

VÝPOČETNÍ SEMINÁŘ AP1VZ

Neřešené příklady k BP

Obsah

1	Úprava výrazů, rovnice, nerovnice	1
1.1	Mocniny, odmocniny, úprava algebraických výrazů	1
1.2	Lineární rovnice a nerovnice	2
1.3	Soustavy rovnic a nerovnic	2
2	Funkce	4
2.1	Konstantní funkce	4
2.2	Lineární funkce a rovnice přímky	4
2.3	Kvadratická funkce	4
2.4	Exponenciální funkce	5
2.5	Logaritmická funkce	5
2.6	Goniometrické funkce	6
2.7	Cyklometrické funkce	6
2.8	Polynomy a racionální lomené funkce	6
3	Vektory	8
3.1	Operace s vektory	8
4	Matice	9
4.1	Operace s maticemi	9
4.2	Hodnost matice	9
4.3	Inverzní matice	9
4.4	Maticové rovnice	10
4.5	Determinant matice	10
4.6	Soustavy rovnic	11

Úvod

Tento materiál vznikl v rámci bakalářské práce jako souhrn typových příkladů pro předmět Výpočetní seminář vyučovaný na Fakultě aplikované informatiky Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně. Text obsahuje pouze zadání příkladů a jejich výsledky. Kompletní postup řešení lze dohledat v portálu Moodle UTB, kde byl vytvořen kurz jako sbírka těchto příkladů včetně jejich řešení.

Tematicky pokrývá sbírka téměř celý předmět Výpočetní seminář až na oblasti z Analytické geometrie. Částečně taky zasahuje i do dalších matematických předmětů vyučovaných na UTB ve Zlíně. Navíc v portálu Moodle UTB může být sbírka postupně doplňována o další příklady a další témata nejen z daného předmětu. Seznam aktuálních témat a příkladů naleznete přímo v Moodle.

1. ÚPRAVA VÝRAZŮ, ROVNICE, NEROVNICE

1.1 Mocniny, odmocniny, úprava algebraických výrazů

Příklad 1.1. Zjednodušte výraz $a^5 \cdot a^{\frac{1}{4}}$ pro $a > 0$. $\left[a^{\frac{21}{4}} \right]$

Příklad 1.2. Zjednodušte výraz $\frac{b^3}{b^{\frac{3}{10}}}$ pro $b > 0$. $\left[b^{\frac{27}{10}} \right]$

Příklad 1.3. Zjednodušte výraz $\sqrt[5]{a^3} \cdot \sqrt{\sqrt{a}}$ pro $a > 0$. $\left[\sqrt[20]{a^{17}} \right]$

Příklad 1.4. Zjednodušte výraz $\frac{x^3 \cdot \sqrt{\sqrt[5]{x^2}}}{x^7 \cdot \sqrt[3]{x}}$ pro $x > 0$. $\left[\frac{1}{\sqrt[15]{x^{62}}} \right]$

Příklad 1.5. Zjednodušte výraz $\frac{\sqrt[3]{a \cdot \sqrt{b}} \cdot b}{\sqrt[5]{a} \cdot \sqrt[3]{a \cdot b}}$ pro $a > 0, b > 0$. $\left[\frac{\sqrt[6]{b^5}}{\sqrt[5]{a}} \right]$

Příklad 1.6. Vypočtěte $\left(\sqrt{8} \cdot \frac{1}{3} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot 3^2 \right)^3$. $\left[\frac{81}{8} \right]$

Příklad 1.7. Upravte výraz $(a^3 + b^4)^2$. $\left[a^6 + 2a^3b^4 + b^8 \right]$

Příklad 1.8. Upravte výraz $(x^3 - x^4)^2$. $\left[x^8 - 2x^7 + x^6 \right]$

Příklad 1.9. Upravte výraz $(3x - 4y)^3$. $\left[27x^3 - 108x^2y + 144xy^2 - 64y^3 \right]$

Příklad 1.10. Rozložte výraz $x^2 - 9$ na součin. $\left[(x - 3) \cdot (x + 3) \right]$

Příklad 1.11. Rozložte výraz $4x^2 - 5$ na součin. $\left[(2x - \sqrt{5}) \cdot (2x + \sqrt{5}) \right]$

Příklad 1.12. Rozložte výraz $\frac{9x^2}{25} - \frac{1}{7}$ na součin. $\left[\left(\frac{3}{5}x - \frac{1}{\sqrt{7}} \right) \cdot \left(\frac{3}{5}x + \frac{1}{\sqrt{7}} \right) \right]$

Příklad 1.13. Vypočtěte $112^2 - 111^2$ bez kalkulačky. $\left[223 \right]$

Příklad 1.14. Výraz $x^2y^3 - x^3y^2$ vytýkáním rozlož na součin. $\left[x^2 \cdot y^2 \cdot (y - x) \right]$

Příklad 1.15. Výraz $30a^2b^2 - 25ab^2 + 15b$ vytýkáním rozlož na součin. $\left[5b \cdot (6a^2b - 5ab + 3) \right]$

Příklad 1.16. Zjednodušte výraz $\frac{4x^2 - 4y^2}{16x + 16y}$ a určete podmínky. $\left[\frac{1}{4}(x - y); x \neq -y \right]$

Příklad 1.17. Zjednodušte výraz $\frac{x + 2}{x^2 - 1} - \frac{x + 4}{3x^2 - 3}$ a určete podmínky. $\left[\frac{2}{3(x - 1)}; x \neq \pm 1 \right]$

Příklad 1.18. Zjednodušte výraz $\frac{2x + 4}{x^2 - 9} + \frac{5x}{9x - 3x^2}$ a určete podmínky. $\left[\frac{1}{3(x + 3)}; x \neq \pm 3, x \neq 0 \right]$

Příklad 1.19. Zjednodušte výraz $\frac{x - 1 + \frac{4}{x+3}}{x + \frac{1}{x+2}}$ a určete podmínky. $\left[\frac{x + 2}{x + 3}; x \notin \{-3; -2; -1\} \right]$

Příklad 1.20. Zjednodušte výraz $\frac{\frac{a^2 - 4}{a}}{\frac{1}{a^2 - 2a}} \cdot \frac{1}{a^2 - 4a + 4}$. $\left[a + 2 \right]$

1.2 Lineární rovnice a nerovnice

Příklad 1.21. Vyřešte v \mathbb{R} rovnici $7x - 2 = 12 - 5x$ a udělejte zkoušku. [$\frac{7}{6}$]

Příklad 1.22. Vyřešte v \mathbb{R} rovnici $\frac{1}{x+2} = \frac{1}{3(x-1)}$, určete podmínky. [$\frac{5}{2}$; $x \notin \{-2; 1\}$]

Příklad 1.23. Vyřešte v \mathbb{R} rovnici $\frac{13-5y}{y+1} + 5 = \frac{2}{y+2}$, určete podmínky. [$-\frac{17}{8}$; $y \notin \{-2; -1\}$]

Příklad 1.24. Vyřešte v \mathbb{R} rovnici $6x - a = 3ax + 4$ vzhledem k parametru $a \in \mathbb{R}$.
[nemá řešení pro $a = 2$; $x = \frac{a+4}{6-3a}$ pro $a \neq 2$]

Příklad 1.25. Vyřešte v \mathbb{R} nerovnici $5 + 7(x+1) \geq 4(x+3) - 11$. [$x \geq -\frac{11}{3}$]

Příklad 1.26. Vyřešte v \mathbb{R} nerovnici $\frac{7x-5}{2x+4} < 0$. [$x \in (-2; \frac{5}{7})$]

Příklad 1.27. Vyřešte v \mathbb{R} nerovnici $\frac{3x+4}{2-x} < 0$. [$x \in (-\infty; -\frac{4}{3}) \cup (2; \infty)$]

Příklad 1.28. Vyřešte v \mathbb{R} nerovnici $\frac{4x-1}{5-6x} \geq 0$. [$x \in \langle \frac{1}{4}; \frac{5}{6} \rangle$]

Příklad 1.29. Vyřešte v \mathbb{R} nerovnici $|x-4| = 6$. [$x \in \{-2; 10\}$]

Příklad 1.30. Vyřešte v \mathbb{R} nerovnici $|3x-5| = 7$. [$x \in \{-\frac{2}{3}; 4\}$]

Příklad 1.31. Vyřešte v \mathbb{R} nerovnici $|x+3| + |x-4| = 7$. [$x \in \langle -3; 4 \rangle$]

Příklad 1.32. Vyřešte v \mathbb{R} nerovnici $|x+2| - |x-3| = 1$. [$x = 1$]

Příklad 1.33. Vyřešte v \mathbb{R} nerovnici $|x-2| < 5$. [$x \in (-3; 7)$]

Příklad 1.34. Vyřešte v \mathbb{R} nerovnici $|x+4| < 2$. [$x \in (-6; -2)$]

Příklad 1.35. Vyřešte v \mathbb{R} nerovnici $|x+3| \geq 1$. [$x \in (-\infty; -4) \cup \langle -2; \infty \rangle$]

1.3 Soustavy rovnic a nerovnic

Příklad 1.36. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcl} x + 2y & = & 7 \\ -x + 3y & = & 8. \end{array} \quad [[x; y] = [1; 3]]$$

Příklad 1.37. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcl} \frac{x}{3} + 4y & = & 1 \\ \frac{x}{5} - y & = & -1. \end{array} \quad [[x; y] = [-\frac{45}{17}; \frac{8}{17}]]$$

Příklad 1.38. Řešte soustavu rovnic

$$x + 2z = 4$$

$$y - 4z = 2$$

$$\underline{2x + 2y = 3.}$$

$$[[x; y; z] = [\frac{17}{2}; -7; -\frac{9}{4}]]$$

Příklad 1.39. Řešte soustavu rovnic

$$3x - \frac{2}{y} = \frac{2}{3}$$

$$\underline{6x + \frac{6}{y} = 13.}$$

$$[[x; y] = [1; \frac{6}{7}]]$$

Příklad 1.40. Řešte soustavu rovnic

$$5x - \frac{3}{y-1} = -2$$

$$\underline{\frac{x}{y-1} = 1.}$$

$$[[x; y] \in \{[-1; 0]; [\frac{3}{5}; \frac{8}{5}]\}]$$

Příklad 1.41. Řešte soustavu rovnic

$$3x + y - 5xy = 5$$

$$\underline{x + 3y - 1 = 0.}$$

$$[[x; y] \in \{[-2; 1]; [\frac{7}{5}; -\frac{2}{15}]\}]$$

2. FUNKCE

2.1 Konstantní funkce

Příklad 2.1. Načrtněte graf funkce $y = 4$.

Příklad 2.2. Načrtněte graf funkce $y = -3$.

2.2 Lineární funkce a rovnice přímky

Příklad 2.3. Načrtněte graf funkce $y = 3x - 2$.

Příklad 2.4. Načrtněte graf funkce $y = \frac{1}{3}x + 2$.

Příklad 2.5. Uvažujte lineární funkci, jejíž graf prochází body $A = [2, \frac{1}{3}]$ a $B = [\frac{2}{3}, -1]$. Určete předpis této lineární funkce. $[y = x - \frac{5}{3}]$

Příklad 2.6. Uvažujte lineární funkci, jejíž graf prochází body $A = [\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}]$ a $B = [2, 0]$. Určete předpis této lineární funkce. $[y = 3x - 6]$

2.3 Kvadratická funkce

Příklad 2.7. Řešte kvadratickou rovnici $2x^2 - 7x + 3 = 0$ a proveďte rozklad funkce $y = 2x^2 - 7x + 3$ na součin a upravte funkci na vrcholový tvar.

$$[x_1 = 3, x_2 = \frac{1}{2}; y = (x - 3)(2x - 1) = 2(x - 3)(x - \frac{1}{2}); y = 2(x - \frac{7}{4})^2 - \frac{25}{8}]$$

Příklad 2.8. Řešte kvadratickou rovnici $3x^2 - 2x - 1 = 0$, proveďte rozklad funkce $y = 3x^2 - 2x - 1$ na součin a upravte funkci na vrcholový tvar.

$$[x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = 1; y = (3x + 1)(x - 1) = 3(x + \frac{1}{3})(x - 1); y = 3(x - \frac{1}{3})^2 - \frac{4}{3}]$$

Příklad 2.9. Uvažujte kvadratickou funkci $f : y = -4x^2 - x + \frac{3}{2}$. Určete průsečíky paraboly, která je grafem funkce f , se souřadnými osami. Proveďte rozklad funkce f na součin. Určete souřadnice vrcholu paraboly, která je grafem funkce f .

$$[P_{x_1} = -\frac{3}{4}, P_{x_2} = \frac{1}{2}; P_y = \frac{3}{2}; y = (4x + 3)(\frac{1}{2} - x); y = -4(x + \frac{1}{8})^2 + \frac{25}{16}]$$

Příklad 2.10. Uvažujte kvadratickou funkci $f : y = -\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + 1$. Určete průsečíky paraboly, která je grafem funkce f , se souřadnými osami. Proveďte rozklad funkce f na součin. Určete souřadnice vrcholu paraboly, která je grafem funkce f .

$$[P_{x_1} = -1, P_{x_2} = 2; P_y = 1; y = -\frac{1}{2}(x + 1)(x - 2); y = -\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{9}{8}]$$

Příklad 2.11. Řešte v \mathbb{R} kvadratickou nerovnici $x^2 - x - 20 \leq 0$. $[x \in \langle -4; 5 \rangle]$

Příklad 2.12. Řešte v \mathbb{R} kvadratickou nerovnici $-x^2 + 3x - 2 < 0$. $[x \in (-\infty; 1) \cup (2; \infty)]$

Příklad 2.13. Řešte v \mathbb{R} kvadratickou nerovnici $x^2 + 4x + 1 > 0$. $[x \in (-\infty; -2 - \sqrt{3}) \cup (-2 + \sqrt{3}; \infty)]$

Příklad 2.14. Řešte v \mathbb{R} nerovnici $x^3 - 7x^2 - 8x < 0$. $[x \in (-\infty; -1) \cup (0; 8)]$

Příklad 2.15. Řešte v \mathbb{R} nerovnici $\frac{x}{(x+5)(x-3)} \geq 0$. $[x \in (-5; 0) \cup (3; \infty)]$

Příklad 2.16. Řešte v \mathbb{R} nerovnici $\frac{(5-2x)(x+2)}{x^2-4x} < 0$. $[x \in (-\infty; -2) \cup (0; \frac{5}{2}) \cup (4; \infty)]$

2.4 Exponenciální funkce

Příklad 2.17. Zjednodušte výraz $\frac{5 \cdot 4^x \cdot 5^{x-1}}{10^x}$ (převeďte na jedinou exponenciální funkci) pomocí pravidel pro počítání s exponenty. $[2^x]$

Příklad 2.18. Řešte rovnici $3^x = 81$. $[x = 4]$

Příklad 2.19. Řešte nerovnici $4^x < 16$. $[x \in (-\infty; 2)]$

Příklad 2.20. Řešte nerovnici $\left(\frac{1}{4}\right)^x < \frac{1}{16}$. $[x \in (2; \infty)]$

Příklad 2.21. Řešte rovnici $4 \cdot 5^x - 75 = 5^x$. $[x = 2]$

Příklad 2.22. Řešte rovnici $3 \cdot 10^x + \frac{7}{100} = 10 \cdot 10^x$. $[x = -2]$

Příklad 2.23. Řešte rovnici $(6^x)^2 - 36 \cdot 6^x = 0$. $[x = 2]$

Příklad 2.24. Řešte rovnici $3^{4x+1} = 9^{x+1}$. $[x = \frac{1}{2}]$

2.5 Logaritmická funkce

Příklad 2.25. Řešte rovnici $2^x = 32$. $[x = 5]$

Příklad 2.26. Řešte rovnici $2^x = 9$. $[x = \log_2 9]$

Příklad 2.27. Řešte rovnici $12^x = 7$. $[x = \log_{12} 7]$

Příklad 2.28. Řešte rovnici $\log_5 x = 2$. $[x = 5^2]$

Příklad 2.29. Řešte rovnici $\ln x = 6$. $[x = e^6]$

Příklad 2.30. Řešte nerovnici $\log_3 x < 2$. $[x \in (0; 9)]$

Příklad 2.31. Řešte nerovnici $\log_{\frac{1}{3}} x < 2$. $[x \in (\frac{1}{9}; \infty)]$

Příklad 2.32. Zjednodušte výraz $\log_2 160 - \log_2 5$. $[5]$

Příklad 2.33. Řešte rovnici $5 \cdot \log_4 x = \log_4 x + 7$. $[x = 8\sqrt{2}]$

Příklad 2.34. Řešte rovnici $\log_2 (x^2 - 2x) = 3$. $[x \in \{-2; 4\}]$

2.6 Goniometrické funkce

Příklad 2.35. Řešte rovnici $\sin x = 1$. $[x \in \{\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi; k \in \mathbb{Z}\}]$

Příklad 2.36. Řešte rovnici $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. $[x \in \{\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi; \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi; k \in \mathbb{Z}\}]$

Příklad 2.37. Řešte rovnici $\sin x = -\frac{1}{2}$. $[x \in \{\frac{7}{6}\pi + k \cdot 2\pi; \frac{11}{6}\pi + k \cdot 2\pi; k \in \mathbb{Z}\}]$

Příklad 2.38. Řešte rovnici $\cos x = -\frac{1}{2}$. $[x \in \{\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi; \frac{4}{3}\pi + k \cdot 2\pi; k \in \mathbb{Z}\}]$

Příklad 2.39. Řešte rovnici $\cos 4x = \frac{1}{2}$. $[x \in \{\frac{1}{12}\pi + k \cdot \frac{\pi}{2}; \frac{5}{12}\pi + k \cdot \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\}]$

Příklad 2.40. Zjednodušte výraz $\frac{\cos^2 x}{1 - \sin x}$. $[\sin x + 1]$

Příklad 2.41. Zjednodušte výraz $\frac{1 - \cot^2 x}{\cos 2x}$. $[-\frac{1}{\sin^2 x}]$

Příklad 2.42. Vypočítejte hodnoty ostatních goniometrických funkcí, je-li $\cos \alpha = \frac{2}{3}$.
 $[\sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3} \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2} \rightarrow \operatorname{cotg} \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}; \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2} \rightarrow \operatorname{cotg} \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}]$

2.7 Cyklometrické funkce

Příklad 2.43. Určete hodnotu funkce $y = \arcsin x$ v bodě $x = \frac{1}{2}$. $[x = \frac{\pi}{6}]$

Příklad 2.44. Určete hodnotu funkce $y = \operatorname{arctg} x$ v bodě $x = \sqrt{3}$. $[x = \frac{\pi}{3}]$

2.8 Polynomy a racionální lomené funkce

Příklad 2.45. Nalezněte stupeň polynomu a násobnost kořenů polynomu $P(x) = x^4 \cdot (x+2)^2 \cdot (x-6)^4$.

$[\text{Stupeň } 10, x = 0 \rightarrow k = 4, x = -2 \rightarrow k = 2, x = 6 \rightarrow k = 4]$

Příklad 2.46. Napište polynom P ve tvaru rozkladu na součin kořenových činitelů, znáte-li všechny kořeny polynomu P a jejich násobnosti: $x_1 = -1 \rightarrow k = 3, x = 4 \rightarrow k = 7, x = 5 \rightarrow k = 1$.

$[P(x) = (x+1)^3 \cdot (x-4)^7 \cdot (x-5)]$

Příklad 2.47. Určete částečný podíl a zbytek při dělení polynomicke funkce $P(x)$ polynomickeou funkcí $Q(x)$, kde

$$P(x) = 2x^3 - 2x^2 - 5x + 9, \quad Q(x) = x^2 - 3x + 2.$$

$[\text{Částečný podíl } S(x) = 2x + 4, \text{ zbytek } R(x) = 3x + 1]$

Příklad 2.48. Určete částečný podíl a zbytek při dělení polynomicke funkce $P(x)$ polynomicke funkcí $Q(x)$, kde

$$P(x) = x^4 - 4x^3 - x^2 + 22x - 6, \quad Q(x) = x^2 - 3.$$

$$[\check{\text{Částečný podíl}} S(x) = x^2 - 4x + 2, \text{ zbytek } R(x) = 10x]$$

Příklad 2.49. Určete částečný podíl a zbytek při dělení polynomicke funkce $P(x)$ polynomicke funkcí $Q(x)$, kde

$$P(x) = x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 10x - 6, \quad Q(x) = x - 3.$$

$$[\check{\text{Částečný podíl}} S(x) = x^3 - 2x^2 - 8x - 14, \text{ zbytek } R(x) = -48]$$

Příklad 2.50. Určete částečný podíl a zbytek při dělení polynomicke funkce $P(x)$ polynomicke funkcí $Q(x)$, kde

$$P(x) = 2x^6 - 4x^3 + x^2 + 3x - 1, \quad Q(x) = x - 1.$$

$$[\check{\text{Částečný podíl}} S(x) = 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 - 2x^2 - x + 2, \text{ zbytek } R(x) = 1]$$

Příklad 2.51. Určete násobnost nulového bodu $c = 2$ polynomu [$k = 4$]

$$P(x) = x^6 - 8x^5 + 26x^4 - 48x^3 + 64x^2 - 64x + 32.$$

Příklad 2.52. Určete násobnost nulového bodu $c = -1$ polynomu [$k = 5$]

$$P(x) = x^6 + 4x^5 + 5x^4 - 5x^2 - 4x - 1.$$

3. VEKTORY

3.1 Operace s vektory

Příklad 3.1. Jsou dány vektory $\vec{u} = (-2; 2; 3)$, $\vec{v} = (-3; 2; 0)$. Určete vektor $2\vec{u} - 4\vec{v}$. $[(8; -4; 6)]$

Příklad 3.2. Jsou dány vektory $\vec{u} = (-1; 2; 1; 3)$, $\vec{v} = (2; -1; 2; 3)$, $\vec{w} = (0; 4; -2; 1)$.
Určete vektor $\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v} + 2\vec{w}$. $[(-7/6; 28/3; -25/6; 5/2)]$

Příklad 3.3. Určete skalární součin vektorů $\vec{u} = (-2; 2; 3)$, $\vec{v} = (-3; 2; 0)$. $[10]$

Příklad 3.4. Určete skalární součin vektorů $\vec{u} = (-3; 1; 2; 0)$, $\vec{v} = (3; 5; 0; -4)$. $[-4]$

Příklad 3.5. Určete vektorový součin vektorů $\vec{u} = (3; -1; 2)$, $\vec{v} = (3; -5; 0)$. $[(10; 6; -12)]$

Příklad 3.6. Určete vektorový součin vektorů $\vec{u} = (2; 0; 4)$, $\vec{v} = (-2; -3; 1)$. $[(12; -10; -6)]$

Příklad 3.7. Určete délku vektoru $\vec{u} = (5; -2; 4)$. $[|\vec{u}| = 3\sqrt{5}]$

4. MATICE

4.1 Operace s maticemi

Příklad 4.1. Spočítejte: $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$ $\left[\begin{pmatrix} 8 & -3 & 4 \\ -6 & 4 & -2 \\ 11 & -1 & -5 \end{pmatrix} \right]$

Příklad 4.2. Spočítejte: $4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{6} & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & \frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -2 & \frac{7}{3} & \frac{2}{3} \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$ $\left[\begin{pmatrix} -6 & -1 & 4 \\ 14 & \frac{2}{3} & 2 \\ -5 & 4 & -1 \\ 18 & -\frac{5}{3} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix} \right]$

Příklad 4.3. Spočítejte: $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & \frac{7}{2} & 1 \\ 6 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$ $\left[\begin{pmatrix} -12 & 0 & -24 \\ -3 & 7 & 4 \end{pmatrix} \right]$

Příklad 4.4. Spočítejte: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 5 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$ $\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 0 \\ 19 & -4 \end{pmatrix} \right]$

Příklad 4.5. Spočítejte: $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 2 \\ 4 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$ $\left[\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \right]$

4.2 Hodnost matice

Příklad 4.6. Určete hodnost h matice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 4 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$ $[h(A) = 3]$

Příklad 4.7. Určete hodnost h matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$ $[h(A) = 4]$

Příklad 4.8. Určete hodnost h matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$ $[h(A) = 3]$

4.3 Inverzní matice

Příklad 4.9. Určete inverzní matici k matici $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$ $\left[A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \right]$

Příklad 4.10. Určete inverzní matici k matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left[A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

Příklad 4.11. Určete inverzní matici k matici $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\left[A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{9}{7} \end{pmatrix} \right]$$

4.4 Maticové rovnice

Příklad 4.12. Řešte maticovou rovnici $2\mathbf{X} + \mathbf{A} = \mathbf{B}$, kde neznámou je matice \mathbf{X} .

$$[\mathbf{X} = \frac{1}{2}(\mathbf{B} - \mathbf{A})]$$

Příklad 4.13. Řešte maticovou rovnici $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{X} = \mathbf{B}$, kde neznámou je matice \mathbf{X} .

$$[\mathbf{X} = (\mathbf{A} + \mathbf{E})^{-1} \cdot \mathbf{B}]$$

Příklad 4.14. Řešte maticovou rovnici $\mathbf{X} \cdot \mathbf{B} + 4\mathbf{X} = \mathbf{A}$, kde neznámou je matice \mathbf{X} .

$$[\mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + 4\mathbf{E})^{-1}]$$

4.5 Determinant matice

Příklad 4.15. Vypočtete determinant matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

$$[|A| = -2]$$

Příklad 4.16. Vypočtete determinant matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

$$[|A| = 7]$$

Příklad 4.17. Vypočtete determinant matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$[|A| = 6]$$

Příklad 4.18. Vypočtete determinant matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$[|A| = -5]$$

Příklad 4.19. Vypočtete determinant matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$[|A| = -54]$$

4.6 Soustavy rovnic

Příklad 4.20. Řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 3x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -1 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1. \end{aligned}$$

$$[[x_1; x_2; x_3] = \left[\frac{2}{7}; -\frac{1}{7}; \frac{1}{7}\right]]$$

Příklad 4.21. Řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= 1 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 &= 3 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_4 &= 0. \end{aligned}$$

$$[[x_1; x_2; x_3; x_4] = \left[-\frac{3}{7}; -\frac{13}{14}; -\frac{8}{7}; \frac{1}{14}\right]]$$

Příklad 4.22. Řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= 1 \\ x_2 - 2x_3 - x_4 &= 2 \\ -3x_2 + 3x_3 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 0. \end{aligned}$$

$$[[x_1; x_2; x_3; x_4] = \left[1; -\frac{13}{4}; -\frac{5}{4}; -\frac{11}{4}\right]]$$