# Nekonečné řady
# sbírka řešených a neřešených příkladů

Infinity series

collection of solved and unsolved examples

Lucie Janoušková

Bakalářská práce
2009

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky
Ústav aplikované informatiky
akademický rok: 2008/2009

# ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

| | |
|---|---|
| Jméno a příjmení: | **Lucie JANOUŠKOVÁ** |
| Studijní program: | **B 3902 Inženýrská informatika** |
| Studijní obor: | **Informační technologie** |
| | |
| Téma práce: | **Nekonečné řady – sbírka řešených a neřešených příkladů** |

Zásady pro vypracování:

1. **Definujte základní pojmy v teorii nekonečných číselných a funkčních řad a uveďte základní vlastnosti těchto řad.**
2. **Jednotlivé vlastnosti číselných a funkčních řad demonstrujte na řešených příkladech. Zaměřte se zejména na určování konvergence číselných řad užitím vhodných kritérií, určování poloměru a oboru konvergence mocninných řad a rozvoj funkcí do Fourierových řad.**
3. **Ke každému typu úloh několik neřešených příkladů na procvičení látky.**
4. **Uveďte a vyřešte příklady z praxe, v nichž se využívá nekonečných řad.**

Rozsah práce:
Rozsah příloh:
Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:


1. **DOŠLÁ, Z.;PLCH, R.;SOJKA,P. Nekonečné řady. Brno 2002. ISBN 80-210-3005-4.**
2. **DUBČÁK,F. Cvičení z matematiky. Brno, VUT, 1987.**
3. **KŘENEK, J.;OSTRAVSKÝ,J. Diferenciální počet funkce více proměnných. Nekonečné číselné řady. UTB Zlín, 2007. ISBN 978-80-7318-567-1.**
4. **REKROTYS, K. Přehled užité matematiky I. Prometheus, 2000. ISBN 80-7196-180-9.**
5. **MENDELSON, E. Shaums Outline of Calculus. McGraw-Hill. 00704197736.**
6. **TOMICA, R. Cvičení z matematiky II. Brno, VUT, 1974.**


Vedoucí bakalářské práce: **Mgr. Jana Řezníčková, Ph.D.**
Ústav matematiky
Datum zadání bakalářské práce: **20. února 2009**
Termín odevzdání bakalářské práce: **1. června 2009**

Ve Zlíně dne 13. února 2009

UNIVERZITA TOMÁŠE BATI VE ZLÍNĚ
Fakulta aplikované informatiky
1

L.S.

prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.
*děkan*

doc. Ing. Ivan Zelinka, Ph.D.
*ředitel ústavu*

**ABSTRAKT**

Cílem práce bylo vytvořit sbírku řešených příkladů, která bude sloužit jako pomůcka studentům k předmětu Matematika III.
Teoretická část seznamuje se základními matematickými pojmy, které se týkají dané problematiky. Praktická část je tvořena řešenými příklady s popisem postupu, a neřešenými příklady k procvičení.

*Klíčová slova:* nekonečná číselná řada, součet řady, konvergence řady, kritéria konvergence, mocninná řada, Fourierova řada

**ABSTRACT**

The aim of this work was to create a collection of solved examples, which is going to serve as help for students of Mathematics III.
The theoretical part explains basic mathematical terms, which are applied to these problems. The practical part is formed from solved examples with a procedure description and unsolved examples to practise.

*Keywords:* Infinity number series, sum of series, convergence of series, criteria of convergence, power series, Fourier series

Děkuji vedoucí bakalářské práce Mgr. Janě Řezníčkové, Ph.D. za pedagogickou a odbornou pomoc během vypracovávání bakalářské práce.

Prohlašuji, že

- beru na vědomí, že odevzdáním bakalářské práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb. o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších právních předpisů, bez ohledu na výsledek obhajoby;
- beru na vědomí, že bakalářská práce bude uložena v elektronické podobě v univerzitním informačním systému dostupná k prezenčnímu nahlédnutí, že jeden výtisk bakalářské práce bude uložen v příruční knihovně Fakulty aplikované informatiky Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně a jeden výtisk bude uložen u vedoucího práce;
- byl/a jsem seznámen/a s tím, že na moji bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších právních předpisů, zejm. § 35 odst. 3;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 1 autorského zákona má UTB ve Zlíně právo na uzavření licenční smlouvy o užití školního díla v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 2 a 3 autorského zákona mohu užít své dílo - bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití jen s předchozím písemným souhlasem Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše);
- beru na vědomí, že pokud bylo k vypracování bakalářské práce využito softwaru poskytnutého Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně nebo jinými subjekty pouze ke studijním a výzkumným účelům (tedy pouze k nekomerčnímu využití), nelze výsledky bakalářské práce využít ke komerčním účelům;
- beru na vědomí, že pokud je výstupem bakalářské práce jakýkoliv softwarový produkt, považují se za součást práce rovněž i zdrojové kódy, popř. soubory, ze kterých se projekt skládá. Neodevzdání této součásti může být důvodem k neobhájení práce.

Prohlašuji,

že jsem na bakalářské práci pracovala samostatně a použitou literaturu jsem citovala. V případě publikace výsledků budu uvedena jako spoluautorka.

Ve Zlíně ........................

podpis diplomanta

OBSAH

# ÚVOD

Matematika je vědní disciplína, která se uplatňuje v nejrůznějších oborech lidské činnosti. Mezi jinými vědami se vyznačuje nejvyšší mírou abstrakce a přesnosti. Hlavní klasické disciplíny matematiky se vyvinuly ze čtyř praktických lidských potřeb - potřeby počítat při obchodování, porozumět vztahům mezi číselně vyjádřenými množstvími, vyměřováním pozemků a staveb a předpovídání astronomických jevů. Patří sem aritmetika, algebra, geometrie a matematická analýza.

Tato práce se zabývá nekonečnými řadami, které patří k základům matematické analýzy. Je určena studentům fakulty aplikované informatiky na Univerzitě Tomáše Bati ve Zlíně jako pomůcka do cvičení z předmětu Matematika III. Cílem práce je podat studentům základní poznatky z teorie nekonečných řad. Tato práce je více zaměřena na podrobnější popis příkladů.

Teoretická část je tvořena pěti kapitolami, ve kterých jsou stručně vysvětleny pojmy související s daným tématem. V první kapitole je definován pojem nekonečné číselné řady a její vlastnosti (konvergence a součet řady). Druhá kapitola seznamuje s kritérii konvergence pro řady s nezápornými členy. Ve třetí kapitole se zavádí pojem alternující řada, Leibnizovo kritérium a absolutní a neabsolutní konvergence řady. Definice mocninné řady, poloměr konvergence, Taylorova a Maclaurinova řada jsou vysvětleny v předposlední kapitole teoretické části. Poslední kapitola se zabývá Fourierovými řadami, konkrétně řadami trigonometrickými, kde je definice této řady, Dirichletovy podmínky pro rozvoj ve Fourierovu řadu a Fourierovy koeficienty.

Praktická část navazuje na část teoretickou. Ke každé kapitole v teoretické části jsou uvedeny řešené příklady s popisem postupu výpočtu a neřešené příklady, které slouží k procvičení dané látky. V této části je navíc uvedena kapitola s příklady využití nekonečných řad - určení přibližné hodnoty výrazu, limity či integrálu.

# I. TEORETICKÁ ČÁST

# 1 SOUČET ČÍSELNÉ ŘADY

**Definice 1.** Nekonečná číselná řada

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \tag{1}$$

nazýváme *nekonečnou číselnou řadou.* Posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \ldots, \quad s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

nazýváme *posloupnost částečných součtů* řady (1).

**Definice 2.** Konvergence a divergence

Jestliže existuje vlastní limita $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, pak řada (1) *konverguje* a má součet $s$. Jestliže neexistuje vlastní limita $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, pak řada (1) *diverguje.*

**Věta 1.** *Součet geometrické řady*

*Geometrická řada má tvar*

$$a + aq + \cdots + aq^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}, \quad a \neq 0, q \neq 0,$$

*kde a je první člen řady a q její kvocient. Jestliže je $|q| < 1$, můžeme říct, že daná řada konverguje a pro její součet platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}.$$

**Věta 2.** *Nutná podmínka konvergence řady*

*Jestliže řada (1) konverguje, pak platí* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$

Uvedené pojmy jsou čerpány z [1]

# 2 KRITÉRIA KONVERGENCE PRO ŘADY S NEZÁPORNÝMI ČLENY

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se nazývá řada s nezápornými členy, jestliže je $a_n \geq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

**Věta 3.** *Limitní podílové kritérium - d'Alembertovo*

*Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy a existuje limita*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \quad q \in \mathbb{R}^*.$$

*Pak platí:*

*1. je-li* $q < 1$, *řada konverguje,*

*2. je-li* $q > 1$, *řada diverguje,*

*3. je-li* $q = 1$, *nelze rozhodnout tímto kritériem o konvergenci řady.*

**Věta 4.** *Limitní odmocninové kritérium - Cauchyovo*

*Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy a existuje limita*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q, \quad q \in \mathbb{R}^*.$$

*Pak platí:*

*1. je-li* $q < 1$, *řada konverguje,*

*2. je-li* $q > 1$, *řada diverguje,*

*3. je-li* $q = 1$, *nelze rozhodnout tímto kritériem o konvergenci řady.*

**Věta 5.** *Limitní Raabeovo kritérium*

*Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy a existuje limita*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = q, \quad q \in \mathbb{R}^*.$$

*Pak platí:*

*1. je-li* $q > 1$, *řada konverguje,*

*2. je-li* $q < 1$, *řada diverguje,*

*3. je-li* $q = 1$, *nelze rozhodnout tímto kritériem o konvergenci řady.*

**Věta 6.** *Integrální kritérium*

*Nechť* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy a* $f$ *je funkce definovaná na intervalu* $\langle 1, \infty)$, *která je na tomto intervalu nezáporná a nerostoucí. Nechť* $f(n) = a_n$ *pro* $n \in \mathbb{N}$. *Pak řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje právě tehdy, když konverguje nevlastní integrál* $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$, *tj.* $\int_1^{\infty} f(x)\,dx < \infty$.

Uvedené pojmy jsou citovány z [1]

# 3 ŘADY ABSOLUTNĚ A NEABSOLUTNĚ KONVERGENTNÍ

**Definice 3.** Alternující řada

Nekonečná řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ se nazývá *alternující*, právě když platí

$$\operatorname{sgn} c_{n+1} = -\operatorname{sgn} c_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zapisujeme ji ve tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n \text{ nebo } \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n \tag{2}$$

kde $a_n > 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Pro určení konvergence se používá **Leibnizovo kritérium**

**Věta 7.** *Leibnizovo kritérium konvergence*

*Nechť je dána alternující řada* (2)*, která má vlastnosti:*
*1. od určitého indexu platí pro každé* $n \in \mathbb{N}$ $\quad a_n \geq a_{n+1}$
*2. je splněna nutná podmínka konvergence* $\quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$
*Potom daná alternující řada konverguje.*

**Definice 4.** Absolutní a neabsolutní konvergence

Jestliže konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|$, potom řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ *konverguje absolutně.*
Jestliže diverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|$ a konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, potom řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ *konverguje neabsolutně.*

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|$ je řada s nezápornými členy, proto se pro určení absolutní konvergence mohou použít kritéria uvedená v předchozí kapitole.

Jednotlivé pojmy jsou čerpány z [1]

# 4 MOCNINNÉ ŘADY

**Definice 5.** Mocninná řada

*Mocninnou řadou* se středem v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ a koeficienty $a_n \in \mathbb{R}$ rozumíme řadu funkcí ve tvaru

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n. \qquad (3)$$

**Věta 8.** *Poloměr konvergence a konvergenční interval*

*Ke každé mocninné řadě (3) existuje takové číslo $r \geq 0$, že pro všechna $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ tato řada konverguje, a to absolutně, zatímco pro $x$ ležící vně intervalu $\langle x_0 - r, x_0 + r\rangle$ diverguje.*
*Hodnotu $r$ pak nazýváme* ***poloměr konvergence*** *a interval $(x_0 - r, x_0 + r)$ nazýváme* ***konvergenční interval*** *.*

**Věta 9.**

*Je dána mocninná řada (3) a existuje limita (konečná nebo nekonečná)*

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho, \quad \textit{resp.} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho,$$

*potom se poloměr konvergence $r$ mocninné řady (3) určí jako*

$$r = \frac{1}{\rho}.$$

*Rozlišujeme následující případy:*
*1. Je-li $\rho = 0$, pak je poloměr konvergence $r = \infty$ a řada (3) konverguje absolutně pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Konvergenční interval zapisujeme ve tvaru $(-\infty, \infty)$.*
*2. Je-li $\rho = \infty$, pak je poloměr konvergence $r = 0$ a řada (3) diverguje pro všechna $x \neq x_0$.*
*3. Je-li $0 < \rho < \infty$, pak je poloměr konvergence $r = \frac{1}{\rho}$ a řada (3) konverguje absolutně pro všechna $x$, pro která platí $|x - x_0| < r$ a diverguje pro všechna $x$, pro něž $|x - x_0| > r$. Konvergenční interval zapisujeme ve tvaru $(x_0 - r, x_0 + r)$.*

**Definice 6.** Taylorova a Maclaurinova řada

Nechť funkce $f$ má v bodě $x_0$ derivace všech řádů. Mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

nazýváme *Taylorovou řadou* funkce $f$ v bodě $x_0$.
Je-li $x_0 = 0$, mluvíme o *Maclaurinově řadě*, která je tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

**Maclaurinovy řady elementárních funkcí**

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1, 1\rangle,$$

$$(1+x)^a = 1 + \binom{a}{1}x + \cdots + \binom{a}{n}x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n}x^n, \quad x \in (-1,1), a \in \mathbb{R} \text{ a číslo}$$

$$\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)}{n!} \text{ je } \textit{binomický koeficient.}$$

Všechny uvedené pojmy jsou citovány z [1]

# 5 FOURIEROVY ŘADY

**Definice 7.** Trigonometrická řada

Nekonečnou funkční řadu ve tvaru

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{4}$$

kde $a_n, b_n$ jsou konstanty, nazýváme *trigonometrickou řadou.*

**Dirichletovy podmínky** pro rozvoj funkce ve Fourierovu řadu:
1. Funkce $f(x)$ je v intervalu $\langle a, b\rangle$ ohraničená.
2. Interval $\langle a, b\rangle$ je možno rozdělit na konečný počet intervalů, v nichž je funkce $f(x)$ spojitá a monotónní.
3. V každém bodě nespojitosti existují konečné jednostranné limity.

**Věta 10.** *Určení koeficientů $a_n, b_n$ řady (4) o periodě $2\pi$*

*Koeficienty $a_n, b_n$ na intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$ určíme následovně:*

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx, \qquad \text{kde n=1,2,3,...}$$

Pro Fourierovy koeficienty vzhledem k obecné periodě $2t$ při základním intervalu periodicity $(-t, t)$ platí

$$a_0 = \frac{1}{t}\int_{-t}^{t} f(x)\, dx,$$

$$a_n = \frac{1}{t}\int_{-t}^{t} f(x)\cos n\frac{\pi}{t}x\, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{t}\int_{-t}^{t} f(x)\sin n\frac{\pi}{t}x\, dx,$$

**Věta 11.** *Rozvoj funkce v kosinovou řadu*

*Nechť $f$ je integrovatelná na intervalu $\langle 0, t\rangle$. Položíme-li pro $x \in \langle -t, 0) f(x) = f(-x)$, dostaneme **sudé rozšíření funkce** $f$ na interval $\langle -t, t\rangle$. Fourierově řadě sudého rozšíření funkce $f$ říkáme **rozvoj funkce** $f$ **v kosinovou řadu** na intervalu $\langle 0, t\rangle$. Pro její koeficienty platí*

$$a_0 = 0,\ a_n = 0,$$

$$b_n = \frac{2}{t}\int_0^t f(x)\sin n\frac{\pi}{t}x\,dx.$$

**Věta 12.** *Rozvoj funkce v sinovou řadu*

*Nechť $f$ je integrovatelná na intervalu $\langle 0, t\rangle$. Položíme-li pro $x \in \langle -t, 0)\ f(0) = 0$, $f(x) = -f(-x)$, dostaneme **liché rozšíření funkce** $f$ na interval $\langle -t, t\rangle$. Fourierově řadě lichého rozšíření funkce $f$ říkáme **rozvoj funkce** $f$ **v sinovou řadu** na intervalu $\langle 0, t\rangle$. Pro její koeficienty platí*

$$b_n = 0,$$

$$a_0 = \frac{2}{t}\int_0^t f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{2}{t}\int_0^t f(x)\cos n\frac{\pi}{t}x\,dx.$$

Uvedené pojmy jsou čerpány z [1]

# II. PRAKTICKÁ ČÁST

# 6 SOUČET ČÍSELNÉ ŘADY

## 6.1 Parciální zlomky

**Příklad 6.1.** Určete součet řady:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

*Řešení.* Člen $a_n$ rozložíme na parciální zlomky

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Poté určíme posloupnost částečných součtů

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + \cdots + a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Součet řady získáme výpočtem limity posloupnosti částečných součtů

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

$$\text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+3)}.$$

*Řešení.* Provedeme rozklad na parciální zlomky

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+3)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+3}.$$

Z rovnice $1 = A(2n-1) + B(2n+3)$ dostaneme $A = \frac{1}{4}$ a $B = -\frac{1}{4}$, tj.

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+3)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+3}\right).$$

Potom

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + \cdots + a_n = \frac{1}{4}\left[\left(1 - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{11}\right) + \cdots + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2n-5} - \frac{1}{2n-1}\right) + \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n+1}\right) + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+3}\right)\right] = \\ &= \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right), \end{aligned}$$

$C = \frac{1}{2}$, tj.

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right).$$

Pak

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + \cdots + a_n = \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5}\right) + \right. \\ & + \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{2}{n-1} + \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1}\right) + \\ & \left. + \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right), \end{aligned}$$

a proto

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{4}.$$

e) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}.$$

*Řešení.* Člen $a_n$ rozložíme na parciální zlomky

$$\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{(2n-1)^2} + \frac{C}{2n+1} + \frac{D}{(2n+1)^2}.$$

Rovnici $n = A(2n-1)(2n+1)^2 + B(2n+1)^2 + C(2n+1)(2n-1)^2 + D(2n-1)^2$ upravíme na

$$n = A(8n^3 + 4n^2 - 2n - 1) + B(4n^2 + 4n + 1) + C(8n^3 - 4n^2 - 2n + 1) + D(4n^2 - 4n + 1)$$

a výpočtem získáme

$$\begin{array}{lll} n = \frac{1}{2}: & \frac{1}{2} = 4B & \Rightarrow B = \frac{1}{8} \\ n = -\frac{1}{2}: & -\frac{1}{2} = 4D & \Rightarrow D = -\frac{1}{8} \\ n^3: & 0 = 8A + 8C & \Rightarrow A = -C \\ n^2: & 0 = 4A + 4B - 4C + 4D & \\ n^1: & 1 = -2A + 4B - 2C - 4D & \end{array}$$

Do předposlední rovnice dosadíme $A = -C$, $B = \frac{1}{8}$ a $D = -\frac{1}{8}$

$$
\begin{aligned}
0 &= -4C + \frac{1}{2} - 4C - \frac{1}{2} \\
0 &= -8C \qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow C = 0, A = 0
\end{aligned}
$$

Po dosazení dostáváme

$$\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2} = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2}\right).$$

Potom

$$
\begin{aligned}
s_n \;=\; & \frac{1}{8}\left[\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2}\right) + \left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(2n-5)^2} - \frac{1}{(2n-3)^2}\right) + \right. \\
& \left. + \left(\frac{1}{(2n-3)^2} - \frac{1}{(2n-1)^2}\right) + \left(\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2}\right)\right] = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{(2n+1)^2}\right),
\end{aligned}
$$

a proto

$$s = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{(2n+1)^2}\right) = \frac{1}{8}.$$

**Cvičení 6.1.** Určete součet řady:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(n+1)}$ $\left[s = \frac{1}{2}\right]$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ $\left[s = \frac{1}{3}\right]$

c) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{2n}{n^3+3n^2+2n}$ $\left[s = \frac{1}{8}\right]$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n}$ $\left[s = \frac{11}{18}\right]$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$ $\left[s = \frac{23}{90}\right]$

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ $[s = 1]$

## 6.2 Geometrická řada

**Příklad 6.2.** Určete součet geometrické řady:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} 5\left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

*Řešení.* Nejprve zjistíme první člen $a$ tak, že do $n$-tého členu dosadíme $n = 1$

$$a = \frac{5}{4}$$

a kvocient $q$

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{5\left(\frac{1}{4}\right)^n} = \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\left(\frac{1}{4}\right)^n} = \frac{1}{4}.$$

Tato řada je konvergentní (platí $|q| < 1$), a proto můžeme určit její součet pomocí vzorce

$$s = \frac{a}{1-q} = \frac{\frac{5}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{5}{3}.$$

$$\text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+5^n}{6^n}.$$

*Řešení.* Zadanou řadu rozdělíme na dvě řady a dokážeme, že konvergují

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+5^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{6^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

Nejdříve určíme první člen a kvocient první řady

$$a = \frac{2}{6}, \qquad q = \frac{\frac{2}{6^{n+1}}}{\frac{2}{6^n}} = \frac{1}{6}.$$

Řada je konvergentní, proto můžeme získat její součet

$$s_I = \frac{\frac{2}{6}}{1-\frac{1}{6}} = \frac{2}{5}.$$

Totéž provedeme pro druhou řadu

$$a = \frac{5}{6}, \qquad q = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}}{\left(\frac{5}{6}\right)^n} = \frac{5}{6},$$

$$s_{II} = \frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{5}{6}} = 5.$$

Obě řady konvergují, a proto konverguje i zadaná řada a její součet je roven

$$s = s_I + s_{II} = \frac{2}{5} + 5 = \frac{27}{5}.$$

$$\text{c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{2 \cdot 12^n}.$$

*Řešení.* Postupujeme obdobně jako u předchozího příkladu, tzn. rozdělíme na dvě řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{2 \cdot 12^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2 \cdot 12^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{2 \cdot 12^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^n}.$$

Určíme první člen a kvocient pro první řadu

$$a = \frac{1}{2}, \qquad q = \frac{1}{4},$$

řada konverguje, a proto můžeme vypočítat její součet

$$s_I = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}.$$

Při zjišťování součtu druhé řady postupujeme obdobně

$$a = \frac{1}{2}, \qquad q = \frac{1}{3},$$

$$s_{II} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{4}.$$

Nyní obě řady sečteme

$$s = s_I + s_{II} = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{17}{12}.$$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{5}{4^{n-1}} - \frac{2}{3^{n+1}} \right).$

*Řešení.* Provedeme rozklad na dvě řady a drobnými úpravami je zjednodušíme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{5}{4^{n-1}} - \frac{2}{3^{n+1}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{4^{n-1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{20}{4^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3^n}.$$

Pak zjistíme součty těchto řad

$$s_I = \frac{5}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{20}{3}, \qquad s_{II} = \frac{\frac{2}{9}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}.$$

Nakonec odečteme druhou řadu od první a dostaneme výsledek

$$s = s_I - s_{II} = \frac{20}{3} - \frac{1}{3} = \frac{19}{3}.$$

$$\text{e)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{n+1} - 9 \cdot 3^{n-1}}{5 \cdot 6^{n+2}}.$$

*Řešení.* Rozložíme na dvě řady a upravíme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{n+1} - 9 \cdot 3^{n-1}}{5 \cdot 6^{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4 \cdot 4^n}{5 \cdot 6^2 \cdot 6^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{9 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3^n}{5 \cdot 6^2 \cdot 6^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{45} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{60} \cdot \frac{1}{2^n}.$$

Zjistíme součty řad

$$s_I = \frac{\frac{1}{45}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{15}, \qquad s_{II} = \frac{\frac{1}{60}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{30}.$$

Konečný výsledek získáme odečtením druhé řady od první

$$s = s_I - s_{II} = \frac{1}{15} - \frac{1}{30} = \frac{1}{30}.$$

$$\text{f)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{6 \cdot 5^n}{3^{n+1}}.$$

*Řešení.* Po úpravě dostáváme

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2 \left(\frac{5}{3}\right)^n.$$

Nyní určíme první člen řady a její kvocient

$$a = \frac{10}{3}, \qquad q = \frac{5}{3}.$$

Tato řada je divergentní a její $n$-tý částečný součet je

$$s_n = a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{10}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{5}{3}\right)^n}{1 - \frac{5}{3}} = -5 \cdot \left[1 - \left(\frac{5}{3}\right)^n\right] = 5 \cdot \left[\left(\frac{5}{3}\right)^n - 1\right].$$

Součet řady je pak

$$s = \lim_{n \to \infty} s_n = 5 \cdot \left[\left(\frac{5}{3}\right)^n - 1\right] = \infty.$$

**Cvičení 6.2.** Určete součet geometrické řady:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n$ $\left[s = \frac{1}{4}\right]$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+3}}{3^n}$ $[s = 24]$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 5\left(\frac{5}{4}\right)^n$ $[s = \infty]$

d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1-2^n}{3^n}$ $\left[s = -\frac{3}{2}\right]$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{2}{3^{n-1}}\right)$ $[s = 5]$

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot 4^n - 3^{n+1}}{6^n}$ $[s = 7]$

# 7 KRITÉRIA KONVERGENCE

## 7.1 Podílové kritérium

**Příklad 7.1.** Rozhodněte o konvergenci řady

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^3}.$$

*Řešení.* Užijeme podílové kritérium, platí

$$\begin{aligned} q &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^3}}{\frac{n!}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3(n+1)!}{(n+1)^3 n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3(n+1)n!}{(n+1)^3 n!} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^2+2n+1} = \infty > 1, \end{aligned}$$

z toho plyne, že řada diverguje.

$$\text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{2^n}.$$

*Řešení.* Podle podílového kritéria dostáváme

$$\begin{aligned} q &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^4}{2^{n+1}}}{\frac{n^4}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n \cdot (n^4+4n^3+6n^2+4n+1)}{2^{n+1}\cdot n^4} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^n \cdot (n^4+4n^3+6n^2+4n+1)}{2^n \cdot 2 \cdot n^4} = \frac{1}{2} < 1, \end{aligned}$$

tj. daná řada konverguje.

$$\text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{3^n}.$$

*Řešení.* K vyšetření opět použijeme podílové kritérium. Platí

$$\begin{aligned} q &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3(n+1)+1}{3^{n+1}}}{\frac{3n+1}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n\cdot(3n+4)}{3^{n+1}\cdot(3n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n\cdot(3n+4)}{3^n\cdot 3\cdot(3n+1)} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{3n+4}{9n+3} = \frac{1}{3} < 1, \end{aligned}$$

z toho plyne, že řada konverguje.

$$\text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{5n+1}}{5^{4n-1}}.$$

*Řešení.* Použijeme podílové kritérium. Platí

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4^{5(n+1)+1}}{5^{4(n+1)-1}}}{\frac{4^{5n+1}}{5^{4n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^{5n+6}\cdot 5^{4n-1}}{4^{5n+1}\cdot 5^{4n+3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^{5n}\cdot 4^6\cdot 5^{4n}\cdot \frac{1}{5}}{4^{5n}\cdot 4\cdot 5^{4n}\cdot 5^3} = \frac{1024}{625} > 1,$$

tj. daná řada diverguje.

$$\text{e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n\cdot 4^n}{n!}.$$

*Řešení.* Aplikujeme podílové kritérium. Platí

$$\begin{aligned} q &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}4^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n 4^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}\cdot 4^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot n^n\cdot 4^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n(n+1)\cdot 4^n\cdot 4\cdot n!}{(n+1)\cdot n!\cdot n^n\cdot 4^n} = \\ &= \lim_{n\to\infty} 4\frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} 4\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 4e > 1, \end{aligned}$$

neboť platí, že $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, tzn. daná řada diverguje.

$$\text{f)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2)!}{2^{3n}}.$$

*Řešení.* Pomocí podílového kritéria dostáváme

$$\begin{aligned} q &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{[3(n+1)-2]!}{2^{3(n+1)}}}{\frac{(3n-2)!}{2^{3n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{3n}(3n+1)!}{2^{3n+3}(3n-2)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{3n}(3n+1)\cdot 3n(3n-1)(3n-2)!}{2^{3n}\cdot 2^3\cdot (3n-2)!} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+1)\cdot 3n(3n-1)}{2^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{27n^3-3n}{8} = \frac{3}{8}\lim_{n\to\infty} n(9n^2-1) = \infty > 1, \end{aligned}$$

z toho plyne, že daná řada diverguje.

$$\text{g)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

*Řešení.* Platí

$$\begin{aligned} q &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{[2(n+1)]!}{[(n+1)!]^2}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)!(n!)^2}{[(n+1)!]^2(2n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!(n!)^2}{[(n+1)n!]^2(2n)!} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+6n+2}{n^2+2n+1} = 4 > 1, \end{aligned}$$

tj. daná řada diverguje.

$$\text{h)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n \cdot 2n!}{(2n)!}.$$

*Řešení.* Platí

$$\begin{aligned} q &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{8^{n+1}\cdot 2[(n+1)!]}{[2(n+1)]!}}{\frac{8^n\cdot 2n!}{(2n)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{8^{n+1}\cdot 2[(n+1)!]\cdot (2n)!}{8^n\cdot 2n!\cdot (2n+2)!} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{8^n\cdot 8\cdot 2(n+1)\cdot n!\cdot (2n)!}{8^n\cdot 2n!\cdot (2n+2)(2n+1)(2n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{8(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{2n+1} = 0 < 1, \end{aligned}$$

tj. daná řada konverguje.

**Cvičení 7.1.** Rozhodněte o konvergenci řady:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ [konverguje]

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}$ [konverguje]

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}$ [konverguje]

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ [diverguje]

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\cdot n!}{n^n}$ [konverguje]

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\cdot n^2}{(2n)!}$ [konverguje]

## 7.2 Odmocninové kritérium

**Příklad 7.2.** Rozhodněte o konvergenci řady

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n}.$$

*Řešení.* Užijeme odmocninové kritérium, platí

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{4^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{4^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{4} = \frac{1}{4} < 1,$$

podle L'Hospitalova pravidla je $\lim \sqrt[n]{n} = 1$. Proto daná řada konverguje.

$$\text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{5n-1}\right)^n.$$

*Řešení.* Podle odmocninového kritéria dostáváme

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n}{5n-1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{5n-1} = \frac{2}{5} < 1,$$

z toho vyplývá, že daná řada konverguje.

$$\text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{\left(3+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

*Řešení.* K vyšetření opět použijeme odmocninové kritérium. Platí

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3}{\left(3+\frac{1}{n}\right)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^3}}{3+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^3}}{3+\frac{1}{n}} = \frac{1}{3} < 1,$$

neboť podle L'Hospitalova pravidla je $\lim \sqrt[n]{n^3} = 1$. Daná řada tedy konverguje.

$$\text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{\left(4+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

*Řešení.* Použijeme odmocninové kritérium. Platí

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{10}{\left(4+\frac{1}{n}\right)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{10}}{4+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{10^{\frac{1}{n}}}{4+\frac{1}{n}} = \frac{1}{4} < 1,$$

tzn. daná řada konverguje.

$$\text{e)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\ln^n n}.$$

*Řešení.* Aplikujeme odmocninové kritérium. Platí

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{\ln^n n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n} = \frac{1}{\infty} = 0 < 1,$$

proto daná řada konverguje.

$$\text{f)} \sum_{n=1}^{\infty} 3^n \cdot \arcsin^n \frac{1}{n}.$$

*Řešení.* Pomocí odmocninového kritéria dostáváme

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n \cdot \arcsin^n \frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} 3 \cdot \arcsin \frac{1}{n} = 3 \cdot 0 = 0 < 1,$$

z toho plyne, že daná řada konverguje.

$$\text{g)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

*Řešení.* Platí

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{1}{2}e > 1,$$

neboť platí vzorec $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, tj. daná řada je divergentní.

$$\text{h)} \sum_{n=1}^{\infty} n^n \sin^n \frac{3}{n}.$$

*Řešení.* Platí

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n \sin^n \frac{3}{n}} = \lim_{n\to\infty} n \cdot \sin \frac{3}{n}.$$

Dostáváme neurčitý výraz typu $\infty \cdot 0$, který upravíme na podíl, abychom mohli použít L'Hospitalovo pravidlo

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \sin\frac{3}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{3}{n}}{\frac{1}{n}},$$

nyní dostáváme neurčitý výraz typu $\frac{0}{0}$ a můžeme použít L'Hospitalovo pravidlo

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{3}{n^2}\cdot\cos\frac{3}{n}}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} 3\cdot\cos\frac{3}{n} = 3 > 1,$$

daná řada tedy diverguje.

**Cvičení 7.2.** Rozhodněte o konvergenci řady:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ [konverguje]

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2}{n^2+100}\right)^n$ [diverguje]

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)}$ [konverguje]

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\,\mathrm{e}^{-n}$ [konverguje]

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^2 n}{(5n^2+1)^n}$ [konverguje]

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\mathrm{arctg}^n\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ [diverguje]

## 7.3 Raabeovo kritérium

**Příklad 7.3.** Rozhodněte o konvergenci řady

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}.$$

K vyšetření konvergence či divergence dané řady použijeme Raabeovo kritérium. Platí

$$\begin{aligned} q &= \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{\frac{1}{(n+2)^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{(n+1)^2}{(n+2)^2}\right) = \\ &= \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{n^2+2n+1}{n^2+4n+4}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n+3}{n^2+4n+4}\right) = 2 > 1, \end{aligned}$$

z toho plyne, že daná řada konverguje.

$$\text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+6)n}.$$

Pomocí Raabeova kritéria zjistíme konvergenci resp. divergenci dané řady. Platí

$$\begin{aligned} q &= \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{\frac{1}{(n+2)(n+7)(n+1)}}{\frac{1}{(n+1)(n+6)n}}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{n(n+1)(n+6)}{(n+1)(n+2)(n+7)}\right) = \\ &= \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{n^2+6n}{n^2+9n+14}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{3n+14}{n^2+9n+14}\right) = 3 > 1, \end{aligned}$$

tzn. daná řada konverguje.

$$\text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{n!}.$$

Podle Raabeova kritéria dostáváme

$$\begin{aligned} q &= \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{\frac{5^{n+2}}{(n+1)!}}{\frac{5^{n+1}}{n!}}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{n!5^{n+2}}{(n+1)!5^{n+1}}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{n!5}{(n+1)n!}\right) = \\ &= \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{5}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n-4}{n+1}\right) = \infty > 1. \end{aligned}$$

To znamená, že daná řada konverguje.

$$\text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)(n+2)}.$$

Použitím Raabeova kritéria získáme

$$\begin{aligned} q &= \lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+2)(n+3)}}{\frac{2^n}{(n+1)(n+2)}}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{2^{n+1}(n+1)(n+2)}{2^n(n+2)(n+3)}\right) = \\ &= \lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{2n+2}{n+3}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{-n+1}{n+3}\right) = -\infty < 1, \end{aligned}$$

z toho plyne, že daná řada diverguje.

$$\text{e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{5n^3+3n^2}.$$

Podle Raabeova kritéria platí

$$\begin{aligned} q &= \lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{\frac{2(n+1)+5}{5(n+1)^3+3(n+1)^2}}{\frac{2n+5}{5n^3+3n^2}}\right) = \\ &= \lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{(2n+7)(5n^3+3n^2)}{[5\left(n^3+3n^2+3n+1\right)+3\left(n^2+2n+1\right)]\left(2n+5\right)}\right) = \\ &= \lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{10n^4+6n^3+35n^3+21n^2}{\left(5n^3+15n^2+15n+5+3n^2+6n+3\right)\left(2n+5\right)}\right) = \\ &= \lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{10n^4+41n^3+21n^2}{\left(5n^3+18n^2+21n+8\right)\left(2n+5\right)}\right) = \\ &= \lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{10n^4+41n^3+21n^2}{10n^4+61n^3+132n^2+121n+40}\right) = \\ &= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{20n^3+111n^2+12n+40}{10n^4+61n^3+132n^2+121n+40}\right) = 2 > 1, \end{aligned}$$

tzn. daná řada konverguje.

**Cvičení 7.3.** Rozhodněte o konvergenci řady:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ [konverguje]

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$ [konverguje]

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{2n^2+1}$ [diverguje]

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!}$ [konverguje]

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}4^n$ [diverguje]

### 7.4 Integrální kritérium

**Příklad 7.4.** Rozhodněte o konvergenci řady

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$

*Řešení.* Užijeme integrální kritérium. Funkce $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ je nerostoucí a nezáporná na intervalu $\langle 1, \infty)$. Výpočtem integrálu zjistíme konvergenci resp. divergenci

$$q = \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{t\to\infty} \int_1^t x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{2} \lim_{t\to\infty} \left[x^{\frac{2}{3}}\right]_1^t = \frac{3}{2} \lim_{t\to\infty} \left(t^{\frac{2}{3}} - 1\right) = \infty,$$

tzn. daná řada diverguje.

$$\text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+4}.$$

*Řešení.* Použijeme integrální kritérium, položíme $f(x) = \frac{2}{x^2+4}$. Tato funkce je na intervalu $\langle 1, \infty)$ nerostoucí a nezáporná. Výpočtem integrálu dostáváme

$$\begin{aligned} q &= \int_1^{\infty} \frac{2dx}{x^2+4} = 2 \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{dx}{x^2+2^2} = 2 \cdot \frac{1}{2} \lim_{t\to\infty} \left[\operatorname{arctg} \frac{x}{2}\right]_1^t = \\ &= \lim_{t\to\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{t}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2} < \infty, \end{aligned}$$

což znamená, že daná řada konverguje.

$$\text{c)} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2}{n^2-4}.$$

*Řešení.* Opět použijeme integrální kritérium, postupujeme obdobně jako u předchozích příkladů

$$q = \int_3^{\infty} \frac{2dx}{x^2-4} = \lim_{t\to\infty} \int_3^t \frac{2dx}{x^2-4}.$$

Provedeme rozklad na parciální zlomky

$$\frac{2}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}.$$

Z rovnice $2 = A(x+2) + B(x-2)$ získáváme $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$, tj.

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\int_3^t\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)dx = \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\big[\ln|x-2|-\ln|x+2|\big]_3^t = \\ &= \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\left[\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\right]_3^t = \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\left[\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|-\ln\left|\frac{3-2}{3+2}\right|\right] = 0-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{5} = \\ &= \ln\sqrt{5}<\infty, \end{aligned}$$

tj. daná řada konverguje.

$$\text{d)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(3n+2)^5}}.$$

*Řešení.* Aplikujeme integrální kritérium. Funkce $f(x)=\frac{1}{\sqrt{(3x+2)^5}}$ je nezáporná a nerostoucí na intervalu $\langle 1,\infty)$. Platí

$$\begin{aligned} q &= \int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{(3x+2)^5}} = \lim_{t\to\infty}\int_1^t(3x+2)^{-\frac{5}{2}}dx = \\ &= \left|\begin{array}{lllllll} \text{sub.:} & 3x+2 & = & s & \text{meze:} & x=t & \to & s=3t+2 \\ & 3dx & = & ds & & x=1 & \to & s=5 \\ & dx & = & \frac{ds}{3} & & & & \end{array}\right| = \frac{1}{3}\lim_{t\to\infty}\int_5^{3t+2}s^{-\frac{5}{2}}ds = \\ &= -\frac{2}{9}\lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{s^3}}\right]_5^{3t+2} = -\frac{2}{9}\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{(3t+2)^3}}-\frac{1}{\sqrt{5^3}}\right) = -\frac{2}{9}\left(0-\frac{1}{\sqrt{5^3}}\right) = \\ &= \frac{2}{45\sqrt{5}}<\infty, \end{aligned}$$

z toho plyne, že daná řada konverguje.

$$\text{e)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n^4+2}.$$

*Řešení.* Pomocí integrálního kritéria, kdy funkce $f(x)=\frac{x^3}{x^4+2}$ je nerostoucí a nezáporná na intervalu $\langle 1,\infty)$, dostáváme

$$\begin{aligned} q &= \int_1^{\infty}\frac{x^3dx}{x^4+2} = \lim_{t\to\infty}\int_1^t\frac{x^3dx}{x^4+2} = \\ &= \left|\begin{array}{lllllll} \text{sub.:} & x^4+2 & = & s & \text{meze:} & x=t & \to & s=t^4+2 \\ & 4x^3dx & = & ds & & x=1 & \to & s=3 \\ & x^3dx & = & \frac{ds}{4} & & & & \end{array}\right| = \frac{1}{4}\lim_{t\to\infty}\int_3^{t^4+2}\frac{ds}{s} = \\ &= \frac{1}{4}\Big[\ln|s|\Big]_3^{t^4+2} = \frac{1}{4}\lim_{t\to\infty}\big(\ln|t^4+2|-\ln|3|\big) = \frac{1}{4}(\infty-\ln 3) = \infty, \end{aligned}$$

tj. daná řada diverguje.

$$\text{f)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^3 n}{n}.$$

*Řešení.* Funkce $f(x) = \frac{\ln^3 x}{x}$ je nerostoucí a nezáporná na intervalu $\langle 1, \infty)$. Platí

$$\begin{aligned}
q &= \int_1^{\infty} \frac{\ln^3 x}{x} dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{\ln^3 x}{x} dx = \\
&= \left| \begin{array}{lllllll} \text{sub.:} & \ln x & = & s & \text{meze:} & x = t & \rightarrow & s = \ln t \\ & \frac{1}{x} dx & = & ds & & x = 1 & \rightarrow & s = 0 \end{array} \right| = \lim_{t\to\infty} \int_0^{\ln t} s^3 ds = \\
&= \frac{1}{4} \lim_{t\to\infty} \left[ s^4 \right]_0^{\ln t} = \frac{1}{4} \lim_{t\to\infty} \left( \ln^4 t - 0 \right) = \infty,
\end{aligned}$$

tzn. daná řada diverguje.

**Cvičení 7.4.** Rozhodněte o konvergenci řady:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}$ [konverguje]

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{1+n^2}$ [konverguje]

b) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2-4n+4}$ [konverguje]

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n \ln n)!} 4^n$ [diverguje]

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ [diverguje]

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ [konverguje]

# 8 ŘADY ABSOLUTNĚ A NEABSOLUTNĚ KONVERGENTNÍ

**Příklad 8.1.** Rozhodněte, zda daná řada konverguje absolutně či neabsolutně

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^4}.$$

*Řešení.* Nejprve zjistíme, zda daná řada vůbec konverguje. Pokud ano, budeme vyšetřovat konvergenci absolutní či neabsolutní.

1) Konvergenci vyšetříme Leibnizovým kritériem, které má dvě podmínky:

$$\begin{array}{lrcl} \text{1. podmínka} & a_n & \geq & a_{n+1}, \\ & \frac{1}{n^4} & \geq & \frac{1}{(n+1)^4}, \\ \text{2. podmínka} & \lim\limits_{n\to\infty} a_n & = & 0, \\ & \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} & = & 0. \end{array}$$

Obě podmínky jsou splněny, a proto daná řada konverguje.

2) Nyní rozhodneme o absolutní či neabsolutní konvergenci. Vezmeme řadu s absolutními hodnotami, tj.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \frac{1}{n^4} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}, \tag{5}$$

a např. integrálním kritériem rozhodneme, zda řada (5) konverguje či diverguje

$$q = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^4} = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{dx}{x^4} = -\frac{1}{3} \lim_{t\to\infty} \left[ \frac{1}{x^3} \right]_1^t = -\frac{1}{3} \lim_{t\to\infty} \left[ \frac{1}{t^3} - 1 \right] = \frac{1}{3} < \infty,$$

řada konverguje. To znamená, že daná alternující řada konverguje absolutně.

$$\text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+1}.$$

*Řešení.* 1) Podle Leibnizova kritéria zjistíme konvergenci řady.

1. podmínka Leibnizova kritéria se dá ověřit i následujícím způsobem. Člen $\frac{n}{n^2+1}$ budeme uvažovat jako funkci $y = \frac{x}{x^2+1}$ a ověříme pomocí první derivace, zda je tato funkce klesající. Platí

$$y' = \left( \frac{x}{x^2+1} \right)' = \frac{(x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} < 0 \quad \text{pro } x > 1.$$

První derivace je záporná, proto je funkce klesající na intervalu $(1, \infty)$, a tedy posloupnost $\left\{ \frac{n}{n^2+1} \right\}$ je klesající.

2. podmínka je splněna, neboť

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0.$$

Obě podmínky jsou splněny, což znamená, že daná řada konverguje.
2) Nyní vyšetříme konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+1} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}. \tag{6}$$

Pomocí integrálního kritéria určíme, zda je řada (6) konvergentní či divergentní

$$\begin{aligned} q &= \int_1^{\infty} \frac{xdx}{x^2+1} = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \lim_{t\to\infty} \Big[ \ln|x^2+1| \Big]_1^t = \frac{1}{2} \lim_{t\to\infty} \big( \ln|t^2+1| - \ln|2| \big) = \\ &= \frac{1}{2}(\infty - \ln 2) = \infty, \end{aligned}$$

řada (6) diverguje, a proto daná alternující řada konverguje neabsolutně.

$$\text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n} \cdot 5^{n+1}}.$$

*Řešení.* 1) Leibnizovým kritériem zjistíme konvergenci řady. Platí

$$\begin{aligned} &\text{1. podmínka} \quad \frac{1}{\sqrt{n}\cdot 5^{n+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}\cdot 5^{n+2}}, \\ &\text{2. podmínka} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\cdot 5^{n+1}} = 0. \end{aligned}$$

Obě podmínky jsou splněny, proto daná řada konverguje.
2) Poté vyšetříme konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}\cdot 5^{n+1}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\cdot 5^{n+1}}. \tag{7}$$

Použitím podílového kritéria pro řady s kladnými členy

$$\begin{aligned} q &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}\cdot 5^{n+2}}}{\frac{1}{\sqrt{n}\cdot 5^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\cdot 5^{n+1}}{\sqrt{n+1}\cdot 5^{n+2}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} \cdot \frac{5^n \cdot 5}{5^n \cdot 5^2} = \\ &= \frac{1}{5} \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

dostáváme, že řada (7) konverguje, tzn. daná alternující řada tedy konverguje absolutně.

$$\text{d)} \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n \ln n}.$$

*Řešení.* 1) Pomocí Leibnizova kritéria určíme konvergenci řady. Platí

$$\begin{array}{ll} \text{1. podmínka} & \dfrac{1}{n \ln n} \geq \dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}, \\ \text{2. podmínka} & \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n \ln n} = 0. \end{array}$$

Obě podmínky jsou splněny, řada tedy konverguje.

2) Nyní zjistíme konvergenci řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}. \tag{8}$$

Pro vyšetření konvergence řady použijeme integrální kritérium

$$\begin{aligned} q &= \int_1^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{dx}{x \ln x} = \left| \begin{array}{lcl} \text{sub.} \quad \ln x &=& s \\ \frac{1}{x}dx &=& ds \end{array} \right| = \lim_{t\to\infty} \int_{\ln 2}^{\ln t} \frac{ds}{s} = \\ &= \lim_{t\to\infty} \Big[ \ln |s| \Big]_{\ln 2}^{\ln t} = \lim_{t\to\infty} (\ln |\ln t| - \ln |\ln 2|) = \infty. \end{aligned}$$

Řada (8) diverguje, a proto daná alternující řada konverguje neabsolutně.

$$\text{e)} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{n^2}{2n^2+3}.$$

*Řešení.* Konvergenci alternující řady zjistíme použitím Leibnizova kritéria, nejprve ověříme 2. podmínku

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n^2+3} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Tato podmínka není splněna, a proto daná řada diverguje.

$$\text{f)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n!}.$$

*Řešení.* Zadanou řadu přepíšeme do následujícího tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{3^n}{n!}.$$

Nyní stačí vyšetřit absolutní konvergenci řady pomocí podílového kritéria pro řady s nezápornými členy

$$\begin{aligned} q &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\cdot n!}{3^n(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^n\cdot 3\cdot n!}{3^n(n+1)\cdot n!} = \\ &= 3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0 < 1, \end{aligned}$$

tj. daná řada konverguje absolutně.

$$\text{g)}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3}{3^n}.$$

*Řešení.* 1) Pomocí Leibnizova kritéria zjistíme konvergenci řady.
Pro ověření 1. podmínky použijeme první derivaci

$$\left(\frac{x^3}{3^x}\right)' = \frac{3x^2\cdot 3^x - x^3\cdot 3^x\cdot\ln 3}{3^{2x}} = \frac{3^x(3x^2 - x^3\cdot\ln 3)}{3^{2x}} = \frac{x^2(3 - x\cdot\ln 3)}{3^x} < 0 \quad \text{pro } x \geq 3.$$

Funkce je klesající na intervalu $\langle 3,\infty)$, a proto je klesající i posloupnost $\{\frac{n^3}{3^n}\}$.
2. podmínka platí, neboť

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{3^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{3^n\cdot\ln 3} = \frac{1}{\ln 3}\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{3^n} = \frac{1}{\ln 3}\lim_{n\to\infty}\frac{6n}{3^n\cdot\ln 3} = \frac{1}{\ln^2 3}\lim_{n\to\infty}\frac{6}{3^n\cdot\ln 3} = 0.$$

Obě podmínky jsou splněny, proto daná řada konverguje.
2) Nyní vyšetříme konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{n^3}{3^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n} \tag{9}$$

pomocí podílového kritéria. Platí

$$\begin{aligned} q &= \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}}{\frac{n^3}{3^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3\cdot 3^n}{n^3\cdot 3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n^3+3n^2+3n+1)\cdot 3^n}{n^3\cdot 3^n\cdot 3} = \\ &= \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+3n^2+3n+1}{n^3} = \frac{1}{3} < 1. \end{aligned}$$

Řada (9) konverguje, což znamená, že daná alternující řada konverguje absolutně.

$$\text{h)}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{n}}.$$

*Řešení.* Platí

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}} &= \sin(\pi + \frac{\pi}{2}) + \sin(2\pi + \frac{\pi}{2})\frac{1}{\sqrt{2}} + \sin(3\pi + \frac{\pi}{2})\frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \cdots = \\ &= -1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[n]{n}}.\end{aligned}$$

Nyní určíme konvergenci či divergenci řady pomocí Leibnizova kritéria. Nejprve ověříme platnost 2.podmínky

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \lim_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{n}\ln n} = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{\ln n}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{-\frac{1}{n}}{1}} = e^0 \neq 0.$$

Nutná podmínka konvergence není splněna, a proto daná řada diverguje.

**Cvičení 8.1.** Rozhodněte, které řady konvergují absolutně, které konvergují neabsolutně, a které divergují:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}$ [konv. abs.]

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}$ [diverguje]

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(-2)^n}$ [diverguje]

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln^n(n+1)}$ [konv. abs.]

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ [konv. neabs.]

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$ [konv. abs.]

# 9 MOCNINNÉ ŘADY

## 9.1 Poloměr, obor konvergence a obor absolutní konvergence

**Příklad 9.1.** Určete poloměr konvergence, obor konvergence a obor absolutní konvergence mocninné řady

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt[3]{n}}.$$

*Řešení.* Středem mocninné řady je $x_0 = 0$. Nyní zjistíme poloměr konvergence

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n+1}} = 1 \qquad \Rightarrow r = 1.$$

Dostáváme interval $(-1, 1)$, jehož krajní body je nutné vyšetřit.
Pro $x = 1$ získáváme řadu $\sum \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$. Pomocí integrálního kritéria

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{t\to\infty} \int_1^t x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{2} \lim_{t\to\infty} \left[ x^{\frac{2}{3}} \right]_1^t = \frac{3}{2} \lim_{t\to\infty} (t^{\frac{2}{3}} - 1) = \frac{3}{2}(\infty - 1) = \infty$$

zjišťujeme, že tato řada diverguje.
Pro $x = -1$ dostáváme alternující řadu $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$, jejíž konvergenci vyšetříme Leibnizovým kritériem. První i druhá podmínka tohoto kritéria je splněna a řada s absolutními členy $\sum \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}} \right| = \sum \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ diverguje, proto daná alternující řada konverguje neabsolutně.
Dostáváme tedy, že oborem konvergence je interval $\langle -1, 1)$ a oborem absolutní konvergence interval $(-1, 1)$.

$$\text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^4} \cdot x^n.$$

*Řešení.* Středem mocninné řady je $x_0 = 0$ a pro poloměr konvergence platí

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4^{n+1}}{(n+1)^4}}{\frac{4^n}{n^4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1} \cdot n^4}{4^n \cdot (n+1)^4} = 4 \lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{(n+1)^4} = 4 \qquad \Rightarrow r = \frac{1}{4}.$$

Dostáváme konvergenční interval $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.
V bodě $x = \frac{1}{4}$ je řada $\sum \frac{4^n}{n^4} \cdot \frac{1}{4^n} = \sum \frac{1}{n^4}$. Integrálním kritériem vyšetříme konvergenci či divergenci řady

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^4} = \lim_{t\to\infty} \int_1^t x^{-4} dx = -\frac{1}{3} \lim_{t\to\infty} \left[ \frac{1}{x^3} \right]_1^t = -\frac{1}{3} \lim_{t\to\infty} \left( \frac{1}{t^3} - 1 \right) = -\frac{1}{3}(0 - 1) = \frac{1}{3} < \infty,$$

to znamená, že daná řada konverguje, a to absolutně.
V bodě $x = -\frac{1}{4}$ je řada $\sum \frac{4^n}{n^4} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^n = \sum (-1)^n \frac{4^n}{n^4 \cdot 4^n} = \sum (-1)^n \frac{1}{n^4}$, která konverguje

absolutně.
Oborem konvergence a absolutní konvergence je interval $\langle -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \rangle$.

$$\text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} n^n (x+4)^n.$$

*Řešení.* Střed mocninné řady je $x_0 = -4$. Poloměr konvergence je roven

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim_{n\to\infty} n = \infty \qquad \Rightarrow r = 0.$$

Z toho plyne, že daná řada konverguje jen ve svém středu, tj. v $x = -4$.

$$\text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n \cdot 5^{n-1}}.$$

*Řešení.* Středem mocninné řady je $x_0 = 2$ a pro poloměr konvergence platí

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot 5^{n-1}}{(n+1)\cdot 5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot 5^n \cdot \frac{1}{5}}{(n+1)\cdot 5^n} = \frac{1}{5} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{5} \qquad \Rightarrow r = 5.$$

Dostáváme konvergenční interval $(-3, 7)$.
V bodě $x = 7$ je řada $\sum \frac{5^n}{n \cdot 5^{n-1}} = \sum \frac{5}{n}$, která diverguje.
V bodě $x = -3$ řada $\sum \frac{(-5)^n}{n \cdot 5^{n-1}} = \sum (-1)^n \frac{5}{n}$ konverguje neabsolutně.
Oborem konvergence je interval $\langle -3, 7)$ a oborem absolutní konvergence je interval $(-3, 7)$.

$$\text{e)} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (x+5)^n.$$

*Řešení.* Střed mocninné řady je $x_0 = -5$ a poloměr konvergence je roven

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1 \qquad \Rightarrow r = 1.$$

Získáváme konvergenční interval $(-6, -4)$.
V bodě $x = -4$ dostáváme řadu $\sum n^2$, která diverguje, protože není splněna nutná podmínka konvergence, jelikož $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty \neq 0$.
V bodě $x = -6$ dostáváme řadu $\sum (-1)^n \cdot n^2$, která také diverguje.
Oborem konvergence a zároveň i absolutní konvergence je interval $(-6, -4)$.

$$\text{f)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} (x-1)^n.$$

*Řešení.* Středem mocninné řady je $x_0 = 1$. Pro poloměr konvergence platí

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!\,[(n+1)!]^2}{(2n+2)!(n!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!\,[(n+1)n!]^2}{(2n+2)(2n+1)(2n)!(n!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow r = 4.$$

Konvergenční interval je $(-3, 5)$.
V bodě $x = 5$ dostáváme řadu $\sum \frac{(n!)^2 \cdot 4^n}{(2n)!}$, jejíž konvergenci vyšetříme Raabeovým kritériem. Platí

$$\begin{aligned} q &= \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{[(n+1)!]^2 \cdot 4^{n+1} \cdot (2n)!}{(n!)^2 \cdot 4^n \cdot (2n+2)!}\right) = \\ &= \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{4n^2+8n+4}{4n^2+6n+2}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{-2n-2}{4n^2+6n+2}\right) = -\frac{1}{2} < 1, \end{aligned}$$

to znamená, že daná řada diverguje.
V bodě $x = -3$ dostáváme řadu $\sum(-4)^n \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \sum(-1)^n \cdot \frac{(n!)^2 \cdot 4^n}{(2n)!}$, která diverguje.
Oborem konvergence a zároveň i absolutní konvergence je interval $(-3, 5)$.

$$\text{g)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n^2 \cdot 3^{n+1}}.$$

*Řešení.* Středem mocninné řady je $x_0 = 0$. Poloměr konvergence je

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \cdot 3^{n+1}}{(n+1)^2 \cdot 3^{n+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \cdot 3^n \cdot 3}{(n+1)^2 \cdot 3^n \cdot 3^2} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+2n+1} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow r = 3.$$

Konvergenční interval je tedy $(-3, 3)$.
Pro $x = 3$ dostáváme řadu $\sum \frac{3^{n-1}}{n^2 \cdot 3^{n+1}} = \sum \frac{3^n \cdot \frac{1}{3}}{n^2 \cdot 3^n \cdot 3} = \sum \frac{1}{9n^2}$, jejíž konvergenci vyšetříme například pomocí integrálního kritéria. Platí

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{9x^2} = \frac{1}{9} \lim_{t\to\infty} \int_1^t x^{-2} dx = -\frac{1}{9} \lim_{t\to\infty} \left[\frac{1}{x}\right]_1^t = -\frac{1}{9} \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{t} - 1\right) = \frac{1}{9} < \infty,$$

daná řada konverguje.
Pro $x = -3$ dostáváme řadu $\sum \frac{(-3)^{n-1}}{n^2 \cdot 3^{n+1}} = \sum(-1)^{n-1} \cdot \frac{3^{n-1}}{n^2 \cdot 3^n \cdot 3} = \sum(-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{9n^2}$, která konverguje absolutně.
Oborem konvergence a zároveň i oborem absolutní konvergence je interval $\langle -3, 3 \rangle$.

$$\text{h)} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n^2} \cdot x^n, \quad 0 < \alpha < 1.$$

*Řešení.* Střed mocninné řady je $x_0 = 0$ a pro poloměr konvergence platí

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \alpha^n = 0 \quad \Rightarrow r = \infty.$$

To znamená, že daná mocninná řada vždy konverguje. Obor konvergence i obor absolutní konvergence je interval $(-\infty, \infty)$.

**Cvičení 9.1.** Určete poloměr konvergence, obor konvergence a obor absolutní konvergence:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n^3}$ $[r = 1,\ \text{OK=OAK=}\langle 1, 1\rangle]$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n x^{n-1}$ $[r = 1,\ \text{OK=OAK=}(-1, 1)]$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-8)^n}{n\cdot 5^n}$ $[r = 5,\ \text{OK=}\langle 3, 13),\ \text{OAK=}(3, 13)]$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{7^n}$ $[r = 7,\ \text{OK=OAK=}(-7, 7)]$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1} x^n}{(2n+1)!}$ $[r = \infty,\ \text{OK=OAK=}(-\infty, \infty)]$

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n\cdot 2^n}$ $[r = 2,\ \text{OK=}(-2, 2\rangle,\ \text{OAK=}(-2, 2)]$

## 9.2 Součet mocninné řady

**Příklad 9.2.** Určete součet číselných řad pomocí součtu mocninné řady

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 3^n}.$$

*Řešení.* Nejprve sečteme mocninnou řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$. Tato řada je geometrická s kvocientem $q = x$, kde $|x| < 1$. Dostáváme

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Platí $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ a $\int x^{n-1} dx = \frac{x^n}{n}$. Proto můžeme napsat, že

$$\int_0^{\frac{1}{3}} x^{n-1} dx = \frac{1}{n\cdot 3^n}.$$

Nyní zjistíme součet zadané číselné řady

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^n} &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{3}}x^{n-1}dx=\int_0^{\frac{1}{3}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}\right)dx=\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{dx}{1-x}=\Big[-\ln|1-x|\Big]_0^{\frac{1}{3}}=\\ &= -\ln\left(1-\frac{1}{3}\right)+\ln 1=-\ln\frac{2}{3}=\ln\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

$$\text{b)}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)\left(\frac{1}{5}\right)^{2n}.$$

*Řešení.* Uvažujme mocninnou řadu ve tvaru $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)x^{2n}$. Součet řady určíme z rovnosti $\left(x^{2n+1}\right)'=(2n+1)x^{2n}$. Dostáváme

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(x^{2n+1}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}\right)'.$$

Tato řada je geometrická s kvocientem $q=-x^2$, kde $|x|<1$ a platí

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}=x-x^3+x^5+\cdots+x^{2n+1}=\frac{x}{1+x^2}.$$

Proto můžeme napsat, že

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}\right)'=\left(\frac{x}{1+x^2}\right)'=\frac{(1+x^2)-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Dosazením za $x=\frac{1}{5}$ dostaneme hledaný součet řady. Platí

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)\left(\frac{1}{5}\right)^{2n}=\frac{1-\frac{1}{5^2}}{\left(1+\frac{1}{5^2}\right)^2}=\frac{1-\frac{1}{25}}{\left(1+\frac{1}{25}\right)^2}=\frac{24\cdot 25^2}{25\cdot 26^2}=\frac{150}{169}.$$

**Cvičení 9.2.** Určete součet číselných řad pomocí součtu mocninné řady

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 4^n}$ $\left[\ln\frac{4}{3}\right]$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ $\left[\frac{80}{27}\right]$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$ $\left[\frac{8}{7}\right]$

## 9.3 Taylorova a Maclaurinova řada

**Příklad 9.3.** Rozviňte následující funkce v Maclaurinovu řadu

$$\text{a)}\, f(x) = \cos x^2.$$

*Řešení.* Nejprve položíme $x^2 = t$. Dostáváme funkci $\cos t$, jejíž rozvoj je

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Poté dosazením za $t = x^2$ dostáváme požadovanou Maclaurinovu řadu

$$\cos x^2 = 1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{12}}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{b)}\, f(x) = \arcsin x.$$

*Řešení.* Nejprve zadanou funkci zderivujeme. Platí

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \left(1 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad x \in (-1, 1)$$

Položíme-li $-x^2 = t$, dostaneme funkci $(1 + t)^{-\frac{1}{2}}$, jejíž rozvoj do binomické řady je

$$(1 + t)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \binom{-\frac{1}{2}}{1} t + \binom{-\frac{1}{2}}{2} t^2 + \cdots = 1 - \frac{1}{2} t + \frac{3}{2^2 \cdot 2!} t^2 + \cdots$$

Dosazením za $t = -x^2$ dostáváme

$$(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{2^2 \cdot 2!} x^4 + \cdots$$

a integrací dané řady máme

$$\begin{aligned} \arcsin x &= \int_0^x \left(1 - s^2\right)^{-\frac{1}{2}} ds = \int_0^x \left(1 + \frac{1}{2} s^2 + \frac{3}{2^2 \cdot 2!} s^4 + \cdots\right) ds = \\ &= x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{3x^5}{2^2 \cdot 2! \cdot 5} + \cdots \end{aligned}$$

$$\text{c)}\, f(x) = \frac{1}{3 - 2x}.$$

*Řešení.* Nejprve zadanou funkci upravíme

$$\frac{1}{3-2x}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}x}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{2}{3}x\right)^{-1}.$$

Poté položíme $-\frac{2}{3}x=t$ a dostaneme funkci $\frac{1}{3}(1+t)^{-1}$. Její rozvoj do binomické řady je

$$\frac{1}{3}(1+t)^{-1}=\frac{1}{3}\left[1+\binom{-1}{1}t+\binom{-1}{2}t^2+\cdots+\binom{-1}{n}t^{+\cdot}\right]=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1}{n}t^n,\quad t\in(-1,1).$$

Po dosazení za $t=-\frac{2}{3}x$ získáme Maclaurinovu řadu

$$\begin{aligned}\frac{1}{3-2x} &= \frac{1}{3}\left[1+\binom{-1}{1}\left(-\frac{2}{3}x\right)+\cdots+\binom{-1}{n}\left(-\frac{2}{3}x\right)^n+\cdots\right]=\\ &= 1+(-1)\left(-\frac{2}{3}x\right)+\cdots+\frac{(-1)^n n!}{n!}\left(\frac{2}{3}\right)^n(-1)^n x^n+\cdots=\\ &= \frac{1}{3}\left[1+\frac{2}{3}x+\frac{(-1)(-2)}{2!}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2x^2+\cdots+\frac{n!}{n!}\left(\frac{2}{3}\right)^n x^n+\cdots\right]=\\ &= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n x^n.\end{aligned}$$

d)$f(x)=\mathrm{e}^{\cos x}$.

*Řešení.* Provedeme rozvoje v Maclaurinovu řadu pro funkce $\mathrm{e}^x$ a $\cos x$

$$\mathrm{e}^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

Po dosazení dostáváme

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\cos x} &= \mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2!}}\cdot\mathrm{e}^{\frac{x^4}{4!}}+\cdots=\mathrm{e}\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{\left(-\frac{x^2}{2!}\right)^2}{2!}+\cdots\right]\left[1+\frac{x^4}{4!}+\frac{\left(\frac{x^4}{4!}\right)^2}{2!}+\cdots\right]=\\ &= \mathrm{e}\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+\cdots\right)\left(1+\frac{x^4}{24}+\frac{x^8}{2\cdot 24^2}+\cdots\right)=\mathrm{e}\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6}+\cdots\right).\end{aligned}$$

e)$f(x)=\mathrm{e}^x\sin x$.

*Řešení.* Maclaurinova řada pro funkci $\mathrm{e}^x$ (viz předchozí příklad) a $\sin x$ je

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

Nyní obě řady navzájem vynásobíme a dostaneme Maclaurinovu řadu pro funkci $\mathrm{e}^x \sin x$

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^x \sin x &= \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right) = \\
&= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^2 - \frac{x^4}{6} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^4}{6} + \frac{x^5}{24} + \cdots = \\
&= x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} + \cdots
\end{aligned}$$

**Cvičení 9.3.** Rozviňte následující funkce v Maclaurinovu řadu

a) $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ $\left[1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2(n-1)}}{(n-1)!} + \cdots\right]$

b) $f(x) = \sin 2x$ $\left[2x - \frac{8x^3}{3!} + \frac{32x^5}{5!} + \cdots\right]$

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}$ $\left[1 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^6 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^9 + \cdots\right]$

d) $f(x) = (1+x)\,\mathrm{e}^x$ $\left[1 + 2x + \frac{3}{2!}x^2 + \frac{4}{3!}x^3 + \cdots\right]$

e) $f(x) = \ln(1 + e^x)$ $\left[\ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^4}{192} + \cdots\right]$

**Příklad 9.4.** Rozložte v Taylorovu řadu následující funkce

a) $f(x) = \sqrt{x^3}$ v bodě $x_0 = 1$.

*Řešení.* Platí

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \tfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} &\Rightarrow\quad & f'(1) = \tfrac{3}{2}, \\
f''(x) &= \tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} &\Rightarrow\quad & f''(2) = \tfrac{3}{2^2}, \\
f'''(x) &= -\tfrac{3}{2^2}\cdot\tfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} &\Rightarrow\quad & f'''(3) = -\tfrac{3}{2^3}.
\end{aligned}$$

Dosazením do Taylorovy řady dostáváme

$$\begin{aligned}
f(x) &= 1 + \frac{3}{2}(x-1) + \frac{3}{2^2\cdot 2!}(x-1)^2 - \frac{3}{2^3\cdot 3!}(x-1)^3 + \cdots = \\
&= 1 + \frac{3}{2}\left[(x-1) + \frac{(x-1)^2}{2\cdot 2!} - \frac{(x-1)^3}{2^2\cdot 3!} + \cdots\right].
\end{aligned}$$

$$\text{b)} f(x) = \frac{1}{x} \text{ v bodě } x_0 = 3.$$

*Řešení.* Platí

$$\begin{array}{lcl} f'(x) = -\frac{1}{x^2} & \Rightarrow & f'(1) = -\frac{1}{3^2}, \\ f''(x) = \frac{2}{x^3} & \Rightarrow & f''(2) = \frac{2}{3^3}, \\ f'''(x) = -\frac{6}{x^4} & \Rightarrow & f'''(3) = -\frac{6}{3^4}. \end{array}$$

Po dosazení dostáváme Taylorovu řadu ve tvaru

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2}(x-3) + \frac{2}{3^3 \cdot 2!}(x-3)^2 - \frac{6}{3^4 \cdot 3!}(x-3)^3 + \cdots = \\ &= \frac{1}{3}\left[1 - \frac{x-3}{3} + \frac{(x-3)^2}{3^2} - \frac{(x-3)^3}{3^3} + \cdots\right]. \end{aligned}$$

**Cvičení 9.4.** Rozložte v Taylorovu řadu následující funkce

$$\text{a)} f(x) = \frac{1}{x} \text{ v bodě } x_0 = -2$$

$$\left[f(x) = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{x+2}{2} + \frac{(x+2)^2}{4} + \cdots + \frac{(x+2)^n}{2^n} + \cdots\right)\right]$$

$$\text{b)} f(x) = \ln x \text{ v bodě } x_0 = 1$$

$$\left[f(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n} + \cdots\right]$$

$$\text{c)} f(x) = \sin\frac{x\pi}{4} \text{ v bodě } x_0 = 2$$

$$\left[f(x) = 1 - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \frac{(x-2)^2}{2!} + \left(\frac{\pi}{4}\right)^4 \frac{(x-2)^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n} \frac{(x-2)^{2n}}{(2n)!} + \cdots\right]$$

# 10 FOURIEROVY ŘADY

## 10.1 Fourierovy řady vzhledem k systému $\{\cos nx, \sin nx\}$

**Příklad 10.1.** Rozviňte ve Fourierovu řadu v daném základním intervalu periodicity funkci:

$$\text{a)} f(x) = \frac{x^2}{4}, \quad x \in \langle -\pi, \pi \rangle.$$

*Řešení.* Daná funkce je po částech monotónní a spojitá na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$, v tomto intervalu je ohraničená. Tato funkce je sudá, a proto $b_n = 0$, pro $n \in \mathbb{N}$ a

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{x^2}{4}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} x^2\, dx = \frac{1}{6\pi} \Big[ x^3 \Big]_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{6\pi} = \frac{\pi^2}{6},$$

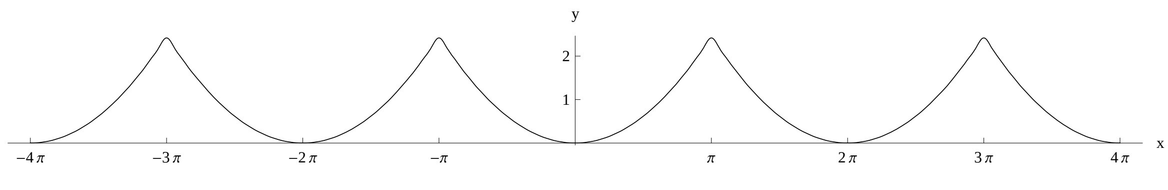
$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{x^2}{4} \cos nx\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx\, dx = \left| \begin{array}{ll} u' = \cos nx & u = \frac{1}{n} \sin nx \\ v = x^2 & v' = 2x \end{array} \right| = \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( \left[ \frac{x^2}{n} \sin nx \right]_0^{\pi} - \frac{2}{n} \int_0^{\pi} x \sin nx\, dx \right) = \left| \begin{array}{ll} u' = \sin nx & u = -\frac{1}{n} \cos nx \\ v = x & v' = 1 \end{array} \right| = \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( \left[ \frac{x^2}{n} \sin nx + \frac{2x}{n^2} \cos nx \right]_0^{\pi} - \frac{2}{n^2} \int_0^{\pi} \cos nx\, dx \right) = \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{x^2}{n} \sin nx + \frac{2x}{n^2} \cos nx - \frac{2}{n^3} \sin nx \right]_0^{\pi} = \\
&= \frac{1}{n^2} \cos n\pi = \frac{1}{n^2} (-1)^n.
\end{aligned}$$

Dostáváme jednotlivé koeficienty

$$a_1 = -1,\ a_2 = \frac{1}{4},\ a_3 = -\frac{1}{9},\ \ldots$$

Nyní můžeme určit rozvoj funkce. Platí

$$\frac{x^2}{4} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = \frac{\pi^2}{12} - \cos x + \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{9} \cos 3x + \cdots$$




Obr. 1. Periodické rozšíření funkce $\frac{x^2}{4}, x \in \langle -\pi, \pi \rangle$

$$\text{b)} f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi, 0\rangle, \\ x, & x \in (0, \pi\rangle. \end{cases}$$

*Řešení.* Obě zadané funkce jsou monotónní, spojité a ohraničené na daných intervalech. Provedeme integraci v intervalech $\langle -\pi, 0\rangle$ a $\langle 0, \pi\rangle$ a dostaneme jednotlivé koeficienty. Platí

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \int_0^{\pi} x\,dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(0 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}\right) = \frac{\pi}{2},$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\cos nx\,dx + \int_0^{\pi} x\cos nx\,dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(0 + \left[\frac{x}{n}\sin nx + \frac{1}{n^2}\cos nx\right]_0^{\pi}\right) = \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n^2}\cos n\pi - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1) = \frac{1}{n^2\pi}\left[(-1)^n - 1\right], \end{aligned}$$

a proto

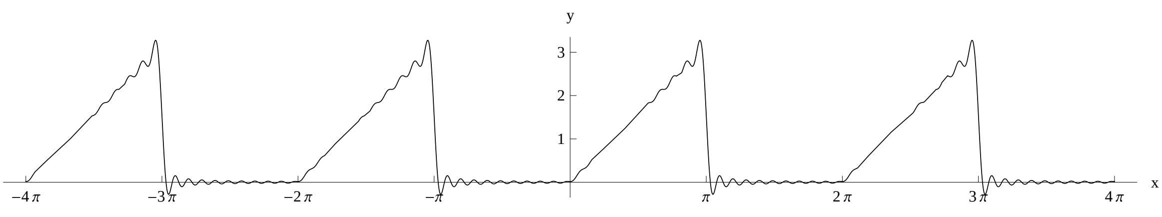
$$a_1 = -\frac{2}{\pi},\ a_2 = 0,\ a_3 = -\frac{2}{9\pi},\ a_4 = 0,\ \ldots$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\sin nx\,dx + \int_0^{\pi} x\sin nx\,dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(0 + \left[-\frac{x}{n}\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx\right]_0^{\pi}\right) = \\ &= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos n\pi\right) = -\frac{1}{n}\cos n\pi = -\frac{1}{n}(-1)^n, \end{aligned}$$

$$b_1 = 1,\ b_2 = -\frac{1}{2},\ b_3 = \frac{1}{3},\ \ldots$$

Poté získané koeficienty dosadíme a dostaneme hledaný rozvoj

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) = \\ &= \frac{\pi}{4} + \left(-\frac{2}{\pi}\cos x - \frac{2}{9\pi}\cos 3x + \cdots\right) + \left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \cdots\right). \end{aligned}$$




Obr. 2. Periodické rozšíření dané funkce

$$\text{c)} f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x), \quad x \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

*Řešení.* Fourierovy koeficienty jsou

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(\pi - x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\pi - x)dx = \frac{1}{2\pi}\left[\pi x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{2\pi} = \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(2\pi^2 - \frac{4\pi^2}{2}\right) = 0, \end{aligned}$$

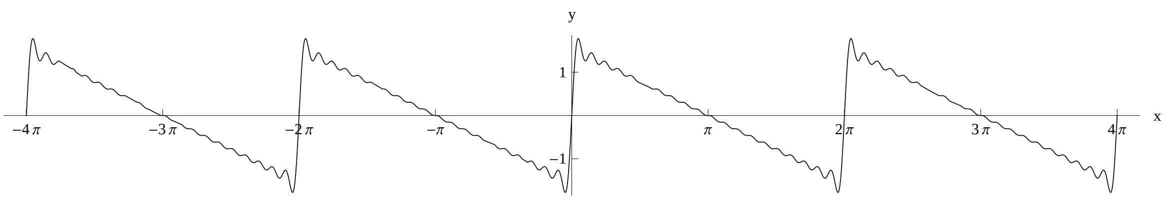
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(\pi - x)\cos nx\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\pi - x)\cos nx\,dx = \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\left[\frac{\pi - x}{n}\sin nx\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} \sin nx\,dx\right) = \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\pi - x}{n}\sin nx - \frac{1}{n^2}\cos nx\right]_0^{2\pi} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(\pi - x)\sin nx\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\pi - x)\sin nx\,dx = \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\left[-\frac{\pi - x}{n}\cos nx\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} \cos nx\,dx\right) = \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\pi - x}{n}\cos nx - \frac{1}{n^2}\sin nx\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{n}\right) = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

$$b_1 = 1,\ b_2 = \frac{1}{2},\ b_3 = \frac{1}{3},\ \ldots$$

Hledaný Fourierův rozvoj je

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \cdots$$




Obr. 3. Periodické rozšíření funkce $\frac{\pi - x}{2}, x \in \langle 0, 2\pi \rangle$

$$\mathrm{d)}\, f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, \pi), \\ 0, & x \in (\pi, 2\pi) \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \pi, 2\pi. \end{cases}$$

*Řešení.* Pro jednotlivé koeficienty Fourierovy řady platí

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} dx + \int_{\pi}^{2\pi} 0\, dx\right) = \frac{1}{\pi}\Big[x\Big]_0^{\pi} = 1,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} \cos nx\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} 0 \cos nx\, dx\right) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_0^{\pi} = 0,$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} \sin nx\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} 0 \sin nx\, dx\right) = \frac{1}{n\pi}\Big[-\cos nx\Big]_0^{\pi} = -\frac{1}{n\pi}(\cos n\pi - \cos 0) = \\ &= -\frac{(-1)^n - 1}{n\pi}. \end{aligned}$$

$$b_1 = \frac{2}{\pi},\ b_2 = 0,\ b_3 = \frac{2}{3\pi},\ b_4 = 0,\ b_5 = \frac{2}{5\pi},\ \ldots$$

Fourierův rozvoj zadané periodické funkce je

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin x + \frac{2}{3\pi}\sin 3x + \frac{2}{5\pi}\sin 5x + \cdots$$

$$\mathrm{e)}\, f(x) = \sin x, \quad x \in \langle 0, \pi\rangle.$$

*Řešení.* Pro Fourierovy koeficienty platí

$$a_0 = \frac{1}{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\pi} \sin x\, dx = \frac{2}{\pi}\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}(-\cos \pi + \cos 0) = \frac{4}{\pi},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos \frac{n\pi}{\frac{\pi}{2}} x\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos 2nx\, dx$$

Pro výpočet použijeme vzorec $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right]$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\big[\sin(1-2n)x+\sin(1+2n)x\big]dx = \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{1-2n}\cos(1-2n)x-\frac{1}{1+2n}\cos(1+2n)x\right]_0^{\pi} = \\
&= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(1-2n)\pi}{1-2n}+\frac{\cos(1+2n)\pi}{1+2n}-\frac{1}{1-2n}-\frac{1}{1+2n}\right] = \\
&= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{-1-1}{1-2n}+\frac{-1-1}{1+2n}\right]=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1-2n}+\frac{1}{1+2n}\right) = \\
&= \frac{4}{\pi\left(1-4n^2\right)}.
\end{aligned}$$

$$a_1=-\frac{4}{3\pi},\ a_2=-\frac{4}{15\pi},\ a_3=-\frac{4}{35\pi},\ \dots$$

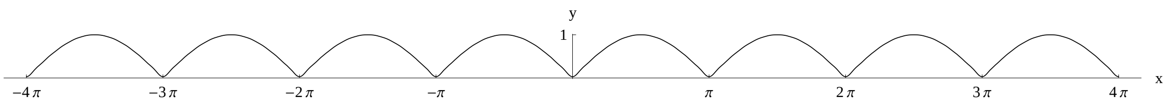
$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\sin 2nx\,dx$$

Použijeme vzorec $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$ a dostaneme

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\big[\cos(1-2n)x-\cos(1+2n)x\big]dx = \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{1-2n}\sin(1-2n)x-\frac{1}{1+2n}\sin(1+2n)x\right]_0^{\pi}=0.
\end{aligned}$$

Fourierův rozvoj dané funkce je

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos 2nx+b_n\sin 2nx)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{3\pi}\cos 2x-\frac{4}{15\pi}\cos 4x-\frac{4}{35\pi}\cos 6x+\cdots$$




Obr. 4. Periodické rozšíření funkce $\sin x, x\in\langle 0,\pi\rangle$

$$\text{f)}\,f(x)=\frac{x}{2},\quad x\in\langle -t,t\rangle.$$

*Řešení.* Daná funkce je lichá na intervalu $\langle -t,t\rangle$, a proto její koeficienty jsou

$$a_0=0,\quad a_n=0,$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{t}\int_{-t}^{t}\frac{x}{2}\sin\frac{n\pi}{t}x\,dx = \left|\begin{array}{ll} u' = \sin\frac{n\pi}{t}x & u = -\frac{t}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{t}x \\ v = x & v' = 1 \end{array}\right| = \\
&= \frac{1}{2t}\left(\left[-\frac{xt}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{t}x\right]_{-t}^{t} + \frac{t}{n\pi}\int_{-t}^{t}\cos\frac{n\pi}{t}x\,dx\right) = \\
&= \frac{1}{2t}\left[-\frac{xt}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{t}x + \frac{t^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{t}x\right]_{-t}^{t} = \\
&= \frac{1}{2t}\left(-\frac{t^2}{n\pi}\cos n\pi + \frac{t^2}{n^2\pi^2}\sin n\pi - \frac{t^2}{n\pi}\cos(-n\pi) - \frac{t^2}{n^2\pi^2}\sin(-n\pi)\right) = \\
&= \frac{1}{2t}\left(-\frac{t^2}{n\pi}(-1)^n - \frac{t^2}{n\pi}(-1)^n\right) = \frac{(-1)^n}{2t}\left(-\frac{2t^2}{n\pi}\right) = -\frac{(-1)^n t}{n\pi}.
\end{aligned}$$

$$b_1 = \frac{t}{\pi},\ b_2 = -\frac{t}{2\pi},\ b_3 = \frac{t}{3\pi},\ \ldots$$

Výsledný Fourierův rozvoj funkce je

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{t} = \frac{t}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{t} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{t} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{t} + \cdots\right).$$

**Cvičení 10.1.** Rozviňte ve Fourierovu řadu v daném základním intervalu periodicity funkci

$$\text{a)} f(x) = x \quad \text{v } \langle -\pi, \pi\rangle$$

$$\left[f(x) = 2\left(\sin x - \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\sin 3x - \tfrac{1}{4}\sin 4x + \cdots\right)\right]$$

$$\text{b)} f(x) = \begin{cases} -\pi, & \text{v } (-\pi, 0), \\ x, & \text{v } (0, \pi). \end{cases}$$

$$\left[f(x) = -\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{2}{\pi}\left(\cos x - \tfrac{1}{9}\cos 3x + \tfrac{1}{25}\cos 5x + \cdots\right) + 3\sin x - \tfrac{1}{2}\sin 2x - \tfrac{3}{5}\sin 3x + \cdots\right]$$

$$\text{c)} f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{v } \langle 0, \pi\rangle, \\ 0, & \text{v } \langle \pi, 2\pi\rangle. \end{cases}$$

$$\left[f(x) = \tfrac{1}{\pi} + \tfrac{1}{2}\sin x - \tfrac{2}{\pi}\left(\tfrac{\cos 2x}{1\cdot 3} + \tfrac{\cos 4x}{3\cdot 5} + \tfrac{\cos 6x}{5\cdot 7} + \cdots\right)\right]$$

$$\text{d)} f(x) = x^2 \quad \text{v } (0, 2\pi)$$

$$\left[f(x) = \tfrac{4}{3}\pi^2 + 4\left(\cos x + \tfrac{1}{4}\cos 2x + \cdots\right) - 4\pi\left(\sin x + \tfrac{1}{2}\sin x + \cdots\right)\right]$$

$$\text{e)} f(x) = \begin{cases} a, & \text{v } (-0, t\rangle, \\ -a, & \text{v } (t, 2t\rangle. \end{cases}$$

$$\left[f(x) = \tfrac{4a}{\pi}\left(\sin \tfrac{\pi}{t}x + \tfrac{1}{3}\sin \tfrac{3\pi}{t}x + \tfrac{1}{5}\sin \tfrac{5\pi}{t}x + \cdots\right)\right]$$

**Příklad 10.2.** Rozviňte danou funkci v intervalu $(0, \pi)$ ve Fourierovu řadu sinovou a kosinovou

$$\text{a)} f(x) = x.$$

*Řešení.* Nejprve provedeme rozvoj ve Fourierovu řadu sinovou. Pro pomocnou funkci $F(x)$ platí

$$F(x) = \begin{cases} x, & x \in (0, \pi\rangle, \\ -(-x) = x, & x \in (-\pi, 0). \end{cases}$$

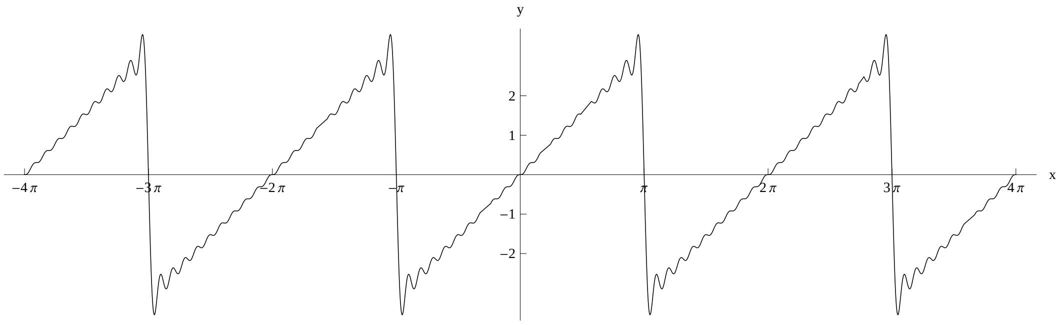
Výpočtem dostáváme Fourierovy koeficienty

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi}\left(\left[-\frac{x}{n}\cos nx\right]_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos nx \, dx\right) = \\ &= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos n\pi + 0 + 0 - 0\right) = \\ &= -\frac{2}{n}(-1)^n. \end{aligned}$$

$$b_1 = 2,\ b_2 = -1,\ b_3 = \frac{2}{3},\ \ldots$$

Rozvoj v sinovou řadu je tedy

$$f(x) = 2\sin x - \sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x + \cdots, \text{pro } x \in (0, \pi\rangle.$$




Obr. 5. Liché periodické rozšíření funkce $x, x \in (0, \pi\rangle$

Nyní provedeme rozvoj ve Fourierovu řadu kosinovou. Pomocná funkce je ve tvaru

$$F(x) = \begin{cases} x, & x \in (0, \pi\rangle, \\ -x, & x \in (-\pi, 0\rangle. \end{cases}$$

Pro Fourierovy koeficienty platí

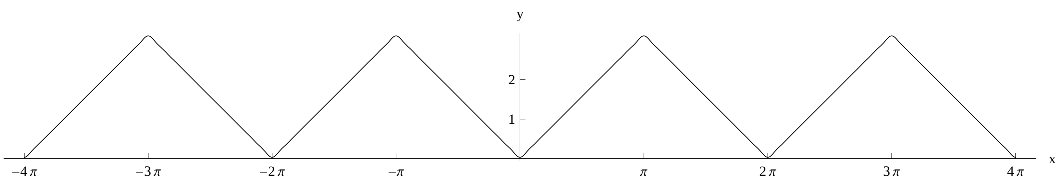
$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \pi,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{x}{n}\sin nx\right]_0^\pi - \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin nx\,dx\right) = \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin nx + \frac{1}{n^2}\cos nx\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi}\left(0 + \frac{1}{n^2}\cos n\pi - 0 - \frac{1}{n^2}\right) = \\ &= \frac{2}{n^2\pi}\big[(-1)^n - 1\big]. \end{aligned}$$

$$a_1 = -\frac{4}{\pi},\ a_2 = 0,\ a_3 = -\frac{4}{9\pi},\ \ldots$$

Po dosazení dostáváme Fourierovu řadu kosinovou

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos x - \frac{4}{9\pi}\cos 3x + \cdots,\text{pro } x \in \langle 0, \pi\rangle.$$




Obr. 6. Sudé periodické rozšíření funkce $x, x \in \langle 0, \pi\rangle$

$$\text{b)} f(x) = x \sin x.$$

*Řešení.* Provedeme nejprve rozvoj ve Fourierovu řadu sinovou. Pro pomocnou funkci platí

$$F(x) = \begin{cases} x \sin x, & x \in (0, \pi), \\ -\big[-x \sin(-x)\big] = -x \sin x, & x \in (-\pi, 0\rangle. \end{cases}$$

Koeficienty hledané řady jsou

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x \sin x \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \big[x\cos(1-n)x - x\cos(1+n)x\big] dx = \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin(1-n)x}{1-n} + \frac{\cos(1-n)x}{(1-n)^2} - \frac{\sin(1+n)x}{1+n} - \frac{\cos(1+n)x}{(1+n)^2}\right]_0^\pi = \\ &= \frac{1}{\pi}\left[0 + \frac{\cos(1-n)\pi}{(1-n)^2} - 0 - \frac{\cos(1+n)\pi}{(1+n)^2} - 0 - \frac{1}{(1-n)^2} + 0 + \frac{1}{(1+n)^2}\right] = \\ &= \frac{(-1)^{n+1}-1}{\pi}\left[\frac{1}{(1-n)^2} - \frac{1}{(1+n)^2}\right] = \frac{4n}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}-1}{(1-n)^2(1+n)^2}. \end{aligned}$$

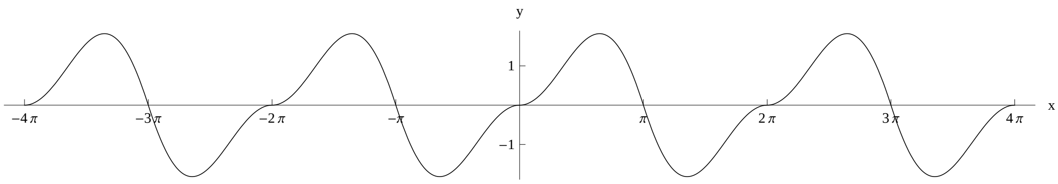
$$b_2 = -\frac{16}{9\pi},\ b_3 = 0,\ b_4 = -\frac{32}{225\pi},\ \ldots$$

Pro $n = 1$ nemá daný výsledek smysl, proto je nutné použít pro výpočet $b_1$ integrál ve tvaru

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x \sin x \sin x \, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x \sin^2 x \, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (x - x\cos 2x) \, dx = \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\sin 2x - \frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^\pi = \frac{1}{2\pi}\left(\pi^2 - 0 - \frac{1}{2} - 0 + 0 + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Hledaný rozvoj v sinovou řadu je

$$f(x) = \frac{\pi}{2}\sin x - \frac{16}{9\pi}\sin 2x - \frac{32}{225\pi}\sin 4x + \cdots, \text{pro } x \in \langle 0, \pi\rangle.$$




Obr. 7. Liché periodické rozšíření funkce $x \sin x, x \in \langle 0, \pi\rangle$

Nyní provedeme rozvoj v kosinovou řadu, pro jejíž pomocnou funkci platí

$$F(x) = \begin{cases} x \sin x, & x \in (0, \pi), \\ -x \sin(-x) = x \sin x, & x \in (-\pi, 0). \end{cases}$$

Fourierovy koeficienty jsou

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin x \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \big[ x \sin(1-n)x + x \sin(1+n)x \big] dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{x \cos(1-n)x}{1-n} + \frac{\sin(1-n)x}{(1-n)^2} - \frac{x \cos(1+n)x}{1+n} + \frac{\sin(1+n)x}{(1+n)^2} \right]_0^\pi = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{\pi \cos(1-n)\pi}{1-n} + 0 - \frac{\pi \cos(1+n)\pi}{1+n} + 0 + 0 - 0 + 0 - 0 \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{\pi(-1)^{n+1}}{1-n} - \frac{\pi(-1)^{n+1}}{1+n} \right] = \frac{(-1)^{n+1}(-2)}{(1-n)(1+n)}. \end{aligned}$$

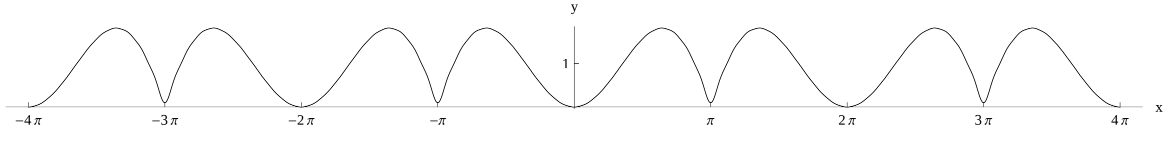
$$a_0 = 2,\ a_2 = -\frac{2}{3},\ a_3 = \frac{1}{4},\ \ldots$$

Koeficient $a_1$ získáme výpočtem příslušného integrálu. Platí

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \sin 2x \, dx = \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{x}{2} \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^\pi = \\ &= \frac{1}{2\pi} (-\pi - 0 + 0 + 0) = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Dosazením dostaneme Fourierovu řadu kosinovou

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2} \cos x - \frac{2}{3} \cos 2x + \frac{1}{4} \cos 3x + \cdots, \text{pro } x \in \langle 0, \pi \rangle.$$




Obr. 8. Sudé periodické rozšíření funkce $x \sin x, x \in \langle 0, \pi \rangle$

**Cvičení 10.2.** Rozviňte danou funkci v intervalu $(0, \pi)$ ve Fourierovu a) sinovou a b) kosinovou řadu

$$\text{a)} f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}$$

$$\left[ \text{a)} \tfrac{1}{2} \sin 2x + \tfrac{1}{4} \sin 4x + \tfrac{1}{6} \sin 6x + \cdots \quad \text{v } (0, \pi) \right]$$

$$\left[\text{b)}\tfrac{2}{\pi}\left(\cos x + \tfrac{1}{3^2}\cos 3x + \tfrac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots\right) \quad \text{v } \langle 0, \pi)\right]$$

$$\text{b)} f(x) = x \cos x.$$

$$\left[\text{a)} f(x) = -\tfrac{1}{2}\sin x + 2\left(\tfrac{2}{3}\sin 2x - \tfrac{3}{2\cdot 4}\sin 3x + \cdots\right) \quad \text{v } (0, \pi)\right]$$
$$\left[\text{b)} f(x) = -\tfrac{2}{\pi} + \tfrac{\pi}{2}\cos x - \tfrac{4}{\pi}\left(\tfrac{5}{3^2}\cos 2x + \tfrac{17}{5^2\cdot 3^2}\cos 4x + \cdots\right) \quad \text{v } \langle 0, \pi\rangle\right]$$

# 11 APLIKACE NEKONEČNÝCH ŘAD

## 11.1 Užití mocninných řad

**Příklad 11.1.** Určete přibližnou hodnotu výrazu s chybou menší než je uvedeno

$$\text{a)}\sin 1^\circ \quad \left[10^{-8}\right].$$

*Řešení.* Použijeme Maclaurinovu řadu fce $\sin x$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

Poté dosadíme za $x = \frac{\pi}{180}$

$$\sin\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{180} - \left(\frac{\pi}{180}\right)^3 \frac{1}{3!} + \left(\frac{\pi}{180}\right)^5 \frac{1}{5!} + \cdots$$

V rozvoji vezmeme třetí člen, který splňuje danou podmínku. Platí

$$\left(\frac{\pi}{180}\right)^5 \frac{1}{5!} < 10^{-8}.$$

Nyní určíme přibližnou hodnotu výrazu

$$\sin\frac{\pi}{180} \doteq \frac{\pi}{180} - \left(\frac{\pi}{180}\right)^3 \frac{1}{3!} + \left(\frac{\pi}{180}\right)^5 \frac{1}{5!} \doteq 0,0174524.$$

$$\text{b)}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \left[10^{-5}\right].$$

*Řešení.* Derivací získáme

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1}$$

Dostáváme geometrickou řadu, jejíž koeficient je $q = -x^2$. Řadu můžeme napsat ve tvaru

$$\begin{aligned}\operatorname{arctg} x &= \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+t^2}\right) dt = \int_0^x \left(1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8 - t^{10} + t^{12} + \cdots\right) dt = \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{13}}{13} + \cdots\end{aligned}$$

V rozvoji vezmeme sedmý člen, který splňuje danou podmínku

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{13} < 10^{-5}.$$

Přibližná hodnota výrazu je

$$\begin{aligned}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} &\doteq \frac{\sqrt{3}}{3} - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3\frac{1}{3} + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^5\frac{1}{5} - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^7\frac{1}{7} + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^9\frac{1}{9} - \\ &- \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{11}\frac{1}{11} + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{13}\frac{1}{13} \doteq 0,5236.\end{aligned}$$

**Cvičení 11.1.** Určete přibližnou hodnotu výrazu s chybou menší než je uvedeno

a) $\cos 10^\circ$ $(10^{-4})$ $[0,9848]$

b) $\sin 10^\circ$ $(10^{-6})$ $[0,17364]$

c) $\mathrm{e}^2$ $(10^{-3})$ $[7,389]$

d) $\arcsin 0,45$ $(10^{-3})$ $[0,466]$

**Příklad 11.2.** Určete přibližnou hodnotu výrazu pomocí prvních $n$ členů

$$\text{a)}\,\frac{1}{\sqrt[4]{\mathrm{e}}} \quad [n = 4].$$

*Řešení.* Položíme-li $-\frac{1}{4} = x$ dostáváme funkci $\mathrm{e}^x$. První 4 členy rozvoje této funkce jsou

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Dosazením za $x = -\frac{1}{4}$ určíme přibližnou hodnotu zadaného výrazu

$$\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}} \doteq 1 - \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{4}\right)^2\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4}\right)^3\frac{1}{3\cdot 2} \doteq 0,779$$

$$\text{b)}\,\sqrt[3]{1,015} \quad [n = 3].$$

*Řešení.* Nejprve upravíme zadaný výraz do tvaru $(1+x)^a$, kde $x \in (-1, 1)$

$$\sqrt[3]{1,015} = \sqrt[3]{1 + 0,015} = (1 + 0,015)^{\frac{1}{3}}.$$

Pro první tři členy rozvoje v Maclaurinovu řadu platí

$$(1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \binom{\frac{1}{3}}{1} x + \binom{\frac{1}{3}}{2} x^2 = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2.$$

Dosazením za $x = 0,015$ určíme přibližnou hodnotu výrazu

$$\sqrt[3]{1,015} \doteq 1 + \frac{1}{3} \cdot 0,015 - \frac{1}{9} \cdot 0,015^2 \doteq 1,004975.$$

c) $\ln 3 \quad [n = 6]$.

*Řešení.* Pro výpočet hodnoty $\ln 3$ použijeme rozvoj funkce $\ln \frac{1+x}{1-x}$, kde $x \in (-1, 1)$. Nejprve odvodíme rozvoj v Maclaurinovu řadu pro tuto funkci. Vycházíme z předpokladu

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x).$$

Pro $\ln(1+x)$ dostáváme

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1, 1\rangle,$$

a pro $\ln(1-x)$ platí

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{(-x)^n}{n} + \cdots = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad x \in \langle -1, 1).$$

Potom můžeme napsat

$$\begin{aligned} \ln \frac{1+x}{1-x} &= \left( x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots \right) - \left( -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cdots + \right) = \\ &= 2x + \frac{2x^3}{3} + \cdots = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in (-1, 1). \end{aligned}$$

Pro prvních šest členů rozvoje platí

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left( x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \frac{x^{11}}{11} + \cdots \right).$$

Z rovnice $\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln 3$ dostáváme $x = \frac{1}{2}$ a po dosazení do rozvoje určíme přibližnou hodnotu výrazu

$$\ln 3 \doteq 2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2^5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{2^7} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{2^9} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{2^{11}} \cdot \frac{1}{11} \right) \doteq 1,0986.$$

$$\text{d) } \ln\frac{5}{6} \quad [n=5].$$

*Řešení.* Pro zjištění hodnoty výrazu využijeme rozvoje v Maclaurinovu řadu funkce $\ln(1+x)$. Platí

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \cdots$$

Z rovnice $\ln(1+x) = \ln\frac{5}{6}$ dostáváme $x = -\frac{1}{6}$. Po dosazení určíme přibližnou hodnotu daného výrazu

$$\ln\frac{5}{6} \doteq -\frac{1}{6} - \left(-\frac{1}{6}\right)^2\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{6}\right)^3\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{6}\right)^4\frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{6}\right)^5\frac{1}{5} \doteq -0,18.$$

**Cvičení 11.2.** Určete přibližnou hodnotu výrazu pomocí prvních $n$ členů

a) $\frac{1}{e}$ (n = 3) $[0,3678]$

b) $(1,5)^2$ (n = 3) $[2,25]$

c) $\ln 5$ (n = 9) $[1,6094]$

d) $\ln\frac{1}{2}$ (n = 3) $[-0,693]$

**Příklad 11.3.** Určete následující limity

$$\text{a) } \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt[3]{1+x^2}}{x}.$$

*Řešení.* Pro vyjádření odmocnin použijeme binomický rozvoj funkcí $\sqrt{1-x}$ a $\sqrt[3]{1+x^2}$. Platí

$$(1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \binom{\frac{1}{2}}{1}(-x) + \binom{\frac{1}{2}}{2}(-x)^2 + \cdots = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \cdots$$

$$(1+x^2)^{\frac{1}{3}} = 1 + \binom{\frac{1}{3}}{1}x^2 + \cdots = 1 + \frac{x^2}{3} + \cdots$$

Poté dosadíme do limity jednotlivé rozvoje a dostaneme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt[3]{1+x^2}}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left[\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \cdots\right) - \left(1 + \frac{x^2}{3} + \cdots\right)\right] = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(-\frac{x}{2} - \frac{11x^2}{24} + \cdots\right) = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

$$\text{b)} \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x^2}-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right].$$

*Řešení.* Použijeme rozvoj v Maclaurinovu řadu funkce $\ln(1+x)$. Platí

$$\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x^4}+\frac{1}{3x^6}+\cdots$$

Po dosazení do limity dostáváme

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x^2}-x^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x^4}+\frac{1}{3x^6}+\cdots\right)\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}-1+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{3x^4}+\cdots\right)=-1.$$

**Cvičení 11.3.** Určete následující limity

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^5}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$ $\left[-\frac{1}{12}\right]$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

**Příklad 11.4.** Vyjádřete mocninnou řadou

$$\text{a)} \int_0^x \frac{e^t}{t^2}dt.$$

*Řešení.* Provedeme rozvoj funkce $e^t$ v Maclaurinovu řadu. Platí

$$e^t=1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}+\cdots,\quad t\in(-\infty,\infty).$$

Poté získanou řadu dosadíme do integrálu a po integraci dostaneme požadovanou mocninnou řadu

$$\begin{aligned}\int_0^x\frac{e^t}{t^2}dt &= \int_0^x\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}+\frac{1}{2!}+\frac{t}{3!}+\cdots\right)dt=\\ &= \left[-\frac{1}{t}+\ln|t|+\frac{t}{2!}+\frac{t^2}{2\cdot 3!}+\cdots\right]_0^x=\\ &= -\frac{1}{x}+\ln|x|+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{2\cdot 3!}+\cdots+\frac{x^n}{n(n+1)!}+\cdots\end{aligned}$$

$$\text{b)} \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt.$$

*Řešení.* Maclaurinův rozvoj funkce $\ln(1+t)$ je

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{t^n}{n} + \cdots$$

Dosazením do integrálu dostáváme

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt &= \int_0^x \left(1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} - \frac{t^3}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{t^n}{n+1} + \cdots\right) dt = \\
&= \left[t - \frac{t^2}{4} + \frac{t^3}{9} - \frac{t^4}{16} + \cdots + (-1)^n \frac{t^{n+1}}{(n+1)^2} + \cdots\right]_0^x = \\
&= x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} - \frac{x^4}{16} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + \cdots
\end{aligned}$$

$$\text{c)} \int_0^x \frac{dt}{1-t^9}.$$

*Řešení.* Provedeme binomický rozvoj funkce $\frac{1}{1-t^9}$. Platí

$$\begin{aligned}
(1-t^9)^{-1} &= 1 - \binom{-1}{1} t^9 + \binom{-1}{2} t^{18} - \cdots + \binom{-1}{n} t^{9n} + \cdots = \\
&= 1 + t^9 + t^{18} + \cdots + t^{9n} + \cdots
\end{aligned}$$

Integrací dostáváme

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{dt}{1-t^9} &= \int_0^x \left(1 + t^9 + \cdots + t^{9n} + \cdots\right) dt = \left[t + \frac{t^{10}}{10} + \cdots + \frac{t^{9n+1}}{9n+1} + \cdots\right]_0^x = \\
&= x + \frac{x^{10}}{10} + \cdots + \frac{x^{9n+1}}{9n+1} + \cdots
\end{aligned}$$

**Cvičení 11.4.** Vyjádřete mocninnou řadou

a) $\int\limits_0^x \frac{e^t}{t}\,dt$ $\left[\ln|x| + x + \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \cdots\right]$

b) $\int\limits_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ $\left[1 + \frac{x^5}{2\cdot 5} + \frac{x^9}{8\cdot 3} + \frac{5x^{13}}{16\cdot 13} + \cdots\right]$

c) $\int\limits_0^x \sin t^2\,dt$ $\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11\cdot 5!} + \cdots\right]$

d) $\int\limits_0^x \ln\frac{1+t}{t}\,dt$ $\left[x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \frac{x^4}{4^2} + \cdots\right]$

**Příklad 11.5.** Určete přibližnou hodnotu výrazu pomocí prvních $n$ členů nebo se zadanou přesností

$$\text{a)} \int_{0,1}^{1} \frac{\mathrm{e}^x}{x} dx \quad [n = 6].$$

*Řešení.* Maclaurinův rozvoj funkce $\mathrm{e}^x$ je

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

Dosazením do integrálu zjistíme přibližnou hodnotu výrazu

$$\begin{aligned}\int_{0,1}^{1} \frac{\mathrm{e}^x}{x} dx &\doteq \int_{0,1}^{1} \left(\frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!}\right) dx \doteq \\ &\doteq \left[\ln|x| + x + \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^4}{4\cdot 4!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!}\right]_{0,1}^{1} \doteq 3,518.\end{aligned}$$

$$\text{b)} \int_{0}^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} \quad [\text{na tisíciny}].$$

*Řešení.* Nejprve určíme binomický rozvoj dané funkce. Platí

$$\left(1 + x^4\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \binom{-\frac{1}{2}}{1} x^4 + \cdots = 1 - \frac{x^4}{2} + \cdots$$

Druhý člen rozvoje splňuje danou podmínku

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^4 < 10^{-3}.$$

Po dosazení do integrálu dostaneme

$$\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} \doteq \int_0^{0,5} \left(1 - \frac{x^4}{2}\right) dx \doteq \left[x - \frac{x^5}{10}\right]_0^{0,5} \doteq 0,497.$$

**Cvičení 11.5.** Určete přibližnou hodnotu výrazu pomocí prvních $n$ členů nebo se zadanou přesností

a) $\int\limits_{0,1}^{0,2} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^3}\, dx \quad (10^{-3})$ $[32,831]$

b) $\int\limits_{0}^{0,5} \cos \frac{x^2}{1}\, dx$ (na tisíciny) $[0,500]$

c) $\int\limits_{0}^{0,5} \frac{dx}{1+x^4} \quad (10^{-4})$ $[0,4940]$

d) $\int\limits_{2}^{4} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\, dx$ (n = 4) $[2,834]$

# ZÁVĚR

Úkolem této práce bylo vytvoření sbírky příkladů sloužící studentům jako pomocný materiál k předmětu Matematika III. Pro vytvoření sbírky byl využit profesionální systém LaTeX, který je určen pro psaní vědeckých a matematických dokumentů vysoké typografické kvality a různých jiných druhů dokumentů, od jednoduchých dopisů po složité knihy.

Teoretická část je rozdělena na pět kapitol. V jednotlivých kapitolách jsou definovány nejdůležitější pojmy související s daným tématem.

Praktická část navazuje na poznatky popsané v teoretické části. Pro každou kapitolu v teoretické části jsou v části praktické vypracovány vzorové příklady a uvedeny i neřešené příklady na procvičení.

První kapitola je rozdělena na dvě podkapitoly - určení součtu řady pomocí rozkladu na parciální zlomky a součet geometrické řady.

Další kapitola je zaměřena na určování konvergence resp. divergence řady s nezápornými členy pomocí různých kritérií. Jednotlivá kritéria tvoří podkapitoly. Patří sem limitní podílové, limitní odmocninové, limitní Raabeovo a integrální kritérium.

Řady alternující jsou popsány ve třetí kapitole. Vyšetřuje se jejich absolutní či neabsolutní konvergence. Nejprve se pomocí Leibnizova kritéria zjistí konvergence řady a poté kritérii pro řady s absolutními členy se určí, zda je absolutní či neabsolutní.

Následující kapitola se zabývá mocninnými řadami a je dělena na podkapitoly. V první podkapitole jsou uvedeny příklady na určení poloměru, oboru konvergence a oboru absolutní konvergence. Další část je zaměřena na součet číselné řady pomocí součtu mocninné řady. Poslední podkapitola se zabývá rozvojem řad v Maclaurinovu řadu a rozložením v řadu Taylorovu.

Tématem páté kapitoly jsou Fourierovy řady vzhledem k systému $\{\cos nx, \sin nx\}$. Příklady jsou zaměřeny na rozvoj funkce v zadaném intervalu periodicity do Fourierovy řady. Dále jsou zde uvedeny příklady na rozvoj funkce ve Fourierovu řadu sinovou a kosinovou.

V poslední kapitole jsou uvedeny příklady na využití mocninných řad v matematice. Jsou zde řešeny příklady na určení přibližné hodnoty výrazu (např. přirozeného logaritmu, odmocniny, aj.), na zjištění limity, na vyjádření integrálu pomocí mocninné řady či na určení hodnoty integrálu.

Byla tedy vytvořena sbírka řešených a neřešených příkladů dle požadavků zadání. Sbírka je spíše zaměřená na praktickou část, ve které jsou podrobně vysvětleny postupy řešení příkladů. V teoretické části jsou zmíněny jen nejdůležitější pojmy, které stačí k porozumění dané problematiky.

## CONCLUSION

The aim of this work was to create a collection of examples, which is going to serve as auxiliary material to Mathematics III. The professional system LaTeXwas used to create this collection. This system is intended for writting scientific and mathematic documents or another types of documents, from simple letters to difficult books.
The theoretical part is divided into five chapters. There are defined the most important terms in individual chapters.
The practical part continues to pieces of knowledge, that are described in theoretical part. Model examples and unsolved examples are shown for every chapter in theoretical part.
The first chapter is divided into two subchapters - evaluation sum of series through decomposition of partial fraction and sum of geometric series.
The next chapter is aimed at identification convergence or divergence of series with non-negative terms using different criteria of convergence. The subchapters are formed by individual criteria. There are the limit ratio test, the limit radical test, the limit Raabe test and the integral test.
Alternating series are described in the third chapter. It is searched if they are absolutely or conditionally convergent. Firstly it is founded out convergence of series by Leibniz criterion. Then it is identified if series with absolute terms are absolutely or conditionally convergent.
The next chapter explains power series and it is divided into two subchapters. In the first subchapters there are shown examples to evaluation radius of convergence, convergence region and absolutely convergence region. The next part is aimed at sum of number series using sum of power series. Last subchapter is engaged in function expansion in Maclaurin series and decomposition in Taylor series.
Subject of the fifth chapter are Fourier series. The examples are aimed at expansion in Fourier series in the given interval. There are shown examples of expansion in Fourier sine and cosine series.
In the last chapter there are shown examples of using power series in mathematics. There are solved examples of finding approximate value of terms (e.g. natural logarithm, square root), of finding limit, of expression the integral and of finding value of integral.
It was created the collection of solved and unsolved examples according to the requirements of task. This collection is focused on practical part, in which there are explained the methods of solving examples. In the theoretical part there are mentioned only the most important terms, which are enough for understanding of this problem.

## SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

[1] Došlá Z.; Plch R.; Sojka P. *Nekonečné řady.* Brno, 2002. ISBN 80-210-3005-4.

[2] Dubčák F. *Cvičení z matematiky.* Brno, VUT, 1987.

[3] Ostravský J. *Diferenciální počet funkce více proměnných.* Nekonečné číselné řady. UTB Zlín, 2007. ISBN 978-80-7318-567-1.

[4] Retorys K. *Přehled užité matematiky I.* Prometheus, 2000. ISBN 80-7196-180-9.

[5] Mendelson E. *Shaum's Outline of Calculus.* McGraw-Hill. 00704197736.

[6] Tomica R. *Cvičení z matematiky II.* Brno, VUT, 1974.

[7] Řezníčková J. Podklady pro předmět Matematika III. *Nekonečné řady.*

[8] Lomtatidze L.; Plch R. *Sázíme v LaTeXu diplomovou práci z matematiky.* Brno, 2003. ISBN 80-210-3228-6.

# SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

| | |
|---|---|
| $\mathbb{R}$ | množina všech reálných čísel |
| $\mathbb{R}^*$ | množina všech reálných čísel rozšířená o $-\infty, +\infty$ |
| $\mathbb{N}$ | množina všech přirozených čísel |
| $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ | nekonečná posloupnost |
| $a_n$ | n-tý člen posloupnosti |
| $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ | nekonečná číselná řada |
| $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ | posloupnost částečných součtů |
| $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ | limita posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ |
| $s$ | součet nekonečné řady |
| $q$ | kvocient geometrické řady |
| $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ | alternující řada |
| $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lvert c_n \rvert$ | řada s nezápornými členy |
| $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ | mocninná řada |
| $r$ | poloměr konvergence mocninné řady |

## SEZNAM OBRÁZKŮ