné společné prvky, tj. jestli platí $A \cap B = \emptyset$.

Příklad 2.12. Pomocí Vennových diagramů ukažte platnost rovnosti zápisu množin:

$$A - B = A \cap B'.$$

Řešení Do Vennova diagramu si znázorníme dvě množiny A, B (obr. 2.11). Znázornění rozdílu $A-B$ je vyšrafováno na obrázku vlevo modrou barvou. Pravá strana rovnosti $A \cap B'$ je znázorněna ve dvou krocích. Doplněk množiny B je zvýrazněn žlutou barvou a množina

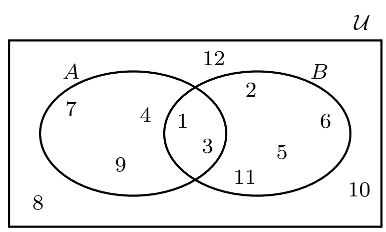
A barvou modrou. Elementární oblast, do které zasahují obě barvy, je výsledné znázornění zápisu množin $A \cap B'$. Tímto jsme ukázali, že rovnost $A - B = A \cap B'$ platí.



Obr. 2.11: Řešení příkladu 2.12

Příklad 2.13. Uvažujte základní množinu $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Vennovým diagramem znázorněte její podmnožiny $A = \{1, 3, 4, 7, 9\}$, $B = \{1, 2, 3, 5, 6, 11\}$.

Řešení Viz obrázek 2.12.



Obr. 2.12: Řešení příkladu 2.13

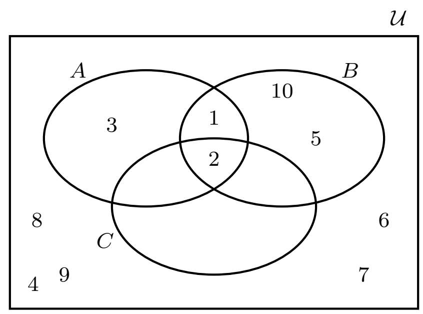
Úloha 2.8. Na základě předpisu množin v předcházejícím příkladu zapište výčtem prvků následující množiny: A', B', $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $A' \cup B$, $A' \cap B'$.

Řešení: $A' = \{2, 5, 6, 8, 10, 11, 12\}$, $B' = \{4, 7, 8, 9, 10, 12\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11\}$, $A \cap B = \{1, 3\}$, $A - B = \{4, 7, 9\}$, $A' \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 8, 10, 11, 12\}$, $A' \cap B' = \{8, 10, 12\}$.

Příklad 2.14. Uvažujte základní množinu $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, na které jsou určeny podmnožiny A, B, C charakteristickou vlastností: $A = \{x \in \mathcal{U}; x < 4\}$, $B = \{x \in \mathcal{U}; x|10\}$ a $C = \{x \in \mathcal{U}; x^2 + 1 = 5\}$. Zapište je výčtem prvků a znázorněte Vennovým diagramem. Určete oběma způsoby (charakteristickou vlastností i výčtem prvků) následující množiny:

$$A',\ B',\ C',\ A \cup B,\ A \cap B,\ A \cap C,\ A - B,\ A' \cup B,\ A' \cap B',\ A - C.$$

Řešení: Nejdřív si určíme prvky množin A, B, C: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 5, 10\}$ a $C = \{2\}$. Množiny A, B, C jsou znázorněny Vennovým diagramem na následujícím obrázku 2.13:



Obr. 2.13: Řešení příkladu Př. 2.14

Pomocí grafického znázornění se nám jednodušeji určí prvky zadaných množin, ke kterým uvedeme i charakteristickou vlastnost:
$A' = \{x \in \mathcal{U}; x \notin A\} = \{x \in \mathcal{U}; x \geq 4\} = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$,
$B' = \{x \in \mathcal{U}; x \notin B\} = \{x \in \mathcal{U}; x \nmid 10\} = \{3, 4, 6, 7, 8, 9\}$,
$C' = \{x \in \mathcal{U}; x \notin C\} = \{x \in \mathcal{U}; x^2 + 1 \neq 5\} = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.
V uvedených prvých třech případech můžeme vidět analogii k výrokové operaci negace.
$A \cup B = \{x \in \mathcal{U}; x < 4 \vee x|10\} = \{1, 2, 3, 5, 10\}$,
$A \cap B = \{x \in \mathcal{U}; x < 4 \wedge x|10\} = \{1, 2\}$,
$A \cap C = \{x \in \mathcal{U}; x < 4 \wedge x^2 + 1 = 5\} = \{2\}$,
$A - B = \{x \in \mathcal{U}; x < 4 \wedge x \nmid 10\} = \{3\}$,
$A' \cup B = \{x \in \mathcal{U}; x \geq 4 \vee x|10\} = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$,
$A' \cap B' = \{x \in \mathcal{U}; x \geq 4 \wedge x \nmid 10\} = \{4, 6, 7, 8, 9\}$,
$A - C = \{x \in \mathcal{U}; x < 4 \wedge x^2 + 1 \neq 5\} = \{1, 3\}$.

Úloha 2.9. Jsou dány množiny $A = \{0, 2, 4, 5, 7, 8\}$, $B = \{0, 2, 5, 6, 7, 11, 12\}$, $C = \{2, 4, 5, 6, 10\}$. Zapište výčtem prvků následující množiny:

$$A \cup B,\ (A \cup B) \cup C,\ (A \cup B) \cap C,\ A \cap B \cap C,\ B - (A \cup C),\ (A \cap C) \cup (B \cap C),$$
$$(A \cup C) - B,\ (A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C).$$

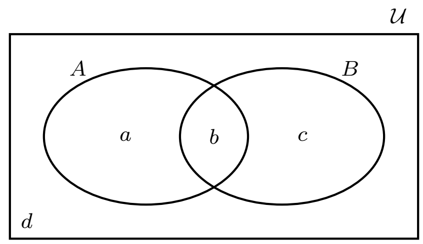
Řešení: $A \cup B = \{0, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 12\}$, $(A \cup B) \cup C = \{0, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12\}$, $(A \cup B) \cap C = \{2, 4, 5, 6\}$, $A \cap B \cap C = \{2, 5\}$, $B - (A \cup C) = \{11, 12\}$, $(A \cap C) \cup (B \cap C) = \{2, 4, 5, 6\}$, $(A \cup C) - B = \{4, 8, 10\}$, $(A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C) = \{0, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12\}$.

Vraťme se ještě ke slovním úlohám. Na následujícím příkladu vyvodíme vztah mezi množinovými operacemi, prostřednictvím kterých můžeme také řešit slovní úlohy.

Příklad 2.15. Ze 174 zákazníků, co přišlo na nákup, se do soutěže zapojilo jenom 103. Herní los vypsalo 95 zákazníků a kolem štěstí točilo 73 zákazníků. Kolik zákazníků vypsalo herní los i točilo kolem štěstí?

Řešení: Budeme postupovat jako v předcházejících příkladech slovních úloh, určíme popis jednotlivých množin:

- Základní množinu tvoří zákazníci, co přišli na nákup: $|\mathcal{U}| = 174$;
- Zákazníci, co se zapojili do soutěže (herní los nebo kolo štěstí): $|A \cup B| = 103$;
- Zákazníci, co využili herní los: $|A| = 95$;
- Zákazníci, co využili kolo štěstí: $|B| = 73$.



Obr. 2.14: Vennův diagram Př. 2.15

Můžeme postupovat i použitím vyjádřením počtu pomoci elementárních oblastí tak, jako jsou znázorněny na obrázku 2.14. Potom:

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= a + b + c = 103, \\ |A| &= a + b = 95, \\ |B| &= b + c = 73. \end{aligned}$$

Vidíme, že pro určení počtu prvků sjednocení množin $|A \cup B|$ nemůžeme jednoduše počet prvků jednotlivých množin spočítat. Vidíme, že při daném součtu bychom dvakrát připočítali počet prvků elementární oblasti b:

$$|A| + |B| = a + b + b + c.$$

Elementární oblast b představuje právě průnik množin $A \cap B$. Z uvedeného nám vyplývá vztah pro určení počtu prvků sjednocení množin:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Určeme si tedy mohutnost hledaného průniku pomocí zadaného vztahu:

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B|, \\ 103 &= 95 + 73 - |A \cap B|, \\ 103 &= 168 - |A \cap B|, \\ |A \cap B| &= 65. \end{aligned}$$

Odpověď: Celkem 65 zákazníků vypsalo herní los a zároveň točilo kolem štěstí.

Poznámka 2.6. Z uvedeného vztahu vyplývá, že součet množin se rovná současně počtu prvků jejich sjednocení jenom v jediném případě, když množiny jsou disjunktní. Tedy, je-li $A \cap B = \emptyset$, potom $|A \cup B| = |A| + |B|$.

2.5 Cvičení

2.1. Dané množiny vyjádřete výčtem všech prvků:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} : x < 11\}$,

b) $B = \{x \in \mathbb{N} : -3 < x \leq 6\}$,

c) $C = \{x \in \mathbb{Z} : -1 \leq x < 12\}$,

d) $D = \{x \in \mathbb{N} : x \geq 15\}$,

e) $E = \{x \in \mathbb{N} : x^2 < 100\}$,

f) $F = \{x \in \mathbb{N} : x - 3 = 11\}$,

g) $G = \{x \in \mathbb{Z} : 3x - 7 = 20\}$.

h) $H = \{x \in \mathbb{N} : 3|x\}$.

2.2. Určete charakteristickou vlastnost následujících množin:

a) $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,

b) $B = \{\dots, -7, -6, -5, -4\}$,

c) $C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\}$,

d) $D = \{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$,

e) $E = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots\}$,

f) $F = \{3, 6, 9, 12, 15, \dots\}$.

2.3. Na základní množině $U = \{0, 1, 2, 5, 6, 8, 9, 11, 13, 14, 15, 16, 19, 22, 23, 24, 25, 27, 28, 31, 32, 33, 35, 36\}$ jsou definovány následující podmnožiny: $H = \{x \in U : x \leq 14\}$, $I = \{x \in U : 3x + 1 < 46\}$, $J = \{x \in U : x \text{ je prvočíslo}\}$, $K = \{x \in U : x|64\}$, $M = \{x \in U : x^2 < 100\}$, $O = \{x \in U : x \text{ je sudé}\}$.

a) Určete prvky podmnožin.

b) Určete kardinalitu podmnožin.

c) Které podmnožiny jsou ekvivalentní?

d) Které podmnožiny se rovnají?

e) Uspořádejte podmnožiny na základě jejich kardinality.

f) Ke každé podmnožině napište její libovolnou podmnožinu, která má alespoň tři prvky.

2.4. Vypište prvky množin $A, B, C \subset M$, určete jejich kardinalitu a množiny porovnejte, kde:

$M = \{x \in \mathbb{N} : x + 2 < 22\}$,

$A = \{x \in M : x + 7 = 21\}$,

$B = \{x \in M : 6 \leq x < 12\}$,

$C = \{x \in M : 4 \text{ dělí } x\}$.

Dále vypište prvky množin: $A - B$, B', $A \cap C$, A', $A \cap B$, $A \cap B \cap C$.

2.5. Určete potenční množiny následujících množin: $A = \{3, 4, 5\}$, $B = \{0, 1\}$, $C = \{-1\}$, $D = \emptyset$.

2.6. Určete množinu K, která splňuje současně následující podmínky: $K \subset \{1, 3, 5, 9, 12\}$, $K \subset \{1, 4, 7, 8, 9, 12\}$ a $1 \in K$.

2.7. Ať jsou dané následující množiny: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2\}$, $C = \{1, 2, 3, \{1, 3\}\}$, $D = \{\{1, 3\}, \emptyset\}$, $E = \{1, 3\}$. Rozhodněte o vzájemných vztazích mezi uvedenými množinami.

2.8. Znázorněte pomocí Vennových diagramů:

a) $(A \cap B) \cup (A - B')$,

b) $(K' \cap M') - (K \cup M)$,

c) $(X' - Y) \cup (Y \cap X)'$,

d) $(O \cap P) \cup (P - Q)'$,

e) $[(C \cap A) \cup (A' - B)] \cap (C' - B)$.

2.9. Na umělecké škole se ze 114 přihlášených dětí zapsalo do letních táborů 98 dětí. Hudebního tábora se účastnilo 56 dětí a tábora se zaměřením na výtvarnou výchovu se účastnilo 68 dětí. Kolik dětí se účastnilo obou táborů?

2.10. Ze 129 studentů prvního ročníku vysoké školy chodí do menzy na oběd nebo večeři 116 studentů, 62 studentů dochází právě na jedno z těchto jídel. Přitom na obědy chodí o 46 studentů více než na večeře. Kolik studentů prvního ročníku chodí jenom na večeře?

2.11. Ze 30 žáků navštěvuje 11 žáků kroužek keramiky, 15 sportovní kroužek a 13 hudební kroužek. Celkem 4 žáci navštěvují sportovní kroužek i kroužek keramiky. Sportovní i hudební kroužek navštěvuje 5 žáků. Keramický nebo hudební kroužek navštěvuje 21 žáků. Jeden žák navštěvuje všechny tři kroužky. Dva žáci nechodí do žádného kroužku. Kolik žáků navštěvuje kroužek hudební i kroužek keramiky?

2.6 Výsledky cvičení

2.1. a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$,

b) $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

c) $C = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$,

d) $D = \{15, 16, 17, 18, \dots\}$,

e) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,

f) $F = \{14\}$,

g) $G = \{9\}$.

h) $H = \{3, 6, 9, 12, \dots\}$.

2.2. a) $A = \{x \in \mathbb{N} : 2 \leq x \leq 7\} = \{x \in \mathbb{N} : 2 \leq x < 8\} = \{x \in \mathbb{N} : 1 < x \leq 7\} = \{x \in \mathbb{N} : 1 < x < 8\}$,

b) $B = \{x \in \mathbb{Z} : x < -3\} = \{x \in \mathbb{Z} : x \leq -4\}$,

c) $C = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ je prvočíslo}\}$,

d) $D = \{x \in \mathbb{N} : x = n^2 \text{ pro každé } n \in \mathbb{N}\}$,

e) $E = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ je liché číslo}\}$,

f) $F = \{x \in \mathbb{N} : 3|x\}$.

2.3. a) $H = \{0, 1, 2, 5, 6, 8, 9, 11, 13, 14\}$, $I = \{0, 1, 2, 5, 6, 8, 9, 11, 13, 14\}$,
$J = \{2, 5, 11, 13, 19, 23, 31\}$, $K = \{1, 2, 8, 16, 32\}$, $M = \{0, 1, 2, 5, 6, 8, 9\}$,
$O = \{2, 6, 8, 14, 16, 22, 24, 28, 32, 36\}$;

b) $|H| = 10$, $|I| = 10$, $|J| = 7$, $|K| = 5$, $|M| = 7$, $|O| = 10$;

c) Ekvivalentní množiny: $|J| = |M|$, $|H| = |O|$, $|I| = |O|$;

d) Rovnají se množiny H a I, $H = I$;

e) $|K| < |J| = |M| < |I| = |H| = |O|$;

f) Například: $\{0, 1, 2\} \in H$, $\{0, 1, 2\} \in I$, $\{2, 5, 11\} \in J$, $\{1, 2, 8\} \in K$, $\{0, 1, 2\} \in M$, $\{2, 6, 8\} \in O$.

2.4. $M = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 19\}, |M| = 19$, $A = \{14\}, |A| = 1$, $B = \{6, 7, 8, 9, 10, 11\}, |B| = 6$, $C = \{4, 8, 12, 16\}, |C| = 4$, $A, B, C \subset M, |A| < |C| < |B|$, $A - B = \{14\}$, $B' = \{1, 2, 3, 4, 5, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}$, $A \cap C = \emptyset$,

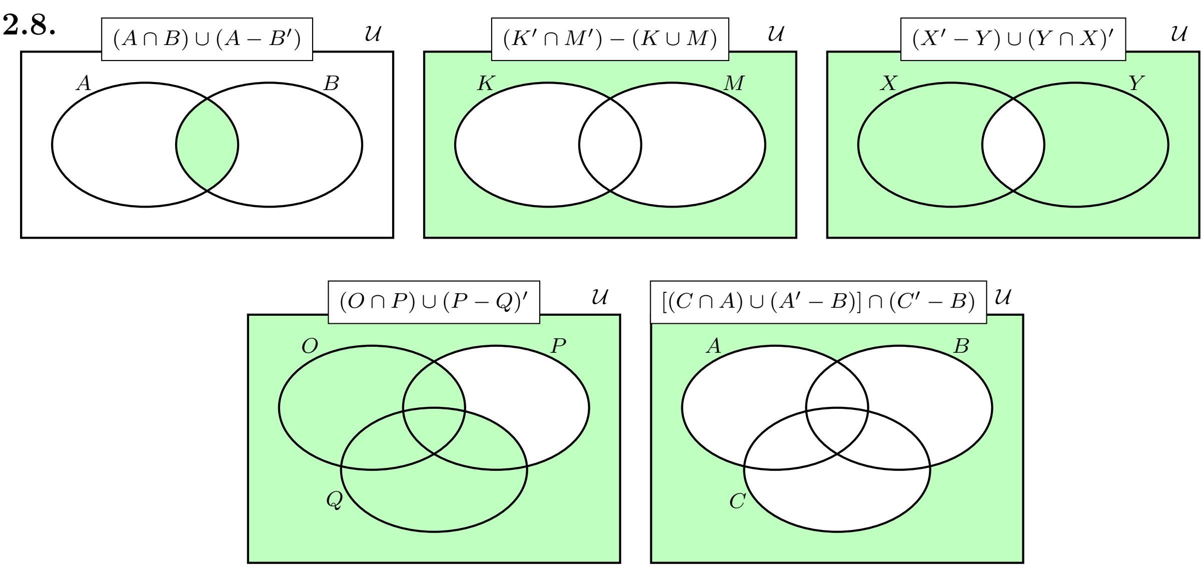
$A' = \{1, 2, \ldots, 13, 15, 16, 17, 18, 19\}$, $A \cap B = \emptyset$, $A \cap B \cap C = \emptyset$.

2.5. $P(A) = \{\emptyset, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{3, 5\}, \{3, 4, 5\}\}$,
$P(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{0\}, \{1, 0\}\}$, $P(C) = \{\emptyset, \{-1\}\}$, $P(D) = \{\emptyset\}$.

2.6. $K = \{1\}$ nebo $K = \{1, 9, 12\}$ nebo $K = \{1, 9\}$ nebo $K = \{1, 12\}$.

2.7. $A \subset C$, $B \subset A$, $B \subset C$, $E \subset D$, $E \subset C$, $E \subset A$.

2.8.



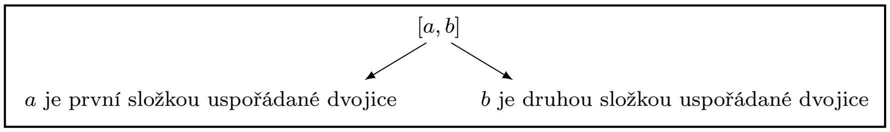
2.9. Obou letních táborů se účastnilo 26 dětí.

2.10. Ze stravujících se studentů chodí jenom na večeře 8 studentů.

2.11. Hudební kroužek i kroužek keramiky navštěvují 3 žáci.

3. BINÁRNÍ RELACE A ZOBRAZENÍ

V této kapitole se budeme zabývat množinami, jejichž prvky jsou uspořádané dvojice, případně uspořádané n-tice. Uspořádanou dvojici zapisujeme $[a, b]$, viz obr. 3.1.



Obr. 3.1: Uspořádaná dvojice $[a, b]$

3.1 Kartézský součin

Dříve, než definujeme pojem kartézského součinu, budeme ho modelovat na reálné situaci v následujícím příkladě.

Příklad 3.1. Jana má ve svém šatníku tři halenky: zelenou, modrou a bílou a dvě sukně: černou a hnědou. Chystá se na procházku a přemýšlí, jakou halenku a sukni si obleče. Nemůže se rozhodnout, která kombinace bude nejlepší. Nejdřív se rozhodne pro zelenou halenku a vyzkouší si k ní obě sukně. Pak zkusí modrou halenku s černou i hnědou sukní. Nakonec bílou halenku s černou i hnědou sukní. Jana si tak vyzkouší všechny kombinace oblečení.

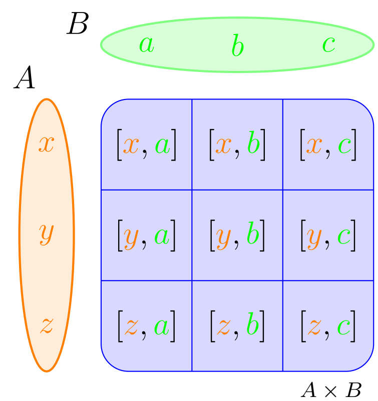
Jestli označíme množinu Janiných halenek jako množinu A a množinu jejich sukní jako množinu B, pak je můžeme matematicky zapsat jako: $A = \{Z, M, B\}$ a $B = \{\check{C}, H\}$. Všimněme si, že Jana v zkoušení dodržuje jistou posloupnost, neboli uspořádání. Nejdřív si vybere halenku, následně k ní přiřadí sukni, tedy [*halenka,sukně*]. Množinu všech kombinací halenek a sukní, které si Jana vyzkouší, zapíšeme jako: $\big\{[Z, \check{C}], [Z, H], [M, \check{C}], [M, H], [B, \check{C}], [B, H]\big\}$. Také si povšimněte, že $[Z, \check{C}]$ není to samé, co $[\check{C}, Z]$. V dané uspořádané dvojici by to znamenalo, že si Jana oblékla černou halenku a zelenou sukni. Takovou kombinaci však nemůže z definovaných množin vytvořit.

V předcházejícím příkladě jsme pracovali se všemi možnými kombinacemi dvou množin, halenek (množina A) a sukní (množina B), které představují, uspořádané dvojice. Tyto uspořádané dvojice můžeme obecně označit jako $[x, y]$, kde $x \in A$ a $y \in B$. Prvek x se nazývá první složkou uspořádané dvojice $[x, y]$ a y je tzv. druhá složka uspořádané dvojice $[x, y]$. Navíc jsme si již v předcházejícím příkladě ukázali, že výběr oblečení $[Z, \check{C}]$ není to samé jako kombinace oblečení $[\check{C}, Z]$. Dvě uspořádané dvojice se rovnají jenom v případě, že se rovnají jejich jednotlivé složky.

Říkáme, že uspořádaná dvojice $[x, y]$ se rovná uspořádané dvojici $[u, v]$ právě tehdy, když $x = u$ a zároveň $y = v$.

Množina $\{[Z, \check{C}], [Z, H], [M, \check{C}], [M, H], [B, \check{C}], [B, H]\}$ z předcházejícího příkladu byla množina všech uspořádaných dvojic $[x, y]$, přičemž platí, že první složka uspořádané dvojice x patří množině A a prvek y, jako druhá složka uspořádané dvojice, patří množině B. Taková množina představuje **kartézský součin** množin. Kartézský součin je obecně definován následovně:

Nechť množiny A, B jsou libovolné množiny. Pak množinu všech uspořádaných dvojic $[x, y]$, kde $x \in A$ a $y \in B$, nazýváme **kartézský součin** množin A, B a označujeme ho symbolem $A \times B$. Tedy $A \times B = \{[x, y] : x \in A \wedge y \in B\}$.



Obr. 3.2: Ilustrace kartézského součinu $A \times B$ množin $A = \{x, y, z\}$ a $B = \{a, b, c\}$

Jestliže se množiny A, B rovnají ($A = B$), pak kartézský součin je ve tvaru $A \times A$ (můžeme použít i označení A^2), tehdy hovoříme o kartézské mocnině. Podobně při zápisu kartézského součinu $A \times A \times \ldots \times A$, v kterém vystupuje n činitelů, můžeme použít zápis A^n.

Příklad 3.2. Nechť jsou dány množiny $A = \{a, b\}$ a $B = \{1, 2, 3\}$. Určete kartézské součiny $A \times B$, $B \times A$, $A \times A$, $B \times B$.

Řešení: Platí
$A \times B = \{[a, 1], [b, 1], [a, 2], [b, 2], [a, 3], [b, 3]\}$;
$B \times A = \{[1, a], [1, b], [2, a], [2, b], [3, a], [3, b]\}$;
$A \times A = A^2 = \{[a, a], [a, b], [b, a], [b, b]\}$;
$B \times B = B^2 = \{[1, 1], [1, 2], [1, 3], [2, 1], [2, 2], [2, 3], [3, 1], [3, 2], [3, 3]\}$.

Kartézský součin má následující vlastnosti:

1. Nechť A, B jsou libovolné množiny. Pokud je alespoň jedna z množin A, B prázdnou množinou, pak platí, že $A \times B = \emptyset$. Daný vztah platí i obráceně, jestli $A \times B = \emptyset$, potom alespoň jedna z množin A, B je prázdná množina.
2. Nechť A, B, C jsou libovolné množiny. Potom platí následující vztahy distributivních zákonů:
   a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$,
   b) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$,

c) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$.

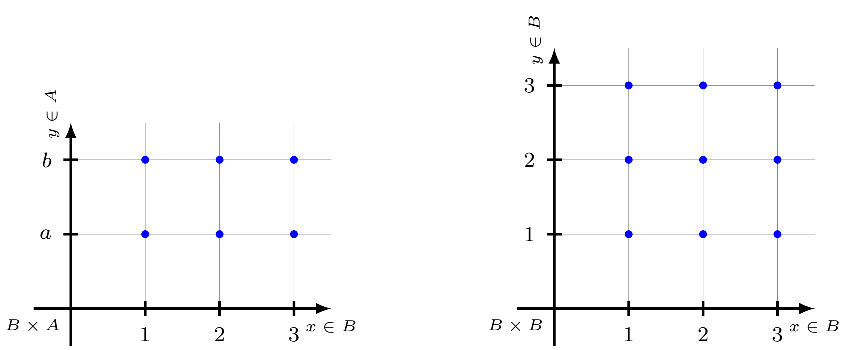
Úloha 3.1. Ověřte platnost výše uvedených vlastností pro následující množiny A, B, C: $A = \{2, 3, 4, 7, 9\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$, $C = \{6, 8\}$. Vypište výsledné kartézské součiny.

Řešení: $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C) = \{[1, 6], [1, 8], [2, 6], [2, 8], [3, 6], [3, 8], [4, 6], [4, 8], [5, 6], [5, 8], [7, 6], [7, 8], [9, 6], [9, 8]\}$, *b)* $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C) = \{[3, 6], [3, 8], [7, 6], [7, 8]\}$, *c)* $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C) = \{[2, 6], [2, 8], [4, 6], [4, 8], [9, 6], [9, 8]\}$

Pro kartézský součin neplatí komutativní zákon, tj. $A \times B \neq B \times A$ (příklad 3.1). Pro kartézský součin neplatí ani asociativní zákon, tedy $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$. Jako ukázku si uvedeme příklady, kdy $A = B = C = \{1\}$. Potom dostáváme, že $(A \times B) \times C = \{[[1, 1], 1]\}$ a $A \times (B \times C) = \{[1, [1, 1]]\}$. Abychom rozuměli zápisu, dostali jsme opět uspořádané dvojice, například v prvním případě $\{[[1, 1], 1]\}$ je první složkou uspořádaná dvojice $[1, 1]$ a druhou složkou uspořádané dvojice je prvek 1, a protože $1 \neq [1, 1]$, asociativní zákon pro kartézský součin neplatí.

Kartézský součin je možné graficky znázornit třemi způsoby, známe tedy tři druhy grafů: kartézský graf (obrázek 3.3), šachovnicový graf (obrázek 3.4) a uzlový graf (obrázek 3.5). Každý z nich budeme ilustrovat na kartézských součinech z předchozího příkladu 3.2, konkrétně na kartézských součinech $B \times A$ a $B \times B$.

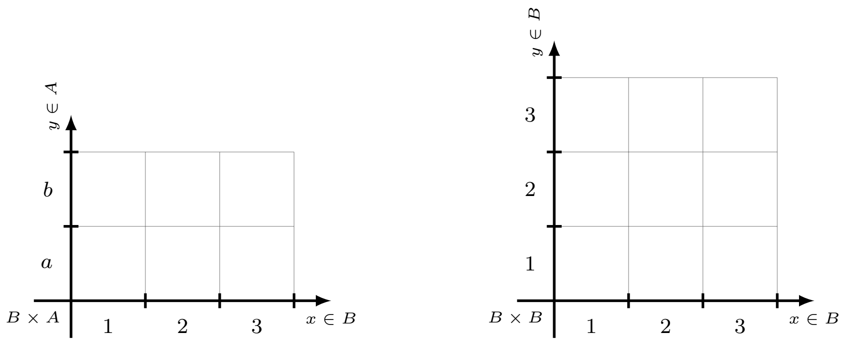
Kartézský graf je tvořen standardní pravoúhlou souřadnicovou soustavou s dvěma osami. Osa x představuje prvky první množiny kartézského součinu (nebo první složky uspořádaných dvojic) a osa y představuje prvky, které jsou druhými složkami uspořádaných dvojic neboli druhé množiny kartézského součinu. Z každého prvku vedeme kolmici na příslušnou osu. Body, ve kterých se kolmice protínají, představují uspořádanou dvojici kartézského součinu.



Obr. 3.3: Kartézské grafy kartézských součinů $B \times A$ a $B \times B$

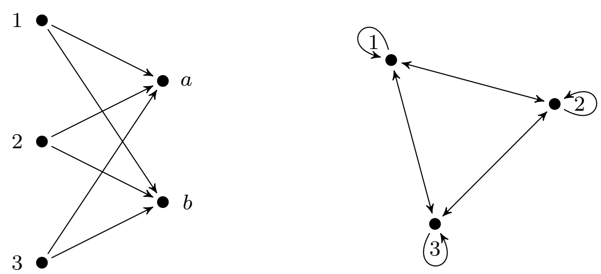
S kartézským grafem se studenti mohou setkat již na střední škole při grafickém znázornění průběhu funkce. Zpravidla při něm používáme pravoúhlý souřadnicový systém.

Šachovnicový graf se jeví podobně jako předchozí graf kartézský. Znázorňuje se totiž také v pravoúhlé souřadnicové soustavě a jednotlivé prvky jsou opět vyznačeny na osách x, y podle toho, do které množiny patří. První složky se nachází na ose x, druhé složky na ose y. Od kartézského grafu se šachovnicový liší tím, že uspořádané dvojice nejsou vymezeny průsečíky kolmic, ale čtvercovými poli (čtverci), které tyto kolmice vymezují.



Obr. 3.4: Šachovnicové grafy kartézských součinů $B \times A$ a $B \times B$

Uzlový graf již nevyužívá pravoúhlé souřadnicové soustavy, ale vždy spojuje prvky pomocí šipek a vytváří tak „uzly“. Zde je potřeba dbát na volbu správného typu uzlového grafu podle toho, jestli se jedná o kartézský součin dvou různých množin, nebo kartézský součin na jedné množině (obrázek 3.5). Pro kartézský součin dvou různých množin se prvky každé množiny vypíší do samostatného sloupce a spojí se šipkou od první složky uspořádané dvojice k druhé složce. Při kartézském součinu na jedné množině se prvky dané množiny vypíší jenom jednou a navzájem se pospojují oboustrannými šipkami nebo tzv. smyčkou pro případy, kdy je prvek v uspořádané dvojici sám se sebou.



Obr. 3.5: Uzlový graf kartézského součinu dvou množin $B \times A$ a na jedné množině $B \times B$

3.2 Binární relace

Vraťme se k příkladu 3.1, kde si Jana vybírala oblečení na procházku. Řekněme, že si chce obléct modrou halenku, ale neví, kterou sukni si k ní vybrat. Pak jí zůstává výběr dvou možností ze šesti a to $\{[M, \check{C}], [M, H]\}$. Jinými slovy, pokud se Jana rozhodne pro modrou halenku, z kartézského součinu všech dvojic vzniká výběr podmnožiny s vlastností, že první složka ve vybraných uspořádaných dvojicích bude prvek M (modrá halenka).

Nechť A, B jsou libovolné množiny. **Binární relaci** R z množiny A do množiny B nazýváme každou podmnožinu kartézského součinu $A \times B$; $R \subset A \times B$. Je-li $A = B$, pak libovolnou podmnožinu kartézského součinu $A \times A$ nazýváme binární relací v množině A; $R \subset A \times A$.

Vzhledem k tomu, že každá binární relace je taky množina, všechny úvahy a tvrzení, které platí pro množiny, platí také pro binární relace. Tedy také platí, že každou binární relaci je možné určit výčtem prvků nebo charakteristickou vlastností. Pokud je binární relace určena charakteristickou vlastností, obvykle se jedná o nějaký vztah, který platí mezi složkami uspořádaných dvojic kartézského součinu.

Příklad 3.3. Nechť jsou dány množiny $A = \{2, 3, 4\}$ a $B = \{3, 4, 5, 6\}$. Uvažujme vztah R_1: „číslo x patřící množině A dělí číslo y patřící množině B“. Vytvořme si nejdřív kartézský součin množin, na kterých je relace definována:

$$A \times B = \{[2, 3], [2, 4], [2, 5], [2, 6], [3, 3], [3, 4], [3, 5], [3, 6], [4, 3], [4, 4], [4, 5], [4, 6]\}.$$

Pro určení relace R_1 provedeme výběr těch uspořádaných dvojic, které danému vztahu vyhovují. Daný vztah (relace) určuje následující množinu uspořádaných dvojic

$$R_1 = \{[2, 4], [2, 6], [3, 3], [3, 6], [4, 4]\},$$

přičemž množina R_1 je podmnožinou kartézského součinu $A \times B$. Matematicky můžeme daný příklad zapsat následovně:

$$R_1 \subset A \times B;\ \ R_1 = \{[x, y] \in A \times B : x|y\}.$$

Příklad 3.4. Nechť jsou dány množiny $A = \{2, 3, 4\}$ a $B = \{3, 4, 5, 6\}$. Vypište prvky relace R_2 definované na kartézském součinu $A \times B$ následovně: $R_2 = \{[x, y] \in A \times B : x > y\}$.

Řešení: V daném příkladě uvažujeme vztah „číslo $x \in A$ je větší než číslo $y \in B$“, pak množina $R_2 = \{[4, 3]\}$ je množina všech uspořádaných dvojic, které uvažovaný vztah splňují. Tedy opět platí, že množina R_2 je podmnožinou karteziánského součinu $A \times B$.

Úloha 3.2. Nechť je dána binární relace $R = \{[x, y] \in A \times B : x + 1 = y\}$ z množiny $A = \{0, 1, 2, 3\}$ do množiny $B = \{2, 3, 4\}$. Zapište binární relaci R výčtem prvků.

Řešení: $R = \{[1, 2], [2, 3], [3, 4]\}$.

Na základě uvedených příkladů 3.3 a 3.4 můžeme určení binární relace vyjádřit také jako **výrokové formy o dvou proměnných**. Například jako binární relace R_1 a R_2 tyto výrokové formy představují právě definované vztahy $x|y$ a $x > y$. Každé binární relaci je možné přiřadit její první a druhý obor.

Nechť množina R je binární relací z množiny A do množiny B. Množinu všech prvních složek uspořádaných dvojic z binární relace R nazýváme **první obor binární relace** R a označujeme ho symbolem $O_1(R)$. Podobně, množinu všech druhých složek uspořádaných dvojic z binární relace R nazýváme **druhý obor binární relace** R a označujeme symbolem $O_2(R)$.

Pomocí matematické symboliky je možné předcházející definici zformulovat následovně:

$$O_1(R) = \{x \in A : \exists y \in B : [x, y] \in R\},$$
$$O_2(R) = \{y \in B : \exists x \in A : [x, y] \in R\}.$$

Je zřejmé, že $O_1(R) \subset A$ a $O_2(R) \subset B$.

Úloha 3.3. Určete první a druhý obor binárních relací R_1 (příklad 3.3) a R_2 (příklad 3.4).

Řešení: *$O_1(R_1) = \{2, 3, 4\}$ a $O_2(R_1) = \{3, 4, 6\}$; $O_1(R_2) = \{4\}$ a $O_2(R_2) = \{3\}$.*

Nechť R je binární relace z množiny A do množiny B. **Doplňkovou relací** k relaci R nazýváme binární relací, která patří do kartézského součinu množin A, B, ale nepatří relaci R. Doplňkovou relaci můžeme definovat následovně:

$$R' \subset A \times B;\ R' = \{[x, y] \in A \times B : [x, y] \notin R\} = A \times B - R.$$

Příklad 3.5. Určete doplňkové relace k binárním relacím R_1 a R_2 z příkladů 3.3 a 3.4.

Řešení: Doplňkovými relacemi jsou následující binární relace.

$R_1{}' = \{[x, y] \in A \times B : x \nmid y\} = \{[2, 3], [2, 5], [3, 4], [3, 5], [4, 3], [4, 5], [4, 6]\}$,

$R_2{}' = \{[x, y] \in A \times B : x \leq y\} = \{[2, 3], [2, 4], [2, 5], [2, 6], [3, 3], [3, 4], [3, 5], [3, 6], [4, 4], [4, 5], [4, 6]\}$.

Nechť R je binární relace z množiny A do množiny B. Inverzní relací k relaci R nazýváme binární relaci $R^{-1} \subset B \times A$ definovanou následovně: $R^{-1} = \{[x, y] \in B \times A : [y, x] \in R\}$.

Nechť R je binární relace z množiny A do množiny B a nechť $R^{-1} \subset B \times A$ relace k ní inverzní. Z předcházející definice vyplývá, že pro libovolnou uspořádanou dvojici $[x, y] \in A \times B$ platí $[x, y] \in R^{-1} \Leftrightarrow [y, x] \in R$.

Příklad 3.6. Inverzní relace k binárním relacím R_1 a R_2 z příkladů 3.3 a 3.4 jsou následující binární relace:

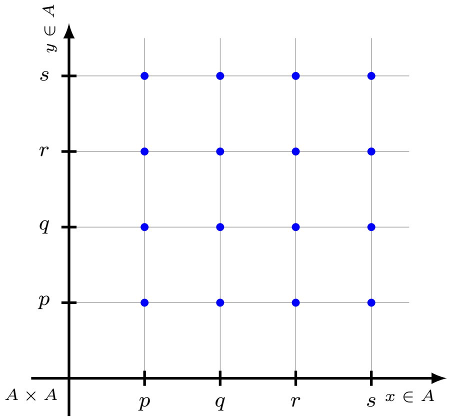
$R_1^{-1} = \{[x, y] \in B \times A : [y, x] \in R_1\} = \{[x, y] \in B \times A : y|x\} = \{[4, 2], [6, 2], [3, 3], [6, 3], [4, 4]\}$.

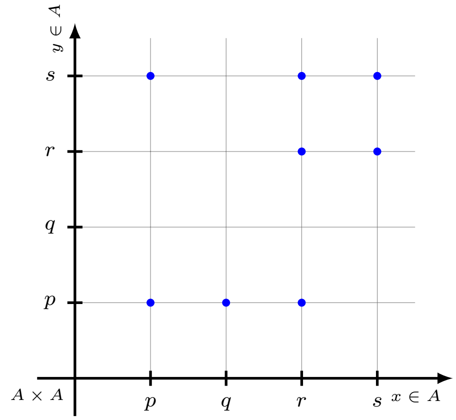
$R_2^{-1} = \{[x, y] \in B \times A : [y, x] \in R_2\} = \{[x, y] \in B \times A : y > x\} = \{[3, 4]\}$.

Pro grafické znázornění binárních relací můžeme použít tři druhy grafů: kartézský, šachovnicový a uzlový. V kartézském grafu binární relace $R \subset A \times B$, který znázorňujeme pravoúhlým souřadnicovým systémem, znázorníme na vodorovnou osu prvky množiny A a na svislou osu prvky množiny B. Uspořádanou dvojici $[x, y] \in R$ znázorníme průsečíkem kolmice vedené v bodě x na vodorovné osy a kolmice vedené v bodě y na svislou osu. Uvedeme si příklad.

Příklad 3.7. Nechť množina A obsahuje následující prvky: $A = \{p, q, r, s\}$. Kartézským grafem znázorněte kartézský součin $A \times A$ a relaci $R \subset A \times A$, která obsahuje následující prvky: $R = \{[p, p], [p, s], [q, p], [r, p], [r, r], [r, s], [s, r], [s, s]\}$.

Řešení:





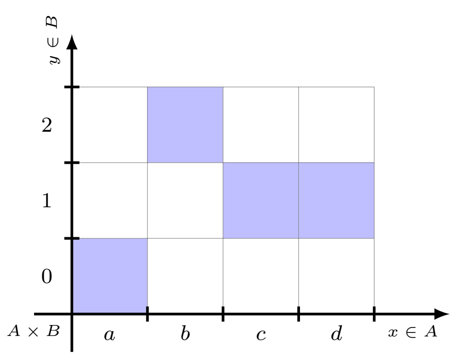
Obr. 3.6: Kartézský graf kartézského součinu $A \times A$ a relace R na něm definované

Kartézský součin součin $A \times A$ je množina všech uspořádaných dvojic, tedy obsahuje následující prvky: $A \times A = \{[p,p],[p,q],[p,r],[p,s],[q,p],[q,q],[q,r], [q,s],[r,p],[r,q],[r,r], [r,s],[s,p],[s,q],[s,r],[s,s]\}$. Na jejím kartézském grafu jsou vyznačeny všechny průsečíky. V případě relace R, která je definována konkrétními prvky, vyznačíme v kartézském grafu jen definované uspořádané dvojice patřící do relace R.

Šachovnicový graf binární relace $R \subset A \times B$ se od jejího kartézského grafu odlišuje tím, že jednotlivé prvky představují úsečky na vodorovné resp. svislé ose. Uspořádaná dvojice $[x,y] \times R$ se znázorní vyšrafovaným čtvercem.

Příklad 3.8. Nechť jsou dané množiny $A = \{a,b,c,d\}$ a $B = \{0,1,2\}$. Nechť $R = \{[a,0], [b,2], [c,1], [d,1]\}$ je binární relace z množiny A do množiny B. Na následujícím obrázku je šachovnicový graf binární relace R.

Řešení:



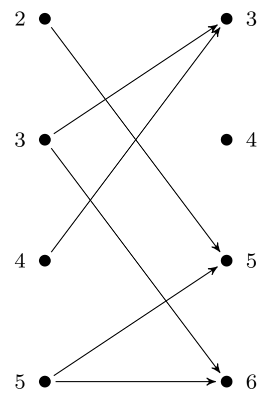
Obr. 3.7: Šachovnicový graf binární relace $R \subset A \times B$

Uzlový graf binární relace $R \subset A \times B$ znázorňuje každému prvku množin A a B bod v rovině, nebo „uzel“ grafu. Dva uzly x a y budou spojeny tzv. orientovanou hranou, v grafu ji představuje šipka. Jestli existuje uspořádaná dvojice $[x,y] \in R$, šipka na orientované hraně přitom směřuje od první složky ke složce druhé pro uspořádanou dvojici $[x,y]$.

Přitom je potřebné rozeznat uzlový graf pro relaci kartézského součinu dvou různých množin $A \times B$ a pro relaci kartézského součinu na jedné množině $A \times A$. Pro kartézský součin dvou různých množin se prvky každé množiny vypíší do samostatného sloupce a spojí se šipkou od první složky uspořádané dvojice k druhé složce. Při kartézském součinu na jedné množině se prvky dané množiny vypíší jenom jednou a navzájem se pospojují a při prvku $[x, y] \in A \times A$ se tato dvojice znázorní smyčkou. Uvedeme si příklady.

Příklad 3.9. Jsou dány množiny $A = \{2, 3, 4, 5\}$ a $B = \{3, 4, 5, 6\}$. Znázorněte uzlovým grafem relaci $R = \{[2, 3], [3, 3], [3, 6], [4, 3], [5, 5], [5, 6]\}$ z množiny A do množiny B.

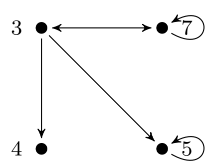
Řešení:

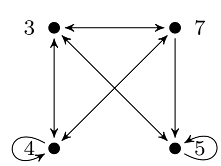


Obr. 3.8: Uzlový graf binární relace R z příkladu 3.9

Příklad 3.10. V množině $M = \{3, 4, 5, 7\}$ jsou definovány dvě binární relace $R_1 = \{[3, 4], [3, 5], [3, 7], [5, 5], [7, 3], [7, 7]\}$ a $R_2 = \{[3, 4], [3, 5], [3, 7], [4, 3], [4, 4], [4, 7], [5, 3], [5, 5], [7, 3], [7, 4], [7, 5]\}$. Znázorněte tyto relace uzlovým grafem.

Řešení:





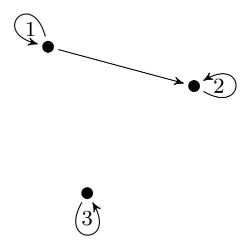
Obr. 3.9: Uzlové grafy binárních relací R_1 a R_2 z příkladu 3.10

3.3 Vlastnosti binárních relaci v množině, relace ekvivalence a relace uspořádání

V následující části budeme definovat nejdůležitější vlastnosti binárních relací v určené množině A, tedy jednotlivé vlastnosti budeme definovat pro relaci $R \subset A \times A$. Uvedené vlastnosti budeme ilustrovat na příkladech, kde množina A bude obsahovat prvky: $A = \{1, 2, 3\}$.

Nechť R je binární relace definovaná v množině A. Binární relace R je **reflexivní**, jestli pro každý prvek množiny A platí, že v uspořádané dvojici zastupuje první i druhou složku; tedy $\forall x \in A : [x, x] \in R$.

Příklad 3.11. V množině $A = \{1, 2, 3\}$ je definována binární relace $R = \{[1, 1], [1, 2], [2, 2], [3, 3]\}$. Zadaná binární relace R je reflexívní, protože s každým prvkem $x \in A$ obsahuje příslušnou uspořádanou dvojici $[x, x]$. Tedy dvojice $[1, 1]$, $[2, 2]$, $[3, 3]$ jsou reflexivní prvky binární relace R. Její uzlový graf je znázorněn na obrázku 3.10.

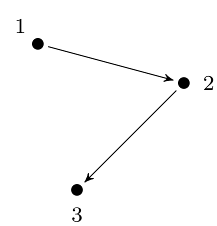


Obr. 3.10: Uzlový graf binární relace R z příkladu 3.11

Poznámka 3.1. Jestli je binární relace reflexivní, každý prvek v jejím uzlovém grafu pak musí mít „smyčku“. Musí to platit pro všechny prvky množiny A.

Nechť R je binární relace definovaná v množině A. Platí, že binární relace R je **antireflexivní**, jestli $\forall x \in A : [x, x] \notin R$.

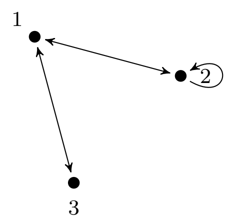
Příklad 3.12. V množině $A = \{1, 2, 3\}$ je definována binární relace $R = \{[1, 2], [2, 3]\}$. Binární relace R je antireflexivní, protože neobsahuje žádnou dvojici, u které se první a druhá složka rovnají. Na obrázku 3.11 je znázorněný její uzlový graf.



Obr. 3.11: Uzlový graf binární relace R z příkladu 3.12

Nechť R je binární relace definovaná v množině A. Binární relace R je **symetrická**, jestli pro dva prvky x, y z množiny A, které v uspořádané dvojici $[x, y]$ patří do relace R, platí, že taky uspořádaná dvojice $[y, x]$ patří do relace R; tedy platí $[x, y] \in R \Rightarrow [y, x] \in R$.

Příklad 3.13. V množině $A = \{1,2,3\}$ je definována binární relace $R = \{[1,2],[1,3],[2,1],$ $[2,2],$ $[3,1]\}$. Binární relace R je symetrická, protože pro všechny uspořádané dvojice dané relace platí definovaný vztah $[x,y] \in R \Rightarrow [y,x] \in R$. Uzlový graf relace je pak možné znázornit jako na obrázku 3.12.



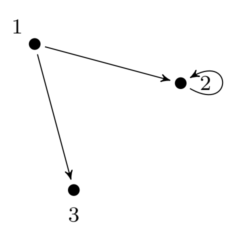
Obr. 3.12: Uzlový graf binární relace R z příkladu 3.13

Poznámka 3.2. Uzlový graf symetrické binární relace obsahuje jenom obousměrné šipky nebo smyčky.

Nechť R je binární relace definovaná v množině A. Platí, že binární relace R je **antisymetrická**, jestli pro každé dva prvky x, y patřící do množiny A platí následující vztah: $([x,y] \in R \wedge [y,x] \in R) \Rightarrow x = y$.

Antisymetričnost můžeme ekvivalentně definovat také následujícím způsobem: binární relace R je antisymetrická, jestli pro každé dva prvky x, $y \in A$ takové, že $x \neq y$, platí: $[x,y] \in R \Rightarrow [y,x] \notin R$.

Příklad 3.14. V množině $A = \{1,2,3\}$ je definovaná binární relace $R = \{[1,2],[1,3],$ $[2,2]\}$. Vzhledem k alternativní definici antisymetrie je zřejmé, že binární relace R je antisymetrická. Jestli binární relace R obsahuje uspořádanou dvojici $[x,y]$, přičemž $x \neq y$, pak uspořádaná dvojice $[y,x]$ není jejím prvkem. Na obrázku 3.13 je uzlový graf antisymetrické binární relace R.

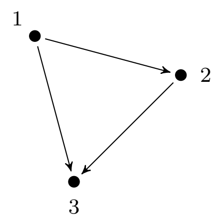


Obr. 3.13: Uzlový graf binární relace R z příkladu 3.14

Poznámka 3.3. Uzlový graf antisymetrické binární relace neobsahuje obousměrné šipky.

Nechť R je binární relace definovaná v množině A. Binární relace R je **tranzitivní**, jestli pro prvky x, y, z patřící do množiny A platí následující vztah: $([x,y] \in R \wedge [y,z] \in R) \Rightarrow [x,z] \in R$.

Příklad 3.15. V množině $A = \{1, 2, 3\}$ je definovaná binární relace $R = \{[1, 2], [1, 3], [2, 3]\}$. Vezměme si prvky binární relace R, konkrétně uspořádané dvojice $[1, 2]$ a $[2, 3]$. Aby byla binární relace R tranzitivní, dvojice $[1, 3]$ musí být také prvkem dané relace. Graficky je tranzitivita jako vlastnost binární relace R znázorněná uzlovým grafem na obrázku 3.14.



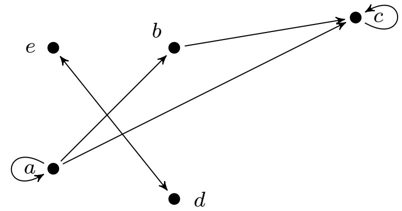
Obr. 3.14: Uzlový graf binární relace R z příkladu 3.15

Poznámka 3.4. Podle grafu můžeme tranzitivnost popsat i následovně: můžeme vidět, že existují dvě cesty z prvku 1 k prvku 3, a to buď přímo nebo přes prvek 2.

Úloha 3.4. Je daná množina $B = \{0, 2, 4\}$. Vypište prvky relace $R = \{[x, y] \in B \times B : x + y < 4\}$, která je definovaná na množině B. Zjistěte, jaké vlastnosti daná relace má.

Řešení: *Relace* $R = \{[0, 0], [0, 2], [2, 0]\}$ *je symetrická.*

Úloha 3.5. Z grafu (obrázek 3.15) zjistěte vlastnosti relace R, která je definovaná na množině $A \times A$, kde $A = \{a, b, c, d, e\}$.



Obr. 3.15: Uzlový graf relace R z úlohy 3.5

Řešení: *Relace* R *je tranzitivní.*

Velmi důležitou binární relací je relace ekvivalence, kterou definujeme prostřednictvím vlastností binárních relací následovně.

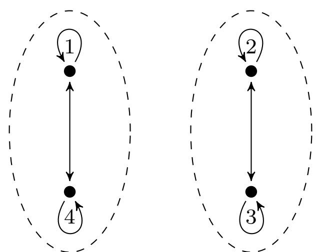
Binární relace R definovaná v množině A je **relací ekvivalence** v množině A právě tehdy, když pro libovolné x, y, $z \in A$ platí:

1. $[x, x] \in R$,
2. $[x, y] \in R \Rightarrow [y, x] \in R$,
3. $([x, y] \in R \wedge [y, z] \in R) \Rightarrow [x, z] \in R$.

Binární relace R definovaná v množině A se tedy nazývá **relace ekvivalence** v množině A právě tehdy, když je reflexivní, symetrická a tranzitivní.

Příklad 3.16. Nechť je v množině $A = \{1, 2, 3, 4\}$ definována binární relace $R = \{[1, 1], [1, 4], [2, 2], [2, 3], [3, 2], [3, 3], [4, 1], [4, 4]\}$. Určíme a zdůvodníme si jednotlivé vlastnosti relace R.

Řešení: • Binární relace R je reflexivní, protože pro každý prvek množiny A platí, že je v relaci sám se sebou, tedy pro $\forall x \in A : [x, x] \in R$. Relace obsahuje následující prvky: $[1, 1], [2, 2], [3, 3], [4, 4]$.
• Binární relace R je také symetrická, protože všechny uspořádané dvojice relace R mají tzv. svůj zrcadlový odraz. Platí: $[x, y] \in R \Rightarrow [y, x] \in R$, tzn. jestliže $[1, 4]$ patří relaci R, pak i uspořádaná dvojice $[4, 1]$ patří relaci R. Podobně to platí i pro uspořádané dvojice $[2, 3]$, $[3, 2]$. Reflexivní prvky jsou také symetrické.
• Binární relace R je tranzitivní. Tranzitivnost platí pro symetrické prvky s reflexivními a naopak, například: $([2, 3] \in R \wedge [3, 3] \in R) \Rightarrow [2, 3] \in R$ nebo $([4, 1] \in R \wedge [1, 4] \in R) \Rightarrow [4, 4] \in R$. Jelikož relace splňuje všechny tři vlastnosti, jedná se o relaci ekvivalence. Relace je znázorněna uzlovým grafem na obrázku 3.16.



Obr. 3.16: Uzlový graf relace R z příkladu 3.16

Poznámka 3.5. Na základě řešení příkladu můžeme vidět, že množinu všech uzlů grafu je možné rozdělit do podmnožin tak, že žádné dva prvky dvou různých podmnožin nejsou spojeny hranou. Jinými slovy, uzlový graf je znázorněn na dvě disjunktní části. To znamená, že každá relace ekvivalence definovaná v množině A indukuje tzv. **rozklad množiny** A.

Nechť A je libovolná neprázdná množina. Systém S neprázdných podmnožin množiny A se nazývá **rozklad množiny** A, jestliže je S systém disjunktních množin, kterých sjednocení tvoří množinu A. Množiny ze systému S nazýváme **třídy rozkladu** S.

Příklad 3.17. Budeme vycházet z předchozího příkladu. Na obrázku 3.16 je znázorněný uzlový graf binární relace $R = \{[1, 1], [1, 4], [2, 2], [2, 3], [3, 2], [3, 3], [4, 1], [4, 4]\}$, která je relací ekvivalence v množině $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Z grafu můžeme vidět, že tato relace indukuje rozklad množiny A na dvě třídy $\{1, 4\}$ a $\{2, 3\}$. Množiny $\{1, 4\}$ a $\{2, 3\}$ jsou podmnožiny množiny A, jsou disjunktní a jejich sjednocením dostáváme množinu A. Tedy systém $S = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$ je rozklad množiny A. Je to rozklad indukovaný relací ekvivalence R.

Úloha 3.6. Nechť $R = \{[1, 1], [2, 2], [2, 3], [3, 2], [3, 3], [4, 4], [4, 5], [5, 4], [5, 5]\}$ je relací ekvivalence v množině $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Najděte rozklad množiny A indukovaný binární relací R.

Řešení: *Hledaný rozklad množiny A je systém $S = \{\{1\}, \{2,3\}, \{4,5\}\}$.*

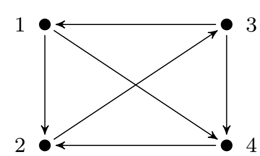
Dříve, než budeme definovat relaci uspořádání, je potřebné si připomenout, že při určování množin na pořadí prvků nezáleží, což znamená, že množina $A = \{x, y, z\}$ a množina $A = \{y, z, x\}$ jsou stejné. Ale taky množiny $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a $D = \{5, 4, 3, 2, 1\}$ jsou stejné.

Uvedeme si dvě situace. První: na hodině tělesné výchovy učitel zadá žákům, aby se seřadili podle velikosti od nejmenšího po nejvyššího. To znamená, že žáci tvoří jakousi uspořádanou množinu. Druhá: žáci měli naplánovanou návštěvu koncertu v novém divadle. Učitelka informovala žáky, aby do divadla vstupovali podle abecedy a to samé, aby platilo pro usazování do sedadel. V obou uvedených příkladech jsme každou z množin (žáků) uspořádali podle určitého „pravidla“.

Každé uspořádání je dáno binární relací, která má určité vlastnosti, tedy definujeme další důležitý typ binárních relací - relaci uspořádání. Dříve, než budeme definovat relaci uspořádání, definujeme další vlastnosti binárních relací.

Nechť R je binární relace v množině A. Říkáme, že binární relace R je **souvislá** (resp. **trichotomická**), jestli pro každé x, $y \in A$ takové, že $x \neq y$, platí $[x, y] \in R \vee [y, x] \in R$.

Příklad 3.18. V množině $A = \{1, 2, 3, 4\}$ je definována binární relace $R = \{[1, 2], [1, 4], [2, 3], [3, 1], [3, 4], [4, 2]\}$. Binární relace R je souvislá, protože platí výše uvedená definice dané vlastnosti. Pro každé x, $y \in A$ takové, že $x \neq y$, platí $[x, y] \in R \vee [y, x] \in R$. Uzlový graf binární relace R je na obrázku 3.17.



Obr. 3.17: Uzlový graf souvislé relace R z příkladu 3.18

Je zřejmé, že v uzlovém grafu souvislé binární relace jsou vždycky každé dva uzly spojené jednosměrně orientovanou šipkou.

Binární relaci R definovanou v množině A nazýváme **částečným uspořádáním množiny** A, jestliže platí, že relace R je antisymetrická a tranzitivní. Binární relaci R definovanou v množině A nazýváme **úplným uspořádáním množiny** A, jestliže platí, že relace R je antisymetrická, tranzitivní a souvislá.

Příklad 3.19. Jsou dané dvě binární relace, definované v množině přirozených čísel: $R = \{[x, y] \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; x < y\}$ a $S = \{[x, y] \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; x|y\}$. Rozhodněte, zda uvedené relace jsou částečným, nebo úplným uspořádáním množiny A.

Řešení: • Nejdřív ověříme pro obě relace souvislost. Pro každé dva prvky množiny přirozených čísel x, y, přičemž $x \neq y$, platí $x < y$ nebo $x > y$. Tedy pro uspořádané dvojice $[x, y]$ nebo $[y, x]$ pro každé x, $y \in \mathbb{N}$, $x \neq y$, platí, že patří relaci R. To znamená, že binární relace R je souvislá. Naproti tomu binární relace S souvislá není, protože pro všechny přirozená čísla x, y, kde $x \neq y$, neplatí pravidlo, že „x dělí y“ nebo „y dělí x“. Stačí položit $x = 2$ a $y = 3$. Platí, že $x \neq y$, ale „x nedělí y“ a ani „y nedělí x“, tedy do relace S nepatří uspořádané dvojice $[2, 3]$ ani $[3, 2]$.
• Další vlastnosti mají binární relace R, S společné. Lehce se můžeme přesvědčit, že jsou tranzitivní a antisymetrické. Ukažme, že jsou tranzitivní. Pro všechna x, y, $z \in \mathbb{N}$ platí: jestli $x < y$, a zároveň $y < z$, pak platí, že $x < z$ pak pro všechna x, y, $z \in \mathbb{N}$ platí $([x, y] \in R \wedge [y, z] \in R) \Rightarrow [x, z] \in R$. Například pro přirozená čísla 2, 3, 4 platí $2 < 3$ a zároveň $3 < 4$, pak platí, že $2 < 4$, nebo $([2, 3] \in R \wedge [3, 4] \in R) \to [2, 4] \in R$. Binární relace R je tranzitivní. Totéž platí pro relaci „dělí“. Jestli pro x, y, $z \in \mathbb{N}$ platí, že x dělí y a zároveň y dělí z, potom x dělí z. Například pro přirozená čísla 2, 4, 8 platí, že $2|4$ a $4|8$, potom $2|8$, tedy $([2, 4] \in S \wedge [4, 8] \in S) \Rightarrow [2, 8] \in S$. Binární relace S je tranzitivní.
• Ukažme, že binární relace R, S jsou antisymetrické. Pro každé x, $y \in \mathbb{N}$ takové, že $x \neq y$, platí, že jestli $x < y$, pak y nemůže být menší jako x. Tedy pro každé x, $y \in \mathbb{N}$ takové, že $x \neq y$, platí $[x, y] \in R \Rightarrow [y, x] \in R$. To znamená, že binární relace R je antisymetrická. Pro každé x, $y \in \mathbb{N}$ takové, že $x \neq y$, platí, že jestli x dělí y, pak y nedělí x, tedy pro každé x, $y \in \mathbb{N}$ takové, že $x \neq y$, platí $[x, y] \in S \Rightarrow [y, x] \in S$. To znamená, že i binární relace S je antisymetrická.
• Závěr: Binární relace R je souvislá, antisymetrická a tranzitivní, tedy binární relace R představuje úplné uspořádání množiny $\mathbb{N}$. Binární relace S je antisymetrická a tranzitivní, tedy binární relace S je tzv. částečné uspořádání množiny $\mathbb{N}$.

Poznámka 3.6. Jestli je binární relace R je relací uspořádání v množině A, potom místo zápisu $[x, y] \in R$, budeme využívat zápis $x \prec y$. Uvedený zápis budeme číst jako „x je před y“.

Definici částečného i úplného uspořádání pak můžeme zapsat i následujícím způsobem.

Binární relace R definovaná v množině A je **částečné uspořádání** množiny A, jestliže pro x, y, $z \in A$ platí:
1. je-li $x \neq y$ a $x \prec y$ $([x, y] \in R)$, pak platí, že y není před x $([y, x] \notin R)$;
2. je-li $x \prec y$ $([x, y] \in R)$ a zároveň $y \prec z$ $([y, z] \in R)$, pak $x \prec z$ $([x, z] \in R)$.

Navíc, jestliže pro každé x, $y \in A$ takové, že $x \neq y$, platí:
3. $x \prec y$, nebo $y \prec x$, pak binární relace R je **úplné uspořádání** množiny A.

Poznámka 3.7. Jestli je binární relace R částečně nebo úplné uspořádání množiny A, říkáme, že množina A je částečně nebo úplně uspořádanou relací R. V tomhle případě budeme používat také zápis (A, R) resp. $(A, \prec)$. Aby byla určená uspořádaná množina, musí být určená kromě samotné množiny i příslušná relace, která je její uspořádáním. Jestli použijeme termín „uspořádaná množina“, myslíme tím množinu, která je částečně nebo úplně uspořádaná. Dvě uspořádané množiny se přitom rovnají právě tehdy, když obsahují tytéž prvky a mají totéž uspořádaní.

Uspořádání číselné množiny podle velikosti čísel je tzv. přirozené uspořádání. Místo symbolu $\prec$ pak užíváme znak $<$. Přirozené uspořádání je zřejmě úplné uspořádání. Definici částečného a úplného uspořádání budeme ilustrovat na následujících příkladech.

Příklad 3.20. Nechť množina $A = \{1, 2, 3, 4\}$ je uspořádaná přirozeným uspořádáním. Uspořádání množiny A je binární relace $R = \{[1, 2], [1, 3], [1, 4], [2, 3], [2, 4], [3, 4]\}$. Je možné používat také následující zápis: $1 < 2 < 3 < 4$.

Nechť $(A, \prec)$ je uspořádaná množina. Prvek $a \in A$ se nazývá **první prvek množiny** A, jestliže pro každý prvek $x \in A$, $x \neq a$, platí $a \prec x$. Analogicky, prvek $b \in A$ se nazývá **poslední prvek množiny** A, jestliže pro každý prvek $x \in A$, $x \neq b$, platí $x \prec b$.

Dá se dokázat, že každá uspořádaná množina má nejvýše jeden první a nejvýše jeden poslední prvek. Každá konečná množina má první a poslední prvek.

Příklad 3.21. Číselné množiny $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ jsou uspořádané přirozeným uspořádáním. Víme, že první prvek je nejmenší číslo dané množiny a poslední prvek je největší číslo uvažované množiny. Množina $\mathbb{N}$ má první prvek a je ním číslo 1. Poslední prvek množina $\mathbb{N}$ nemá. Množiny $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ nemají ani první, ani poslední prvek.

Pro uspořádané množiny platí následující vlastnosti:

- Je-li binární relace R relací úplného (resp. částečného uspořádání) množiny A, potom i inverzní relace R^{-1} je relací úplného (resp. částečného uspořádání) množiny A.
- Je-li a první prvek v úplně uspořádané množině (A, R), potom a je poslední prvek v úplně uspořádané množině (A, R^{-1}). Je-li b posledním prvkem v úplně uspořádané množině (A, R), potom b je prvním prvkem v úplně uspořádané množině (A, R^{-1}).

Dobře uspořádanou množinu definujeme následovně:

Uspořádanou množinu nazýváme **dobře uspořádanou**, jestliže každá její neprázdná podmnožina má první prvek.

Poznámka 3.8. Z definice dobře uspořádané množiny vyplývá, že každá neprázdná dobře uspořádaná množina má první prvek. Množina přirozených čísel $\mathbb{N}$, která je uspořádaná přirozeným uspořádáním, je dobře uspořádaná množina.

3.4 Zobrazení

Zobrazení jako jeden z důležitých pojmů současné matematiky je dalším – speciálním typem binární relace. Zobrazení budeme definovat následovně.

Nechť A, B jsou množiny. Binární relace $f \subset A \times B$ se nazývá **zobrazení množiny** A **do množiny** B, jestliže ke každému prvku $x \in A$ existuje právě jedno $y \in B$ takové, že $[x, y] \in f$.

Z definice vyplývá, že zobrazení množiny A do množiny B je možné obecně chápat jako jistý předpis, který každému prvku z množiny A přiřadí právě jeden prvek z množiny B.

Jestliže je f zobrazení množiny A do množiny B, budeme používat zápis $f : A \to B$ a místo zápisu $[x, y] \in f$ budeme používat zápis $f(x) = y$.

Jestliže $f(x) = y$, potom prvek x se nazývá **vzor prvku** y a prvek y se nazývá **obraz prvku** x. Množina A se nazývá **definiční obor zobrazení** $f : A \to B$. Množina všech obrazů prvků množiny A, tedy množina $\{y \in B; \exists x \in A : f(x) = y\}$, se nazývá **obor hodnot zobrazení** $f : A \to B$. Jestliže $f : A \to A$, hovoříme o zobrazení v množině A.

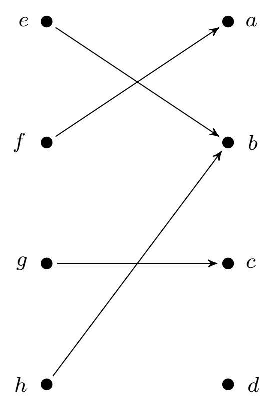
Příklad 3.22. Jsou dány množiny $A = \{u, v, w\}$ a $B = \{1, 2\}$, dále jsou dány binární relace $f = \{[u, 1], [v, 1], [w, 2]\}$ a $g = \{[u, 1], [u, 2], [v, 1], [w, 2]\}$, obě z množiny A do množiny B. Znázorněte uzlové grafy uvedených binárních relací.

Řešení:

Obr. 3.18: Uzlové grafy binárních relací f a g z příkladu 3.22

Vidíme, že v binární relaci f existuje ke každému prvku množiny A právě jeden prvek z množiny B takový, že $[x, y] \in f$. To znamená, že binární relace $f \subset A \times B$ je zobrazením množiny A do množiny B. Naproti tomu binární relace $g \subset A \times B$ není zobrazením množiny A do množiny B, protože prvku $u \in A$ jsou přiřazeny dva prvky z množiny B, tedy $[u, 1] \in g$ a zároveň $[u, 2] \in g$.

Příklad 3.23. Ukážeme si různé způsoby zadání zobrazení. Uvažujme množiny $A = \{e, f, g, h\}$ a $B = \{a, b, c, d\}$ a zobrazení $f_1 : A \to B$ definované následujícím předpisem: $f_1(e) = b$, $f_1(f) = a$, $f_1(g) = c$, $f_1(h) = b$. Pomocí už známé symboliky množinového zápisu, zaužívané při zápisu binárních relací, můžeme zadané zobrazení zapsat jako $f_1 = \{[e, b], [f, a], [g, c], [h, b]\}$. Uzlový graf zobrazení f_1 je znázorněn na obrázku 3.18.



Obr. 3.19: Uzlový graf zobrazení f_1 z příkladu 3.23

Uvažujme dále zobrazení $f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definované v množině přirozených čísel $\mathbb{N}$ následujícím předpisem $f_2(x) = x+1$ pro každé $x \in \mathbb{N}$. Potom můžeme uvést zápis zobrazení v obecném tvaru jako $f_2 = \{[n, n+1]; n \in \mathbb{N}\}$.

Úloha 3.7. Zjistěte a odůvodněte, jestli následující binární relace jsou zobrazeními v množině přirozených čísel:

a) $f = \{[x, y] \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; y = x - 1\}$,
b) $g = \{[x, y] \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; y = 3x - 5\}$,
c) $h = \{[x, y] \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; y = 3x\}$.

Řešení: *a) Binární relace f není zobrazení v množině $\mathbb{N}$, protože prvek $1 \in \mathbb{N}$ nemá v množině $\mathbb{N}$ svůj obraz. b) Binární relace g není zobrazení v množině $\mathbb{N}$, protože ne všechny prvky množiny $\mathbb{N}$ mají svůj obraz také v množině přirozených čísel $\mathbb{N}$. Např. prvek $1 \in \mathbb{N}$ nemá v množině $\mathbb{N}$ svůj obraz. c) Binární relace h je zobrazení v množině $\mathbb{N}$.*

Poznámka 3.9. Dvě zobrazení $f : A \to B$ a $g : C \to D$ se rovnají (zapisujeme $f = g$), jestliže platí: $A = C \wedge f(x) = g(x), \forall x \in A$.

Další vlastnost, kterou můžeme u zobrazení definovat, je bijektivnost. Dřív než definujeme, co je bijektivní zobrazení, uvedeme následující vlastnosti zobrazení.

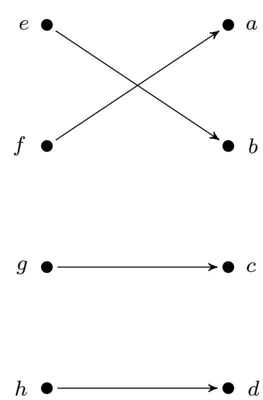
Zobrazení $f : A \to B$ se nazývá:
a) **injektivní**, jestliže pro každé x_1, $x_2 \in A$ platí: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Jinými slovy, každý obraz z množiny B má při zobrazení f nejvýše jeden vzor v A.
b) **surjektivní**, jestliže ke každému $y \in B$ existuje $x \in A$ takové, že $f(x) = y$ neboli každý obraz z množiny B má při zobrazení f alespoň jeden vzor v A.

Příklad 3.24. Zobrazení $f = \{[u, 1], [v, 1], [w, 2]\}$, kde $f : A \to B$ z příkladu 3.22, není injektivní, protože dva různé prvky množiny A (prvky u, $v \in A$) mají ten samý obraz, prvek $1 \in B$. Toto zobrazení je ale surjektivní, protože každý prvek množiny B má alespoň jeden vzor v množině A.

Bijektivní zobrazení je definováno následovně.

Zobrazení $f : A \to B$ se nazývá **bijektivní**, jestliže je injektivní a zároveň surjektivní, tj. pro každé x_1, $x_2 \in A$ platí $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, a zároveň ke každému $y \in B$ existuje $x \in A$ takové, že $f(x) = y$. Jinak řečeno každý obraz z množiny B má při zobrazení f právě jeden vzor v A.

Příklad 3.25. Nechť jsou dané množiny $A = \{e, f, g, h\}$ a $B = \{a, b, c, d\}$, a $f_3 : A \to B$ je zobrazení definované předpisem $f_3(e) = b$, $f_3(f) = a$, $f_3(g) = c$, $f_3(h) = d$. Zadané zobrazení f_3 je graficky znázorněno níže na obrázku 3.19. Zobrazení $f_3 : A \to B$, $f_3 = \{[e, b], [f, a], [g, c], [h, d]\}$ je bijektivní zobrazení, protože každý obraz z množiny B má při zobrazení f_3 právě jeden vzor v A.



Obr. 3.20: Uzlový graf zobrazení f_3 z příkladu 3.25

Místo názvu injektivní zobrazení se často používá i název **prosté zobrazení**. Jestli $f : A \to B$ je surjektivní, říkáme, že f je zobrazení množiny A na množinu B. Předcházející definici vlastností zobrazení je možné pak slovně zformulovat následovně: Zobrazení $f : A \to B$ je

$a)$ injektivní, jestli ke každým dvěma různým vzorům náleží dva různé obrazy;

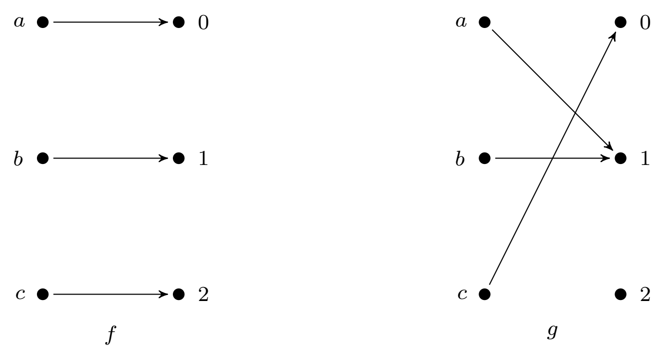
$b)$ surjektivní, jestli každý prvek množiny B má alespoň jeden vzor v množině A.

Příklad 3.26. Uvažujme zobrazení z předcházejícího příkladu a úlohy. Zobrazení $f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ z příkladu 3.23 je injektivní, protože pro každé $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ platí $x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1+1 \neq x_2+1$. Zobrazení f_2 není surjektivní, protože prvek $1 \in \mathbb{N}$ nemá vzor v množině $\mathbb{N}$. Zobrazení h z úlohy 3.7 je injektivní zobrazení. Pro každé x_1, $x_2 \in \mathbb{N}$ platí $x_1 \neq x_2 \Rightarrow 3x_1 \neq 3x_2$. Zobrazení h není surjektivní, protože například prvek $2 \in \mathbb{N}$ nemá vzor v množině $\mathbb{N}$. Neexistuje přirozené číslo x takové, že $3x = 2$.

Příklad 3.27. Nechť zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definované předpisem $f(x) = x^2$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Zobrazení f není injektivní, protože existují dvě různá reálná čísla x_1, x_2, která mají ten samý obraz. Stačí položit $x_1 = 1$ a $x_2 = -1$. Pak $x_1 \neq x_2$ a zároveň $f(x_1) = f(x_2) = 1$. Zobrazení f není surjektivní, protože výrok „Ke každému $y \in \mathbb{R}$ existuje $x \in \mathbb{R}$ takové, že $x^2 = y$." není pravdivý. Stačí položit $y = -1$.

Úloha 3.8. Jsou zadané množiny $A = \{a, b, c\}$ a $B = \{0, 1, 2\}$. Dále jsou dané binární relace $f = \{[a, 0], [b, 1], [c, 2]\}$ a g$=\{[a, 1], [b, 1], [c, 0]\}$ z množiny A do množiny B. Znázorněte uzlové grafy binárních relací f a g.

Řešení: *Viz obrázek 3.21.*



Obr. 3.21: Uzlové grafy binárních relací f a g z úlohy 3.8

Obě binární relace jsou zobrazení z množiny A do množiny B, přičemž zobrazení f je injektivní a zároveň surjektivní, a tedy je bijektivní. Avšak zobrazení g není injektivní ani surjektivní, a tedy není bijektivní. Jsou-li f a g binární relace, je možno k nim vytvořit **inverzní relace**. Jsou to následující binární relace: $f^{-1} = \{[0,a],[1,b],[2,c]\}$ a $g^{-1} = \{[1,a],[1,b],[0,c]\}$. Z definice zobrazení vyplývá, že inverzní relace $f^{-1} \subset B \times A$ je zobrazení množiny B do množiny A. Na druhou stranu relace $g^{-1} \subset B \times A$ není zobrazením (k prvku $1 \in B$ jsou přiřazené dva různé prvky množiny A). Zobrazení f^{-1} je také bijektivní.

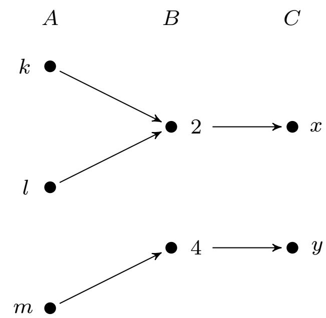
Vzhledem k tomu, že každé zobrazení je binární relace, můžeme zobrazení také skládat. To znamená, že můžeme vytvářet tzv. **složené zobrazení** (kompozice zobrazení).

Nechť $f : A \to B$ a $g : B \to C$ jsou dvě zobrazení. Pak zobrazení $g \circ f : A \to C$ definované vztahem $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ pro každé $x \in A$ se nazývá **složené zobrazení** ze zobrazení f a g.

Poznámka 3.10. Při složeném zobrazení $g \circ f$ nejdřív aplikujeme zobrazení f a potom zobrazení g. Z definice složeného zobrazení vyplývá, že složené zobrazení ze zobrazení f a g je možné definovat jenom tehdy, když obor hodnot zobrazení f je podmnožinou definičního oboru zobrazení g.

Příklad 3.28. Nechť jsou dány množiny $A = \{k,l,m\}$, $B = \{2,4\}$, $C = \{x,y\}$ a relace f a g, kde $f = \{[k,2],[l,2],[m,4]\}$ je zobrazení množiny A do množiny B a $g = \{[2,x],[4,y]\}$ je zobrazením množiny B do množiny C. Najděme složené zobrazení $g \circ f$. Pro lepší názornost sestrojme uzlové grafy daných zobrazení (obrázek 3.22).

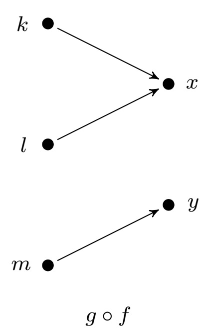
Řešení:



Obr. 3.22: Uzlové grafy zobrazení f a g z příkladu 3.28

Složené zobrazení $g \circ f$ je zobrazením množiny A do množiny C. Podle definice dostáváme:
- $(g \circ f)(k) = g(f(k)) = g(2) = x$;
- $(g \circ f)(l) = g(f(l)) = g(2) = x$;
- $(g \circ f)(m) = g(f(m)) = g(4) = y$.

Uzlový graf složeného zobrazení $g \circ f$ je na obrázku 3.23.



Obr. 3.23: Uzlový graf složeného zobrazení $g \circ f$ z příkladu 3.28

Příklad 3.29. V množině $\mathbb{N}$ jsou definovány zobrazení f a g, které mají předpis $f(x) = 2x$ pro každé $x \in \mathbb{N}$ a $g(x) = x + 1$ pro každé $x \in \mathbb{N}$. Najděme složené zobrazení $g \circ f$ a $f \circ g$.

Řešení: Nechť $x \in \mathbb{N}$. Pak
- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x) = 2x + 1$;
- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = 2x + 2$.

Poznámka 3.11. Z předcházejícího příkladu vyplývá, že pro skládání zobrazení neplatí komutativní zákon, tj. existují takové zobrazení f a g, že $g \circ f \neq f \circ g$.

Pro složené zobrazení platí následující vlastnosti. Nechť $f : A \to B$ a $g : B \to C$ jsou zobrazení.

a) Jsou-li f a g injektivní, pak i složené zobrazení $g \circ f$ je injektivní.
b) Jsou-li f a g surjektivní, pak i složené zobrazení $g \circ f$ je surjektivní.
c) Jsou-li f a g bijektivní, pak i složené zobrazení $g \circ f$ je bijektivní.

3.5 Funkce

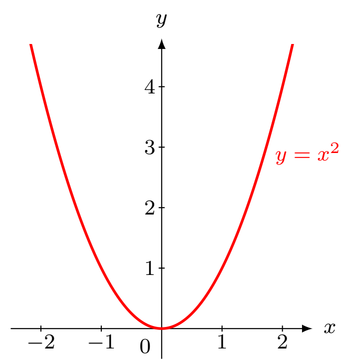
Nejdůležitějším případem zobrazení je **funkce**. S tímto pojmem se seznamují již žáci základní školy.

Zobrazení $f : A \to \mathbb{R}$, kde A je podmnožinou množiny reálných čísel, se nazývá **funkce**.

Poznámka 3.12. Je-li $f : A \to \mathbb{R}$ funkce, pak množina A se nazývá **definiční obor funkce** f a označuje se $D(f)$. **Obor hodnot funkce** $f : A \to \mathbb{R}$ je množina $\{y \in \mathbb{R}; \exists x \in A : f(x) = y\}$. Obor hodnot funkce se obvykle označuje symbolem $H(f)$. **Grafem funkce** $f : A \to \mathbb{R}$ nazýváme množinu všech bodů $[x, y]$, kde $x \in A$ a $y = f(x)$, tj. množinu: $G(f) = \{[x, y]; x \in A, y = f(x)\}$.

Příklad 3.30. Sestrojme grafy následujících funkcí: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 3x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

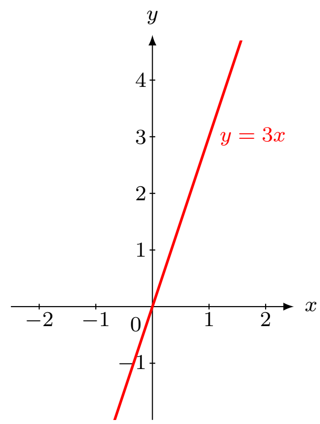
Řešení:



Obr. 3.24: Graf funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ pro každé $x \in \mathbb{R}$

Definičním oborem funkce f je množina všech reálných čísel a jejím oborem hodnot je množina všech nezáporných reálných čísel. Funkce f není injektivní, protože existují dvě různá reálná čísla x_1, x_2, která mají ten samý obraz. Stačí položit $x_1 = 1$ a $x_2 = -1$. Potom $x_1 \neq x_2$ a $f(x_1) = 1^2 = 1$, $f(x_2) = (-1)^2 = 1$, a tedy $f(x_1) = f(x_2)$. Funkce f není surjektivní, protože $H(f) \neq \mathbb{R}$. Ne ke každému reálnému číslu y existuje reálné číslo x takové, že $y = x^2$. Za y stačí vzít například číslo -1.

Definičním oborem funkce g (Obr. 3.25) je množina všech reálných čísel. Funkce g je injektivní, protože pro libovolná reálná čísla x_1, x_2 platí, je-li $x_1 \neq x_2$, potom $3x_1 \neq 3x_2$. Funkce g je surjektivní, protože jejím oborem hodnot je množina všech reálných čísel. Ke každému reálnému číslu y totiž existuje reálné číslo x takové, že $y = 3x$. Stačí položit $x = y/3$.



Obr. 3.25: Graf funkce $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 3x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$

3.6 Cvičení

3.1. Vytvořte následující kartézské součiny: $M \times L$, $L \times L$ a $K \times M$, je-li $K = \{4, 5, 8, 11\}$, $L = \{0, 3, 7\}$ a $M = \{1, 2, 6, 9, 10\}$.

3.2. Jsou dané množiny $A = \{w, x, y, z\}$ a $B = \{a, b, c\}$. Kartézským grafem znázorněte kartézský součin $B \times A$ a kartézský součin $B \times B$.

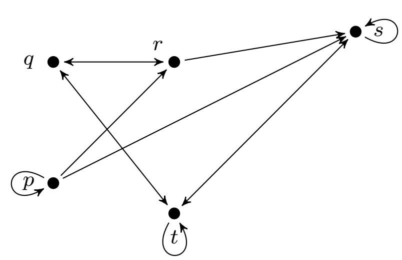
3.3. Dokažte platnost distributivních zákonů, pokud jsou dány množiny: $A = \{x \in \mathbb{N} : x < 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 10 \wedge 3|x\}$ a $C = \{x \in \mathbb{N} : 3 \leq x < 13 \wedge x \text{ je sudé}\}$.

a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$,
b) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$,
c) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$.

3.4. Určete relaci na daném kartézském součinu:

a) $R \subset A \times A$; $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$; $R = \{[x, y] \in A \times A : x + y = 4\}$;
b) $P \subset L \times M$; $L = \{0, 1, 3, 5\}$, $M = \{2, 4, 6\}$; $P = \{[x, y] \in L \times M : x + 1 > y\}$;
c) $O \subset K \times M$; $K = \{6, 8, 10, 12\}$, $M = \{2, 4, 6\}$; $O = \{[x, y] \in K \times M : 2y = x\}$;
d) $S \subset F \times F$; $F = \{2, 3, 4, 5, 6\}$; $S = \{[x, y] \in F \times F : y|x\}$.

3.5. Vypište prvky relace R, která je znázorněna na grafu na obrázku 3.26.



Obr. 3.26: Uzlový graf z Cv. 3.5

3.6. Zakreslete grafy relací R, P, O a S z předcházejícího cvičení 3.4:

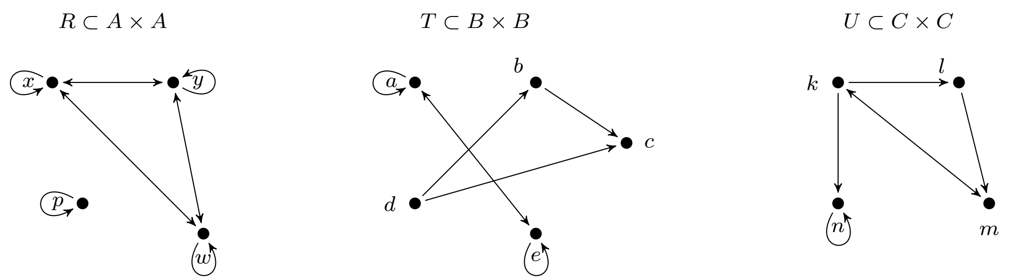
a) kartézský graf pro relace O a S,

b) šachovnicový graf pro relace P a R,

c) uzlový graf pro relace R, O a S.

3.7. Určete a odůvodněte vlastnosti relací R a S z předcházejícího cvičení 3.4.

3.8. Z grafů na obrázku 3.27 zjistěte, zda se jedná o relace ekvivalence. Svoje tvrzení odůvodněte.



Obr. 3.27: Uzlový graf z Cv. 3.8

3.9. Určete a odůvodněte, jestli jsou zadané relace bijektivním zobrazením. Relace zakreslete do uzlových grafů.

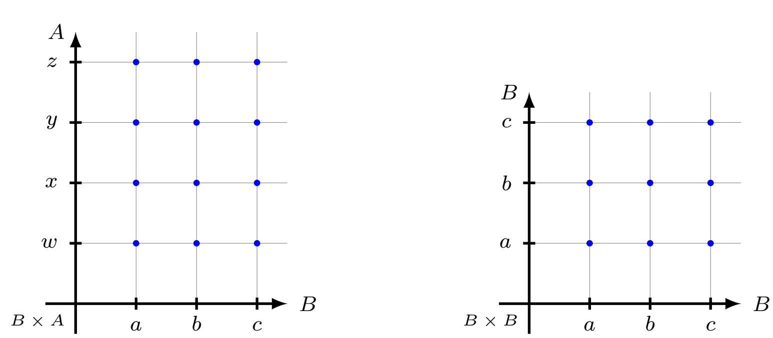
a) $R \subset A \times B$; $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$;
$R = \{[a, 5], [b, 1], [d, 7], [e, 7], [c, 3]\}$;

b) $S \subset L \times M$; $L = \{0, 1, 3, 5\}$, $M = \{2, 4, 6\}$; $S = \{[1, 2], [0, 2], [3, 4], [5, 2]\}$.

3.7 Výsledky cvičení

3.1. $M \times L = \{[1, 0], [1, 3], [1, 7], [2, 0], [2, 3], [2, 7], [6, 0], [6, 3], [6, 7], [9, 0], [9, 3], [9, 7], [10, 0], [10, 3], [10, 7]\}$, $L \times L = \{[0, 0], [0, 3], [0, 7], [3, 0], [3, 3], [3, 7], [7, 0], [7, 3], [7, 7]\}$, $K \times M = \{[4, 1], [4, 2], [4, 6], [4, 9], [4, 10], [5, 1], [5, 2], [5, 6], [5, 9], [5, 10], [8, 1], [8, 2], [8, 6], [8, 9], [8, 10], [11, 1], [11, 2], [11, 6], [11, 9], [11, 10]\}$.

3.2.



3.3. Distributivní zákony platí.

3.4. a) $R = \{[0,4],[1,3],[2,2],[3,1],[4,0]\}$;

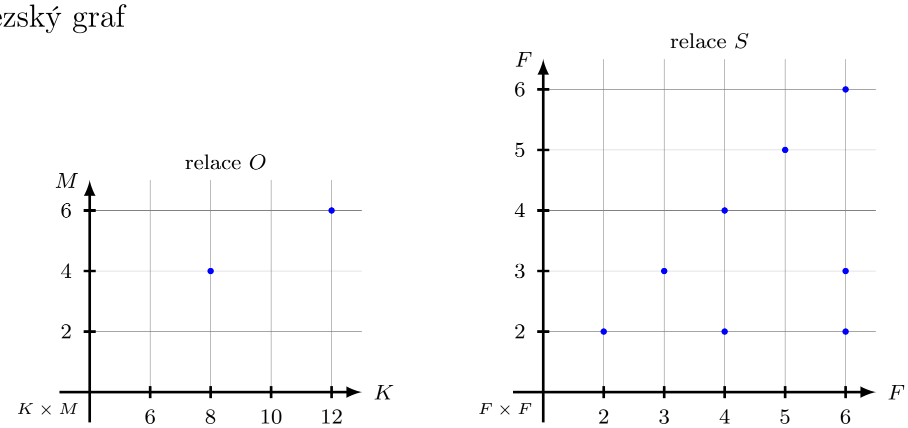
b) $P = \{[3,2],[5,2],[5,4]\}$;

c) $O = \{[8,4],[12,6]\}$;

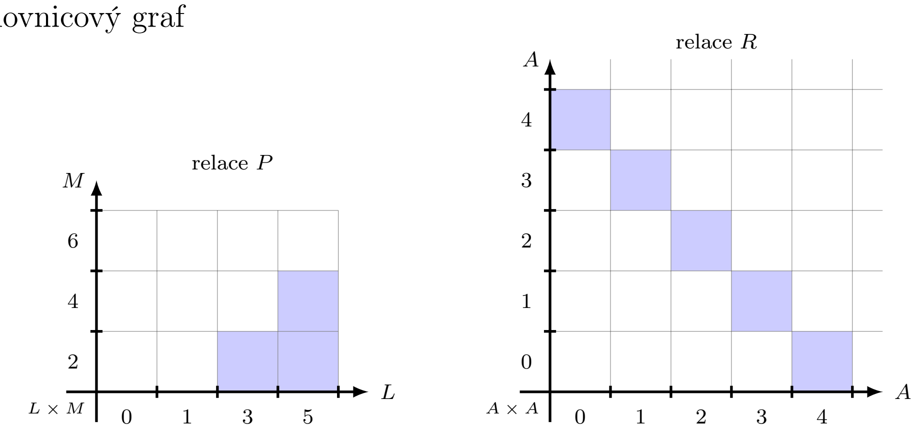
d) $S = \{[2,2],[3,3],[4,2],[4,4],[5,5],[6,2],[6,3],[6,6]\}$.

3.5. $R = \{[q,t],[q,r],[p,p],[p,r],[p,s],[r,q],[r,s],[t,q],[t,t],[t,s],[s,t],[s,s]\}$.

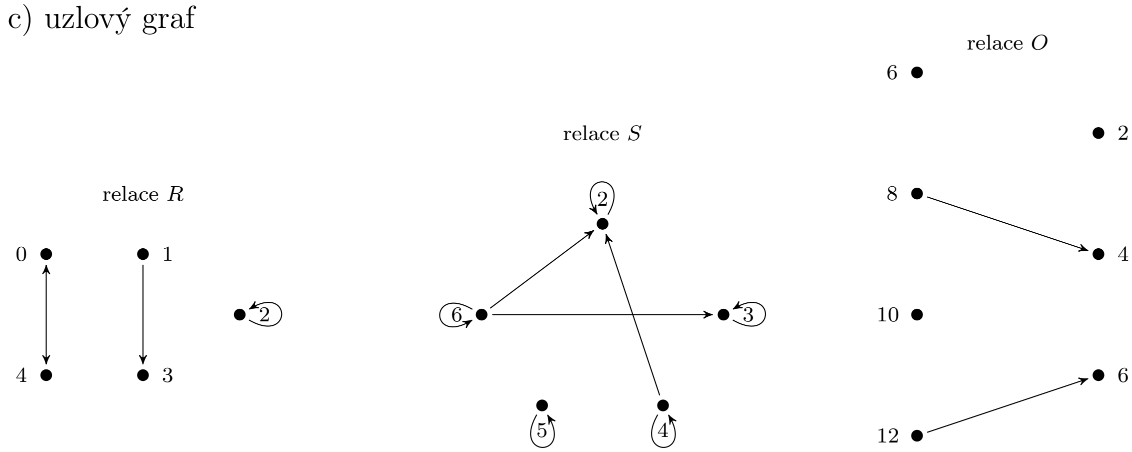
3.6. a) kartézský graf



b) šachovnicový graf



c) uzlový graf

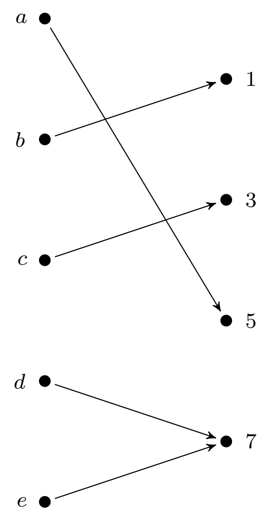


3.7. Relace R je symetrická a relace S je reflexivní.

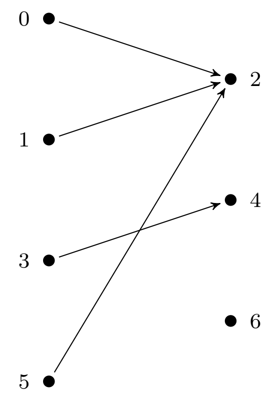
3.8. Relace R je ekvivalence; relace T není ekvivalence, protože není reflexivní a symetrická; relace U není ekvivalence, protože není reflexivní, symetrická ani tranzitivní.

3.9.

Není bijektivní.
Je surjektivní zobrazení, není injektivní.



Je zobrazení, není injektivní ani surjektivní ani bijektivní.



4. METODICKÉ POZNÁMKY

Pro správný rozvoj matematických kompetencí je pro učitele důležité být obeznámen i s matematickým pozadím v prostředí mateřské školy a prvního stupně základní školy. Své vědomosti však nepředáváme jako hotová fakta, záměrem není jen osvojování si pojmů. Úroveň abstraktního myšlení dětí mladšího školního věku je poměrně nízká. V rámci propedeutiky matematické oblasti výrokové logiky je hlavním cílem u dětí rozhodovat o pravdivosti tvrzení představující výrok. Uvažování nad pravdivostí tvrzení je vázáno na osobní zkušenosti, děti uvažují o pravdivosti tvrzení na základě konkrétní situace. Vycházíme tedy ze známých situací, z běžného života, ale zachováváme matematický obsah. Tvrzení můžeme formulovat ve tvaru pozitivním, nebo negativním, kdy chceme vyjádřit, že něco tak není.

Děti předškolního věku vedeme k porozumění a používaní kvantifikátorů jako jsou: všechny, každý, někdo, nikdo atd., přičemž dítě by mělo umět rozhodnout také o pravdivosti výroků. Po zvládnutí používání jednoduchých výroků můžeme začít pracovat i s některými logickými spojkami. Také na primárním stupni základní školy se setkáváme s propedeutikou pojmu výrok, který je však nahrazen synonymem jako vyjádření, tvrzení a podobně. Úlohy jsou přitom zaměřeny na rozhodnutí o jejich pravdivosti.

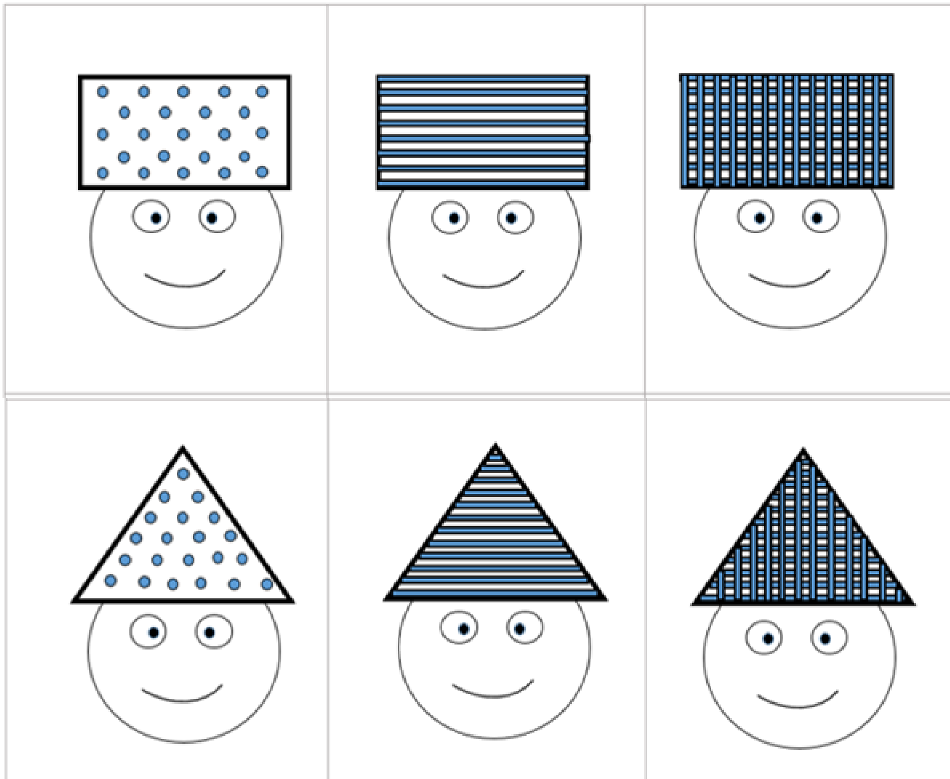
U dětí předškolního věku je nejpřirozenějším způsobem pro rozvoj schopností hra. Cílem je vytvářet dítěti známé situace, ve kterých má příležitost řešit matematické problémy, rozvíjet logické myšlení a podporovat tvořivé myšlení. Učitel může vést dítě k řešení problémů kladením otázek. Později, přechodem do prvního ročníku základní školy, se pro rozvoj schopností dítěte přechází od hry k záměrnému působení v rámci výchovně-vzdělávacího procesu. Na 1. stupni základní školy se také nevyučují jednotlivé pojmy a tematické celky separovaně, ale navzájem se prolínají.

Příklad 4.1. Pro realizaci aktivity „*Bystré hlavičky*“ je potřebný výběr souboru objektů, které budeme rozlišovat na základě určených charakteristik. V našem případě budeme mít soubor „*bystrých hlaviček*“, které se odlišují navzájem dvěma charakteristikami: tvarem čepice (trojúhelník a čtyřúhelník) a stylem, který je na čepici (puntíkový, pruhovaný a mřížkovaný).

Budeme pracovat s kartičkami, u nichž použijeme všechny kombinace obou tvarů čepic k uvedeným stylům (obrázek 4.1).

Nejdřív vyzveme žáky, aby z kartiček vytvořili skupinky na základě společného znaku, tím zjistíme odlišnosti mezi charakteristikami jednotlivých hlaviček.

Hlavní myšlenkou aktivity je vybrat správnou kartičku s hlavičkou podle našich instrukcí. Zpočátku formulujeme instrukce podle dichotomického třídění, tedy podle jednoho znaku: tvaru nebo stylu čepice. Například: „*Vyber hlavičku, která nosí čepici ve tvaru trojúhelníku!*“ nebo „*Ukaž hlavičku, která nemá pruhovanou čepici!*“



Obr. 4.1: Kartičky pro didaktickou aktivitu „*Bystré hlavičky*“

a: Čepice má tvar obdélníku.
b: Čepice má tvar trojúhelníku.
c: Čepice je puntíková.
d: Čepice je pruhovaná.
e: Čepice je mřížkovaná.

Poté se můžeme soustředit na třídění objektů podle dvou znaků a budeme vytvářet složené výroky pomocí konjunkce, disjunkce a negace. Abychom si to převedli i do jednotného matematického zápisu, určíme si následující tvrzení:

„Vyberte hlavičku s čepicí, která má tvar trojúhelníku a je také puntíková.“	$b \wedge c$
„Vyberte hlavičku s čepicí, která má tvar obdélníku a není pruhovaná.“	$a \wedge d'$
„Vyberte hlavičku s čepicí, která má tvar trojúhelníku nebo je mřížkovaná.“	$b \vee e$
„Vyberte hlavičku s čepicí, která nemá tvar obdélníku a není mřížkovaná.“	$a' \wedge e'$

Je důležité dát pozor na formulaci pro správné pochopení logických spojek. Při konjunkci použitím spojky „a“ žákům intuitivně vyvstane, že správná je jenom jediná možnost, protože když použijeme formulaci tvaru „*Vyberte hlavičku s puntíkovou čepicí trojúhelníkového tvaru.*“, obcházíme danou možnost. Při negaci jednoho z elementárních výroků nám vzniká více správných odpovědí, jelikož získáváme doplňkový výběr dalších odpovědí.

Podobně jako při logické spojce disjunkce „nebo“. Děti, případně žáci, z vlastní zkušenosti vědí, že použitím spojky „nebo“ vyplývá více možností výběru. Zvlášť pokud upozorníme na to, že tato spojka nevylučuje možnost splnění obou znaků současně. Při postupném vybírání správných kartiček s hlavičkami zjistí, že nesprávný výběr je jenom v jediném případě, a to když objekt nemá ani jeden uvedený znak.

Nakonec můžeme použít i složené výroky, jako například:

„*Vyberte hlavičku s čepicí, která má tvar obdélníku a zároveň je puntíková nebo pruhovaná.*“

$$b \wedge (c \vee d)$$

Nakonec pokyny můžeme upravit i použitím kvantifikátorů: „*Ukažte mi všechny hlavičky, na kterých je čepice proužkovaná.*“ Nebo také způsobem: „*Máme alespoň jednu hlavičku, která má na sobě čepici ve tvaru trojúhelníku?*“.

Úloha 4.1. Upravte sadu kartiček „Bystrých hlaviček“ o jiné znaky, podle kterých můžou děti, resp. žáci, třídit nebo vybírat. Uveďte co nejvíce znaků a přiřaďte je podle náročnosti úměrně k věku a schopnostem dětí nebo žáků.

Úloha 4.2. Vytvořte vlastní kartičky, které budou obsahovat charakteristické znaky rozvíjející matematické představy u dětí předškolního věku, resp. kartičky vhodné pro hodiny matematiky u dětí mladšího školního věku.

Cílem zařazení prvků výrokové logiky do činností dětí v předškolním a mladším školním věku tedy jsou:

- správně rozhodovat o pravdivosti tvrzení,
- argumentovat o pravdivosti tvrzení,
- porozumět pravidlům (příp. je formulovat) s využitím prvků logiky,
- používat jazyk logiky na propedeutické úrovni.

U teorie množin se opíráme o množinu jako souhrn dobře rozlišitelných prvků na základě vybraných vlastností. Avšak pojem množina není pro úroveň mateřské školy přiměřený. Vhodnější je používat označení skupina nebo soubor objektů.

Pokud můžeme o každém objektu jednoznačně rozhodnout, jestli vlastnost má, nebo nemá, hovoříme, že množina je jednoznačně určená. Z pohledu matematiky je požadováno, aby si dítě uvědomovalo různé vlastnosti objektů a na základě vybraných vlastností vytvářelo jejich skupiny objektů, tedy množiny. Propedeutika pojmu množiny a jejích prvků je závislá na rozhodnutí, zda daný objekt do vytvořené skupiny patří, nebo nepatří. Následně je potřebné pozornost dětí koncentrovat na opis společných nebo rozdílných vlastností, přičemž je mohou zkoumat pozorováním nebo hmatem.

Děti vytvářejí skupiny dvěma způsoby, a to výčtem jednotlivých objektů, které splňují vybranou vlastnost (vyjmenování prvků) nebo určením společné vlastnosti objektů (charakteristickou vlastností). Výběr je realizován vymezením časti prostoru třídy, například ohrádkou, provázkem nebo jinou pomůckou, která může představovat Vennovy diagramy. Vhodné je využití i pracovních listů.

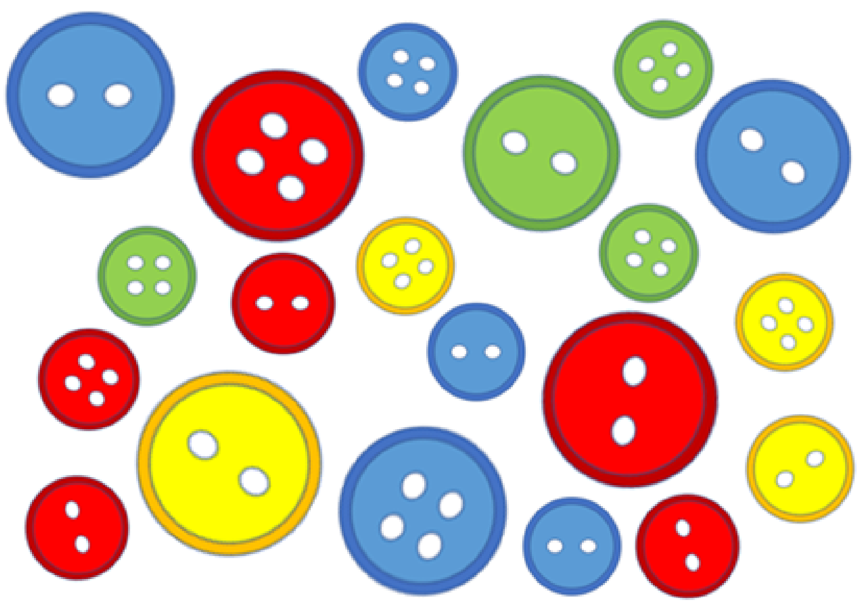
Při vytváření skupin objektů s dětmi předškolního věku také můžeme zařadit použití množinových operací a relace podmnožiny. Sjednocení představuje jednoduché spojování vícero skupin do jedné. Průnik je možné realizovat hledáním společných vlastností objektů ve dvou rozdílných souborech. Po vytvoření skupiny na základě vybrané vlastnosti můžeme dále pracovat s dalšími vlastnostmi a vytvářet podskupiny. Vlastnosti, se kterými pracujeme, jsou barva, velikost, tvar, materiál apod. Vytváření podskupin se odvíjí od propedeutiky rozkladu množiny na podmnožiny.

Činnost, při které postupně doplňujeme objekty do podskupiny na základě vybrané vlastnosti nebo vytvořenou skupinu na základě vybrané vlastnosti rozdělujeme na vícero menších podskupin, označujeme jako třídění. Vzhledem na povahu zadané aktivity může učitelka navrhnout způsob třídění, ale také může výběr způsobu třídění ponechat na rozhodnutí dětí.

Příklad 4.2. Skupinu knoflíků na obrázku 4.2 můžeme třídit podle různých vlastností: velikost, barva a počet dírek. Následujte pokyny v jednotlivých krocích:

- Vytvořte skupiny knoflíků podle barvy. Vzniknou čtyři skupiny knoflíků: modrá, červená, zelená a žlutá – třídění na základě vybrané vlastnosti.
- Spojte skupinu modrých a červených knoflíků – sjednocení množin.
- Z dané skupiny vyberte velké knoflíky – průnik množin modrých a červených knoflíků.
- Nakonec vyberte a ukažte knoflíky, které mají dvě dírky – rozklad množiny podmnožiny.

Které knoflíky jste vybrali?



Obr. 4.2: Obrázek pro třídění do podskupin pro příklad 4.2

Úloha 4.3. Navrhněte vlastní skupinu objektů, u které můžeme rozlišovat alespoň pět vlastností.

Je důležité dbát na úroveň náročnosti vhodnou pro děti předškolního věku. U mladších dětí začínáme s jednou vlastností, kdy je cílem určit, jestli určitý objekt danou vlastnost má, nebo nemá. Postupně přecházíme na třídění podle určených dvou vlastností, následně třídění bez určení vlastnosti, kdy si děti stanoví sami, podle čeho skupinu objektů budou třídit. Těžší obtížnost se potom odvíjí od vícera vlastností, podle kterých je možné objekty třídit. Děti předškolního věku umí určit a třídit objekty kromě kvalitativních vlastností také podle počtu.

Právě prostřednictvím teorie množin vytváříme u dětí prvotní představy o počtu. Pochopení čísla u dětí předškolního a mladšího školního věku je náročným a dlouhodobější proces a vychází z kardinality množin. Počet prvků jisté množiny reprezentuje konkrétní počet vyjádřený číslicí.

Cílem zařazení elementů teorie množin do činností dětí v předškolním a mladším školním věku je:

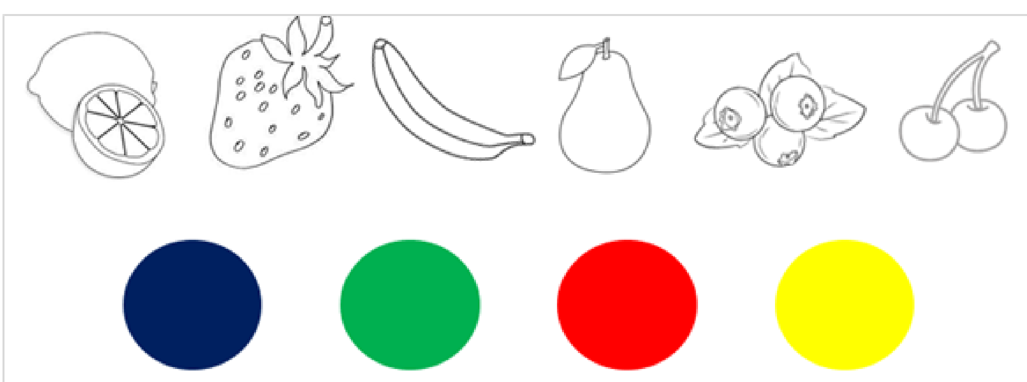
- rozlišit, hledat a pojmenovat vlastnosti objektů (prvků),
- vytvořit skupinu objektů (prvků) na základě kvalitativních vlastností,
- vyjmenovat objekty (prvky), které do dané skupiny patří,
- užívat operace s množinami na propedeutické úrovni,
- určit počet objektů ve skupině.

Již děti v předškolním věku mají z každodenní činnosti určité zkušenosti, na základě kterých rozlišují a porovnávají objekty a umí jim přisuzovat různé vztahy. Intuitivně umí rozlišovat konkrétní předměty nebo lidi ve svém okolí, například rozlišit sourozence od kamarádů. Z pohledu matematiky pracují s částečnými relacemi. Hledají souvislosti mezi dvěma objekty a vytváří několik uspořádaných dvojic na základě přiřazování.

Pro aktivity zaměřené na přiřazování je potřebné použít objekty z reálného prostředí, které jsou dětem známé. Objekty mají mít mezi sebou logickou souvislost a kritérium přiřazení jsou děti schopné zdůvodnit a vysvětlit. Běžným příkladem pro přiřazování jsou například pohádkové postavy, roční období. Kritériem pro přiřazování mohou být i kvalitativní vlastnosti. K objektům může být přiřazena jejich barva, vhodná velikost, tvar a další.

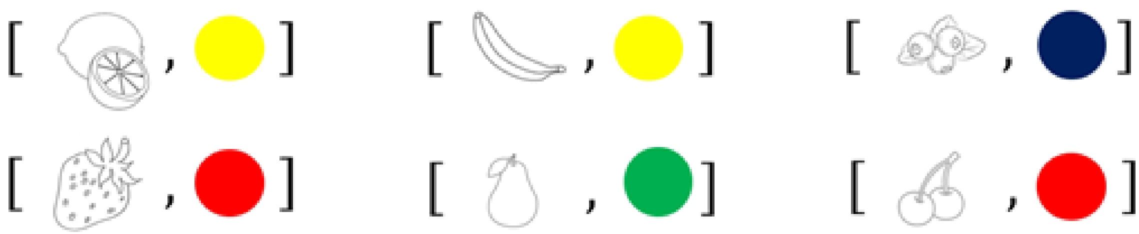
Aktivity mohou být realizovány formou manipulační činnosti, ale také využitím pracovních listů.

Příklad 4.3. Každému ovoci z obrázku 4.3 přiřadíme jeho barvu. Z pohledu matematiky budeme vybírat podmnožinu ze všech uspořádaných dvojic kartézského součinu OVOCE $\times$ BARVA.



Obr. 4.3: Obrázek pro přiřazování z příkladu 4.3

Hledaná relace bude potom obsahovat uspořádané dvojice jako na obrázku 4.4:



Obr. 4.4: Řešení příkladu 4.3

Pro mladší děti by velikost obou množin měla být stejná. Práce s množinami, které mají různý počet prvků v tomto případě podporuje vnímavost, že některé objekty mají společné vlastnosti. V dalším příkladě si ukážeme, jak vytvářením uspořádaných dvojic můžeme položit základy pro porovnávání skupin objektů s ohledem na jejich počet.

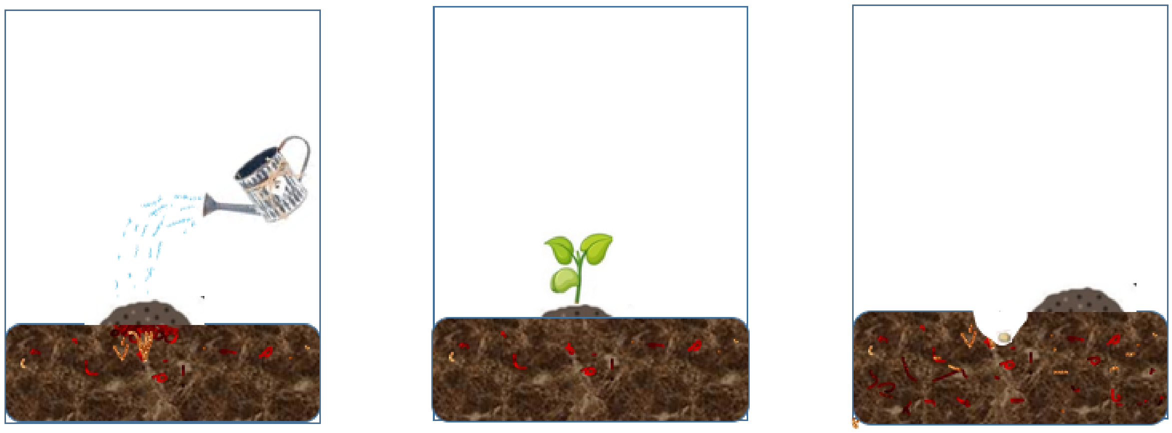
Příklad 4.4. Ze třídy nebo pomocí panáčků vybereme několik chlapců a několik děvčat. Budeme vytvářet dvojice v pořadí kluk – dívka. Mohou nastat tři situace:

1. V prvním případě je počet chlapců a dívek stejný, protože při vytváření dvojic nikdo nezůstane sám (rovnost),
2. Při vytváření dvojic zůstane několik děvčat bez dvojice, což znamená, že chlapců je méně než děvčat (menší jako),
3. Při vytváření dvojic už nezbude děvče pro vytvoření další dvojice a několik chlapců zůstane bez dvojice. To znamená, že děvčat je více než chlapců (větší jako).

Porovnávaní počtu dvou, případně vícero skupin, probíhá nejdřív odhadem. V takovém případě musí být počet objektů v oboru čísel pro děti známý a ve skupinách výrazně odlišný. Vytváření dvojic přiřazováním je dalším krokem k porovnání množství. Zde se už počet předmětů nemusí výrazně lišit. Je potřebné dbát na správnou formulaci výsledku. Děti v mladším školním věku umí určit počet předmětů ve skupinách a tyto skupiny porovnat určením počtu. Také u dětí v mladším školním věku je možné porovnávat určením počtu v číselném oboru, který je pro děti známý.

Uspořádání je činnost, při které dítě také vnímá objekty a snadněji se učí rozpoznat jejich vlastnosti a vztahy mezi nimi. Nemůžeme si však plést uspořádání jako činnost pro rozvoj logického a matematického myšlení a uspořádání věcí v místnosti. Aktivity pro rozvoj dané činnosti jsou zaměřené právě na vytváření uspořádaných n-tic v kontextu situace pro děti známé. Využívané jsou zejména časové posloupnosti a dějové linie pohádek nebo situace z reálného života.

Příklad 4.5. Uspořádejte kartičky do správného pořadí (Obr. 4.5).



Obr. 4.5: Kartičky pro příklad 4.5

Úloha 4.4. Určitě znáte hru Pexeso. Na stejném principu je možné hrát hru *Pexetrio*, kde se ale otáčí místo dvou kartiček kartičky tři. Navrhněte vlastní Pexetrio, aby to bylo zajímavější, na kartičkách nebudou stejné obrázky, ale obrázky na sebe navazující v nějaké časové linii.

Pro primární stupeň základní školy se setkáváme s prostým zobrazením do množiny A do množiny B. Žáci pracují s různými tabulkami, kde pomocí operátorů určují obraz daného vzoru (čísla), ale také naopak, známému obrazu hledají vzor.

Také si můžeme uvést příklad prostého zobrazení množiny A do množiny B. Například při konstrukci číselné osy. Číselná osa v oboru přirozených čísel do 10 je v tomto případě prostým zobrazením množiny $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ do polopřímky $\overrightarrow{OX}$, kde O představuje začátek číselné osy a zároveň je obrazem čísla 0 a X je obrazem čísla 1.

Cílem zařazení elementů relací do činností dětí v předškolním a mladším školním věku, ve významu hledání vztahů mezi objekty, je:

- porovnávat objekty podle dané vlastnosti nebo podle počtu,
- přiřazovat k sobě objekty na základě třídění a porovnávání,
- uspořádat objekty v skupině na základě určité vlastnosti nebo pravidla.

Literatura

[1] Bukovský, L. (1985). Množiny a všeličo okolo nich. Alfa.

[2] Čech, V. (1971). Prečo robíme dôkazy v matematike. SPN.

[3] Hejný, M., et al. (1985). Teória vyučovania matematiky 2. SPN.

[4] Ifrah, G. (2001). The universal history of numbers. John Wiley & Sons.

[5] Kaslová, M (2012). Předmatematické činnosti v předškolním vzdělávání. Raabe CZ.

[6] Kaslová, M. (2017). Konektivní didaktické struktury v mateřské škole se zaměřením na stimulaci prelogického myšlení In V. Murcín (Ed.), Matematika vo svete předškoláka (s. 29 – 46). Pro Solutions.

[7] Križalkovič, K., et al. (1985). Základy elementárnej aritmetiky pre učiteľstvo 1. stupňa ZŠ. Pedagogická fakulta v Nitre.

[8] Lietavcová, M., Lišková, H. (2019). Rozvíjíme předmatematické myšlení dětí. Raabe CZ.

[9] Markechová, D., Švecová, V., Tirpáková, A., Stehlíková, B. (2011). Základy matematiky a rozvoj matematickej logiky. Nitra.

[10] Musser, G. L., Burger, W. F., Peterson, B. E. (2001). Mathematics for elementary teachers. (5th edition). John Wiley & Sons.

[11] Obročníková, D. (2013). Matematika vo svete předškoláka. Metodicko-pedagogické centrum. Opava, Z. (1989). Matematika kolem nás. Albatros.

[12] Palumbíny, D., Beka, J., Križalkovič, K., László, V., Šúňová, M., Markechová, D., Tepličková, R. (1996). Základy elementárnej aritmetiky. Pedagogická fakulta VŠPg v Nitre.

[13] Svobodová, E., et al. (2010). Vzdělávaní v mateřské škole. Portál.

[14] Thiele, R. (1985). Matematické dôkazy. SNTL.

[15] Vrba, A (1974). Princíp matematickej indukcie. Ústav pre učiteľské vzdelanie na UK v Prahe.

Název	Edukační přístupy k tematizaci okruhu – logika, množiny, relace v preprimárním a primárním vzdělávání
Autoři	PaedDr. Kristína Ovary Bulková Ph.D. prof. RNDr. Anna Tirpáková, CSc. Mgr. Lubomír Sedláček, Ph.D. Fakulta humanitních studií
Recenzenti	prof. RNDr. Josef Molnár, CSc., prof. RNDr. Michal Munk, Ph.D.
Vydavatel	Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Vydání	První
Rok vydání	2023
Náklad	Vydáno elektronicky

Sazba systémem LaTeX Mgr. Vladimír Polášek, Ph.D.

ISBN 978-80-7678-218-1