

Zpracování signálů a dat

Signal and data processing

Bc. Jindřich Novák

Diplomová práce
2010



Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky
akademický rok: 2009/2010

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Jindřich NOVÁK**
Studijní program: **N 3902 Inženýrská informatika**
Studijní obor: **Automatické řízení a informatika**
Téma práce: **Zpracování signálů a dat**

Zásady pro vypracování:

1. Zpracování oblasti teorie pravděpodobnosti pro účely signal processing.
2. Nastudování a zpracování statistických pojmů pro účely signal processing.
3. Programová realizace korelační a statistické analýzy.
4. Tesování programu na generovaných datech.
5. Ověření programů na reálných datech.

Rozsah práce:

Rozsah příloh:

Forma zpracování diplomové práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

1. Zaplatílek, K., Doňar, B., MATLAB, začínám se signály, vydal: Praha: BEN -- technická literature. 2006.
2. Jan, J. Číslíková filtrace, analýza a restaurace signálů. VUT Brno. 1997.
3. TheMathWorks. Signal processing Toolbox. Natick. 2004.
4. ackson, L.B. Signals, systems and transforms. Adison-Wesley. 1991.
5. Kraniuskas, P. Transforms in signals and systems. Adison-Wesley. 1995.
6. <http://homen.vsb.cz/oti73/cdpast1/KAP05/PRAV5.HTM>
7. <http://homen.vsb.cz/oti73/cdpast1/KAP04/PRAV4.HTM>
8. www.fce.vutbr.cz/veda/juniorstav2008.../Gottvald_Jakub_CL.pdf
9. <http://cs.wikipedia.org/wiki/Korelace>
10. [http://cs.wikipedia.org/wiki/Korelace_\(zpracovani_signalu\)](http://cs.wikipedia.org/wiki/Korelace_(zpracovani_signalu))

Vedoucí diplomové práce:

prof. Ing. Roman Prokop, CSc.

Ústav automatizace a řídicí techniky

Datum zadání diplomové práce:

19. února 2010

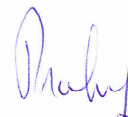
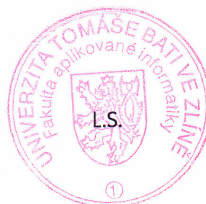
Termín odevzdání diplomové práce:

8. června 2010

Ve Zlíně dne 19. února 2010



prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.
děkan



prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.
ředitel ústavu

ABSTRAKT

Tato práce se zabývá *Signal Processing Toolboxem* (*SPTOOL*) a *Filter Design&Analysis Toolboxem* (*FDATOOL*) v prostředí MATLAB.

Jedním z cílů této práce bylo teoretické rozebrání dané problematiky o daných toolboxech a to SPTOOL a FDATOOL.

Součástí této diplomové práce je také praktická realizace daných filtrů a jeho aplikace na vložená data.

Poslední částí práce bylo poté praktické ověření získaných znalostí z teoretické části o FDATOOL a jeho ověření na reálných datech signálu.

Klíčová slova: Signal Processing Toolbox, Filter Design&Analysis Toolbox, MATLAB, SPTOOL, FDATOOL, signál, filtr

ABSTRACT

This thesis deals with *Signal Processing Toolbox* (*SPTOOL*) and *Filter Design&Analysis Toolbox* (*FDATOOL*) in the environment of MATLAB.

One of the aims of this thesis was theoretical analysis of selected topic focused on SPTOOL and FDATOOL.

Practical use of these filters and their application on inserted data is part of this paper as well.

The last part of this thesis is focused on practical use of gained knowledge about FDATOOL and verification on real signal data.

Keywords: Signal Processing Toolbox, Filter Design&Analysis Toolbox, MATLAB, SPTOOL, FDATOOL, signal, filter

Zvláštní poděkování patří mému vedoucímu diplomové práce prof. Ing. Romanu Prokopovi, CSc. , za podnětné připomínky a diskuze, které pomohly nejen ke zkvalitnění celkového textu, ale celkově mi pomohl v mnoha ohledech při psaní této práce.

Prohlašuji, že

- beru na vědomí, že odevzdáním diplomové/bakalářské práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb. o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších právních předpisů, bez ohledu na výsledek obhajoby;
- beru na vědomí, že diplomová/bakalářská práce bude uložena v elektronické podobě v univerzitním informačním systému dostupná k prezenčnímu nahlédnutí, že jeden výtisk diplomové/bakalářské práce bude uložen v příruční knihovně Fakulty aplikované informatiky Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně a jeden výtisk bude uložen u vedoucího práce;
- byl/a jsem seznámen/a s tím, že na moji diplomovou/bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších právních předpisů, zejm. § 35 odst. 3;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 1 autorského zákona má UTB ve Zlíně právo na uzavření licenční smlouvy o užití školního díla v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 2 a 3 autorského zákona mohu užít své dílo – diplomovou/bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití jen s předchozím písemným souhlasem Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše);
- beru na vědomí, že pokud bylo k vypracování diplomové/bakalářské práce využito softwaru poskytnutého Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně nebo jinými subjekty pouze ke studijním a výzkumným účelům (tedy pouze k nekomerčnímu využití), nelze výsledky diplomové/bakalářské práce využít ke komerčním účelům;
- beru na vědomí, že pokud je výstupem diplomové/bakalářské práce jakýkoliv softwarový produkt, považují se za součást práce rovněž i zdrojové kódy, popř. soubory, ze kterých se projekt skládá. Neodevzdání této součásti může být důvodem k neobhájení práce.

Prohlašuji,

- že jsem na diplomové práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval. V případě publikace výsledků budu uveden jako spoluautor.
- že odevzdaná verze diplomové práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG jsou totožné.

Ve

.....

Zlíně

podpis diplomanta

OBSAH

ÚVOD	9
I TEORETICKÁ ČÁST	10
1 TEORIE PRAVDĚPODOBŇSTI	11
1.1 POJMY TEORIE PRAVDĚPODOBŇSTI.....	11
1.1.1 Sigma algebra (σ - algebra).....	11
1.1.2 Náhodný jev	11
1.1.3 Pravděpodobnost události.....	11
1.1.4 Střední hodnota	12
1.1.5 Rozptyl	12
1.2 ZÁKLADNÍ TYPY ROZDĚLENÍ PRAVDĚPODOBŇSTI SPOJITÉ NÁHODNÉ VELIČINY	13
1.2.1 Rovnoměrné rozložení $R(a,b)$	13
1.2.2 Exponenciální rozložení $E(\lambda)$	15
1.2.3 Normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$	17
1.2.4 Normované normální rozdělení $N(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$	20
1.2.5 Některá další rozdělení	23
1.2.5.1 Weibullovo rozdělení $W(\delta, c)$	23
1.2.5.2 Pearsonovo rozdělení c_n^2	24
1.2.5.3 Studentovo rozdělení t_n	25
1.3 ZÁKLADNÍ TYPY ROZDĚLENÍ PRAVDĚPODOBŇSTI DISKRÉTNÍ NÁHODNÉ VELIČINY	25
1.3.1 Alternativní rozdělení $A(p)$	25
1.3.2 Rovnoměrné rozdělení $R(n)$	26
1.3.3 Binomické rozdělení $Bi(n, p)$	27
1.3.4 Poissonovo rozdělení $Po(\lambda)$	29
1.3.5 Hypergeometrické rozdělení $H(N, M, n)$	32
2 ANALÝZA SIGNÁLŮ	34
2.1 FOURIEROVA TRANSFORMACE	36
2.1.1 Přímá Fourierova transformace	37
2.1.1.1 Spojitý čas.....	38
2.1.1.2 Diskrétní čas.....	41
2.1.2 Zpětná Fourierova transformace	43
2.1.3 Rychlá Fourierova transformace (FFT)	43
2.2 KORELAČNÍ ANALÝZA.....	45
2.2.1 Korelační a kovarianční funkce	45
2.3 VÝPOČET VÝKONOVÉ SPEKTRÁLNÍ HUSTOTY	48
II PRAKTICKÁ ČÁST	49
3 SPTOOL- SIGNAL PROCESSING TOOLBOX	50

3.1	HLAVNÍ OKNO SPTOOL– „SIGNALS“	52
3.2	HLAVNÍ OKNO SPTOOL– „FILTERS“	54
3.3	HLAVNÍ OKNO SPTOOL– „SPEKTRA“	55
4	FDATool - FILTER DESIGN & ANALYSIS TOOLBOX (TVORBA FILTŘŮ).....	58
4.1	NASTAVENÍ	59
4.1.1	Response.....	59
4.1.2	Design Metod – volba druhu filru (FIR/IIR).....	59
4.1.3	Nastavení frekvence filru – např. pro filr pásmové propusti.....	61
4.1.4	Útlum signálu	61
4.2	ANALÝZA FILTRU.....	62
4.3	TEST FUNKČNOSTI FILTRU	66
4.3.1	Dolní propust	67
4.3.2	Pásmová propust	77
4.4	NÁVRH FILTRU PÁSMOVÉ PROPUSTI A JEHO POUŽITÍ	86
	ZÁVĚR.....	90
	CONCLUSION	91
	SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY	92
	SEZNAM NEJPOUŽÍVANĚJŠÍCH SYMBOLŮ A ZKRATEK.....	93
	SEZNAM OBRÁZKŮ	95
	SEZNAM TABULEK.....	97

ÚVOD

Filtrace signálů se považuje za jednu ze stěžejních prací při práci se signály, protože každý signál obsahuje určité množství pro nás nepotřebných dat, které je třeba odfiltrvat. Ať se jedná o šумы v signálu vyskytující, nebo o frekvence, které nejsou pro danou problematiku stěžejní. Tato práce se podrobněji zabývá *Signal Processing Toolboxem* a *Filter Design&Analysis Toolboxem* v prostředí MATLAB, které slouží pro filtraci signálů.

Signal Processing Toolbox umožňuje načtená data analyzovat, Filter Design&Analysis Toolbox umožňuje vytváření filtrů, jeho editace a ukládání. Společně tak tyto dva toolboxe vytváří silný nástroj pro práci se signály a následnou filtraci signálu. Signál je tak možné tedy upravovat, měnit frekvence v něm obsažené, případně amplitudy frekvencí, které se v signálu vyskytují.

Upravený signál je již pro uživatele přijatelnější, protože takovýto signál obsahuje pouze informace, které uživatel požaduje, výsledný signál tak neobsahuje data, která jsou pro nás nepodstatná, případně nežádoucí.

I. TEORETICKÁ ČÁST

1 TEORIE PRAVDĚPODOBNSTI

1.1 Pojmy teorie pravděpodobnosti

1.1.1 Sigma algebra (σ - algebra)

E je neprázdná množina a S je systém všech podmnožin E . Jde o σ -algebru, pokud platí

$$0 \in S; E \in S$$

$$A_i \in S, i = 1, 2, \dots \Rightarrow \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \in S$$

$$A \in S \Rightarrow E - A \in S$$

Na základě uvedené definice se v literatuře buduje axiomatická teorie pravděpodobnosti, která spočívá v pojmech elementárních jevů, jev jistý, nemožný atd. Na S je pak definována pravděpodobnost jako reálná funkce.

Teorie potom plynou pojmy a fakta uvedená v části 1.1.2 až 1.1.5

1.1.2 Náhodný jev

Náhodným jevem rozumíme opakovatelnost činnosti prováděnou za stejných (nebo přibližně za stejných) podmínek, jejíž výsledek je nejistý a závisí na náhodě. Příklady mohou být například házení kostkou nebo losování teorie.

1.1.3 Pravděpodobnost události

Se obecně označuje reálným číslem od 0 do 1. Událost, která nemůže nastat, má pravděpodobnost 0, a naopak jistá událost má pravděpodobnost 1. Někdy se nekorektně, ale názorně pravděpodobnosti násobí číslem 100 a uvádí se tak v procentech. Jinou používanou mírou pravděpodobnosti je šance (anglicky odds), která je definována jako poměr pravděpodobnosti definované běžným způsobem ku pravděpodobnosti, že nastane opačná událost: $šance = p/(1-p)$. Šance se často v praxi uvádí jako celočíselná zlomek, například „mám šanci jedna ku dvěma, že stihnu vlak“ znamená totéž jako „je pravděpodobnost 0,5 že stihnu vlak“. [12]

1.1.4 Střední hodnota

Značíme $E(X)$. Střední hodnota je v teorii analogových periodických signálů definována jako průměrná hodnota signálu v rámci jeho jedné periody. Střední hodnota je teoreticky definována jako číslo, kolem kterého kolísají hodnoty výběrových průměrů, jež se počítají vždy ze série hodnot náhodné veličiny (mnoho realizací náhodného procesu). Tento fakt je vyjádřen rovnicí:

$$E(X) = \sum_{x_k} x_k \cdot P(X = x_k) \quad (1.1)$$

Bude-li k dispozici číslicový signál pouze v jedné realizaci a navíc všechny funkční hodnoty náhodné veličiny (vzorky) budou mít stejnou pravděpodobnost, pak se celý problém redukuje do běžného aritmetického průměru, který je vyjádřen vztahem:

$$E(X) = \frac{1}{N} \sum_k x_k \quad (1.2)$$

Pro spojitý čas ji spočítáme jako integrál celého intervalu, po kterém signál analyzujeme.

$$E(X) = \int_R x d \cdot P(x) \quad (1.3)$$

1.1.5 Rozptyl

Nazývá se též jako **střední kvadratická odchylka**, **střední kvadratická fluktuace**, **variace** nebo také **disperze**. Rozptyl náhodné veličiny X se označuje $\sigma^2(X)$, $S^2(X)$, $D(X)$, $\text{var}(X)$. Vyjadřuje, jak moc signál kmitá kolem jeho střední hodnoty.

Pro diskrétní náhodnou veličinu je definována vztahem:

$$\sigma^2 \sum_{i=1}^n [x_i - E(X)]^2 p_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - [E(x)]^2 \quad (1.4)$$

kde x_i jsou hodnoty, kterých může náhodná veličina X nabývat s pravděpodobností p_i a $E(X)$ je střední hodnota veličiny X .

Pro spojitou náhodnou veličinu definujeme rozptyl vztahem:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [x_i - E(X)]^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - [E(x)]^2 \quad (1.5)$$

kde $f(x)$ je hustota pravděpodobnosti veličiny X . [12]

1.2 Základní typy rozdělení pravděpodobnosti spojité náhodné veličiny

Celá tato kapitola 1.2 byla převzata z literatury [15], kde je také možno se dočíst o této problematice více.

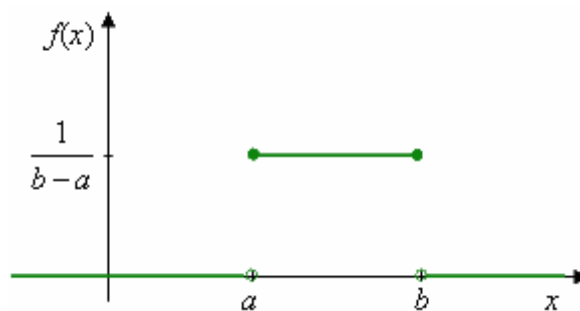
1.2.1 Rovnoměrné rozložení $R(a,b)$

Toto rozdělení má spojité náhodná veličina X , jejíž realizace vyplňují interval konečné délky a mají stejnou možnost výskytu (např. doba čekání na autobus, na výrobek u automatické linky, ...).

Definice

Náhodná veličina X má **rovnoměrné rozdělení** $R(a,b)$ právě tehdy, když je hustota pravděpodobnosti určena vztahem:

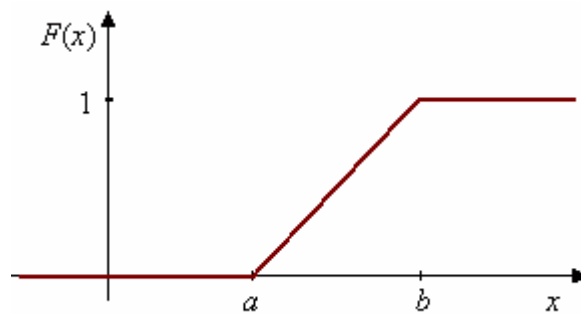
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{pro } x \in \langle a, b \rangle \\ 0 & \text{pro } x \notin \langle a, b \rangle \end{cases} \quad (1.6)$$



Obrázek 1: Graf hustoty pravděpodobnosti

Distribuční funkce je ve tvaru:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-\infty, a) \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{pro } x \in \langle a, b \rangle \\ 1 & \text{pro } x \in (b, \infty) \end{cases} \quad (1.7)$$



Obrázek 2: Graf distribuční funkce

Vlastnosti

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{a+b}{2} \\ D(X) &= \frac{(b-a)^2}{12} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Příklad:

Tramvajová linka číslo 8 odjíždí v dopoledních hodinách ze zastávky každých 10 minut. Jaká bude pravděpodobnost, že na ni bude člověk dopoledne čekat déle než 7 minut?

Doba čekání je náhodná veličina X , která má rovnoměrné rozdělení pravděpodobnosti - v našem případě $R(0, 10)$. Distribuční funkce má tedy tvar:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-\infty, 0) \\ \frac{x}{10} & \text{pro } x \in \langle 0, 10 \rangle \\ 1 & \text{pro } x \in (10, \infty) \end{cases}$$

Hledaná pravděpodobnost:

$$P(X > 7) = P(7 < X < \infty) = F(\infty) - F(7) = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$$

1.2.2 Exponenciální rozložení $E(\lambda)$

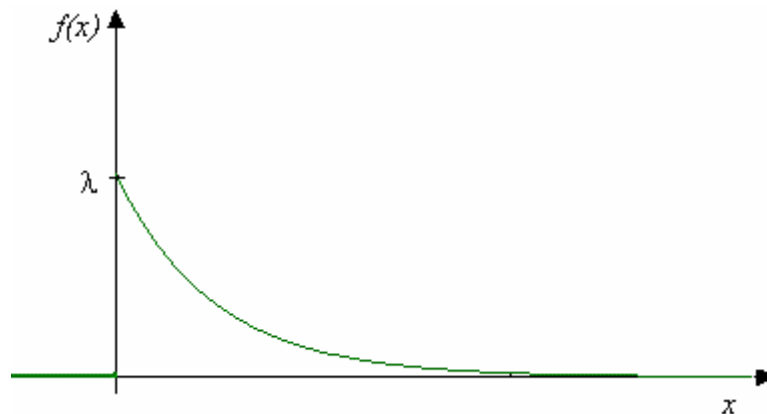
Toto rozdělení má spojitá náhodná veličina X , která představuje dobu čekání do nastoupení (poissonovského) náhodného jevu, nebo délku intervalu (časového nebo délkového) mezi takovými dvěma jevy (např. doba čekání na obsluhu, vzdálenost mezi dvěma poškozenými místy na silnici).

Závisí na parametru λ , což je převrácená hodnota střední hodnoty doby čekání do nastoupení sledovaného jevu.

Definice

Náhodná veličina X má **exponenciální rozdělení** $E(\lambda)$ právě tehdy, když hustota pravděpodobnosti je dána vztahem:

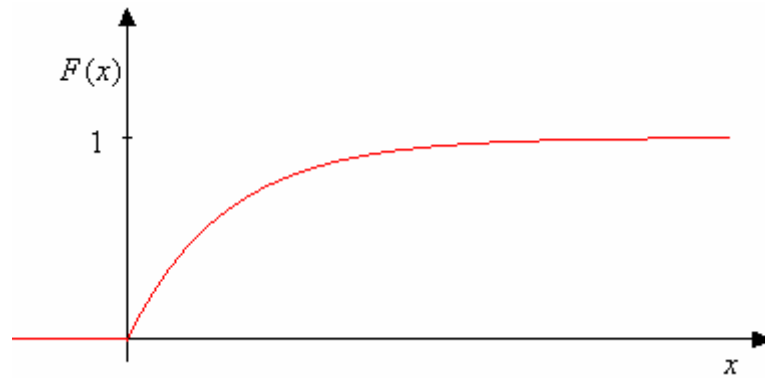
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{pro } x \geq 0 \end{cases} \quad (1.9)$$



Obrázek 3: Exponenciální rozložení - graf hustoty pravděpodobnosti

Distribuční funkce je ve tvaru:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{pro } x \geq 0 \end{cases} \quad (1.10)$$



Obrázek 4: Exponenciální rozložení - graf distribuční funkce

Vlastnosti

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad (1.11)$$

$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2} \quad (1.12)$$

Příklad:

Doba čekání hosta v restauraci je průměrně 5 minut. Určete:

- hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny, která je dána dobou čekání
- pravděpodobnost, že host bude čekat déle než 12 minut
- dobu čekání, během které bude zákazník obslužen s pravděpodobností 0,9

a) Hustota pravděpodobnosti

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ \frac{1}{5} e^{-\frac{1}{5}x} & \text{pro } x \geq 0 \end{cases}$$

b) Distribuční funkce

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{1}{5}x} & \text{pro } x \geq 0 \end{cases}$$

Hledaná pravděpodobnost

$$P(X > 12) = P(12 < X < \infty) = F(\infty) - F(12) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{12}{5}}\right) = e^{-\frac{12}{5}} \doteq 0,0907$$

c) Hledanou dobu čekání označíme t . Platí

$$P(0 < X \leq t) = 0,9$$

$$F(t) - F(0) = 0,9$$

$$1 - e^{-\frac{1}{5}t} - 0 = 0,9$$

$$e^{-\frac{1}{5}t} = 0,1$$

$$-\frac{1}{5}t = \ln 0,1$$

$$t = -5 \ln 0,1$$

$$t \doteq 11,51 \text{ min}$$

$$t \doteq 11 \text{ min } 30 \text{ sec}$$

1.2.3 Normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$

$$\sigma^2 > 0; \quad \mu, \sigma^2 \in \mathbb{R}$$

Označováno též obecné normální rozdělení či Gaussovo rozdělení (v anglicky psané literatuře nazývané rozdělení zvonovitého tvaru - bell curve).

Je velmi důležité, neboť:

- nejčastěji se vyskytuje
- mnoho jiných rozdělení se mu blíží
- řada jiných rozdělení se jím dá nahradit

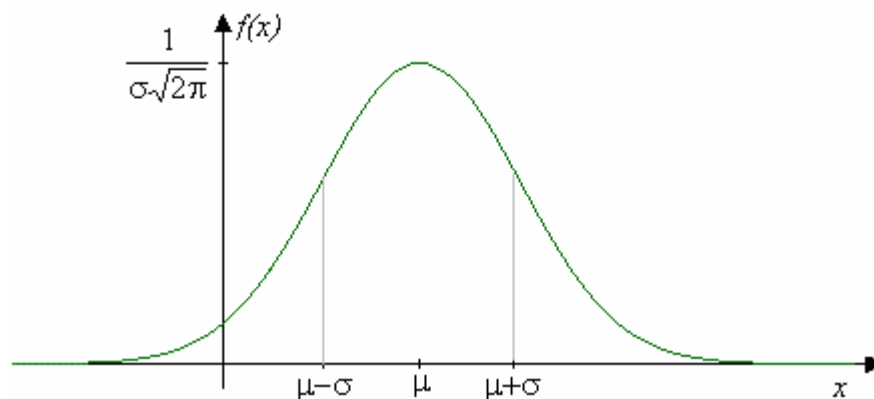
Definice

Náhodná veličina X má **normální rozdělení** $N(\mu, \sigma^2)$ právě tehdy, když má hustota pravděpodobnosti tvar:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad \text{pro } x \in (-\infty, \infty) \quad (1.13)$$

Pomocí křivky normálního rozdělení popsal v roce 1773 matematik *Abraham de Moivre* limitní chování binomického rozdělení, když se snažil aproximovat výpočty jednotlivých pravděpodobností binomického rozdělení pro velká n . Rozdělení, které Moivre pro tento účel navrhl, se nakonec ukázalo být důležitější než výchozí binomické rozdělení. V roce 1812 odvodil nezávisle na Moivreovi normální rozdělení francouzský matematik *Pierre Laplace*. Jak Laplace, tak Karl Friedrich Gauss prezentovali toto rozdělení jako zákon chyb a používali ho pro interpretaci astronomických a geodetických měření, výsledků hazardních her a přesnosti dělostřelecké střelby.

Grafem hustoty pravděpodobnosti je tzv. Gaussova (Gaussova-Laplaceova) křivka:

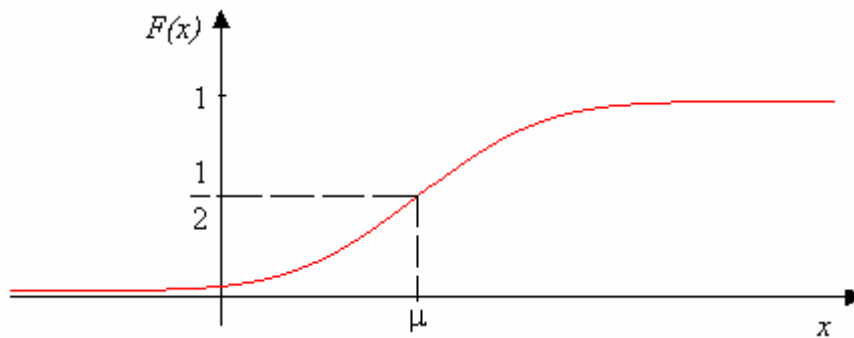


Obrázek 5: Normální rozdělení - Gaussova-Laplaceova křivka

Z obrázku je patrné, že parametr μ (střední hodnota) určuje, kde má křivka maximum. Parametr σ (směrodatná odchylka) naproti tomu určuje, jak jsou po obou stranách od hodnoty μ vzdáleny inflexní body, tedy jak je křivka roztažena do šířky.

Distribuční funkce:

$$f(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt \quad \text{pro } x \in (-\infty, \infty) \quad (1.14)$$



Obrázek 6: Normální rozdělení - graf distribuční funkce

Příklad:

Jaká je pravděpodobnost, že náhodná veličina X , která má rozdělení $N(10, 9)$, nabude hodnoty

a) menší než 16,

b) větší než 10,

c) v mezích od 7 do 22?

$$a) P(X < 16) = P(-\infty < X < 16) = F(16) - F(-\infty) = F(16)$$

Zjistit, čemu je rovna distribuční funkce pro hodnotu 16 je možné zjistit několika způsoby. Je-li k dispozici program Excel, je možné hodnotu vypočítat pomocí předdefinované funkce NORMDIST:

$$P(X < 16) = F(16) = \text{NORMDIST}(16;10;3;1) = 0,97725$$

První parametr v závorce určuje hodnotu, jejíž distribuční funkcí je počítána, druhá je střední hodnota daného normálního rozdělení, třetí parametr značí směrodatnou odchylku daného rozdělení a poslední parametr je pravděpodobnostní hodnota 1, která se zadá vždy, když je požadováno vypočítat hodnotu distribuční funkce

$$b) P(X > 10) = P(10 < X < \infty) = 1 - F(10) = 1 - \text{NORMDIST}(10;10;3;1) = 0,5$$

$$c) P(7 < X < 22) = \text{NORMDIST}(22;10;3;1) - \text{NORMDIST}(7;10;3;1) = 0,8413$$

1.2.4 Normované normální rozdělení $N(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$

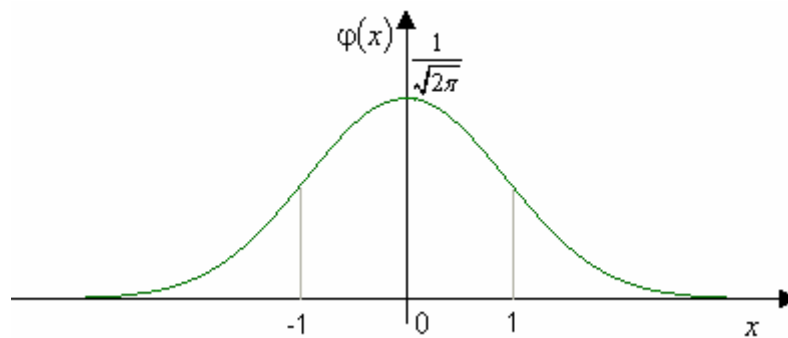
Jedná se o speciální případ obecného normálního rozložení, kdy $\mu = 0, \sigma^2 = 1$.

V tomto případě označujeme hustotu pravděpodobnosti:

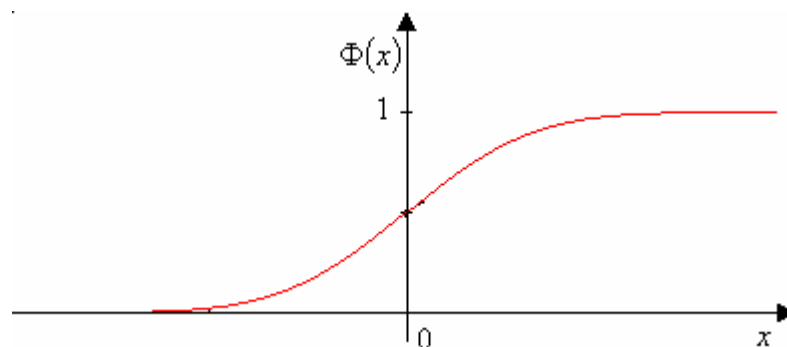
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad \text{pro } x \in (-\infty, \infty) \quad (1.15)$$

Distribuční funkci u tohoto rozdělení:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \quad \text{pro } x \in (-\infty, \infty) \quad (1.16)$$



Obrázek 7: Normované normální rozdělení - graf hustoty pravděpodobnosti



Obrázek 8: Normované normální rozdělení - graf distribuční funkce

Užitečnost normovaného normálního rozdělení spočívá v tom, že vybrané hodnoty distribuční funkce tohoto rozdělení se nachází v tabulkách, které bývají součástí každé

literatury statistiky. Vztah mezi normovaným normálním rozdělením $N(0,1)$ a obecným normálním rozdělením $N(m, s^2)$ vyjadřuje následující věta:

Má-li spojitá náhodná veličina X obecně **normální rozdělení** $N(\mu, \sigma^2)$ s hustotou pravděpodobnosti:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad \text{pro } x \in (-\infty, \infty) \quad (1.17)$$

Pak náhodná veličina $T = \frac{X - \mu}{\sigma}$ má **normované rozdělení** $N(0,1)$ s hustotou pravděpodobnosti:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad \text{pro } x \in (-\infty, \infty) \quad (1.18)$$

V tabulkách se naleznou pouze hodnoty distribuční funkce pro nezáporné x . Pro určení distribuční funkce pro $x < 0$, je třeba využít vlastností distribuční funkce normovaného normálního rozdělení a možné tak lehce odvodit $F(-x) = 1 - F(x)$.

Příklad:

Bylo použito zadání příkladu z předchozí kapitoly, přičemž tento příklad bude řešen převedením daného normálního rozdělení $N(10, 9)$ na normované normální rozdělení $N(0, 1)$ substitucí z věty této kapitoly.

$$a) P(X < 16) = P(-\infty < X < 16) = F(16) - F(-\infty) = F(16) = \Phi\left(\frac{16-10}{3}\right) = \Phi(2) = 0,97725$$

$$b) P(X > 10) = P(10 < X < \infty) = 1 - F(10) = 1 - F(0) = 0,5$$

$$c) P(7 < X < 22) = F(4) - F(-1) = F(4) - 1 + F(1) = 0,8413$$

Všechny hodnoty jsou dosazené z tabulky distribuční funkce normálního rozdělení.

Příklad:

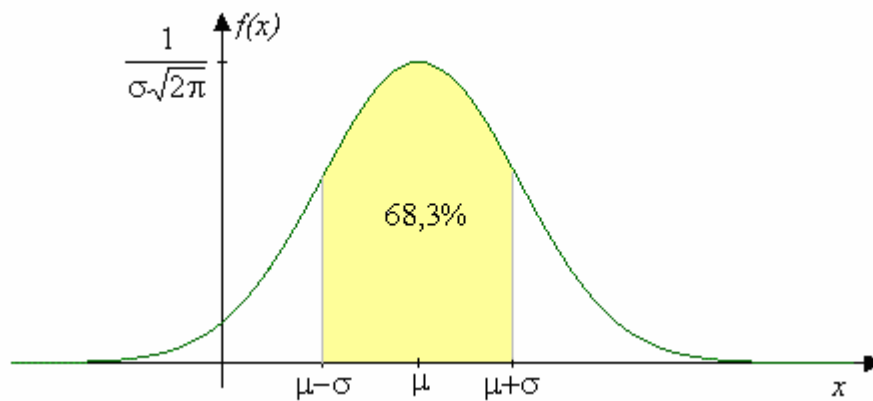
Je třeba určit pravděpodobnost, že náhodná veličina X s normálním rozdělením $N(m, s^2)$ nabude hodnot z intervalu

a) $(m-s, m+s)$

b) $(m-2s, m+2s)$

c) $(m-3s, m+3s)$

Grafické znázornění



Obrázek 9: Normální rozložení – grafické znázornění příkladu

$$a) P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = F(\mu + \sigma) - F(\mu - \sigma) = \Phi\left(\frac{\mu + \sigma - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu - \sigma - \mu}{\sigma}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - \Phi(1 - \Phi(1)) = 2\Phi(1) \doteq 0,683$$

$$b) P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = F(\mu + 2\sigma) - F(\mu - 2\sigma) = \dots = 2\Phi(2) \doteq 0,955$$

$$c) P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = F(\mu + 3\sigma) - F(\mu - 3\sigma) = \dots = 2\Phi(3) \doteq 0,997$$

1.2.5 Některá další rozdělení

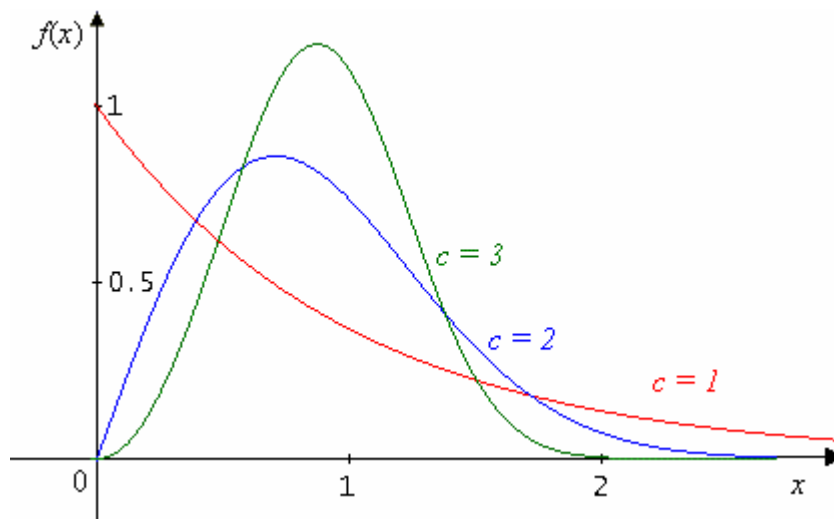
1.2.5.1 Weibullovo rozdělení $W(\delta, c)$

Toto rozdělení má spojitá náhodná veličina, která představuje dobu života (bezporuchovosti) technických zařízení, kterým nevyhovuje exponenciální. To jest tam, kde se projevuje mechanické opotřebení nebo únava materiálu.

Parametr δ závisí na materiálu, namáhání a podmínkách užívání ($\delta, c > 0$).

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0 \\ \frac{c \cdot x^{c-1}}{\delta^c} \cdot e^{-\left(\frac{x}{\delta}\right)^c} & \text{pro } x > 0 \end{cases} \quad (1.19)$$

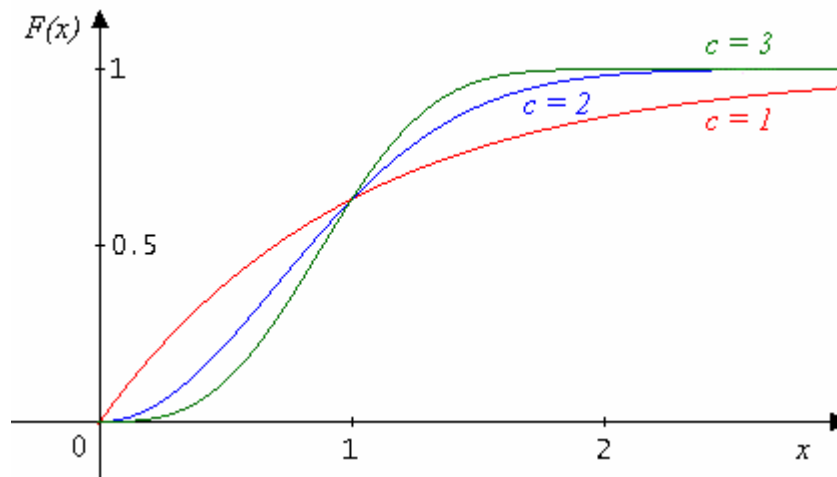
Pro $c = 1$ dostaneme exponenciální rozdělení $E(\delta)$.



Obrázek 10: Weibullovo rozdělení - graf hustoty pravděpodobnosti

Distribuční funkce:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\left(\frac{x}{\delta}\right)^c} & \text{pro } x > 0 \end{cases} \quad (1.20)$$



Obrázek 11: Weibullovo rozdělení - graf distribuční funkce

1.2.5.2 Pearsonovo rozdělení c_n^2

c_n^2 čteme chí kvadrát s n stupni volnosti

Užití: Jestliže n nezávislých veličin X_1, \dots, X_n má rozdělení $N(0, 1)$, pak veličina $X = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$ má Pearsonovo rozdělení.

Hustota pravděpodobnosti:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{pro } x \leq 0 \end{cases} \quad (1.21)$$

$G(x)$... gama funkce definována pro $x > 1$ vztahem: $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$

1.2.5.3 Studentovo rozdělení t_n

Užití: Jsou-li X_1, X_2 dvě nezávislé náhodné proměnné, kde X_1 se řídí rozložením $N(0, 1)$ a X_2 rozložením c_n^2 , pak náhodná veličina $T = \frac{x_1}{\sqrt{x_2}} \cdot \sqrt{n}$ má Studentovo rozložení s n stupni volnosti.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \quad (1.22)$$

1.3 Základní typy rozdělení pravděpodobnosti diskrétní náhodné veličiny

Celá tato kapitola 1.3 byla převzata z literatury [14], kde je také možno se dočíst o této problematice více.

1.3.1 Alternativní rozdělení $A(p)$

Některé náhodné pokusy mohou mít pouze dva různé výsledky:

- pokus je úspěšný
- pokus je neúspěšný

Příslušná náhodná veličina X je pak nazývána **alternativní** (dvoubodová, nula-jedničková).

Tato náhodná veličina nabývá pouze dvou hodnot:

1 - v případě příznivého výsledku pokusu (jev A),

0 - v případě nepříznivého výsledku pokusu (jev \bar{A}).

Obor hodnot tedy obsahuje dva prvky $M = \{0, 1\}$. Je používáno označení:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(X = 1) = p \\ P(\bar{A}) &= P(X = 0) = 1 - p \end{aligned} \quad (1.23)$$

Definice

Náhodná veličina X s pravděpodobnostní funkcí $P(X = 0) = 1 - p$, $P(X = 1) = p$ ($0 < p < 1$) má **alternativní rozdělení** pravděpodobnosti $A(p)$ s parametrem p .

Příklad:

Hod mincí: $W = \{\text{líc}, \text{rub}\}$

Jedná se tedy o alternativní rozdělení $A\left(\frac{1}{2}\right)$. Tedy:

$$M = (0,1); X = (0 \vee 1)$$

$$p(0) = \frac{1}{2}$$

$$p(1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

1.3.2 Rovnoměrné rozdělení $R(n)$ **Definice**

Náhodná veličina X má **rovnoměrné rozdělení** $R(n)$ právě tehdy, když je pravděpodobnostní funkce určena vztahem:

$$p(x) = \frac{1}{n} \tag{1.24}$$

kde n je počet možných výsledků

Příklad:

Hod kostkou: $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ - každý výsledek je stejně pravděpodobný.

Jedná se tedy o rovnoměrné rozdělení $R(6)$, $p(x) = \frac{1}{6}$

1.3.3 Binomické rozdělení $Bi(n, p)$

Popisuje četnost náhodného jevu v n nezávislých pokusech, v nichž má jev stále stejnou pravděpodobnost.

Definice

Náhodná veličina X má **binomické rozdělení** $Bi(n, p)$ právě tehdy, když je pravděpodobnostní funkce určena vztahem:

$$p(x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x} \quad (1.25)$$

kde:

$$x = 0, 1, \dots, n$$

n je počet kusů a p je pravděpodobnost úspěšnosti v každém pokusu

Binomické rozdělení je tedy příkladem diskrétního rozdělení pravděpodobnosti náhodné proměnné X , která může nabývat pouze $n + 1$ hodnot. Při matematickém sestavení binomického rozdělení je třeba vycházet z Bernoulliho pokusu, který spočívá v tom, že v daném náhodném pokusu mohou nastat pouze dva stavy:

A s pravděpodobností p ,

\bar{A} s pravděpodobností $1 - p$.

To lze modelovat tzv. binární náhodnou proměnnou Y , pro kterou platí: $P(Y = 1) = p$ a $P(Y = 0) = 1 - p$. Platí:

$$E(Y) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p \quad (1.26)$$

$$D(Y) = E(Y - p)^2 = p \cdot (1 - p)^2 + p^2 \cdot (1 - p) = (1 - p) \cdot p \quad (1.27)$$

Náhodná proměnná X vznikne jako součet n nezávislých binárních proměnných Y_i s hodnotami 0 nebo 1, které mají všechny stejné rozdělení určené parametrem p :

$$X = \sum_{i=1}^n Y_i \quad (1.28)$$

Vlastnosti binomického rozdělení:

$$E(X) = n \cdot p$$

$$D(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

Alternativní rozdělení $A(p)$ je vlastně speciálním případem binomického rozdělení pro $n = 1$ ($A(p) \sim Bi(1, p)$).

Příklad:

Student VŠ má potíže s ranním vstáváním. Proto někdy zaspí a nestihne přednášku, která začíná již v 9 hodin. Pravděpodobnost, že zaspí, je 0,3. V semestru je 12 přednášek - tzn. 12 nezávislých pokusů dorazit na přednášku včas. Je třeba nalézt pravděpodobnost, že student nestihne přednášku v důsledku zaspání v polovině nebo více případů.

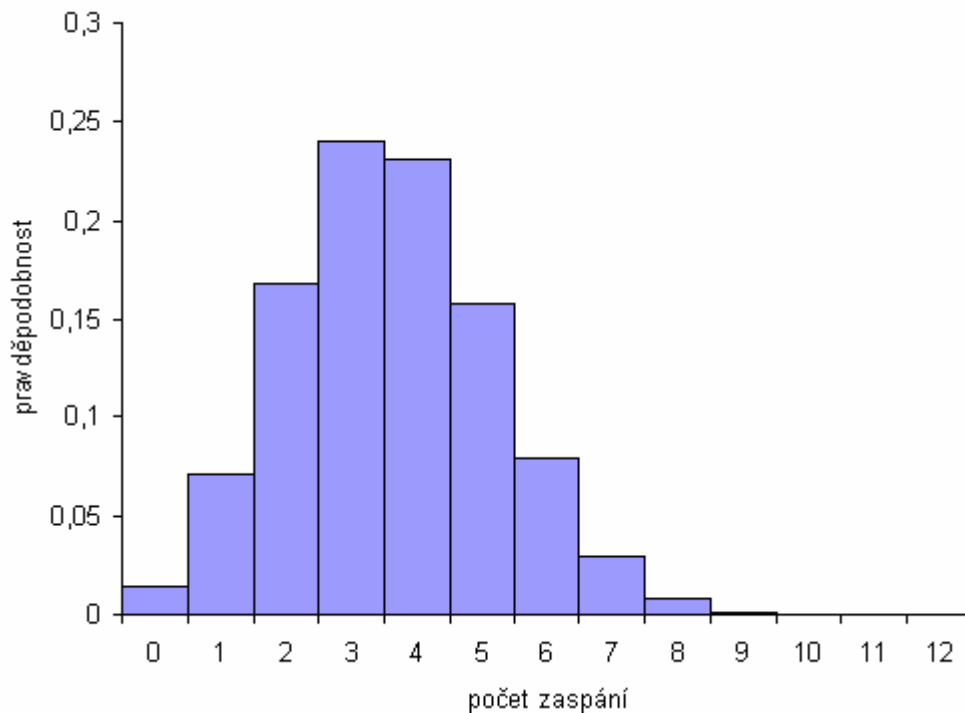
Hledaná pravděpodobnost má hodnotu:

$$P(X \geq 6) = P(6) + P(7) + P(8) + P(9) + P(10) + P(11) + P(12) = \sum_{k=6}^{12} \binom{12}{k} \cdot 0,3^k \cdot 0,7^{12-k} = 0,118$$

Ruční výpočet by v tomto případě byl poměrně zdlouhavý. Je-li ale k dispozici např. tabulkový program Excel, je možné příklad snadno vypočítat pomocí distribuční funkce binomického rozdělení - v Excelu se najde pod názvem BINOMDIST:

$$P(X \geq 6) = 1 - P(X < 6) = 1 - F(6) = 1 - \text{BINOMDIST}(5;12;0;3;1) = 0,118$$

Rozdělení pravděpodobnosti pro tento příklad je znázorněno graficky na následujícím obrázku:



Obrázek 12: Binomické rozložení – grafické zobrazení příkladu

1.3.4 Poissonovo rozdělení $Po(\lambda)$

Toto rozdělení pravděpodobnosti, pojmenované podle francouzského matematika *S. D. Poissona*, mají náhodné proměnné, které popisují četnosti jevů s těmito vlastnostmi:

- to, že jev v daném intervalu (časovém, prostorovém) nastane (nenastane), nezávisí na tom, co se stalo jindy nebo jinde,
- pro každý časový okamžik je pravděpodobnost jevu v malém časovém intervalu stejná (totéž platí v prostoru),
- neexistuje případ, že by nastaly dva jevy přesně v jednom časovém okamžiku nebo místě v prostoru.

Průměrný počet výskytů zkoumaného jevu v daném úseku jednotkové délky je označován λ .

Definice

Poissonovo rozdělení pravděpodobnosti lze pro všechny hodnoty $x = 0, 1, 2, \dots$ náhodné veličiny X vyjádřit pomocí parametru $\lambda > 0$.

Náhodná veličina X má **Poissonovo rozdělení** $Po(\lambda)$ právě tehdy, když má pravděpodobnostní funkce tvar:

$$p(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \quad (1.29)$$

Případně:

$$p(x) = \frac{(l \cdot \lambda)^x}{x!} e^{-l \cdot \lambda} \quad (1.30)$$

v úseku délky l (v l -násobku jednotkového úseku)

Pro charakteristiky Poissonova rozdělení platí:

$$\begin{aligned} E(X) &= \lambda \\ D(X) &= \lambda \end{aligned} \quad (1.31)$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \\ \bar{e} &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned} \quad (1.32)$$

S rostoucí hodnotou λ se toto rozdělení blíží k normálnímu rozdělení. Jestliže náhodná veličina má binomické rozdělení, pak tvar jejího rozložení se blíží k Poissonovu s parametrem $\lambda = n \cdot p$, jestliže n je velké a p se blíží k nule. Aproximativně je možno tedy binomické rozdělení s velkým n a malou hodnotou p nahradit Poissonovým rozdělením.

Součet nezávislých proměnných s Poissonovým rozdělením je opět rozdělen podle tohoto rozdělení. Jestliže je k dispozici n pozorování Poissonova rozdělení s parametrem λ , pak součet pozorování je možné považovat za pozorování s Poissonovým rozdělením a parametrem $n\lambda$.

Příklad:

Dle statistik plyne, že realitní makléř jedná v průměru s pěti zákazníky za den. Jaká je pravděpodobnost, že počet zákazníků makléře za jeden den bude větší než 4.

Náhodná veličina X - počet zákazníků přesně splňuje kritéria pro Poissonovo rozdělení. Pravděpodobnostní funkce počtu zákazníků má tedy tvar:

$$p(x) = \frac{5^x}{x!} e^{-5}$$

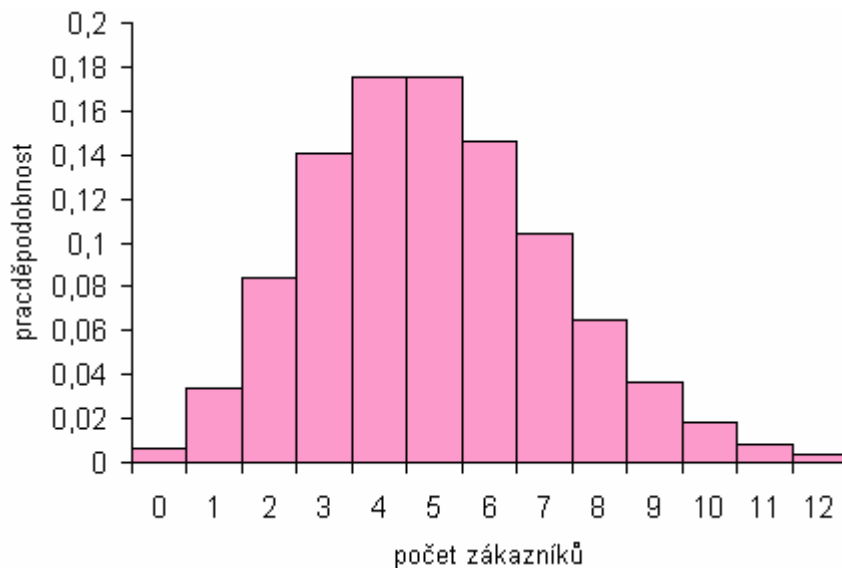
Úlohu nejlépe vyřeší opačný jev:

$$P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - p(0) - p(1) - p(2) - p(3) - p(4) = 1 - 0,44 = 0,56$$

V Excelu je možné uvedenou pravděpodobnost vypočítat pomocí funkce POISSON:

$$P(X > 4) = 1 - POISSON(4;5;1) = 0,56$$

Poissonovo rozdělení pravděpodobnosti počtu zákazníků:



Obrázek 13: Poissonovo rozdělení – grafické znázornění příkladu

1.3.5 Hypergeometrické rozdělení $H(N, M, n)$

Je předpokládáno, že náhodný pokus, jehož výsledkům je přiřazena alternativní náhodná veličina $A(p)$, se opakuje n -krát, přičemž jednotlivé pokusy jsou vzájemně závislé (výsledek v libovolném pokusu závisí na předcházejících pokusech) - jedná se tedy o **výběry bez vracení** (opakované pokusy závislé). Pro takto vzniklou náhodnou veličinu X platí:

Definice

Náhodná veličina X má **hypergeometrické rozdělení** $H(N, M, n)$ právě tehdy, když má pravděpodobnostní funkce tvar:

$$p(x) = \frac{\binom{M}{x} \cdot \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad (1.33)$$

kde:

N je počet prvků základního souboru;

M je počet prvků v základním souboru, které mají požadovanou vlastnost;

n je počet pokusů

$x = 0, 1, 2, \dots, n$ je počet vybraných výrobků, které mají zkoumanou vlastnost.

Vlastnosti:

$$E(X) = n \cdot \frac{M}{N} \quad (1.34)$$

$$D(X) = n \cdot \frac{M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right) \cdot \left(\frac{N-n}{N-1}\right) \quad (1.35)$$

Příklad:

Mezi stovkou výrobků je 20 zmetků. Vyberete deset výrobků a sledujete počet zmetků mezi vybranými.

V tomto případě má náhodná veličina X hypergeometrické rozdělení: $X \sim H(100, 20, 10)$.

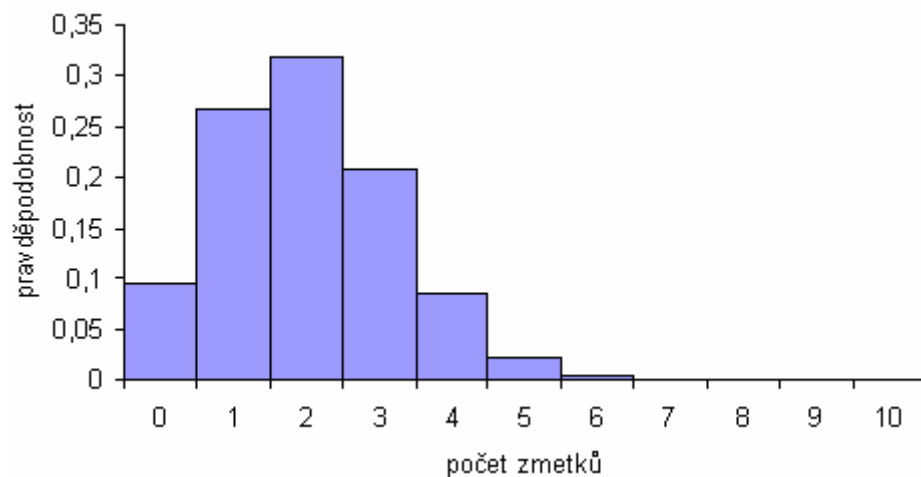
Pravděpodobnostní funkce má tvar:

$$p(x) = \frac{\binom{20}{x} \cdot \binom{80}{10-x}}{\binom{100}{10}}$$

Takže například pravděpodobnost, že mezi deseti vybranými budou 3, se vypočte:

$$p(x) = \frac{\binom{20}{3} \cdot \binom{80}{7}}{\binom{100}{10}} = 0,209$$

Pravděpodobnostní funkci znázorníme opět graficky:



Obrázek 14: Hypergeometrické rozdělení – grafické znázornění příkladu

2 ANALÝZA SIGNÁLŮ

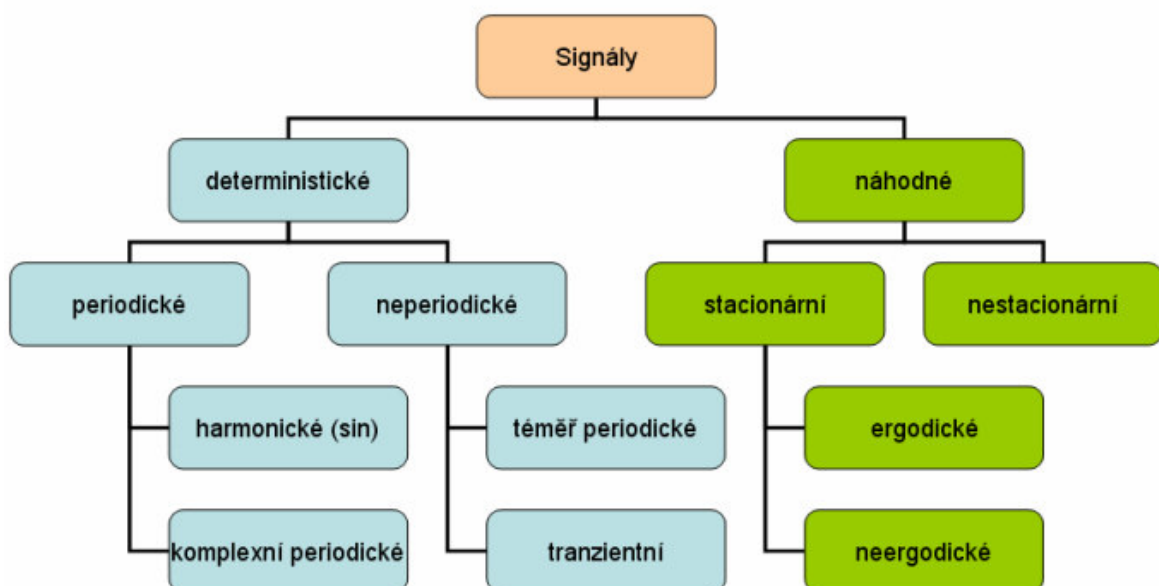
Signálem je rozuměno časový proces hodnot po sobě jdoucích, které vytvářejí dohromady signál. Signál může být buď spojitý nebo diskrétní, tedy buď analogový nebo digitální.

Spojitý – signál je spojitý v případě, že lze najít hodnotu signálu v libovolném čase.

Diskrétní – diskrétní signál vznikne vzorkováním spojitého signálu, kde se zaznamenávají pouze hodnoty v určitých okamžicích, které jsou udávány vzorkovací frekvence signálu. Musí však platit Shannon-Kotelníkův (Nyquistův) teorém, který udává, že je potřeba vzorkovat minimálně s dvojnásobnou frekvencí, jako je nejvyšší frekvence obsažená v signálu.

Dále signál může být buď **ergodický** nebo **neergodický**. Ergodický se vyznačuje se tím, že všechny jeho realizace mají stejné statistické vlastnosti (stejně chování) – to umožňuje odhadovat parametry náhodného procesu z jedné jeho realizace. Signál je dále ergodický vůči jeho střední hodnotě (stejnoseměrné složce), pokud má stejnoseměrnou složku nenáhodnou (její rozptyl je roven 0)

Každý signál se dá dále rozdělit ještě do několika skupin:



Obrázek 15: Dělení signálů

Deterministické – máme pro hodnoty nějaký matematický výraz nebo vzorec, takže každou jejich minulou /budoucí hodnotu lze spočítat, lze ji tedy jednoznačně určit.

Náhodné (stochastické) – v čase nelze určit, jaká hodnota bude či byla, hodnoty se nepředvídatelně mění a není tak pro signál matematický vzorec. Všechny hodnoty takového signálu jsou tedy náhodné veličiny.

Periodické – jeho perioda se v čase opakuje se stejnými funkčními hodnotami. Tato perioda může nabývat libovolných hodnot, ale platí, že se tato perioda musí v čase stále opakovat. Příkladem periodického signálu je signál vzniklý součtem harmonických signálů (sinusovek), jejich frekvence jsou v celočíselných poměrech.

Neperiodické – signál je neperiodický tehdy, kdy nelze určit periodu, která se opakuje v čase.

Téměř periodické (kvaziperiodické) – u signálů periodických se nemění velikost periody s časem. Existují však i signály, které velikost periody mění s časem a takové signály se tedy nazývají kvaziperiodické.

Stacionární signál – je stochastický signál, který si zachovává své statistické vlastnosti. Charakteristiky takovéhoto signálu jsou časově invariantní.

Nestacionární signál – statistické vlastnosti nestacionárních signálů jsou s časem proměnné, tudíž vyhodnocování takovéhoto signálu musí být závislé na čase. Charakteristiky takovéhoto signálu nejsou časově invariantní.

Invariance označuje stav, kdy jsou jisté objekty neměnné při určitých událostech. Příkladem invariance je situace, kdy je dán systém veličin, které na sobě nějakým způsobem závisí. Potom se jedna z těchto veličin nazývá invariantní vůči změně jiné (referenční) veličiny, pokud má stejnou hodnotu při jakýkoliv změnách referenční veličiny. (Převzato z literatury www.wikipedia.org)

Zvláštním druhem signálu je tzv. *bílý šum*, u kterého je střední hodnota nulová, má v sobě obsažené všechny frekvence a v přírodě se tak bohužel nevyskytuje díky jeho nekonečnému výkonu spektrální hustoty. Po průchodu bílého šumu lineární soustavou, je vytvořen stacionární stochastický signál, označovaný jako *šum barevný* nebo *šedý*. Bylo podařeno bílý šum realizovat díky jeho diskretizaci. Diskrétní bílý šum již lze vytvořit, využívá ho např. prostředí MATLAB či jiné programy.

V časové rovině existuje mnoho metod, kterými je možné signál analyzovat. Mezi základní metody analýzy patří zejména různé řídicí metody, hledání lokálních a globálních minim a maxim, korelační analýzy, analýza útlumu signálu, různé statické metody atd.

Pro přechod z časové do frekvenční oblasti se používají různé druhy transformací. Nejznámější a nejrozšířenější je Fourierova transformace (FT), její různé modifikace a algoritmy. Uvedené algoritmy jsou zvláště vhodné pro zpracování stacionárních signálů. Případně mohou být využity pro analýzu i nestacionárních signálů, pokud nás zajímá pouze frekvenční složky obsažené v celé délce vyhodnocovaného signálu. Nezáskáme tak však přehled o časovém výskytu jednotlivých frekvencích. [10]

2.1 Fourierova transformace

V praxi je často výhodné (teoreticky i experimentálně) používat harmonických funkcí $\exp(i\omega t)$, neboť jsou snadno prakticky realizovatelné (resp. jejich imaginární či reálná část) a mají výhodné matematické vlastnosti (zvláště vzhledem k derivaci a integrování). Ukazuje se, že za dosti širokých podmínek lze každou funkci vyjádřit jako součet či integraci harmonických funkcí, ovšem každé s jinou vahou a fázovým posuvem (zpravidla jsou obě hodnoty zahrnuty do komplexní váhové funkce). Váhová funkce tedy udává, jaké frekvence je nutno použít v superpozici, aby bylo možno z harmonických funkcí zpětně sestavit původní funkci. Právě tato váhová funkce (spektrum) bývá označována jako (trigonometrická) **Fourierova transformace (FT)**.

Definiční vzorec pro FT je integrálem a pro praktickou realizaci není příliš vhodný:

- Jeho analytické řešení existuje jen v omezeném počtu případů a je nutno jej tedy řešit numericky (tedy přechodem nekonečný integrál \rightarrow konečná sumace),
- v případě počítačového zpracování nemáme spojitou funkci, ale jen její hodnoty v diskrétních vzorkovacích okamžicích.

Z těchto důvodů je definována **diskrétní Fourierova transformace** (DFT), která je již polynomem a jejími vstupy a výstupy jsou posloupnosti hodnot. Nevýhodou této definice je její značná časová náročnost, která roste se čtvercem délky vstupní posloupnosti. Proto byl vypracován algoritmus, který vychází z vlastností exponenciálních diskrétních funkcí a výrazně snižuje potřebnou dobu výpočtu. Tento algoritmus je zvykem nazývat **rychlá Fourierova transformace** (FFT - *Fast Fourier Transform*).

Pro bližší informace vlastností FT, které jsou níže uvedené, bylo použito zdroje [12] [16] [17]

2.1.1 Přímá Fourierova transformace

Fourierova transformace se ukázala být účinnou metodou zpracování různých signálů. Často je využíváno její vlastnosti převodu konvoluce na násobení, což umožňuje u některých soustav zavést tzv. přenosovou (frekvenční) funkci, která vhodným způsobem charakterizuje dynamické vlastnosti soustavy. Metoda umožňuje provádět frekvenční filtraci, tedy odstraňovat ze signálu části s různými frekvencemi, což může např. snížit úroveň šumu v signálu. Operace ve frekvenční oblasti mohou upravovat obrazy takovým způsobem, aby např. došlo ke zvýraznění hran, k odstranění „proužkování“ některých struktur v obraze.

Teoreticky lze aparát Fourierova transformace zobecnit tím, že nebude uvažováno jako „bázové“ funkce jen exponenciální funkce, ale libovolný systém funkcí, které splňují několik podmínek (především úplnost). Tyto zobecněné Fourierova transformace mohou mít velmi různorodé vlastnosti, které lze využít v množství aplikací. Jako příklad tohoto zobecnění lze uvést např. Vlnkovou transformaci, která využívá systém funkcí, odvozený od základní funkce pomocí posunutí a změny měřítka. V této transformaci dochází k transformaci jednorozměrného prostoru do dvourozměrného prostoru, který má tentýž fyzikální rozměr. Tímto se liší od Fourierova transformace, která převádí např. prostor s fyzikálním rozměrem [m] do prostoru [m⁻¹].

2.1.1.1 Spojitý čas

Definice

Fourierova transformace $S(\omega)$ funkce $s(t)$ je definována integrálním vztahem

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-i\omega t} dt \quad (2.1)$$

Funkci $s(t)$ vypočteme z $S(\omega)$ inverzní Fourierovou transformací

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (2.2)$$

Nevlastní integrály je třeba chápat ve smyslu Cauchyovy hlavní hodnoty, tj.

$$\int_{-\infty}^{\infty} [.]d = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T [.]d \quad (2.3)$$

Dvojice ve Fourierově transformaci se nazývají originál (zde $s(t)$) a obraz (zde $S(\omega)$). Vztah mezi originálem a obrazem vyjadřuje zápis:

$$\begin{aligned} S(\omega) &= F[s(t)]_a \\ s(t) &= F^{-1}[S(\omega)] \end{aligned} \quad (2.4)$$

V technické oblasti je ω úhlová frekvence, $S(\omega)$ představuje spektrum signálu $s(t)$. Spektrum je komplexní veličina a lze vyjádřit ve tvaru $S(\omega) = |S(\omega)|e^{i \arg S(\omega)}$. Velikost $|S(\omega)|$ se nazývá amplitudové spektrum a úhel $\arg S(\omega)$ fázové spektrum signálu.

Vlastnosti Fourierovy transformace

1. Lineárnost

$$F\left\{\sum_{k=1}^n c_k f_k\right\} = \sum_{k=1}^n c_k F_k(i\omega) \quad (2.5)$$

kde $f_k(t)$ jsou funkce (originály), k nimž existují Fourierovy obrazy $F_k(i\omega)$ a c_k jsou libovolné konstanty.

2. Podobnost (změna měřítka)

$$F\{f(\alpha t)\} = \frac{1}{|\alpha|} F\left(\frac{i\omega}{\alpha}\right) \quad (2.6)$$

kde $\alpha \neq 0$ je reálná konstanta.

3. Věta o substituci (věta o kmitočtovém posunu, modulační věta)

$$F\{f(t)e^{i\omega t}\} = F(i\omega - i\alpha) \quad (2.7)$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je reálná konstanta.

4. Posunutí

$$F\{f(t - \tau)\} = F(i\omega)e^{-i\omega\tau} \quad (2.8)$$

kde τ je reálná konstanta. Mění se pouze fázové spektrum.

Poznámka: Na rozdíl od věty o posunutí v L-transformaci platí výše uvedená věta pro libovolné reálné τ , tedy i pro $\tau < 0$.

5. Věta o obrazu derivace

$$\begin{aligned} F\{f'(t)\} &= i\omega F\{f(t)\} = i\omega F(i\omega) \\ F\{f^{(n)}(t)\} &= (i\omega)^n F\{f(t)\} = (i\omega)^n F(i\omega) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Poznámka: K důkazu této věty je nutno znát ještě větu o limitě obrazu, tj.

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} F(i\omega) = 0$$

Derivace obrazu

$$\begin{aligned} F\{-it \cdot f(t)\} &= \frac{dF(i\omega)}{d\omega}, \\ F\{(-it)^n \cdot f(t)\} &= \frac{d^n F(i\omega)}{d\omega^n} \end{aligned} \quad (2.10)$$

6. Věta o obraze integrálu

$$F\left\{\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{i\omega} F(i\omega) \quad (2.11)$$

7. Obraz konvoluce dvou funkcí

Nechť existují funkce f, g , potom konvoluce těchto funkcí a její obraz jsou dány následujícími vztahy:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau \quad (2.12)$$

$$F\{(f * g)(t)\} = F(i\omega) \cdot G(i\omega) \quad (2.13)$$

kde:

$$F\{f(t)\} = F(i\omega)$$

$$F\{g(t)\} = G(i\omega)$$

8. Věta o součinu originálů

$$F\{f(t) \cdot g(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega_1) \cdot G(i\omega - i\omega_1) d\omega_1 = \frac{1}{2\pi} (F * G)(i\omega) \quad (2.14)$$

kde $\omega_1 \in (-\infty, \omega)$.

9. Parsevalova rovnost (pro Fourierovu transformaci)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(i\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F(i\omega)|^2 d\omega \quad (2.15)$$

2.1.1.2 Diskrétní čas

Definice

Fourierova transformace $S(\Omega)$ posloupnosti $s(k)$ je definována vztahem

$$S(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k)e^{-i\Omega k} \quad (2.16)$$

Posloupnost $s(k)$ vypočteme z $S(\Omega)$ inverzní Fourierovou transformací

$$s(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(\Omega)e^{-i\Omega k} d\Omega \quad (2.17)$$

Někteří autoři označují tuto transformaci DtFT (discrete-time Fourier transformation), aby ji odlišili od Fourierovy transformace spojitého signálu. Zde nebude značení nijak odlišováno Fourierovu transformaci spojitého a diskrétního signálu. Vztah mezi signálem a jeho spektrem bude tedy značeno

$$S(\Omega) = F[s(k)]_a \quad (2.18)$$

$$s(k) = F^{-1}[S(\Omega)] \quad (2.19)$$

Spektrum diskrétního signálu se od spektra spojitého signálu liší tím, že je periodické s periodou 2π . (Blíže o diskrétní transformaci v literatuře [12])

Diskrétní Fourierova transformace

Definiční vztahy Fourierovy transformace vyžadují znalost matematického vyjádření signálu či spektra. Pokud však jsou zpracovávány naměřené hodnoty, tj. jsou známy vzorky signálu či spektra z konečného intervalu, vzniká tak problém, jak určit spektrum z vzorků signálu či signál ze vzorků spektra. K tomu účelu se používá metoda, která je známa jako diskrétní Fourierova transformace (DFT).

Diskrétní Fourierova transformace mezi posloupnostmi $\{d(k)\}_{k=0}^{N-1}$ a $\{D(n)\}_{n=0}^{N-1}$ je definována vztahy:

- přímá diskretní Fourierova transformace

$$D(n) = \sum_{k=0}^{N-1} d(k)e^{-ink2\pi/N}, n = 0, \dots, N-1 \quad (2.20)$$

- a zpětná (inverzní) diskretní Fourierova transformace

$$d(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D(n)e^{-ink2\pi/N}, k = 0, \dots, N-1 \quad (2.21)$$

Diskretní Fourierova transformace našla velké uplatnění zejména s rozvojem výpočetní techniky. Součástí řady přístrojů jsou jednocelové procesory realizující tuto transformaci. Výpočet DFT podle definičního vztahu vyžaduje N^2 komplexních součinů a N^2 komplexních součtů. Toto množství operací výrazně snižovalo možnost aplikace DFT na výpočty v reálném čase.

Situace se změnila po roce 1965, kdy *J.W. Cooley* a *J.W. Tukey* popsali velmi efektivní algoritmus výpočtu DFT, tzv. rychlou Fourierovu transformaci (FFT - Fast Fourier Transform), který vyžaduje jen $N / 2 \log_2(N)$ komplexních součinů a $N \log_2(N)$ komplexních součtů. Díky tomuto algoritmu se stala diskretní Fourierova transformace nejrozšířenějším prostředkem pro numerický výpočet Fourierovy transformace. Algoritmus FFT je také implementován ve všech nejrozšířenějších matematických programech jako je např. GNU Octave, Mathcad, Mathematica, Maple, nebo prostředí MATLAB, atd. (Blíže o diskretní FT popisuje literatura [12])

2.1.2 Zpětná Fourierova transformace

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.22)$$

Integrál na pravé straně je nutno chápat ve smyslu hlavní hodnoty. Po úpravách popisuje rozložení funkce $f(t)$ pro $f \in (-\infty, \infty)$ na harmonické kmity, jejichž uhlová frekvence se mění od 0 do ∞ .

Podobně jako v oblasti signálů spojitých, je možné i v oblasti signálů diskrétních definovat transformaci, která bude diskrétní obdobou Fourierovy transformace ve spojité oblasti. Tato transformace se nazývá Discrete Fourier Transform - DFT - Diskrétní Fourierova Transformace.

Ale vzhledem k tomu, že výpočet DFT vyžaduje značný počet násobení (N^2), což je časově nejnáročnější operace, byl vyvinut algoritmus, umožňující značné urychlení výpočtu. Tento algoritmus je označován *Fast Fourier Transform* - FFT - Rychlá Fourierova Transformace. (Použito ze stránek www.wikipedia.org)

2.1.3 Rychlá Fourierova transformace (FFT)

Rychlá Fourierova transformace (Fast Fourier transform, zkratkou FFT) je efektivní algoritmus pro spočtení *diskrétní Fourierovy transformace* (DFT) a její inverze. FFT je velmi důležitá v mnoha oblastech, od digitálního zpracování signálu a řešení parciálních diferenciálních rovnic až po rychlé násobení velkých celých čísel. Tato část práce popisuje některé z mnoha algoritmů, více informací o samotné transformaci, jejích vlastnostech a aplikacích najdete v této práci na dřívějších stranách *diskrétní Fourierova transformace*.

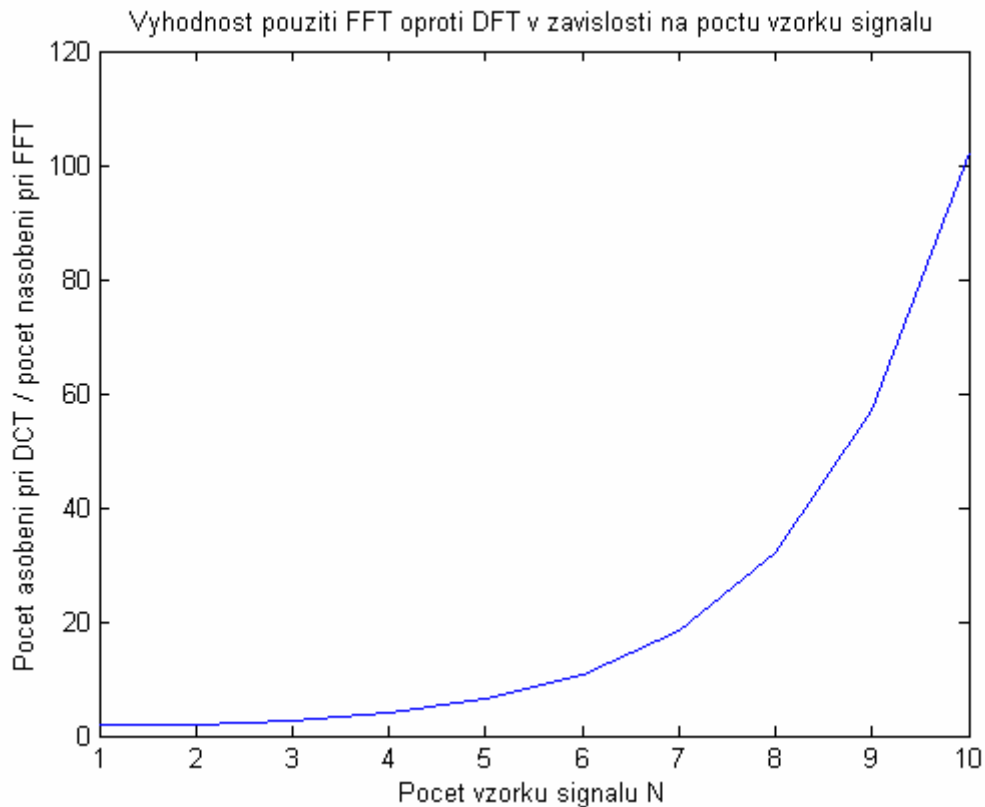
Nechť x_0, \dots, x_{N-1} je komplexní číslo. DFT je definována vzorcem

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{2\pi i}{N}nk} \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (2.23)$$

Přímé vyhodnocení těchto sum by zabralo $O(N^2)$ aritmetických operací. FFT naproti tomu poskytuje složitost pouze $O(N \log N)$ operací. Obecně jsou FFT algoritmy založeny na

faktorizaci N , nicméně existují i FFT algoritmy se složitostí $O(N \log N)$ pro všechna N , tedy i pro prvočísla.

Jelikož je inverzní DFT stejná jako DFT jen s rozdílem opačného znaménka v exponentu a koeficientu $1/N$, kterýkoli algoritmus je možné snadno modifikovat i pro počítání inverzní DFT. [12]



Obrázek 16: Výhodnost použití FFT oproti DFT v závislosti na počtu vorků signálu

2.2 Korelační analýza

Korelace znamená vzájemný vztah mezi dvěma procesy nebo veličinami. Pokud se jedna z nich mění, mění se korelativně i druhá a naopak. Pokud se mezi dvěma procesy ukáže korelace, je pravděpodobné, že na sobě závisejí, nelze z toho však ještě usoudit, že by jeden z nich musel být příčinou a druhý následkem. To samotná *korelace* nedovoluje rozhodnout.

Korelace, resp. vzájemná korelace (cross-correlation), je důležitým operátorem v oblasti zpracování signálu. Určuje podobnost tvaru signálů. V lineární algebře odpovídá skalárním součinům.

Pro spojité signály je definována následovně.

$$(f * g)(t) = \int f^*(\tau)g(t + \tau)d\tau = \int f^*(\tau - t)g(\tau)d\tau \quad (2.24)$$

Symbol * značí komplexní sdružení.

A analogicky je definována pro diskrétní signály.

$$(f * g)(n) = \sum_m f^*[m]g[n + m] = \sum_m f^*[m - n]g[m] \quad (2.25)$$

Korelací daných vzorků je možné provádět z více signálů, nebo z jednoho signálu. V praxi to znamená, že pokud máme dvě rozdílné hodnoty téhož signálu a zjišťuje se *korelace / kovariance*, mají tyto funkce předponu **auto**.

Bližší informace o Korelační analýze v sobě zahrnuje stránka www.wikipedia.org, která byla pro tyto účely použita.

2.2.1 Korelační a kovarianční funkce

Korelační (**R**) a kovarianční (**K**) funkce se používají k popisu náhodných signálů v časové oblasti (nezávisle proměnnou je čas). Tyto funkce nesou informaci o souvislosti hodnoty náhodného signálu $x(t)$ pro $t = t_1 = t_0 + \tau$. Vyjadřují tedy souvislost mezi dvěma řezy náhodného signálu.

Funkce popisující souvislost hodnot téhož signálu mají předponu *auto* (**auokorelační**, **autokovarianční**). Statistickou závislost hodnot dvou různých signálů popisují *vzájemná korelační funkce* a *vzájemná kovarianční funkce*. Rozlišují se obvykle indexy. Funkce popisující jeden signál má index xx , funkce popisující dva signály mívá index xy .

Uvedené funkce jsou momenty druhého řádu a mohou tedy být počítány buď jako příslušná střední hodnota ze souboru realizací, nebo jako příslušná střední hodnota v čase.

V MATLABu lze výpočet korelační posloupnosti realizovat příkazem *xcorr*, a kovarianční posloupnosti příkazem *xconv* (oba příkazy jsou součástí Signal Processing Toolboxu).

Matematické vzorce pro výpočet vzájemných korelačních posloupností $R_{xy}(\tau)$ a $R_{yx}(\tau)$ konečných posloupností $x(n)$ a $y(n)$, kde $n = 0, 1, \dots, M-1$ jsou (v případě spojitých funkcí sumy přejdou v integrály) [7]:

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^M x(i)y(i-\tau) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^M x(i+\tau)y(i) \quad (2.26)$$

$$R_{yx}(\tau) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^M y(i)x(i-\tau) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^M y(i+\tau)x(i) \quad (2.27)$$

Korelační posloupnost je funkce posunutí (τ) posloupnosti x vůči posloupnosti y . Z rovnic (2.26) a (2.27) je patrné, že je jedno, zpoždíme-li posloupnost $y(n)$, nebo předsouvám posloupnost $x(\tau)$. Zřejmě tedy platí:

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau) \quad (2.28)$$

Autokorelační posloupnost je zvláštním případem, když $x(n) = y(n)$. Rovnice (2.26) a (2.27) přejdou do jedné:

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^M x(i)x(i-\tau) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^M x(i+\tau)x(i) \quad (2.29)$$

Tato rovnice tak přejde na:

$$R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau) \quad (2.30)$$

Kovarianční posloupnosti vzniknou jednoduchou modifikací rovnic (2.26) a (2.27), respektive (2.29). V sumách nahradíme součiny hodnot vzorků posloupností součiny jejich odchylek od středních hodnot.

Pro stochasticky nezávislé náhodné veličiny platí, viz [12], je proto srovnáno s rovnicí, která udává vztah mezi korelací a kovariancí:

$$K_{xy} = R_{xy}(i, j) - E_x(i)E_y(j) \quad (2.31)$$

Kde kovariancí rozumíme střední hodnotu součinu centrovaných veličin, tj. po odečtení jejich příslušných středních hodnot:

$$K_{xy}(i, j) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^M [x(i) - E(i)][y(j) - E(j)] \quad (2.32)$$

Autokorelační funkce $R_{xx}(\tau)$ náhodné veličiny $x(t)$ udává míru korelace (závislosti) mezi veličinou $x(t)$ v okamžiku t a veličinou $x(t+\tau)$ o čas později. [5]

Autokorelační funkce se vypočítá jako střední hodnota v čase součinu:

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau)dt \quad (2.33)$$

Vlastnosti autokorelačních funkcí:

(Převzato z literatury [2])

- 1) Počáteční hodnota autokorelační funkce $R_{xx}(0)$ je rovna střední hodnotě kvadrátu náhodné veličiny $x(t)$, tj. rozptylu náhodné veličiny.

$$R_{xx}(0) = \lim_{\tau \rightarrow 0} R_{xx}(\tau) = \sigma^2(x) \quad (2.34)$$

- 2) Autokorelační funkce je funkcí sudou, platí:

$$R_{xx}(-\tau) = R_{xx}(\tau) \quad (2.35)$$

- 3) Hodnoty autokorelační funkce v čase τ nejsou větší než hodnota pro $\tau = 0$.

$$R_{xx}(\tau) \leq R_{xx}(0) \quad (2.36)$$

Vzájemná korelační funkce $R_{xy}(\tau)$ je funkce dvou náhodných veličin $x(t)$ a $y(t)$, která vyjadřuje míru korelace mezi veličinou $x(t)$ v okamžiku t a veličinou $y(t+\tau)$ o čas později.

Vzájemná korelační funkce je dána vztahem:

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)y(t+\tau)dt \quad (2.37)$$

Pro vzájemnou korelaci platí:

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau) \quad (2.38)$$

Vztahy 2.33-2.37 platí pro spojitou oblast, v případě diskrétních funkcí integrály přejdou v sumy.

2.3 Výpočet výkonové spektrální hustoty

Výkonová spektrální hustota $S_{xx}(\omega)$ stochastického procesu $x(t)$ je definována:

$$S_{xx}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{2T} |X_T(j\omega)|^2 \right] \quad (2.39)$$

kde $X_T(j\omega)$ je Fourierova transformace stochastického procesu $x(t)$ v konečném intervalu $\langle -T; T \rangle$:

$$X_T(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X_T(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.40)$$

kde:

$$X_T(t) = x(t) \quad \text{pro } -T < t < T$$

$$X_T(t) = 0 \quad \text{pro ostatní } t$$

Výkonová spektrální hustota stochastického procesu $x(t)$ se vyjadřuje buď jako funkce kruhové frekvence ω , kde ω má rozměr $[\text{rad s}^{-1}]$, nebo jako funkce frekvence vyjádřené v [Hz]. Vztah mezi oběma způsoby vyjádření je [2]:

$$S_{xx}(f) = 2\pi S_{xx}(\omega) \quad (2.41)$$

Mezi výkonovou spektrální hustotou stochastického procesu $x(t)$ a jeho autokorelační funkcí platí vztah:

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (2.42)$$

Tedy, výkonová spektrální hustota je Fourierovým obrazem autokorelační funkce, více je možné se dočíst v literaturách [2] a [5].

II. PRAKTICKÁ ČÁST

3 SPTOOL- SIGNAL PROCESSING TOOLBOX

Pod filtrací signálů se obecně rozumí proces, při němž signál vstupuje do dynamického systému, na jehož výstupu se určitá část signálu propouští a jiná část zadržuje či zeslabuje. Tento dynamický systém se nazývá filtr.

Jednoduchým příkladem může být cezení nudlí, kdy cedník-filtr propouští vodu a zadržuje nudle. V chemii a jiných technických aplikacích se používají různě hrubé či jemné filtry pro různé roztoky - až po mikrofiltry či "molekulová síta", které zadržují i nejjemnější částičky. (Příklad převzat z literatury [18]).

Vhodným a relativně rozšířeným prostředkem pro filtraci signálů na počítačích je programový systém MATLAB, který nabízí toolbox s názvem *Signal Processing Toolbox* (*SPTOOL*), který tuto filtraci signálů umožňuje. Tento nástroj je určen ke zpracování signálů. Podporuje široké pole operací ke zpracování signálů od generování časových průběhů signálu po návrh filtrů a jejich implementaci, parametrické modelování a spektrální analýzu. Toolbox nabízí dvě kategorie nástrojů, a to:

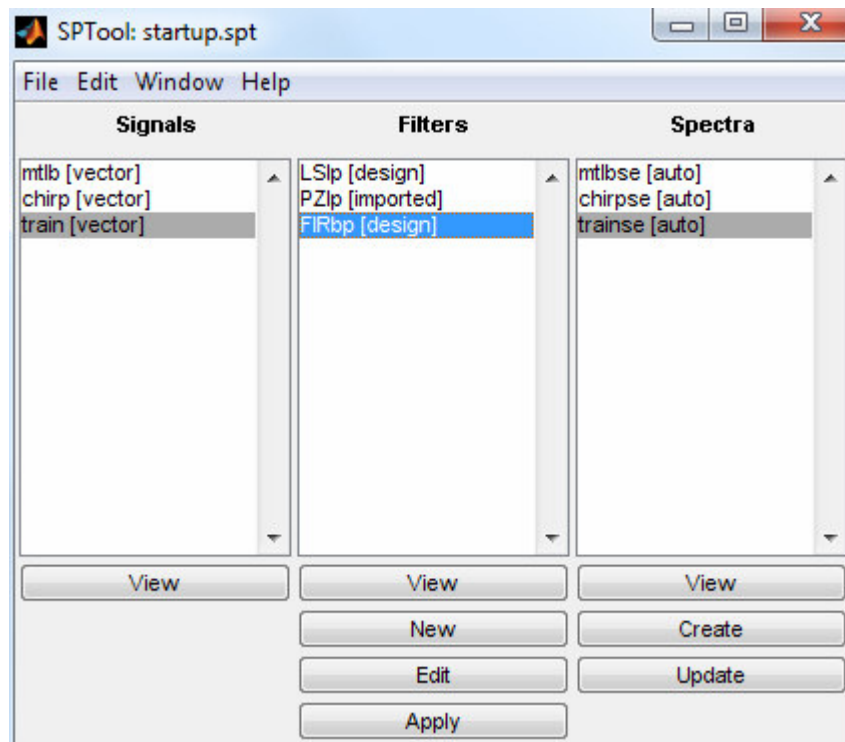
- Funkce pro zpracování signálů
- Grafické, interaktivní nástroje

Funkce pro zpracování signálů jsou volány přímo z příkazové řádky v prostředí MATLAB. Tyto funkce jsou většinou naprogramovány jako *m-file* a po zkopírování a přejmenování je možné m-file modifikovat.

Grafické uživatelské rozhraní (*GUI*) nabízí prostředí pro návrh filtrů, analýzu signálů a jejich implementaci, nástroje pro prohlížení průběhu signálů a jejich editaci. Grafické prostředí umožňuje práci s myší a grafickou editaci signálů, signály je možné přehrát na zvukovém zařízení počítače, a mnoho dalších, viz. literatura [13].

Signal Processing Toolbox je stejně jako většina ostatních knihoven v MATLABu, vybaven grafickým rozhraním, které zjednodušuje jak frekvenční analýzu signálů nebo posloupností, tak jejich úpravy, např. filtraci, modulaci nebo demodulaci. Návrh a analýza filtrů včetně interaktivního zobrazování amplitudových a fázových charakteristik, skupinového zpoždění, nul a pólů, přechodových a impulsních charakteristik patří mezi nejdůležitější schopnosti tohoto nástroje. Také jsou zde funkce pro spektrální analýzu, frekvenční transformace, statistické zpracování signálu a další. Více o dané problematice opisuje zdroj [14].

SPT umožňuje uživateli ukládání, načítání, import, export, prohlížení, editaci a vytváření signálů. Přitom platí, že vše co v SPTOOL vytvoříte či do něj načtete nebo z něj smažete, lze uložit na disk s příponou **.spt*. SPTOOL spustíme z MATLABu dvěma způsoby. Jeden je přímo z nabídky Start programu MATLAB – Toolboxes – Signal Processing – Signal Processing Tool. Druhý způsob je příkazem *sptool*, který se napíše do hlavního okna prostředí MATLAB.



Obrázek 17: Hlavní okno Signal Processing Toolboxu

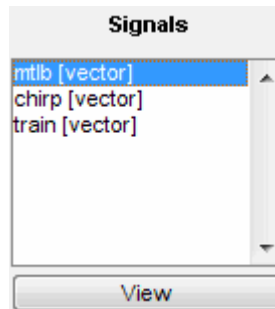
Hlavní okno je rozděleno do třech sloupců:

Signals - kde se ukazují všechny signály, které jsou v Signal Processing Toolboxu načtené. Tři z nich jsou implicitně vloženy už standardně, další je možné importovat.

Filters – vytvořené filtry, blíže je o nich psáno v kapitole č. 4, kde je rozebrán podrobněji FDATool.

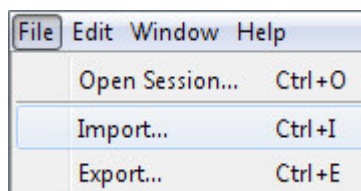
Spektra – tady je možné zobrazit spektrum signálu, více v kapitole č. 3.3 o spektru signálu. Pokud není známa analýza daného signálu a jaký filtr použít, nejdřív je potřeba spustit spektrální analýzu, až následně postupovat dle kapitoly č. 4 o FDATool.

3.1 Hlavní okno SPTOOL – „Signals“

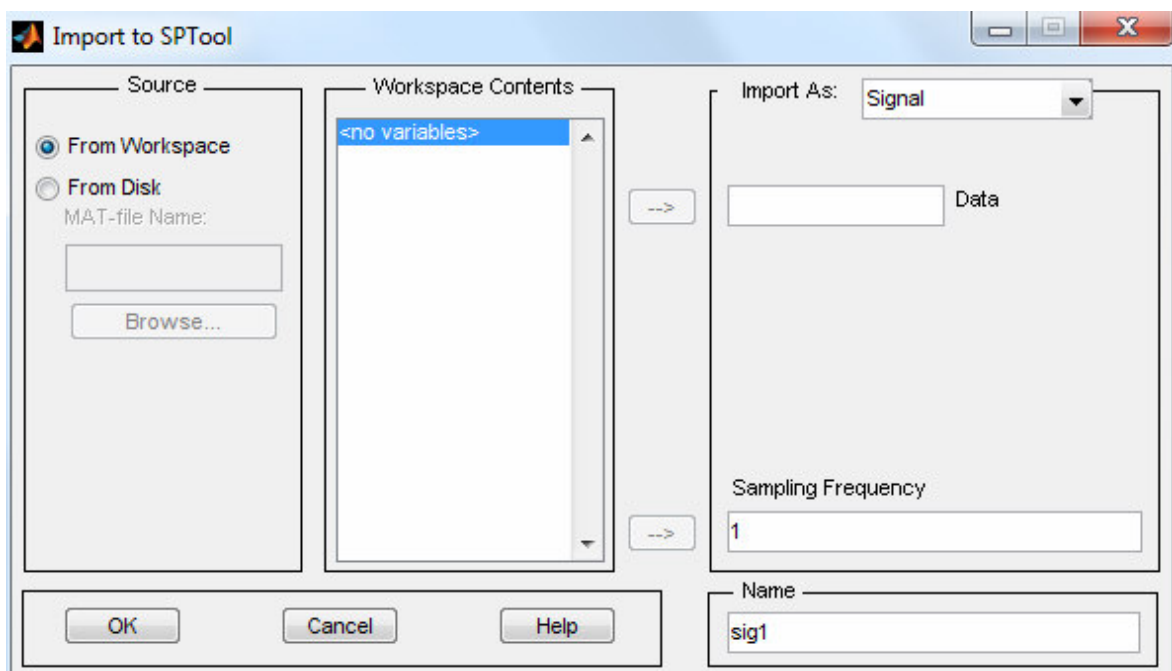


Obrázek 18: SPTOOL – okno Signále

V tomto sloupci se zobrazují všechny signály, která jsou v Signal Processing Toolboxu načtené. Tři z nich jsou implicitně vloženy už standardně, další je možné importovat. Import signálu funguje z hlavního okna po stisku z hlavního okna File – Import



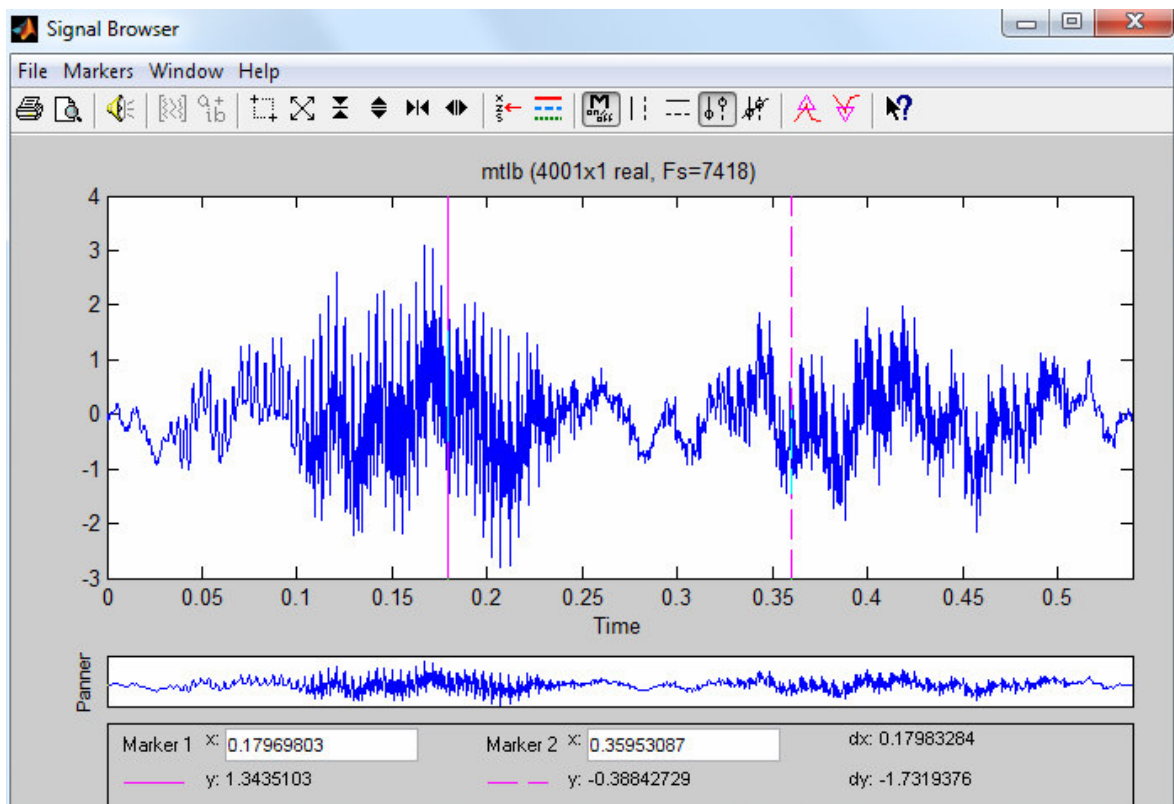
Obrázek 19: SPTOOL – okno Signals – ukázka vložení signálu



Obrázek 20: SPTOOL - okno Signals – ukázka vložení signálu ve formě dat z Workspace









Data je možné zadat buď z již vytvořené práce, kde v okně *Workspace* jsou uložená data, nebo se zadají z HDD ve formátu **.mat*. Pokud je např. načten vektor zvukové nahrávky **.wav* příkazem `[nazev,fs] = wavread('pisen')`, tak je v proměnné *nazev* uložen vektor dat. Tento je možné načíst.

Pokud je otevřena nabídka *View* např. hned prvního vektoru v hlavním okně, kde v prvním sloupci je vybrán *mtlb[vector]*, otevře se nové okno s datovou nahrávkou.



Obrázek 21: SPTOOL – zobrazení vloženého signálu

Horní nabídka nám umožňuje několik operací se signálem.

Ikona	Popis
	Tisk, náhled, puštění audio signálu,
	Zoom, zpět na zobrazení celého signálu
	Výběr několika načtených signálů, nastavení barvy signálu
	Zap/vyp značek (růžové svislé čáry). Pokud je puštěna ikona  , tak signál „jede“ v rozmezí těchto značek.
	Vertikální/horizontální růžové čáry
	Zobrazení značek lokálních maxim a minim
	Nápověda

Tabulka 1: Seznam použitých ikoněk SPTOOL

3.2 Hlavní okno SPTOOL – „Filters“



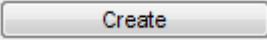
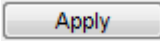
Obrázek 22: SPTOOL – okno Filters

V tomto sloupci se zobrazují již vytvořené filtry, které se následně aplikují. Tři filtry jsou již implicitně načtené programem, ostatní filtry je možné vytvořit uživatelem. Filtry se vytváří v prostředí FDATOOOL, což je toolbox, který slouží přímo na vytváření a editaci filtrů. Více je o něm psáno v kapitole č. 4 o FDATOOOL.

3.3 Hlavní okno SPTOOL – „Spektra“



Obrázek 23: SPTOOL – okno Spektra








Úvodní okno „Spektra“ zobrazuje signály načtené v SPTOOL, ze kterých je možné zobrazit spektrální analýzu. Tři signály jsou zde opět již automaticky vloženy, další je možné vytvářet z námi vložených signálů do SPTOOL. Pokud je vložený signál dle podle postupu výše, který je uveden v kapitole 3.1, tak spektrální analýzu signálu (musí být aktivní, tzn. že na vložený signál se klikne a název se tak zamodří) je možné vykreslit po stisku tlačítka  v tomto sloupci. Objeví se tak nové okno „Spektrum Viewer“, které je momentálně prázdné. Pokud byl aktivní námi požadovaný signál, tak v levém dolním rohu se objevilo tlačítko . Po jeho stisku se zobrazí graf spektrální analýzy, to znamená, jaké frekvence daný signál obsahuje. Je možné užít rozdílné metody pro vytvoření spektra. V závorkách jsou uvedeny příkazy pro MATLAB.

- Burg ([pburg](#))

- Covariance ([pcov](#))
- FFT ([fft](#))
- Modified covariance ([pmcov](#))
- MTM (multitaper method) ([pmtm](#))
- MUSIC ([pmusic](#))
- Welch ([pwelch](#))
- Yule-Walker AR ([pyulear](#))

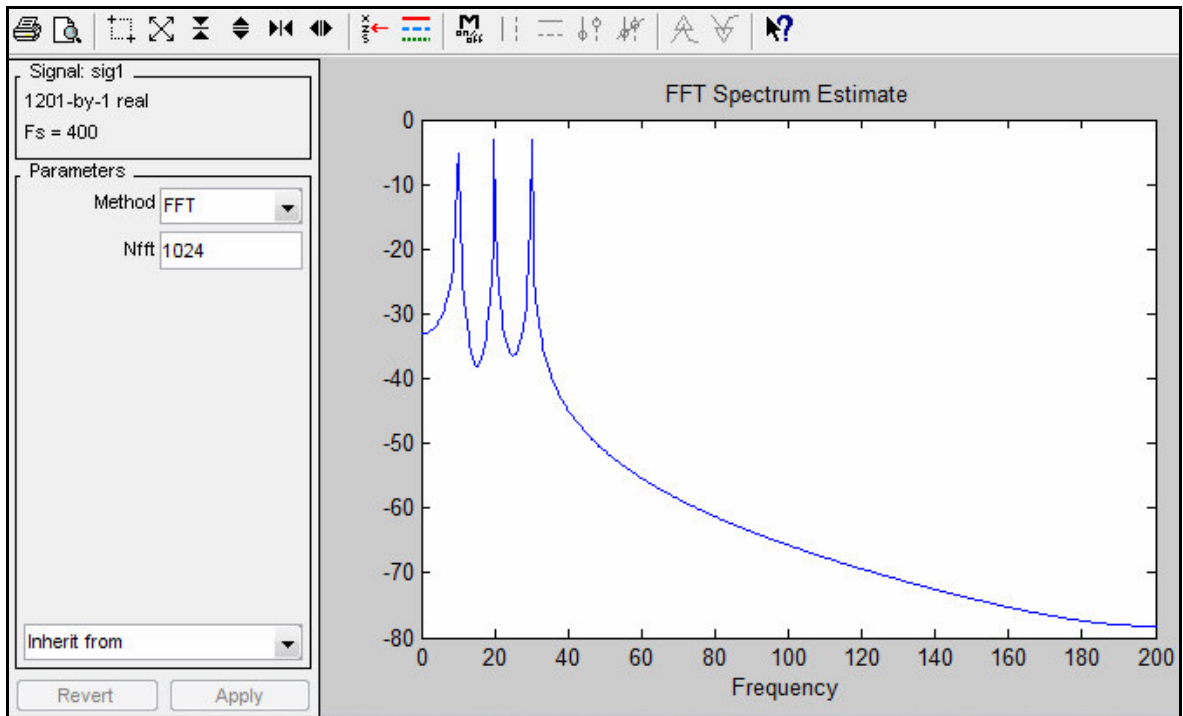
Každý příkaz a metoda je velice obsáhlá a rozsah této publikace by na to nestačil, více je proto možné se dočíst na stránkách www.humusoft.cz, případně v nápovědě prostředí MATLAB tak, že do okna *Workspace* je třeba napsat např. ***doc fft*** a otevře se celá syntaxe příkazu, jak daný příkaz funguje. ***Doc*** je označení pro dokument z nápovědy a přepíše se tedy za něj pouze zkratka příkazu, který nás zajímá, např. ***fft*** (Fast Fourier transform)

Signál je možné opět, jak u filtrů, editovat ve smyslu přiblížení, oddálení na danou oblast, tisk, náhled, zobrazení svislých/vodorovných značek, zobrazení lokálních minim a maxim, nápověda. Vše je možné najít na horní liště okna.

Ikona	Popis
	Tisk a náhled signálu
	Zoom, zpět na zobrazení celého signálu
	Výběr několika načtených signálů, nastavení barvy signálu
	Zap/vyp značek (růžové svislé čáry)
	Vertikální/horizontální růžové čáry
	Zobrazení značek lokálních maxim a minim
	Nápověda

Tabulka 2: Seznam použitých ikon v SPTOOL – spektra

Jako příklad byl vytvořen signál součtem třech různých frekvencí 10Hz+20Hz+30Hz a vykreslena jeho spektrální analýza, jak je možné vidět na obrázku níže. Byla zvolena metoda FFT (Rychlá Fourierova transformace). Opravdu je možné vidět tři různé frekvence a to 10, 20 a 30 Hz. Opět byly použity rozdílné funkce sin/cos, počátek signálů, atd. a graf spektrální analýzy zůstával stejný, takže je opravdu vidět, jaké „podsignály“ výsledný signál obsahuje nezávisle na způsobu použití vnitřních signálů, což odpovídá teorii.



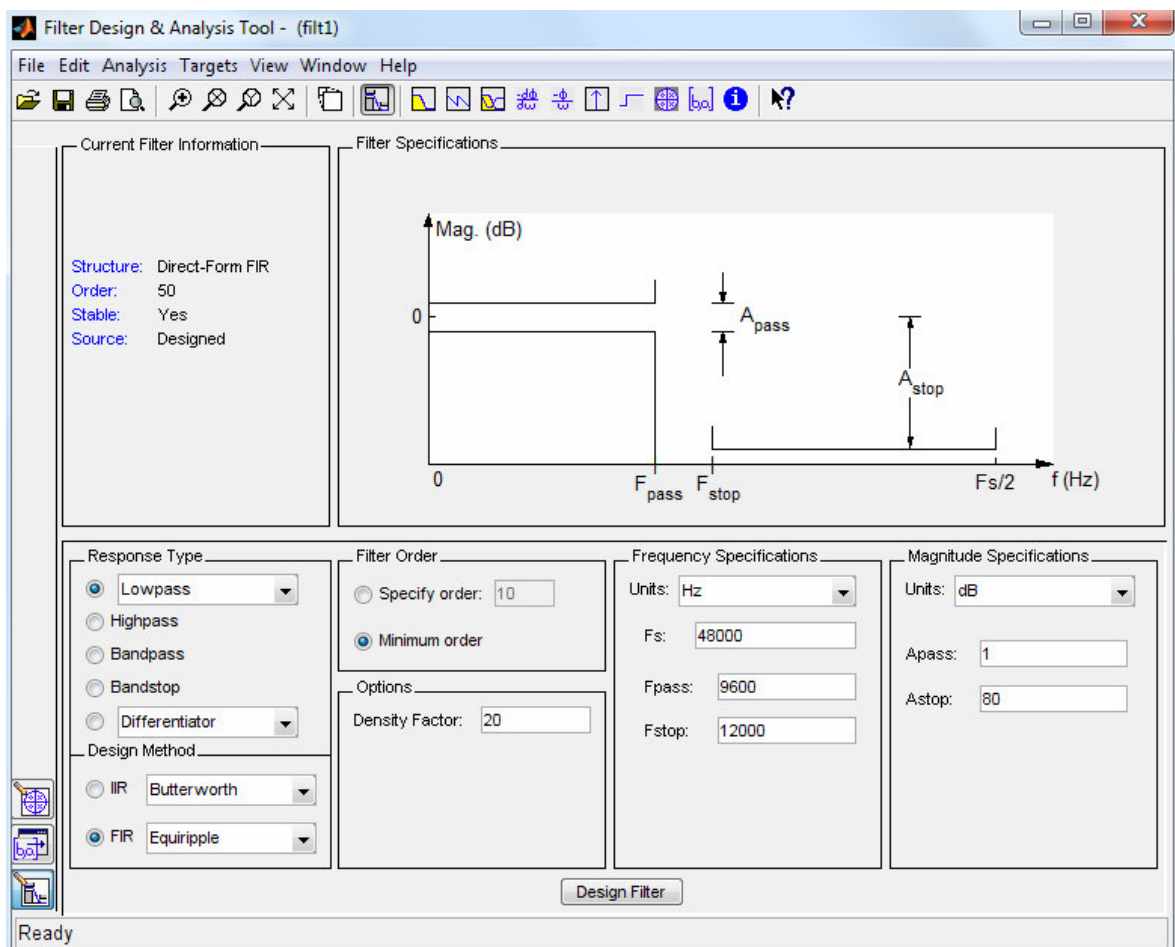
Obrázek 24: SPTOOL – zobrazení frekvenčních složek v signálu

4 FDATAOOL - FILTER DESIGN & ANALYSIS TOOLBOX (TVORBA FITRŮ)

Pod filtrací signálů se obecně rozumí proces, při němž signál vstupuje do dynamického systému, na jehož výstupu se určitá část signálu propouští a jiná část zadržuje či zeslabuje. Tento dynamický systém se nazývá filtr.

Vhodným a relativně rozšířeným prostředkem pro filtraci signálů na počítačích je programový systém MATLAB, který nabízí toolbox s názvem *Signal Processing Toolbox (SPTOOL)*, který tuto filtraci signálů umožňuje. K vytváření filtrů slouží *Filter Design&Analysis Toolbox (FDATOOL)*.

Filter Design&Analysis Tool (příkaz FDATAOOL) slouží k vytváření a úpravě filtrů. Pro otevření FDATAOOL z SPTOOL, je potřeba kliknout na **New** pod listem **Filters** v SPTOOL.



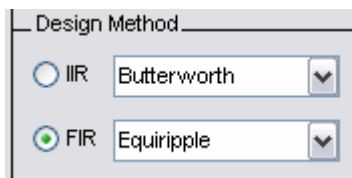
Obrázek 25: FDATAOOL – hlavní okno

4.1 Nastavení

4.1.1 Response

- *Lowpass* - dolní propust
- *Raised cosine*
- *Highpass* - horní propust
- *Bandpass* – pásmová propust
- *Bandstop*- pásmová zadrž
- *Differentiator* – vytváří ze signálů jeho derivaci
- *Multiband* – více propustí ve filtru
- *Gilbert transformer*
- *Arbitrary magnitude*

4.1.2 Design Method – volba druhu filtru (FIR/IIR)



Obrázek 26: FDATool – Nastavení druhu použitého filtru

Vlastnosti FIR filtrů

Filtry s konečnou impulsní charakteristikou (finite impulse response - FIR) jsou plně definovány N hodnotami této charakteristiky, které tvoří současně vektor systémových konstant $h = [h_n], n \in \langle 0, N-1 \rangle$. Jejich diferenční rovnice vyjadřuje konečnou diskrétní konvoluci [7]:

$$y_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_{n-k} h_k \quad (4.1)$$

h_k - je koeficient filtru

x – vstupní signál

Vlastnosti IIR filtrů

Filtry s nekonečnou impulsní odezvou (infinite impulse response – IIR) jsou vždy rekurzivní, neboť pouze systém se zpětnými vazbami může tuto vlastnost zajistit. Jejich možností jsou obecně bohatší než filtrů FIR, neboť obrazový přenos má jak *nulové kořeny*, tak *póly*. Zatímco póly musí vzhledem k požadavku stability ležet uvnitř jednotkové kružnice, nulové body lze situovat jak uvnitř, tak vně. Vzhledem k tomu, že přesun nuly z pozice n_i do pozice $1/n_i$ nezpůsobí změnu amplitudově frekvenční charakteristiky, ale ovlivní charakteristiku fázovou, lze vytvářet varianty filtrů, které mají všechny tutéž amplitudovou, ale různé fázové charakteristiky.

Ve srovnání s filtry typu FIR lze konstatovat, že IIR filtry kromě již uvedených výhod vlastností jsou při srovnatelné kvalitě zpracování signálů (z hlediska formování náročných např. pásmových frekvenčních charakteristik) řádově méně náročné na rozsah výpočtů a tím na výkonnost výpočetní techniky, která filtr realizuje. Uvedené vlastnosti jsou na druhé straně vykoupeny tím, že není bezprostřední vztah mezi hodnotami žádoucí frekvenční charakteristiky a systémovými konstantami realizačních struktur, což vede na obtížnější návrh. Dalšími nevýhodami IIR filtrů jsou možnost nestability IIR filtrů při nevhodném návrhu, vyšší citlivost a skutečnost, že tyto filtry mají principiálně vždy nelineární fázovou charakteristiku, byť je možno vhodným návrhem dosáhnout přijatelné kvazilinearit v potřebných frekvenčních intervalech.

IIR filtry jsou popsány obecnými rekurzivními diferenčními rovnicemi ve tvaru:

$$y_n = \sum_{i=0}^r L_i x_{n-i} - \sum_{i=1}^m K_i y_{n-i} \quad (4.2)$$

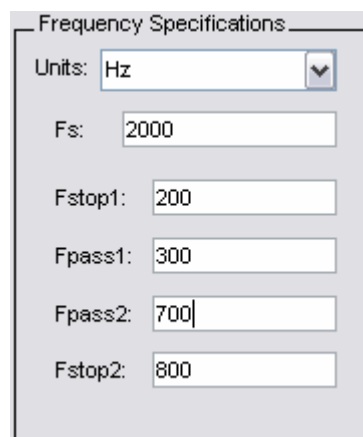
x – vstupní signál

y – výstupní signál

L, K – koeficienty


4.1.3 Nastavení frekvence filtru – např. pro filtr pásmové propusti

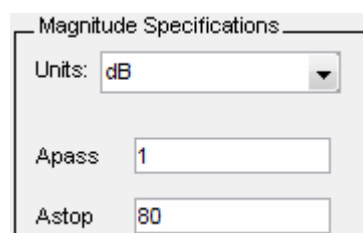
- Jednoty frekvencí Hz, kHz, MHz
- Vzorkovací frekvence (F_s) – je potřeba dodržet Shannonův-Nyquistův-Kotělníkův teorém o dvojnásobné vzorkovací frekvenci
- Frekvence, do které signál nepustí (F_{stop1})
- Frekvence, od které signál pustí (F_{pass1})
- Frekvence, od které signál pustí (F_{pass2})
- Frekvence, od které signál nepustí (F_{stop2})



Obrázek 27: FDATool – Nastavení frekvencí filtrů

4.1.4 Útlum signálu

Z obrázku 25 je zřejmé, že v okně pro nastavení filtru lze definovat útlum signálu jak propouštěcí části, tak zádržné. Okno níže je pro dolnoproputní filtr, kde je možné nastavit pouze *A_{pass}* (útlum propouštěcí části signálu) a *A_{stop}* (útlum zádržné části signálu), filtry jako např. pásmové propusti nabízejí více útlumů. Pro přehled, co která značka znamená a jak se filtr nastavuje, stačí zmáčknout tlačítko  v horní liště pracovního okna filtru.



Obrázek 28: FDATool – Nastavení útlumu filtru

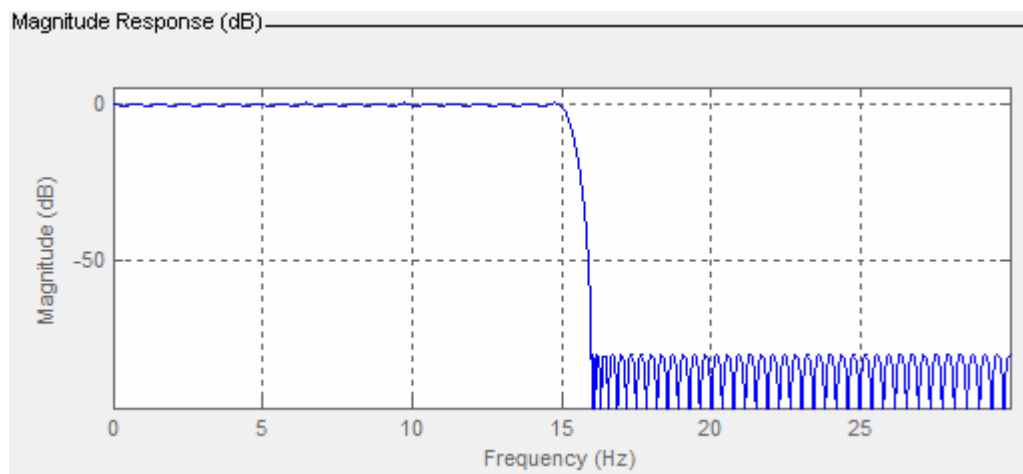
4.2 Analýza filtru

Uvedené programové prostředí umožňuje elegantně zobrazit různé charakteristiky filtru, to zejména v oknech *Filter Design&Analysis Tool* v nabídce *Analysis*. Jako příklad byla vytvořena dolní propust s hodnotami:

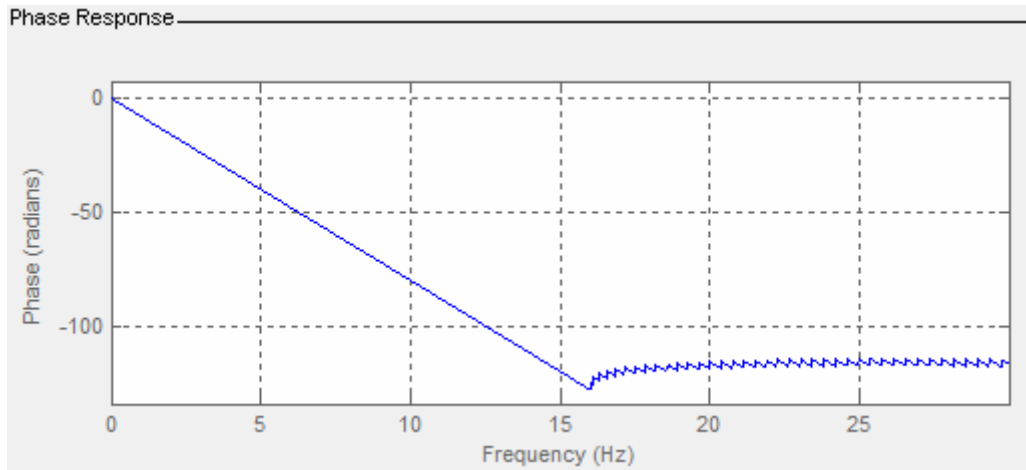
FIR, Density Factor 20, Fs 40 Hz, Fpass 15 Hz, Fstop 16Hz, Apass 1dB, Astop 80dB

- Magnitude response
- Phase response
- Magnitude and Phase response
- Group delay response
- Phase delay response
- Impulse response
- Step response
- Pole-zero plot

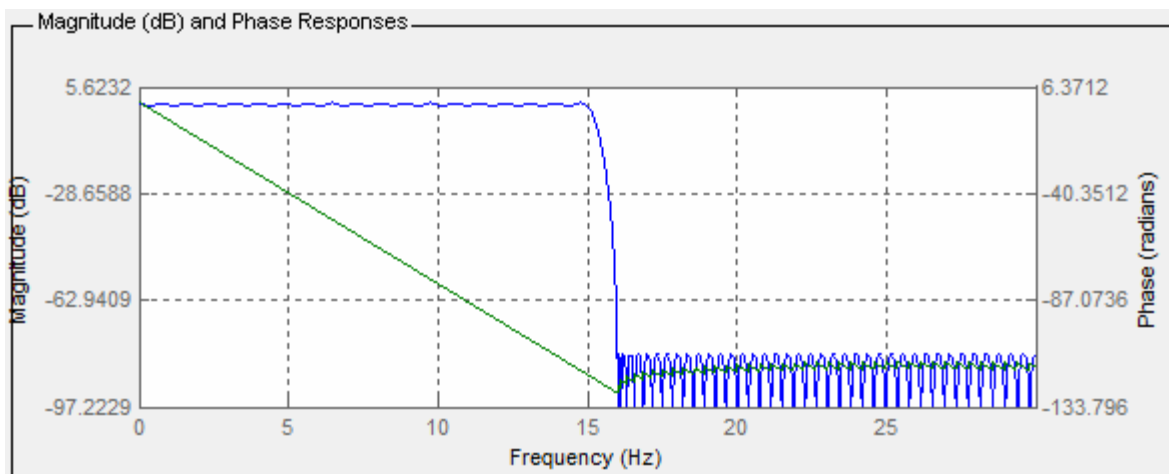
Vykreslené grafy daných charakteristik



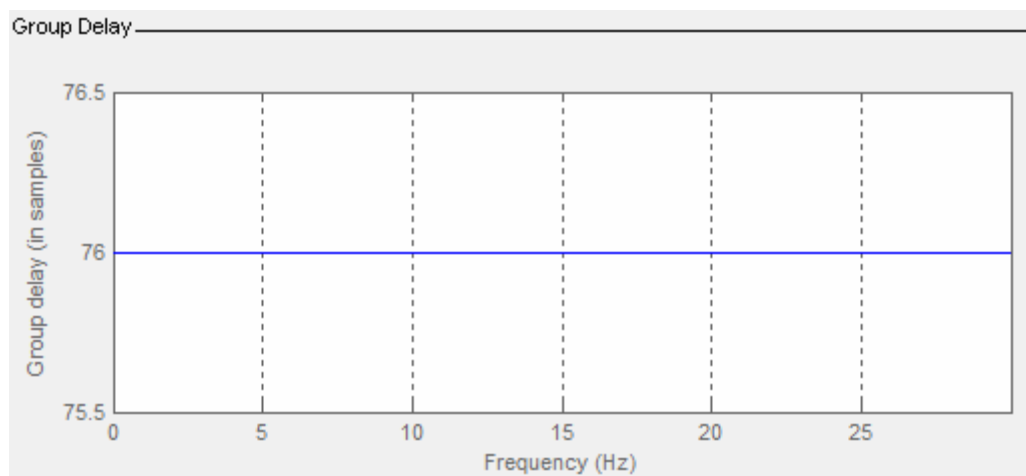
Obrázek 29: Závislost útlumu signálu v dB na frekvenci v Hz daného filtru

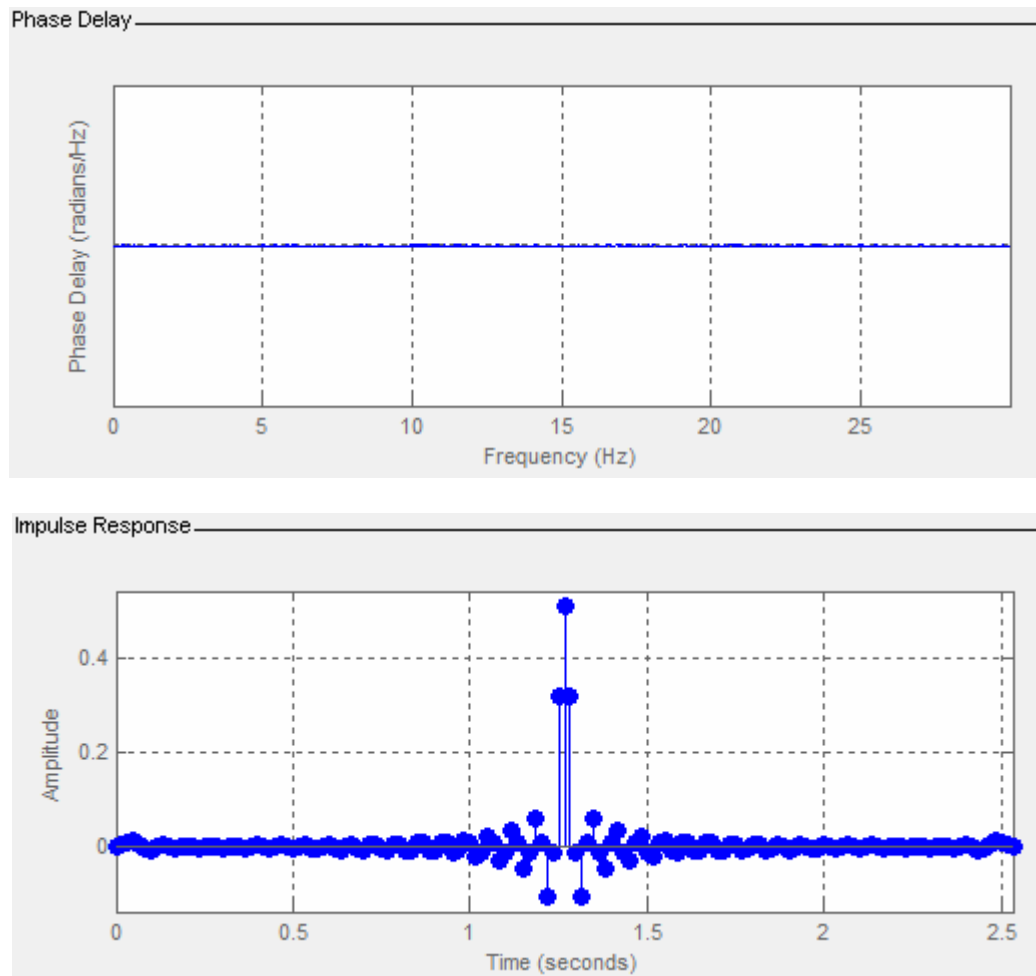


Obrázek 30: Závislost fáze v radiánech na frekvenci v Hz daného filtru

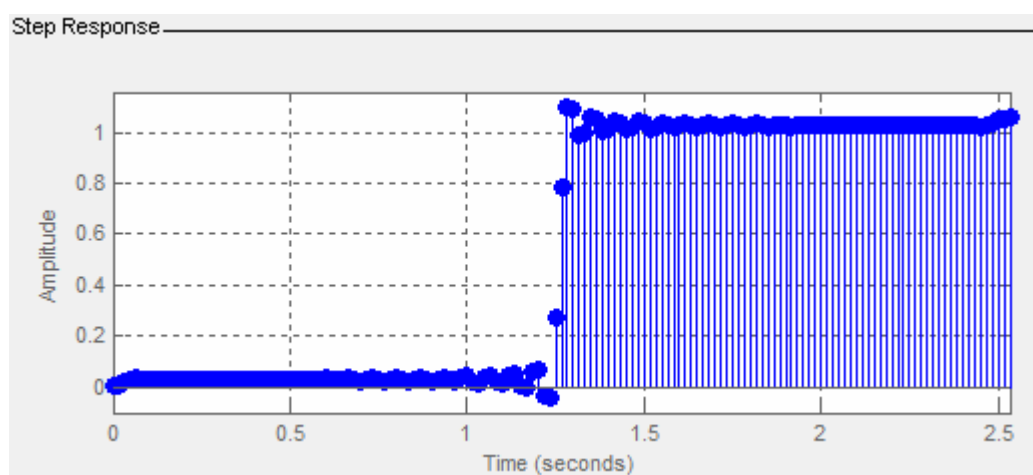


Obrázek 31: Závislost fáze a útlumu na frekvenci daného filtru

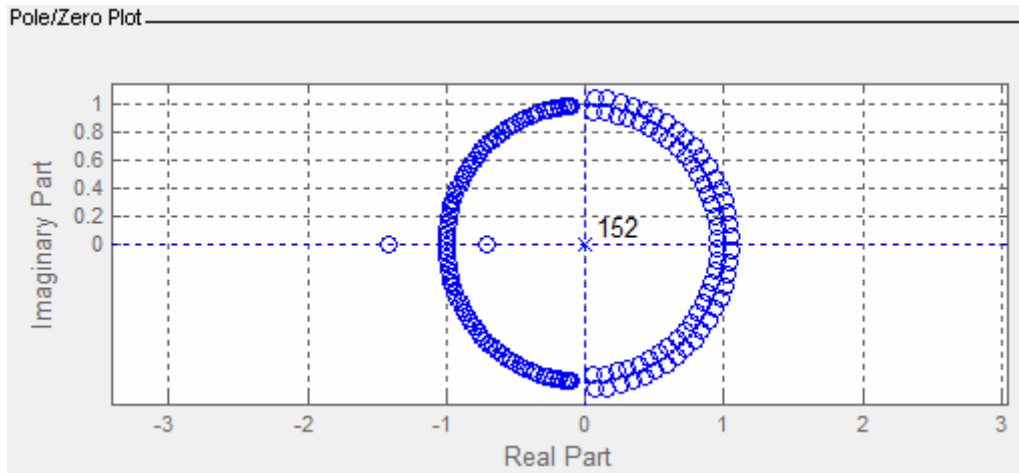




Obrázek 32: Impulsní charakteristika filtru



Obrázek 33: Skoková charakteristika filtru



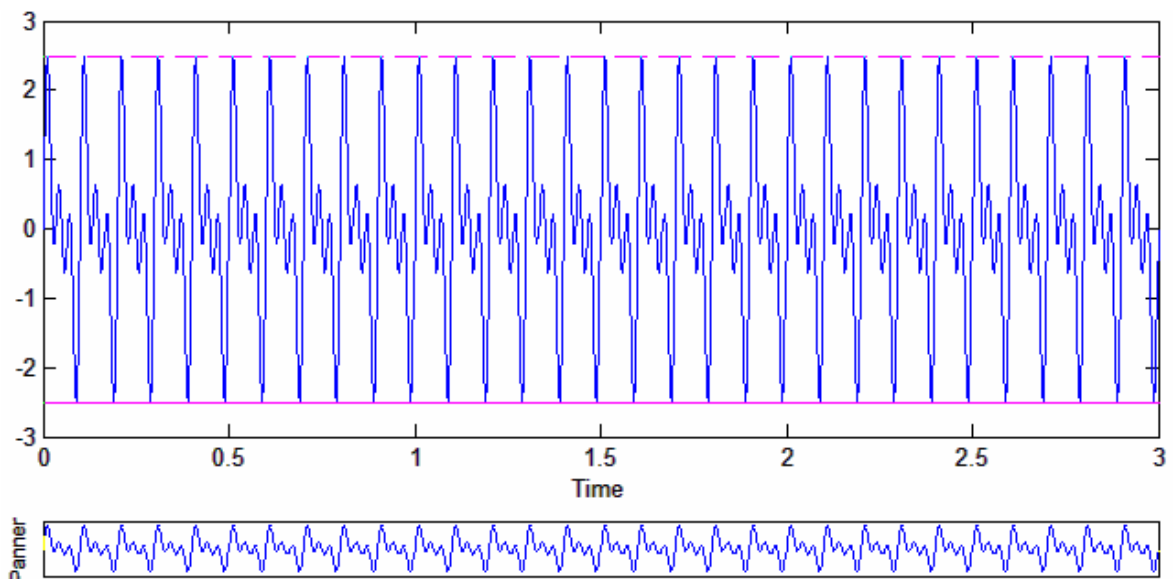
Obrázek 34: Zobrazení nul a pólů daného filtru

Je možné zobrazit dvě odezvy ve stejném „plot“ okně jenom výběrem *Analysis > Overlay Analysis* a výběrem příslušné odezvy. Druhá osa „y“ je přidána na pravou stranu grafu. Dále je možno zobrazit koeficienty a podrobný popis filtru v tomto regionu.

Všechny popsané odezvy je možné najít v horní nabídce okna, kde každá odezva má svou ikonku a není tak potřeba náš požadavek dlouho hledat.

4.3 Test funkčnosti filtru

Byl proveden test o známém signálu. Byly tedy vytvořeny tři signály sinus o různé frekvence, a to 10Hz, 20Hz a 30Hz, všechny tři o stejné amplitudě 1. Tyto signály byly sečteny a vznikl tak součet třech signálů o různé frekvenci. Opět byly použity rozdílné funkce sin/cos, počátek signálů, atd. Následně na to byl aplikován filtr dolní propusti a pásmové propusti všech možných filtrů, které SPTOOL nabízí. Bylo tedy testováno, jestli výstup bude originálních 10Hz, případně 20Hz u filtru pásmové propusti. Test byl aplikován po dobu minimálně 3 sekund. Tím se vyruší vliv filtru, což je v samé podstatě dynamický systém s přechodovou charakteristikou. U některých filtrů je možné vidět ustálení relativně ihned, u některých až po 2 sekundách. Pokud by se braly hodnoty pouze v první sekundě, tj. na počátku filtrace, kdy přechodová charakteristika filtru ještě stále není ustálená, výsledek by tímto byl značně zkreslen a nebylo by tak možné filtrovat signál podle požadavků uživatele.

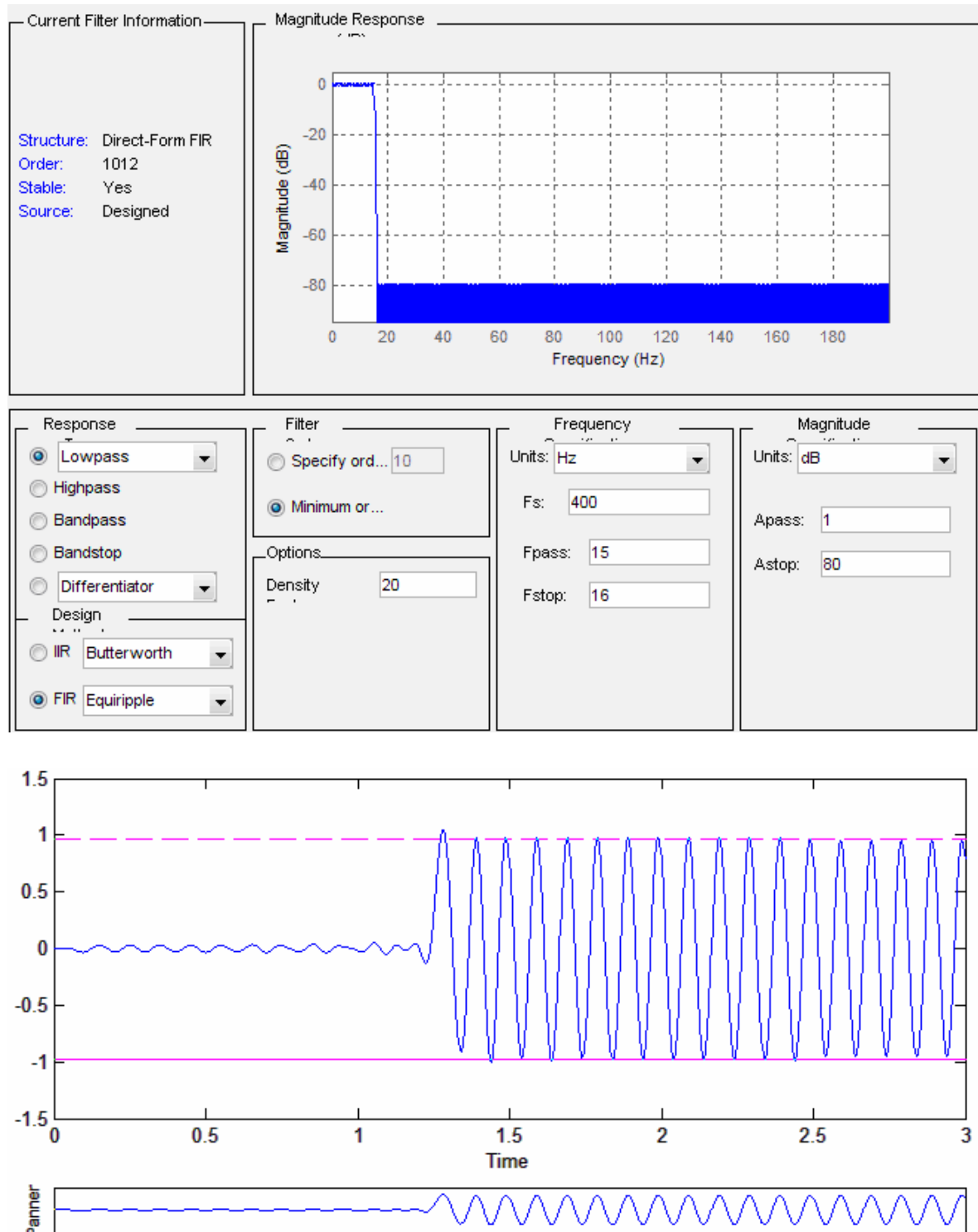


Obrázek 35: Složení třech signálů 10+20+30 Hz, každý o amplitudě 1

4.3.1 Dolní propust

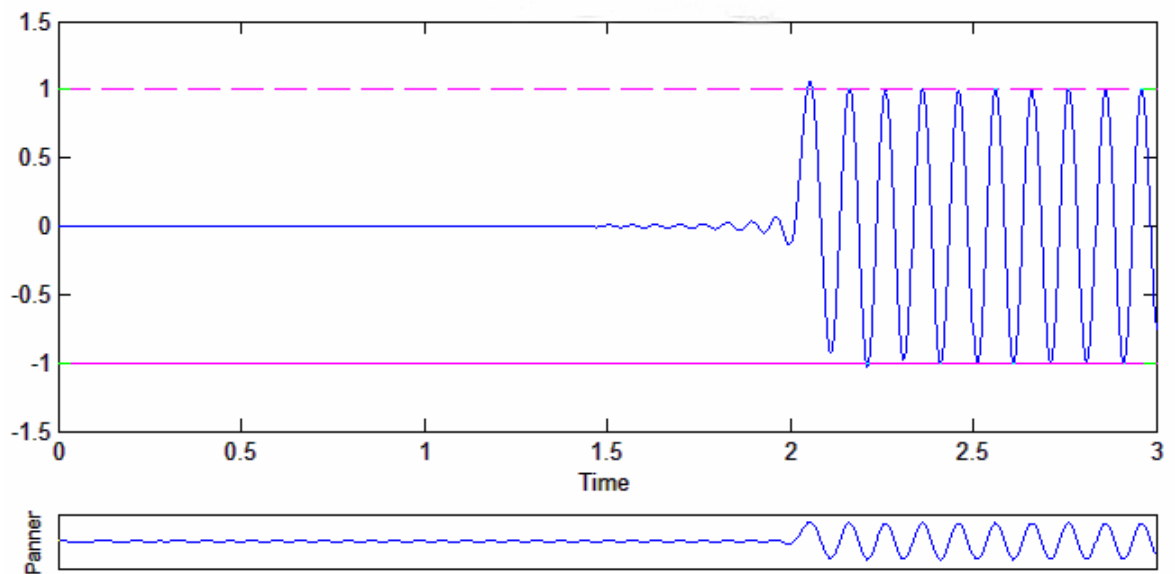
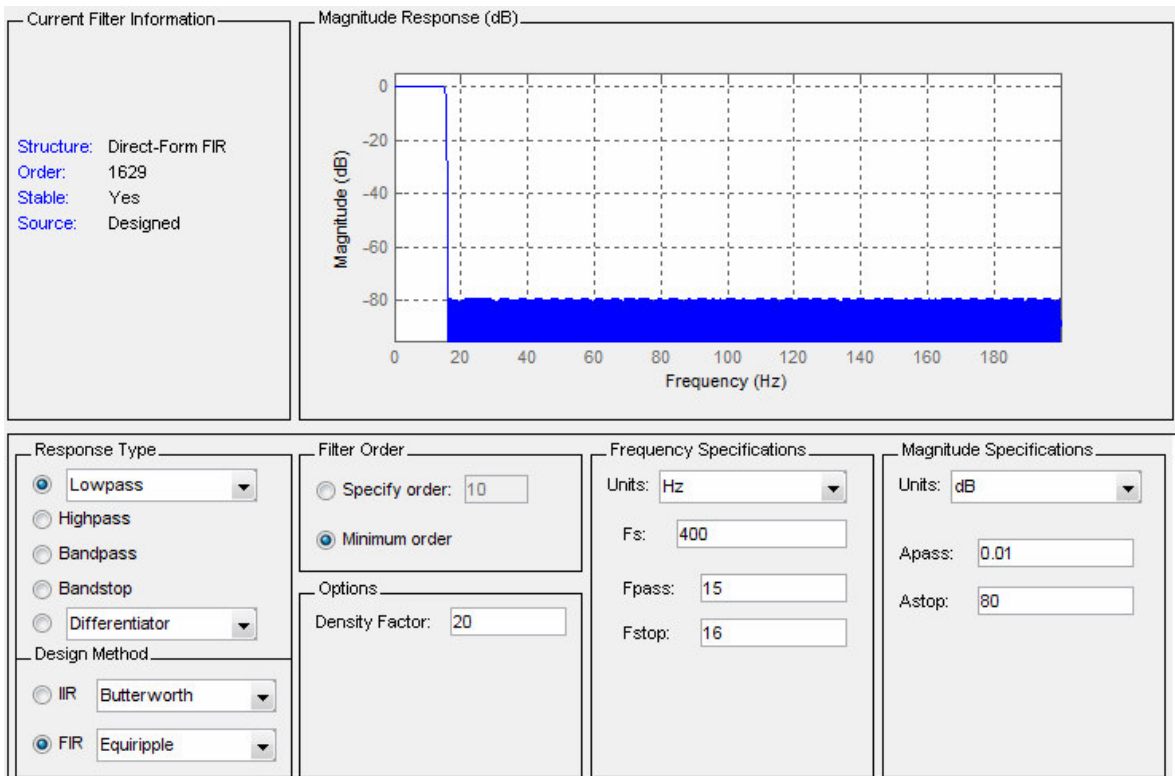
Měl by vyjít 10 Hz sin signál o amplitudě 1.

Filtr FIR - Equiripple, F_s 400 Hz, $A_{pass} = 1\text{dB}$



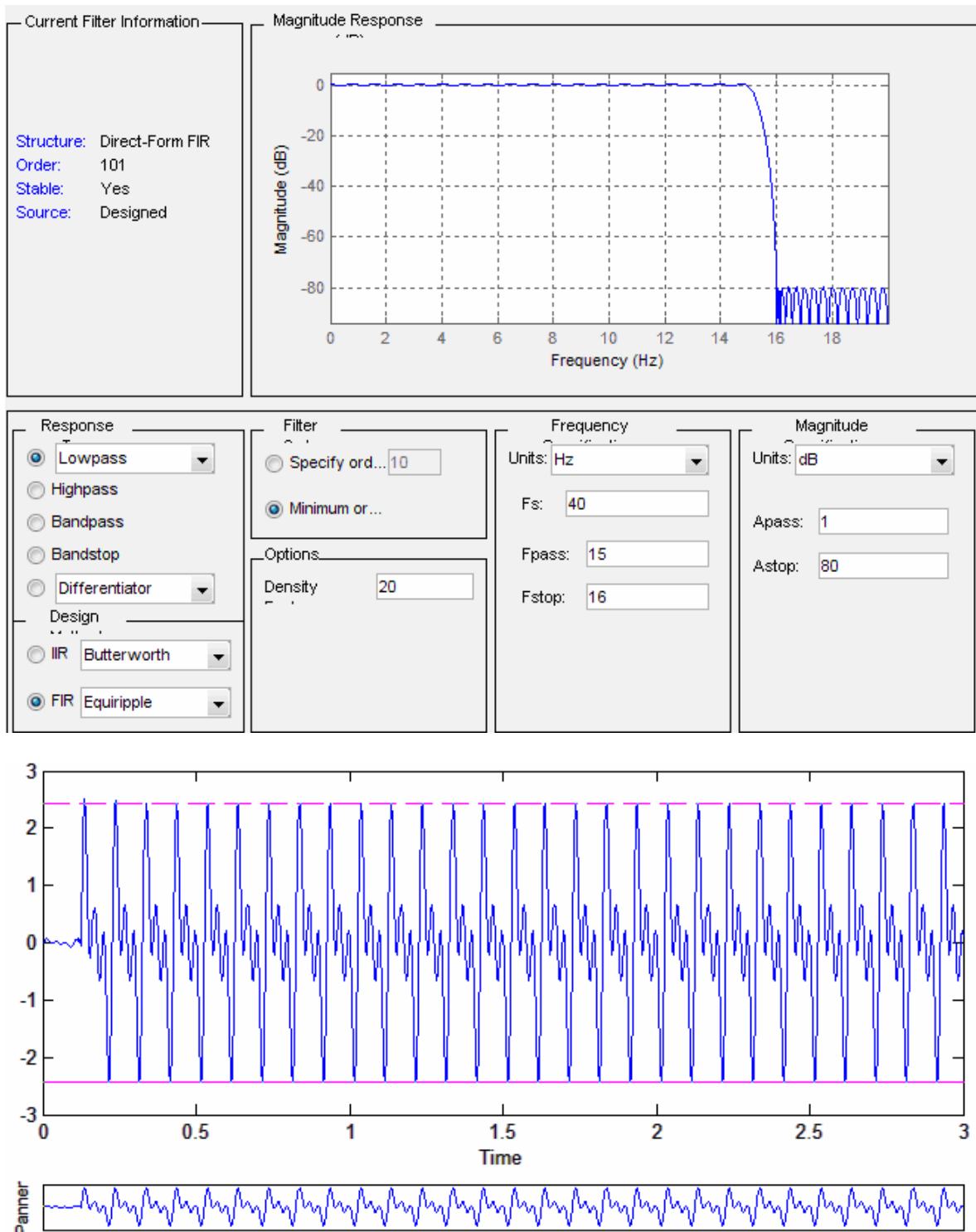
Obrázek 36: Test dolní propusti - Filtr FIR - Equiripple, F_s 400 Hz, $A_{pass} = 1\text{dB}$

Filtr FIR - Equiripple, F_s 400 Hz, $A_{pass} = 0.01dB$



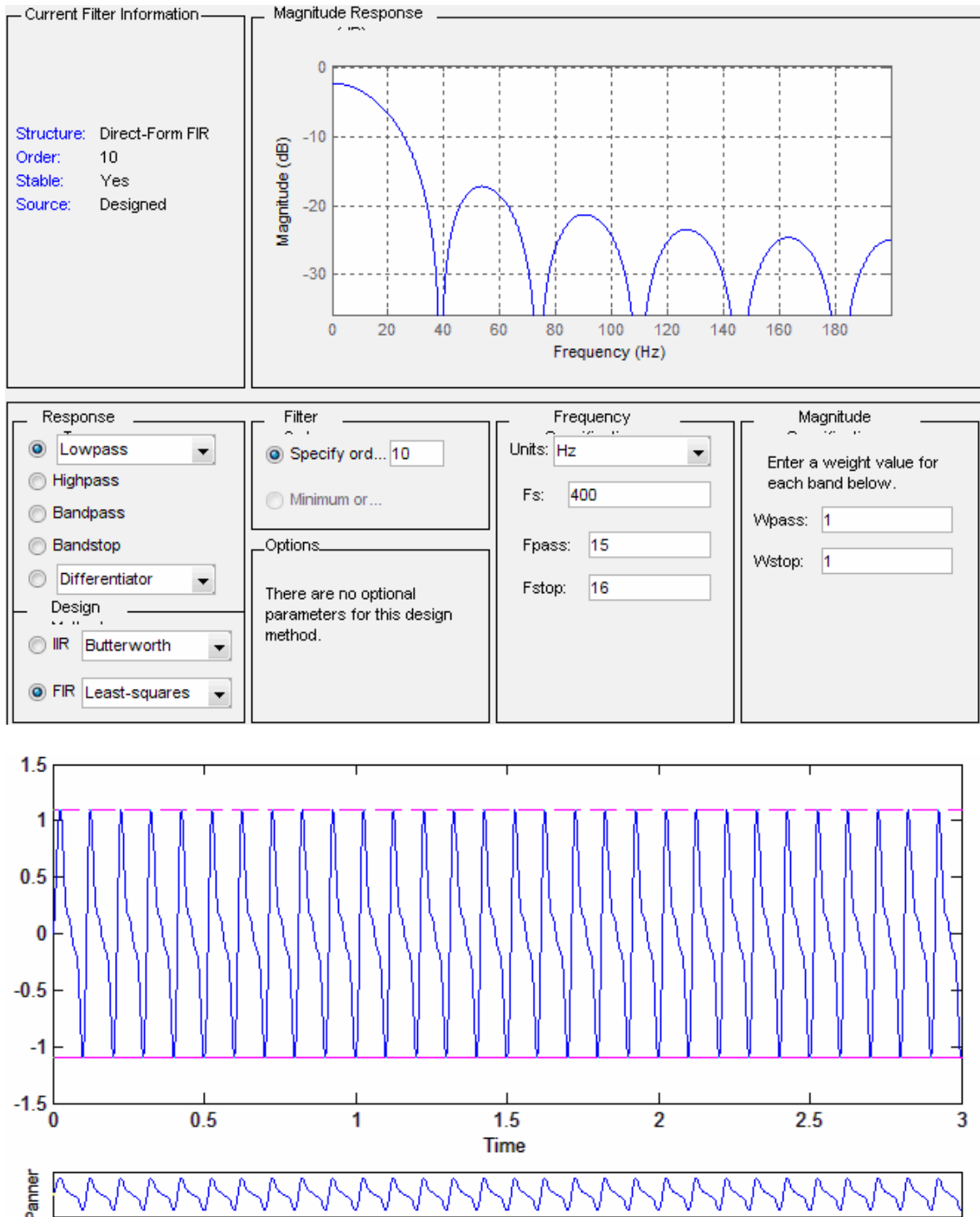
Obrázek 37: Test dolní propusti - Filtr FIR - Equiripple, F_s 400 Hz, $A_{pass} = 0.01dB$

Filtr FIR - Equiripple, $F_s = 40$ Hz



Obrázek 38: Test dolní propusti - Filtr FIR - Equiripple, $F_s = 40$ Hz

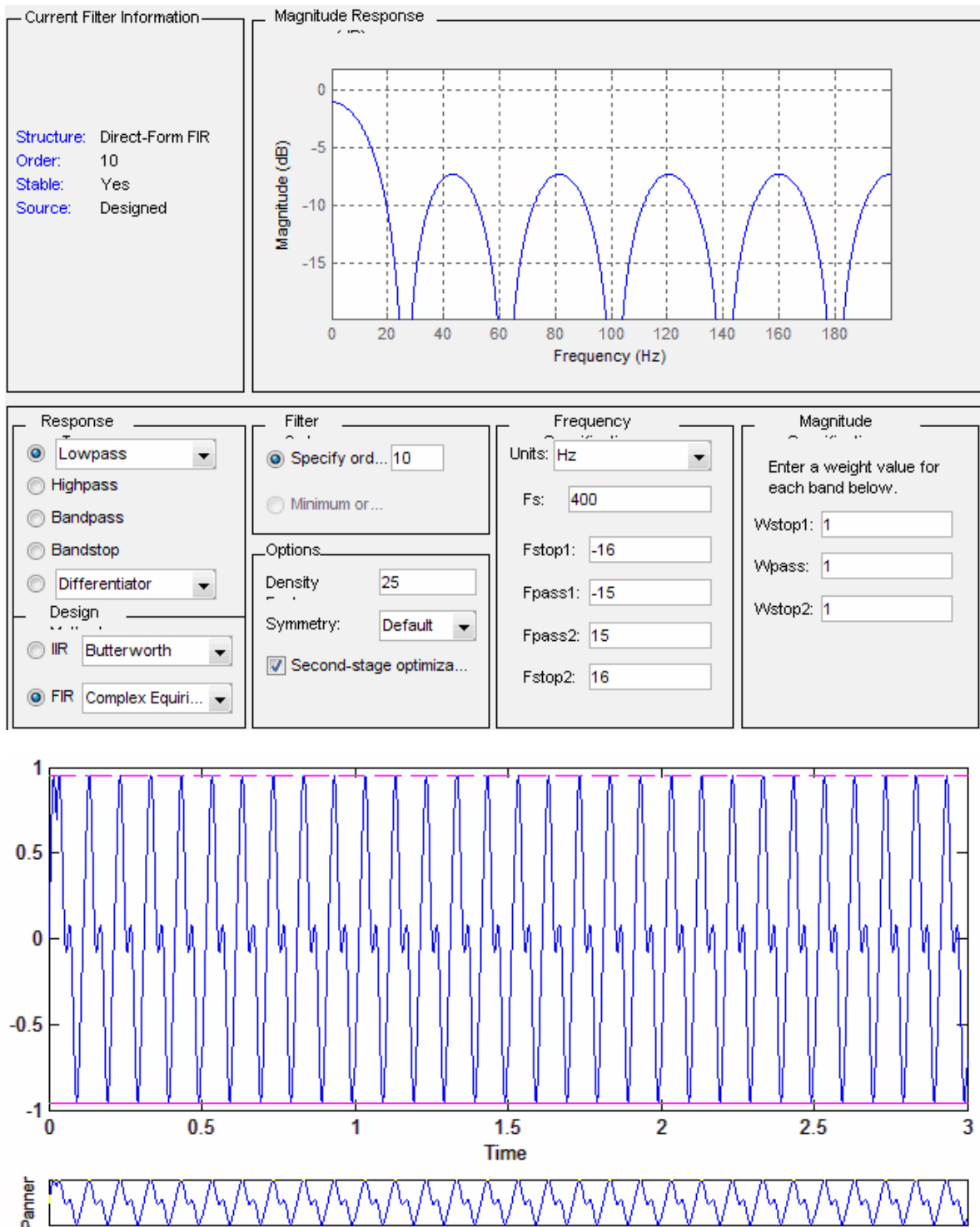
Filtr FIR – Least-squares



Obrázek 39: Test dolní propusti - Filtr FIR – Least-squares

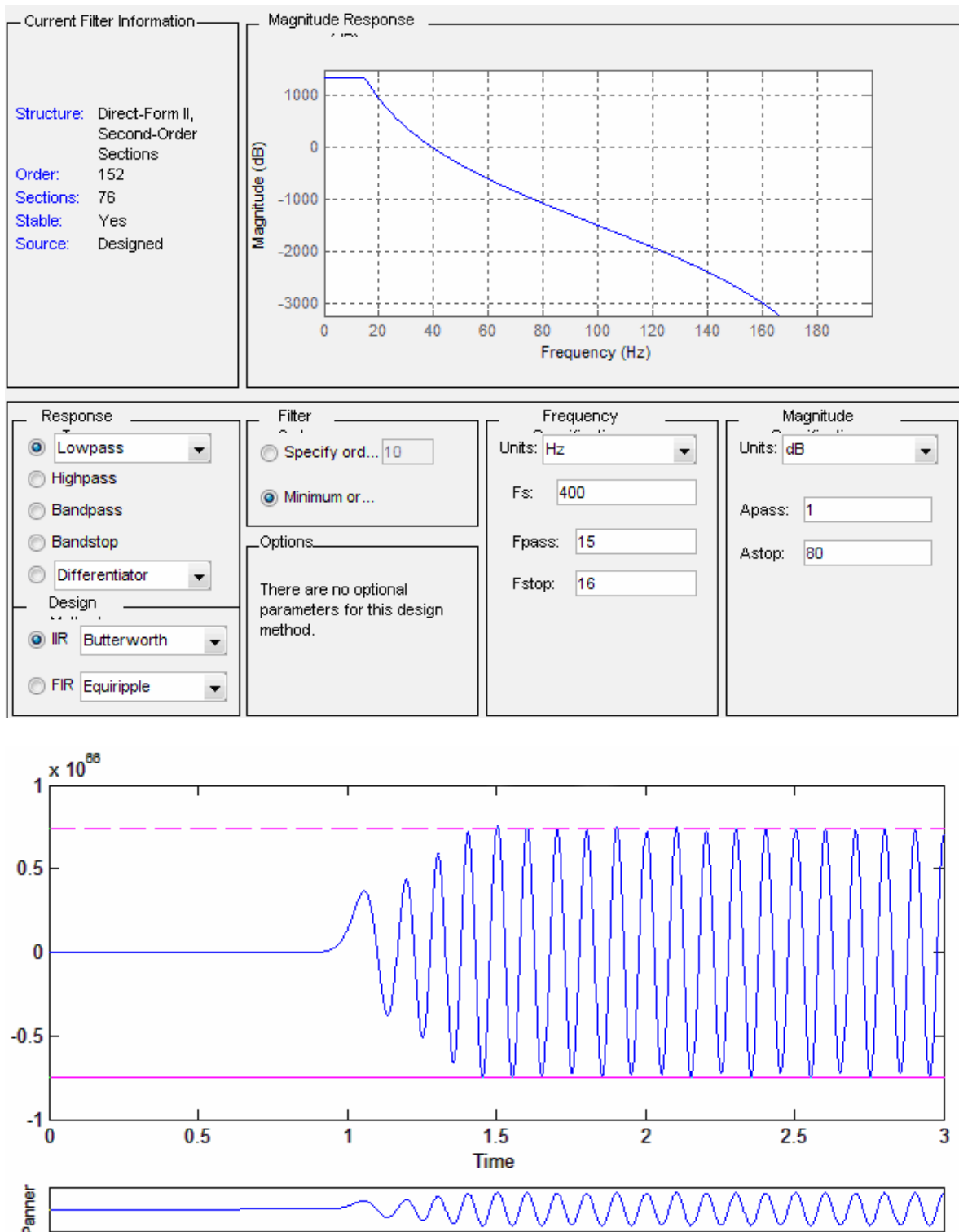
Filtry FIR – Windows, Constr. Lest squares vypadají skoro stejně jak předchozí Lest squares

Filtr FIR – Complex Equiripple



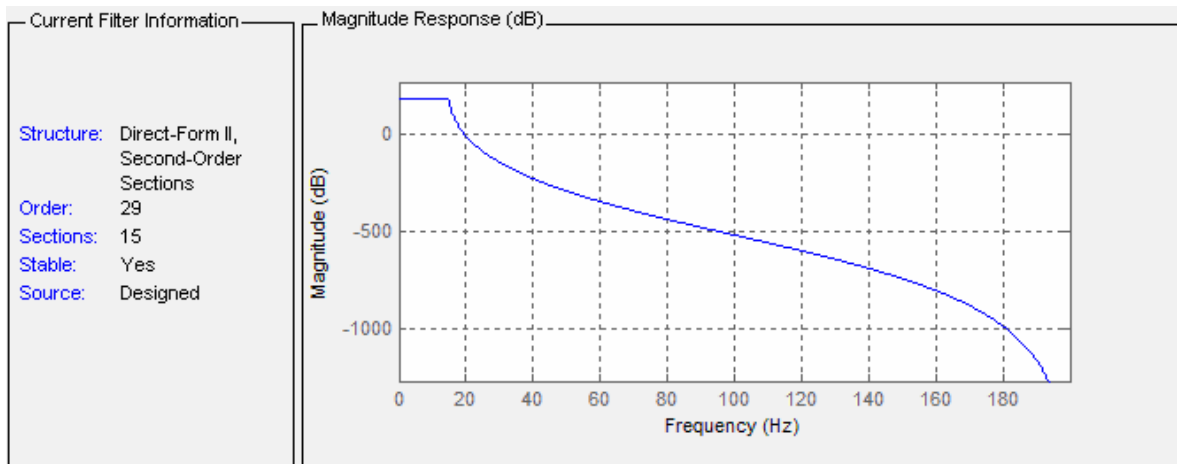
Obrázek 40: Test dolní propusti - Filtr FIR – Complex Equiripple

Filtr IIR – Butterworth



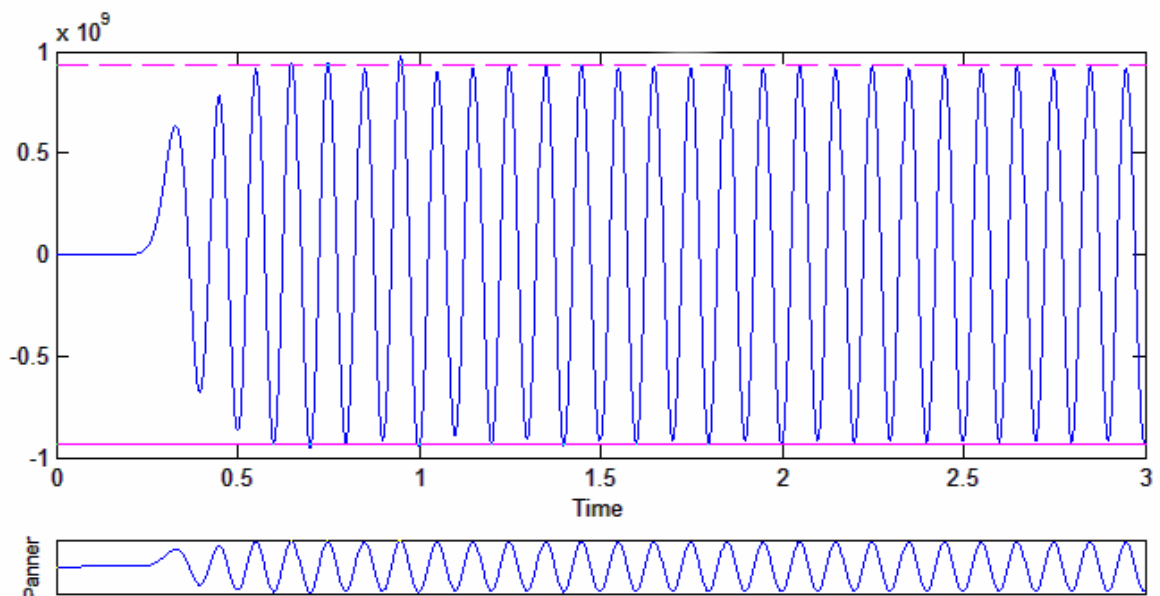
Obrázek 41: Test dolní propusti - Filtr IIR – Butterworth

Filtr IIR – Chebyshev Type I



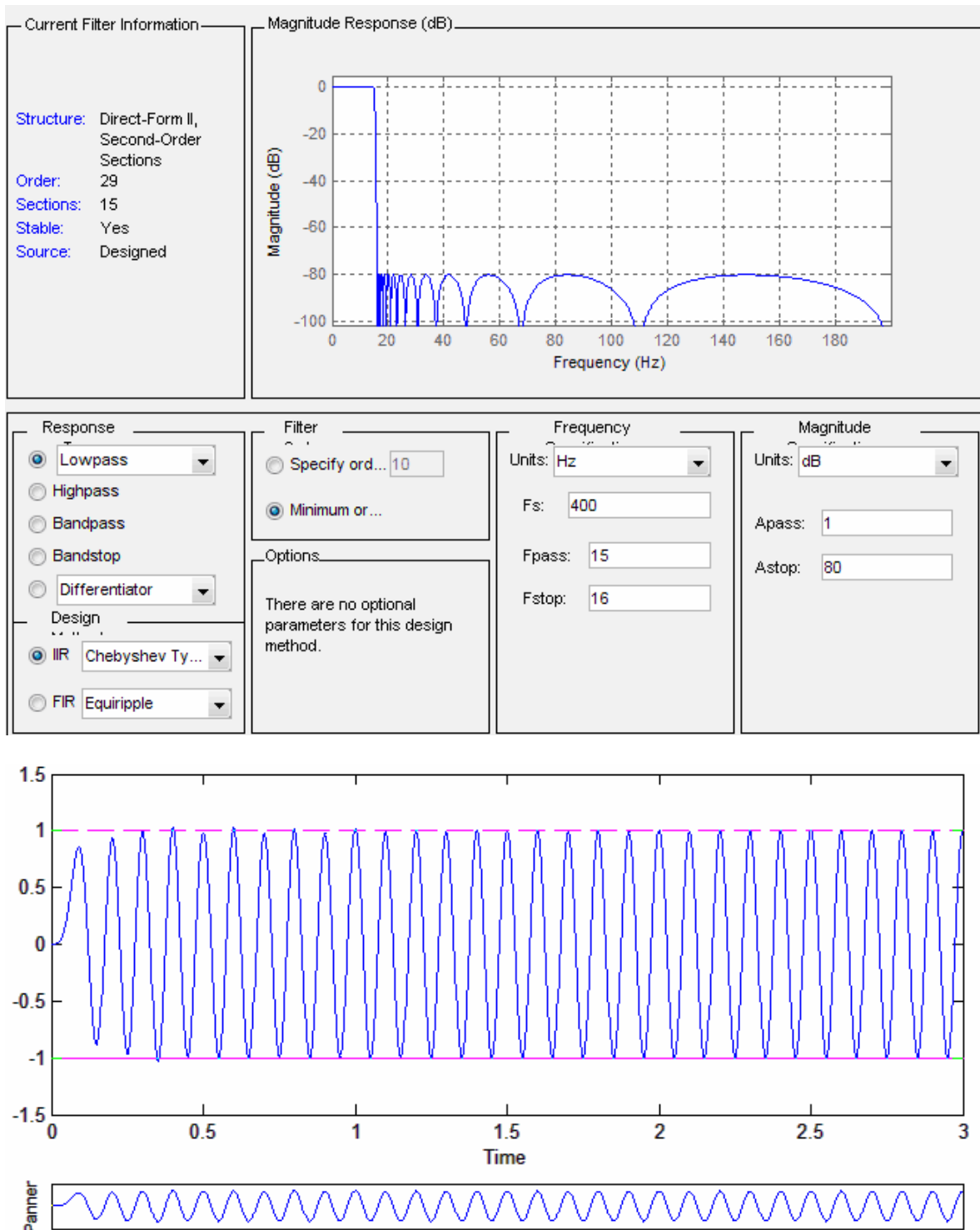
The control panel for the filter design is divided into four sections:

- Response:** Radio buttons for Lowpass (selected), Highpass, Bandpass, Bandstop, Differentiator, and Design options for IIR Chebyshev Ty... (selected) and FIR Equiripple.
- Filter:** Radio buttons for Specify ord... (set to 10) and Minimum or... (selected).
- Options:** A text box stating 'There are no optional parameters for this design method.'
- Frequency:** Units: Hz; Fs: 400; Fpass: 15; Fstop: 16.
- Magnitude:** Units: dB; Apass: 1; Astop: 80.



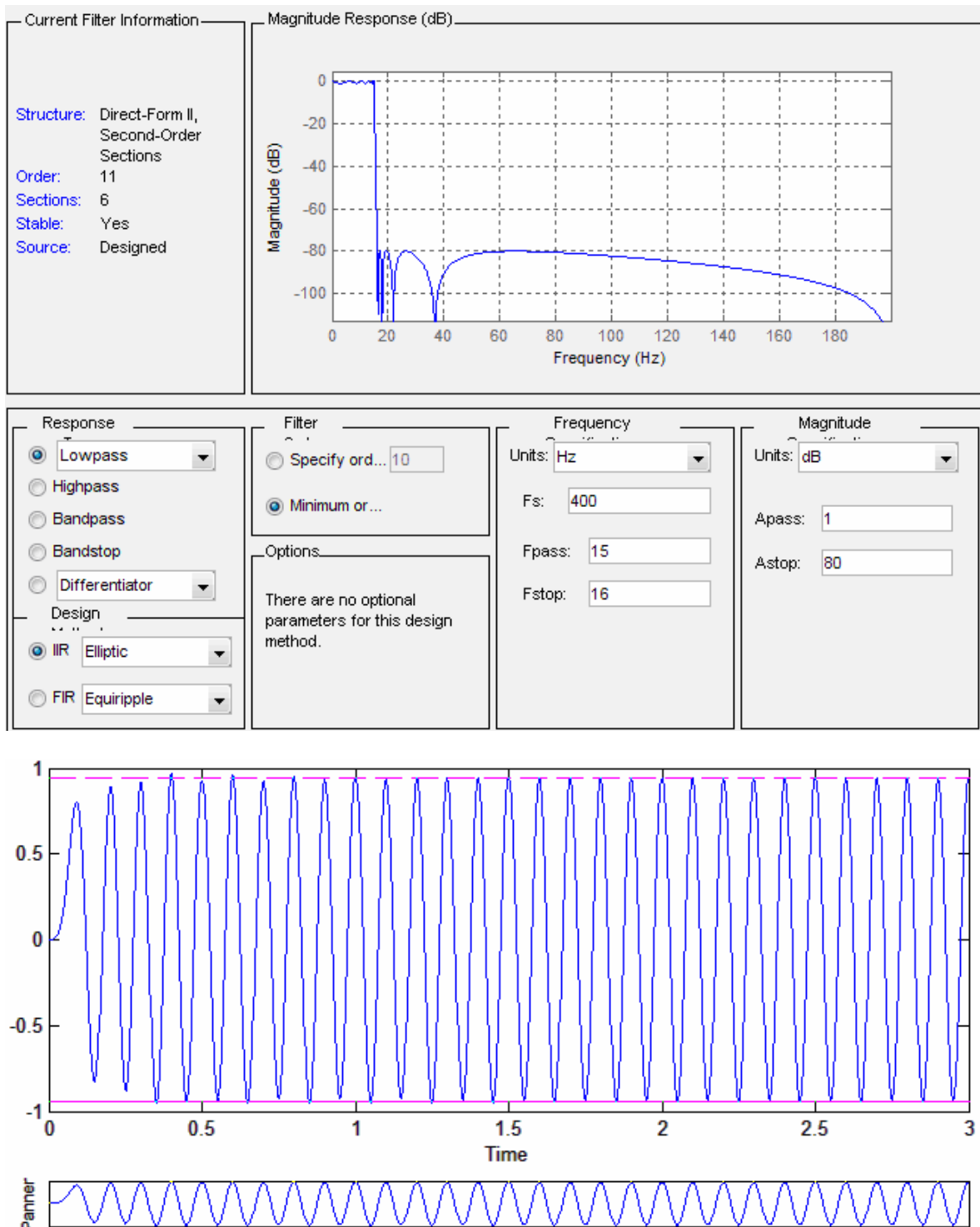
Obrázek 42: Test dolní propusti - Filtr IIR – Chebyshev Type I

Filtr IIR – Chebyshev Type II



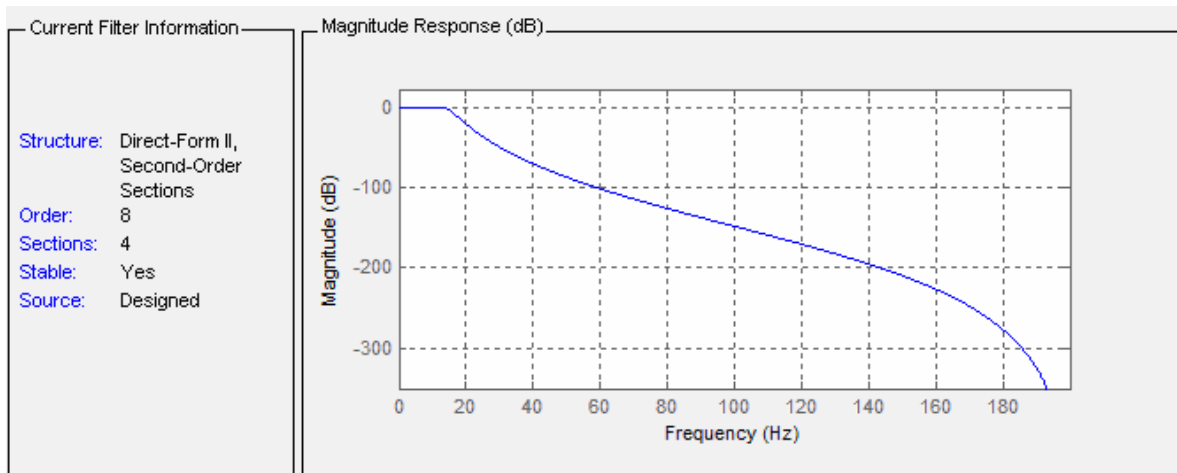
Obrázek 43: Test dolní propusti - Filtr IIR – Chebyshev Type II

Filtr IIR – Elliptic



Obrázek 44: Test dolní propusti - Filtr IIR – Elliptic

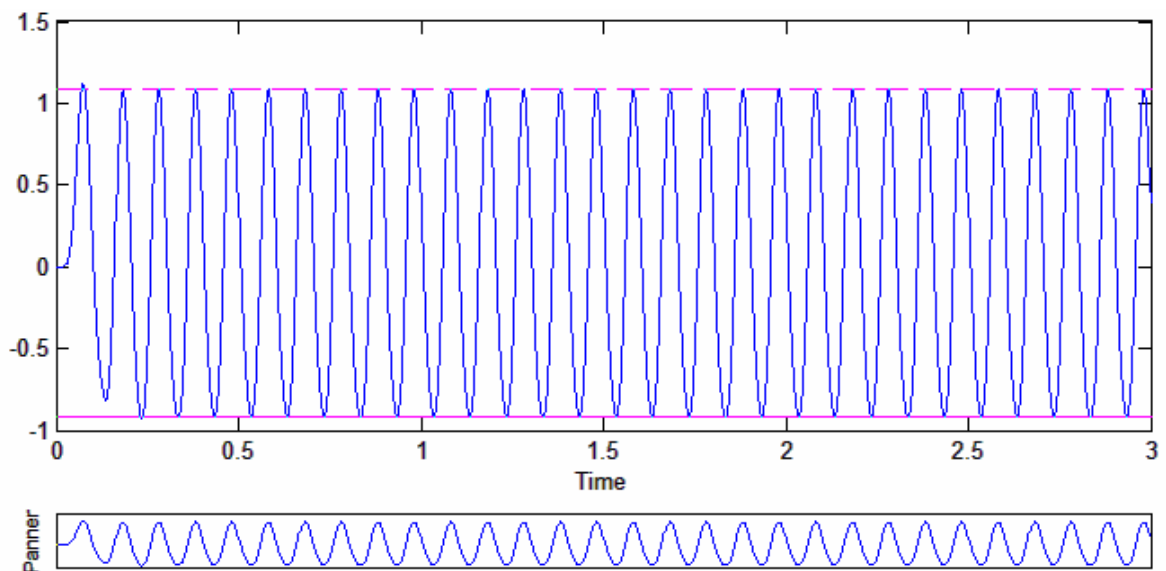
Filtr IIR – Maximally flat



This section contains four control panels:

- Response:** Radio buttons for Lowpass (selected), Highpass, Bandpass, Bandstop, and Differentiator.
- Filter:** Numerator order: 8, Denominator: 8.
- Frequency:** Units: Hz, Fs: 400, Fc: 15.
- Magnitude:** Text indicating that the attenuation at cutoff frequencies is fixed at 3 dB (half the passband power).

 Below these panels is an 'Options' section with the text: 'There are no optional parameters for this design method.'

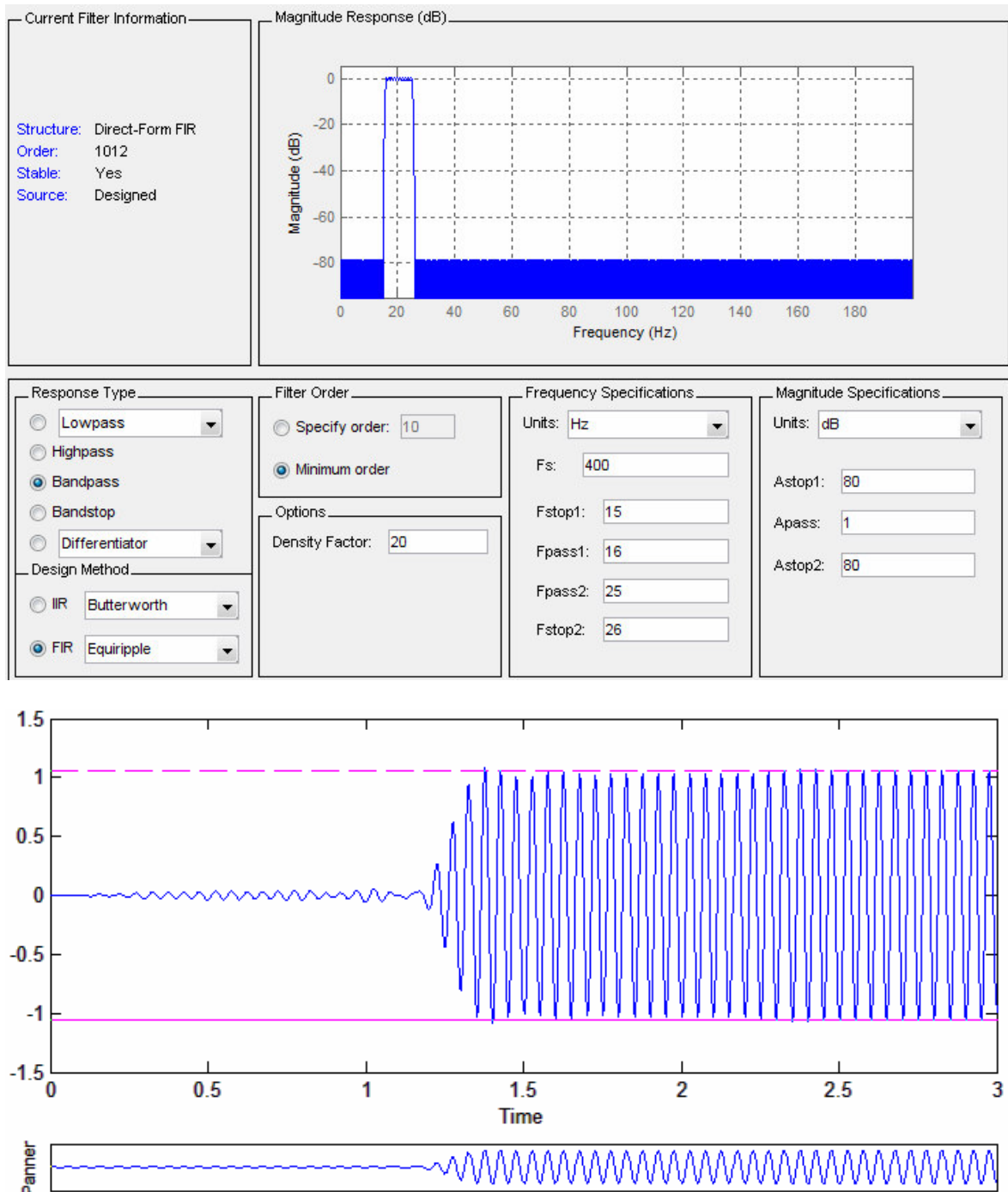


Obrázek 45: Test dolní propusti - Filtr IIR – Maximally flat

4.3.2 Pásmová propust

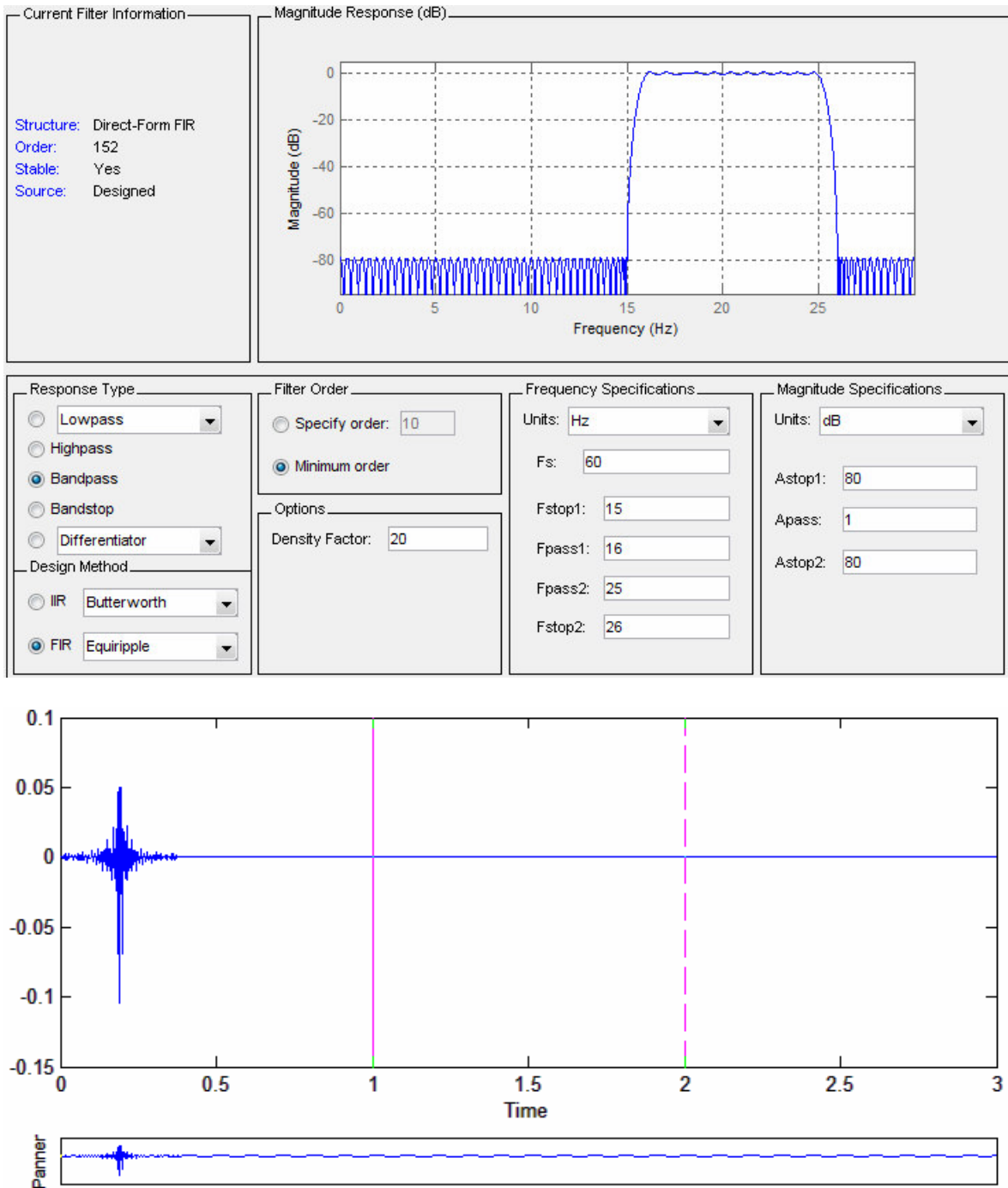
Měl by vyjít 20Hz sin signál o amplitudě 1.

Filtr FIR - Equiripple, Fs 400 Hz



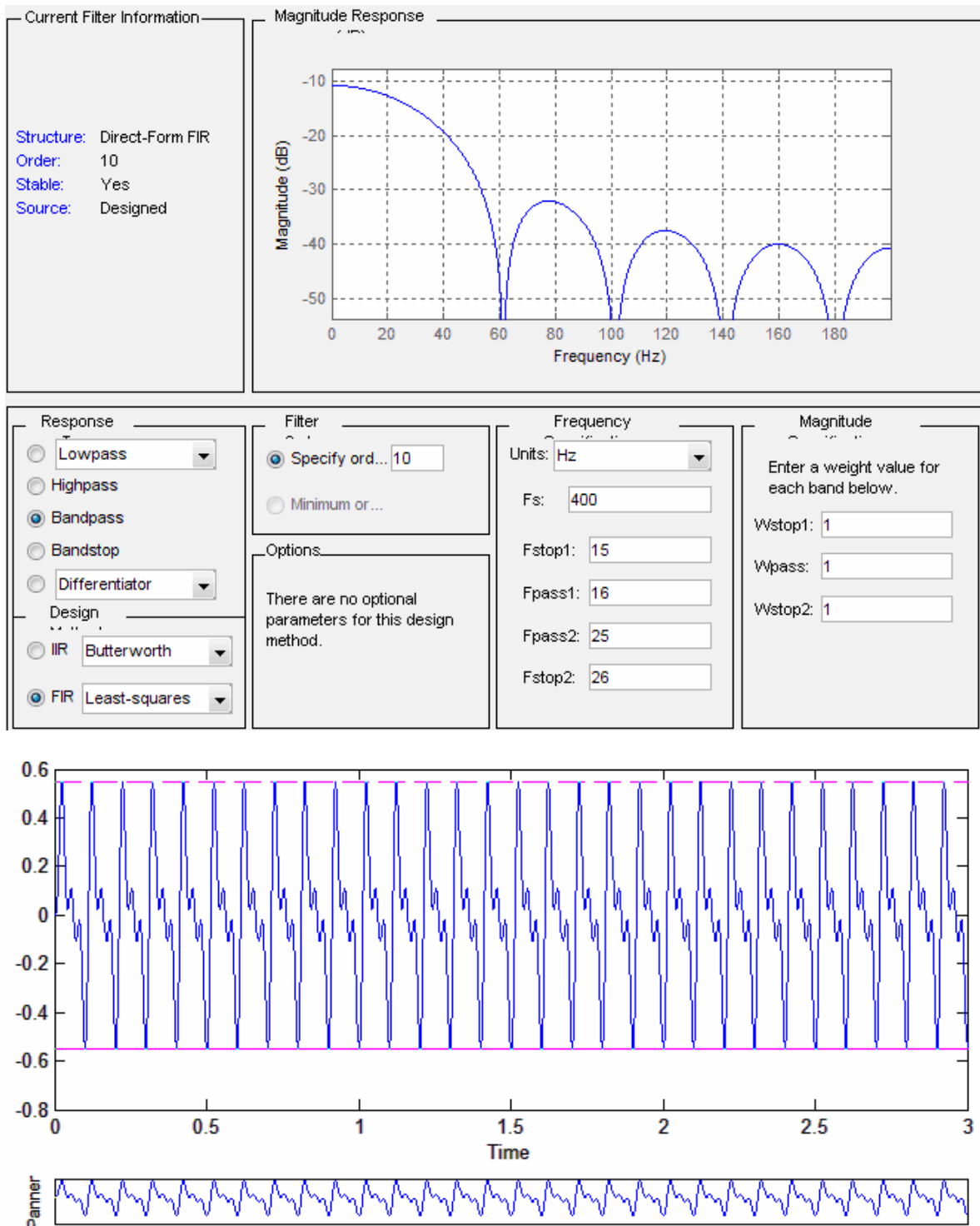
Obrázek 46: Test pásmové propusti - Filtr FIR - Equiripple, Fs 400 Hz

Filtr FIR - Equiripple, F_s 60 Hz



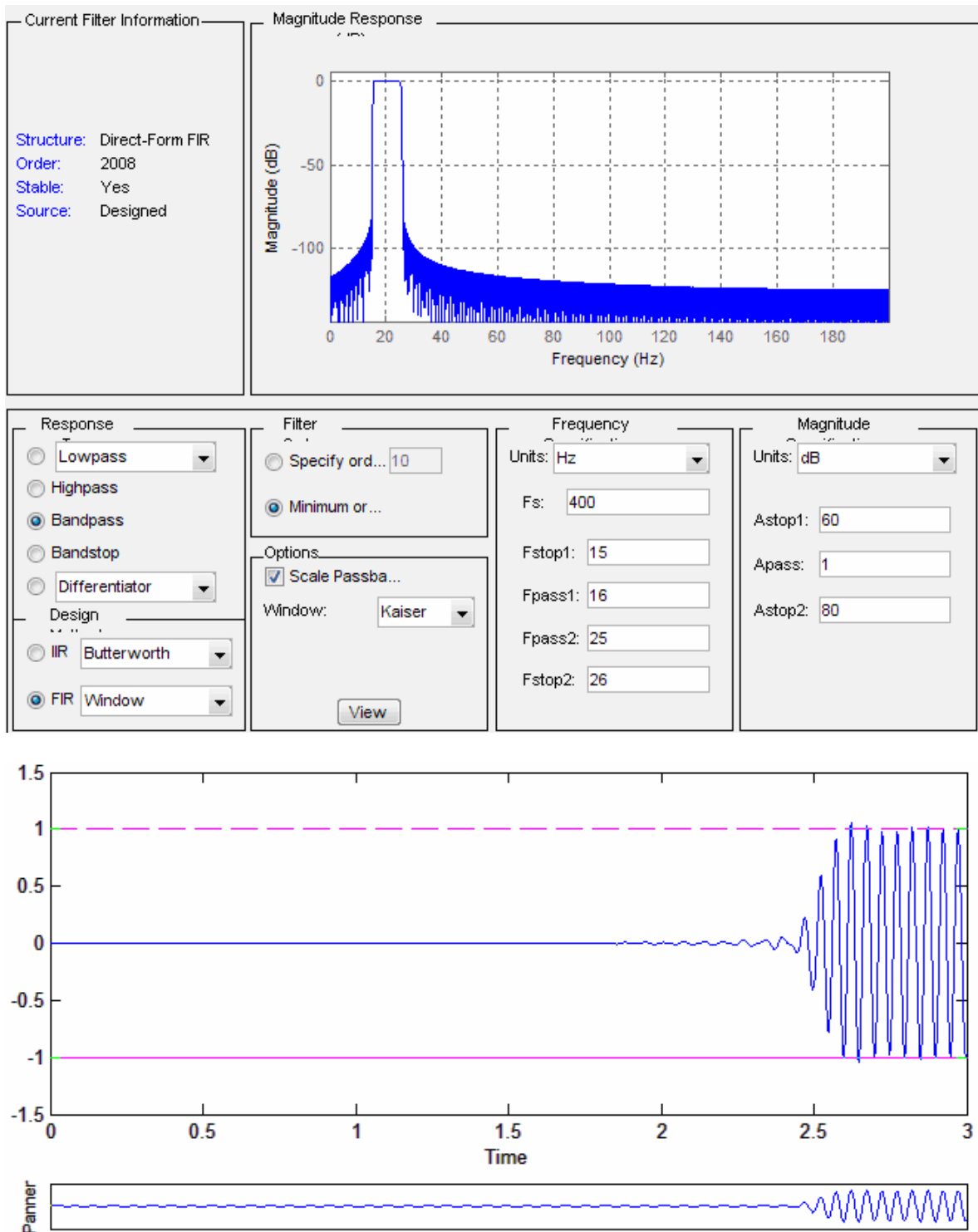
Obrázek 47: Test pásmové propusti - Filtr FIR - Equiripple, F_s 60 Hz

Filtr FIR – Least-squares



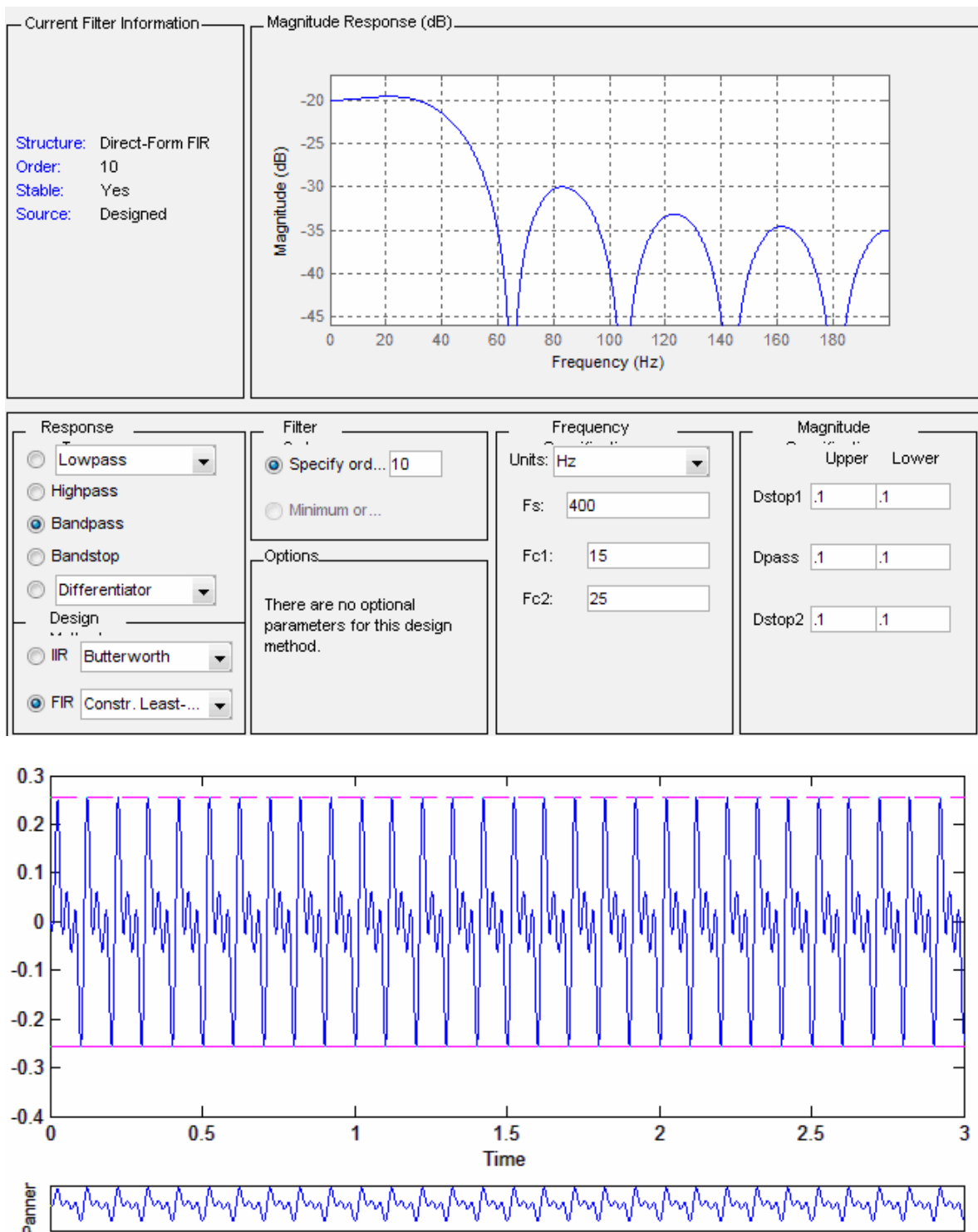
Obrázek 48: Test pásmové propusti - Filtr FIR – Least-squares

Filtr FIR – Windows



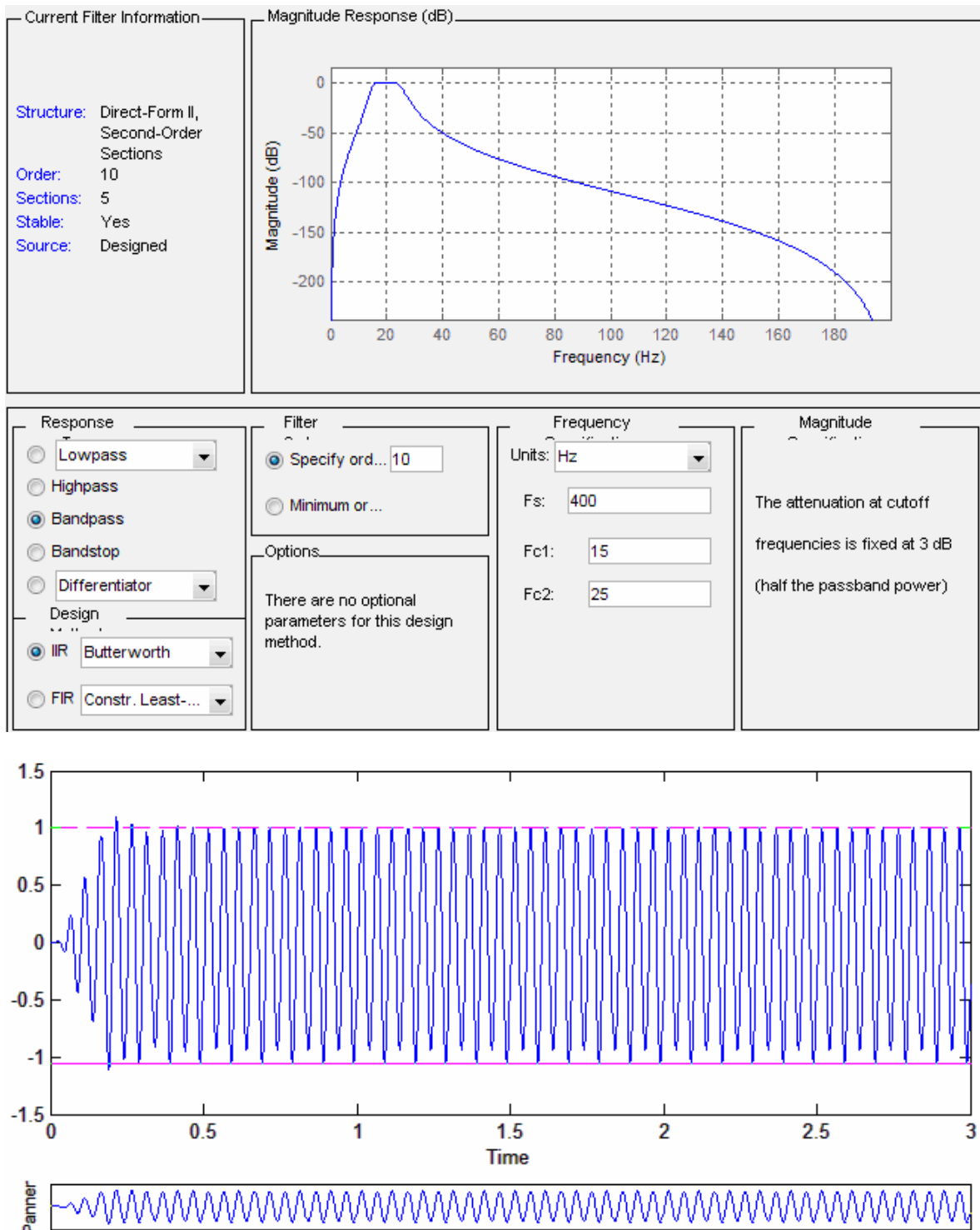
Obrázek 49: Test pásmové propusti - Filtr FIR – Windows

Filtr FIR – Constr. Least-squares



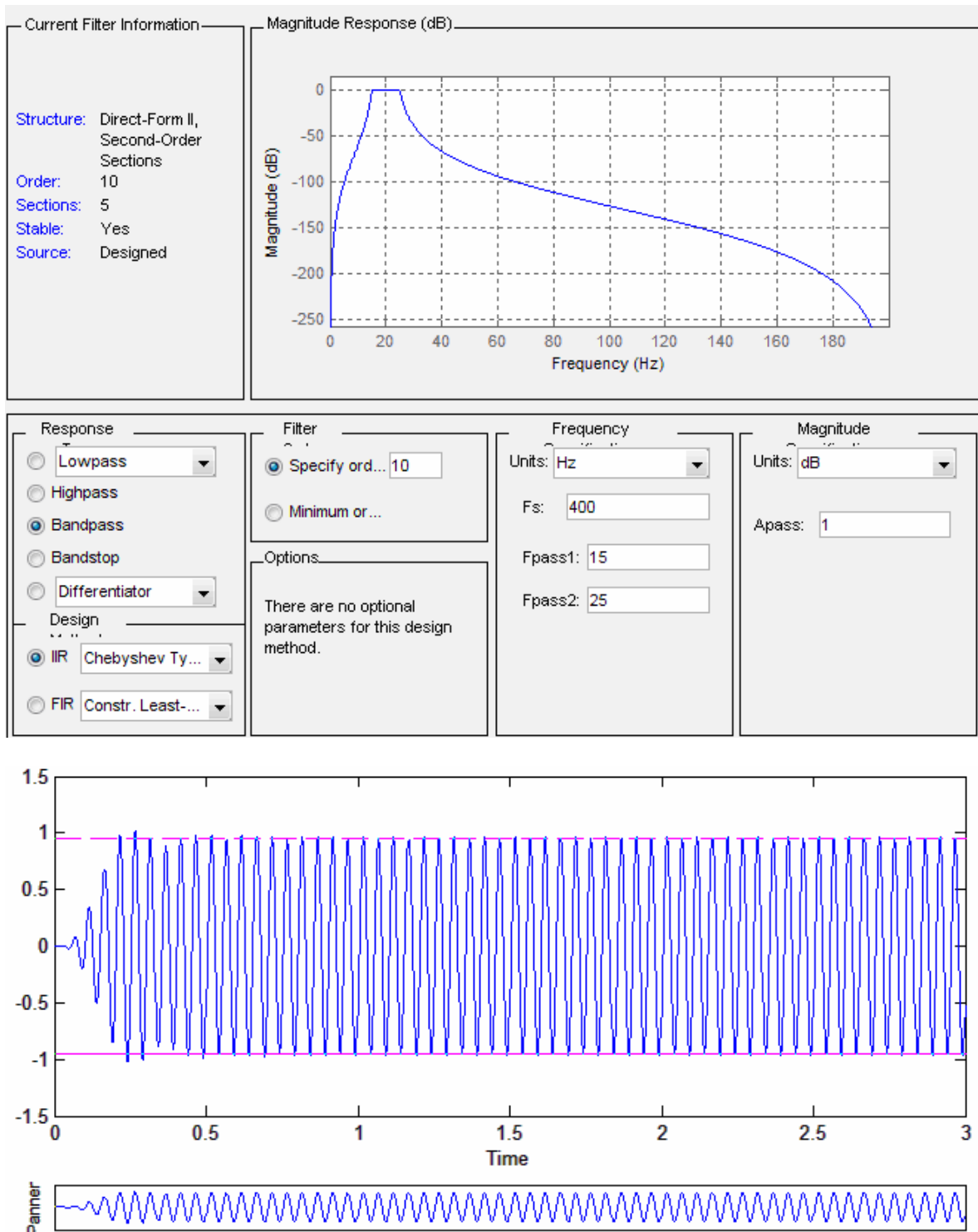
Obrázek 50: Test pásmové propusti - Filtr FIR – Constr. Least-squares

Filtr IIR – Butterworth



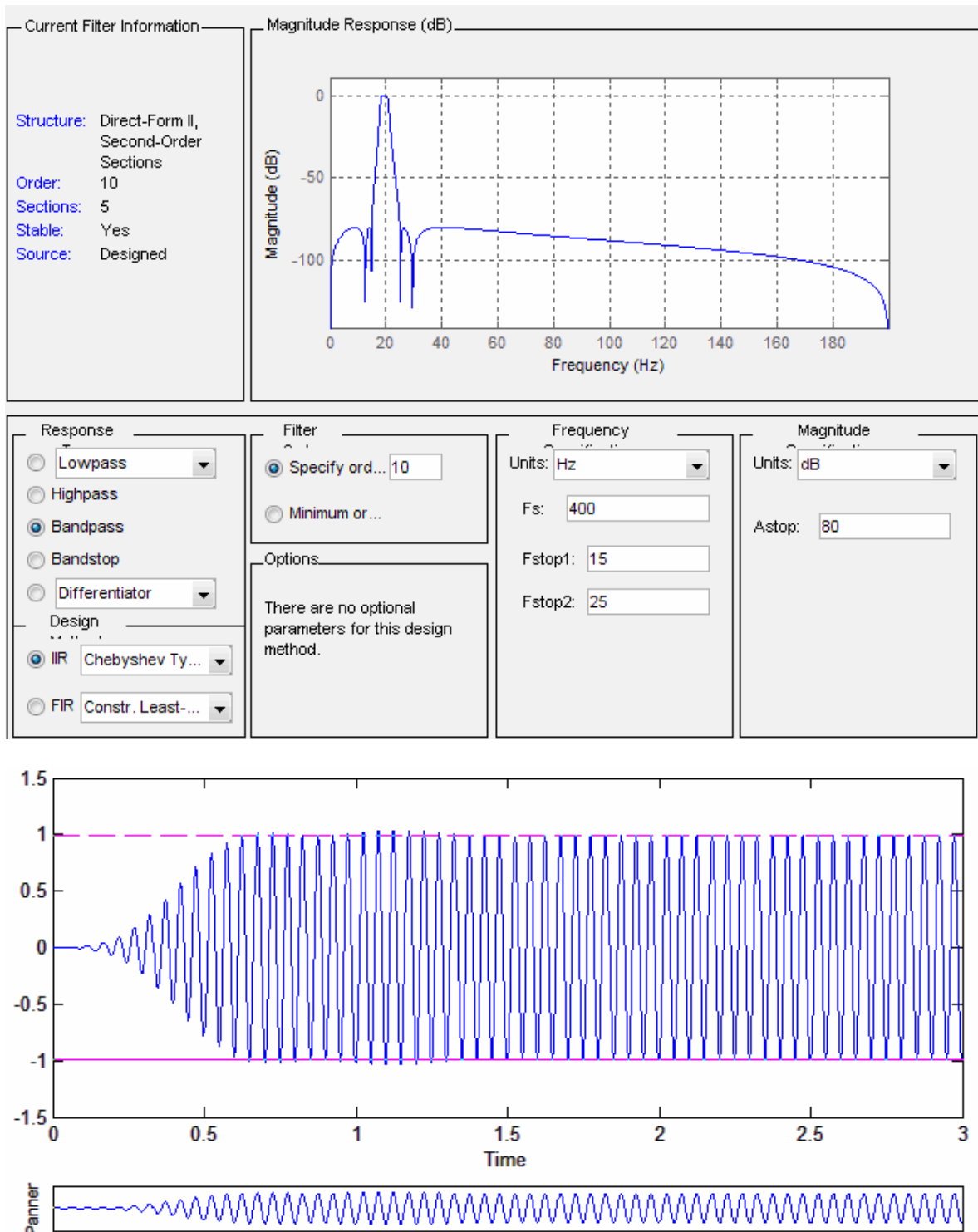
Obrázek 51: Test pásmové propusti - Filtr IIR – Butterworth

Filtr IIR – Chebyshev Type I



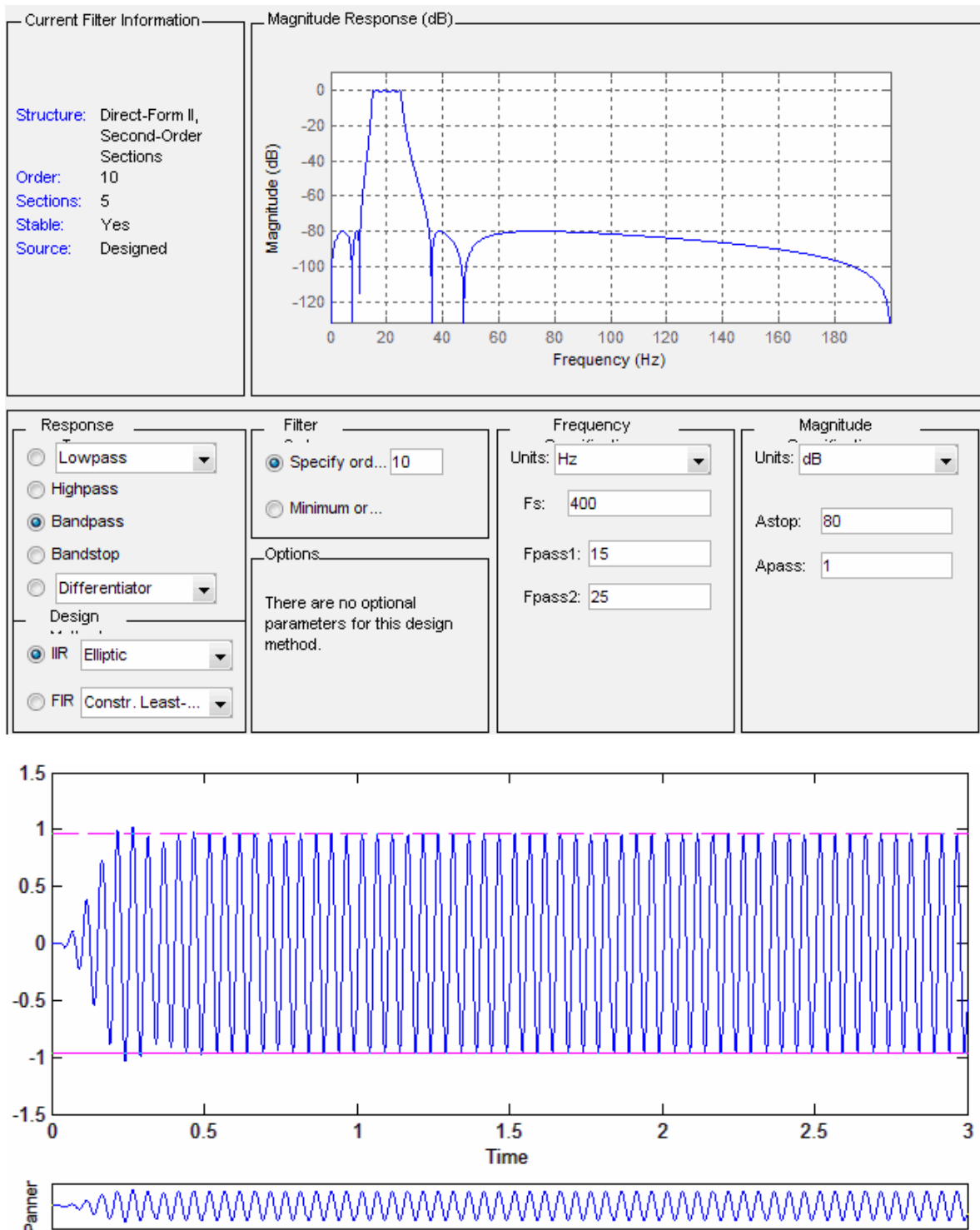
Obrázek 52: Test pásmové propusti - Filtr IIR – Chebyshev Type I

Filtr IIR – Chebyshev Type II



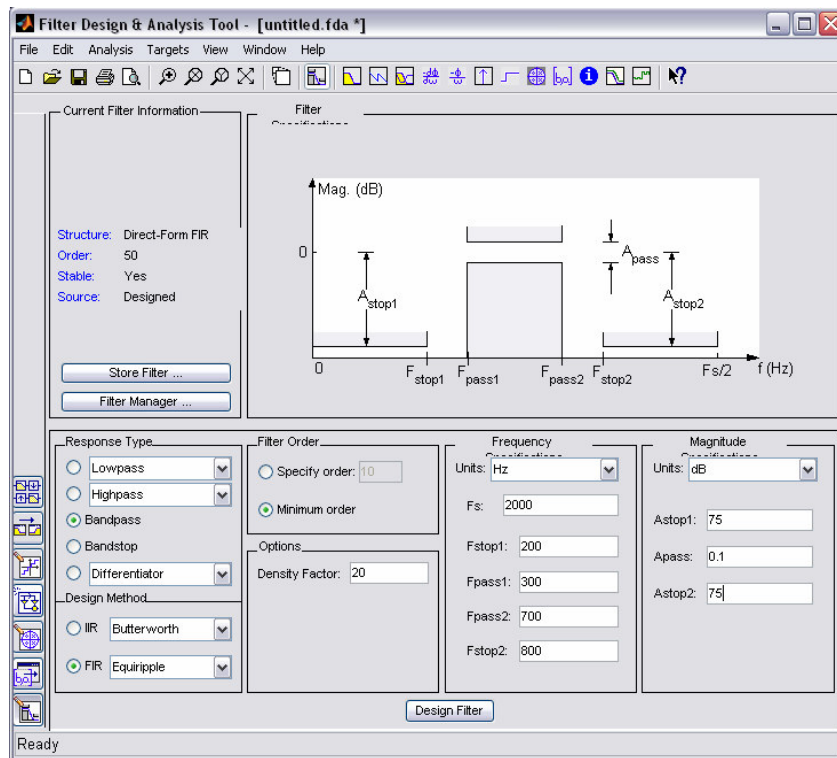
Obrázek 53: Test pásmové propusti - Filtr IIR – Chebyshev Type II

Filtr IIR - Elliptic

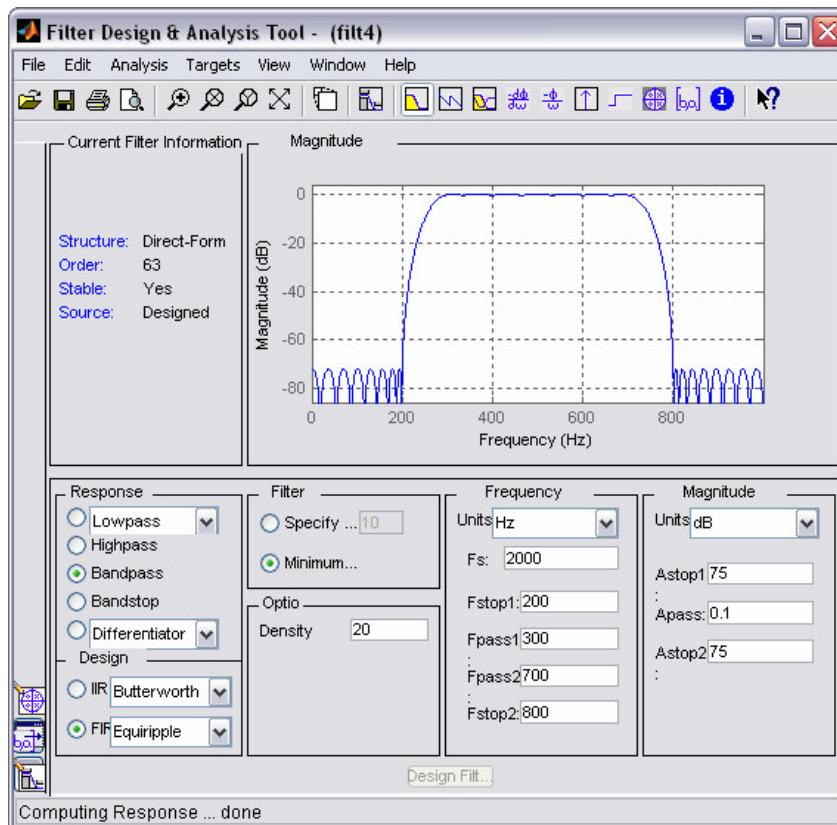


Obrázek 54: Test pásmové propusti - Filtr IIR - Elliptic

4.4 Návrh filtru pásmové propusti a jeho použití

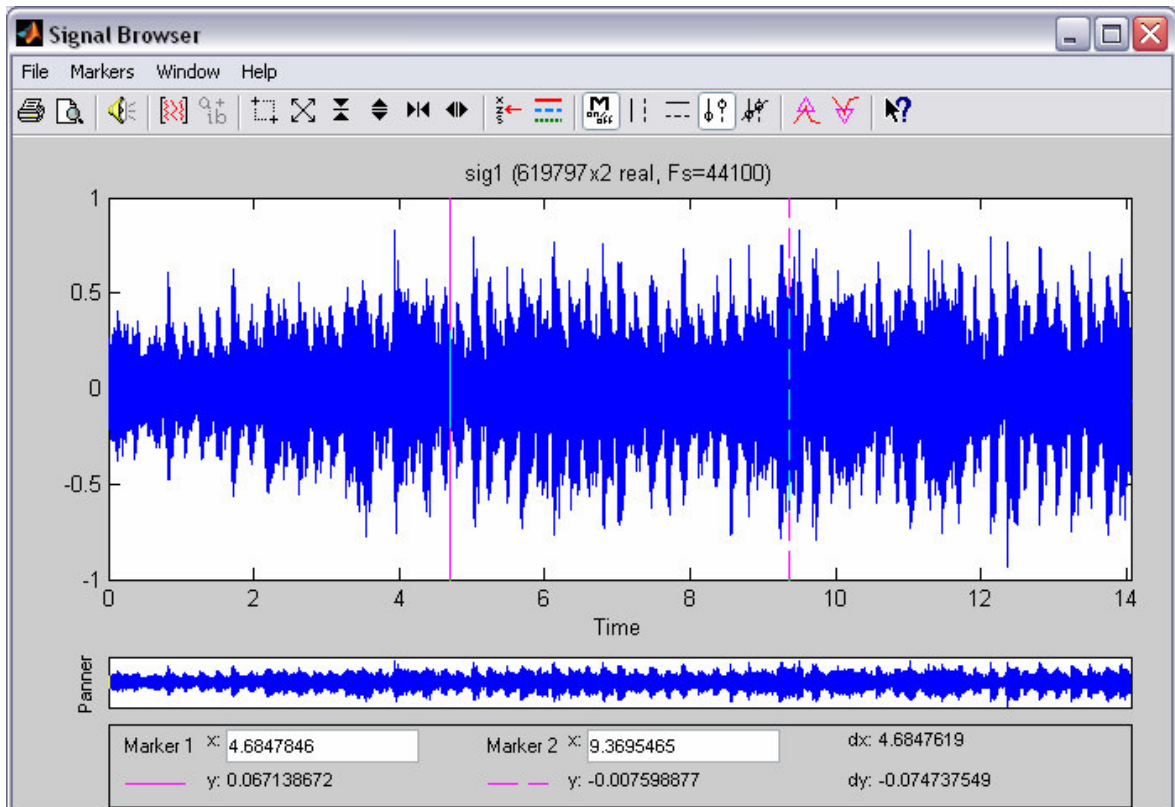


Obrázek 55: Návrh filtru pro jeho realizaci s audio nahrávkou



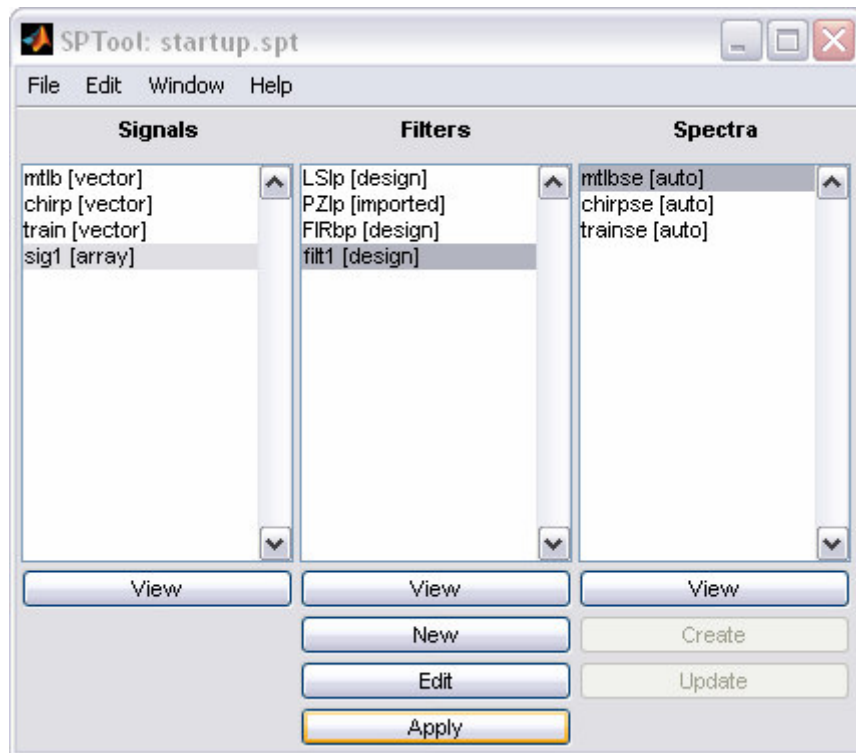
Obrázek 56: Filtr pro realizaci s audio nahrávkou

Byl načten audio signál a dále vytvořen filtr pásmové propusti, kde se filtrovaly frekvence menší jak 200Hz a větší než 800. Dále je možno se signálem pracovat při zpracování signálů a jeho filtraci. V ukázkovém případě byla načtena část audio nahrávky *.wav, která vypadá následovně:



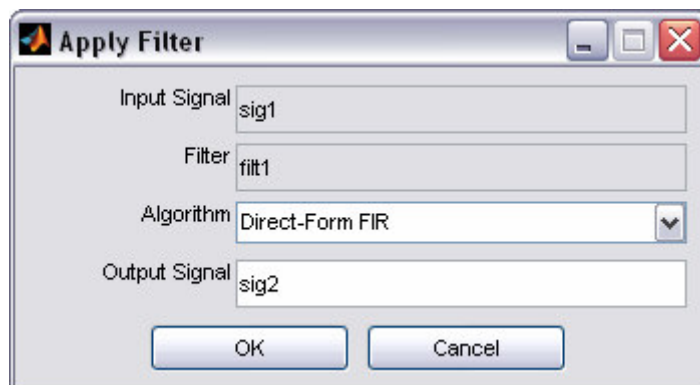
Obrázek 57: Původní audio nahrávka

Po použití filtru, kde je potřeba aplikovat již vytvořený filtr na audio nahrávku, je vybrán vstupní signál, dále vybrán vytvořený filtr a stisknuto tlačítko **Apply** (použít).



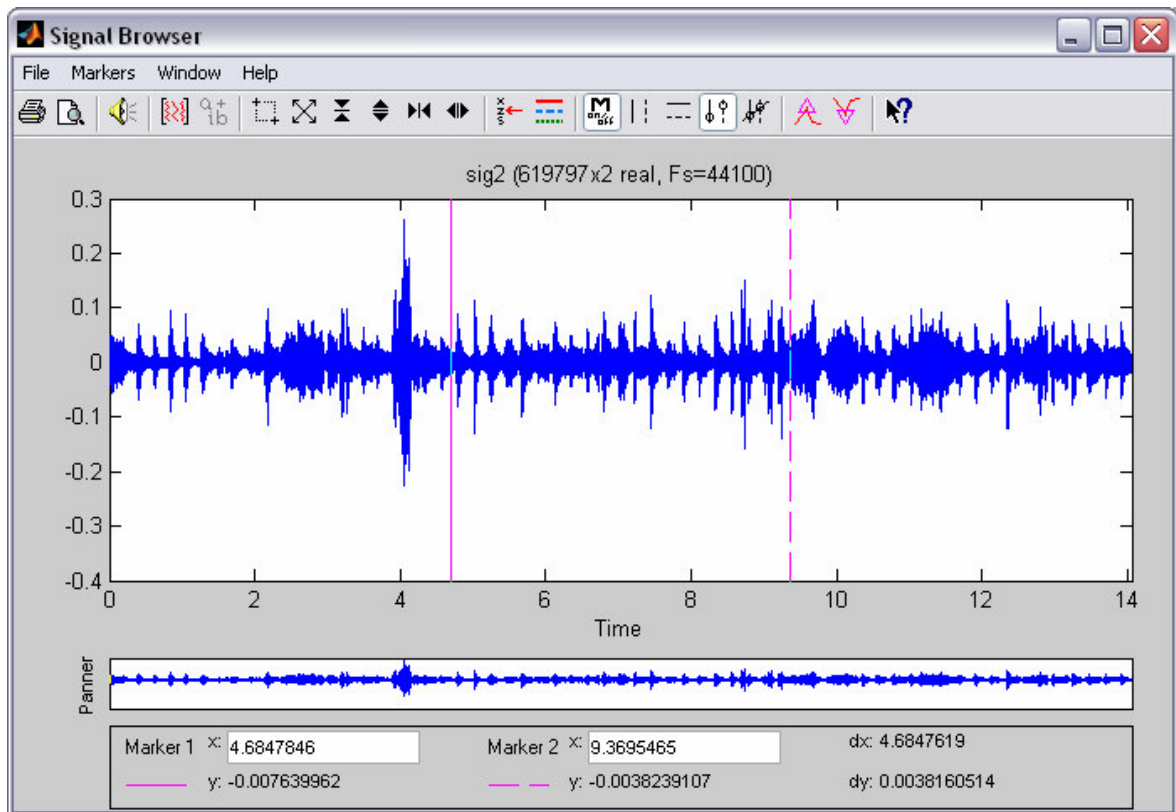
Obrázek 58: Okno SPTOOL

Nové okno nás informuje, že na signál *sig1* je aplikován filtr *filt1*.



Obrázek 59: Okno pro potvrzení aplikování filtru na daný signál

Po odsouhlasení je vytvořen nový signál, v našem případě *sig2*, který v náhledu vypadá následovně.



Obrázek 60: Audio nahrávka, na kterou byl aplikován filtr

Pokud je tedy nový signál porovnán s originálním, je již rozdíl patrný.

ZÁVĚR

Tato diplomová práce se podrobněji zabývala *Signal Processing Toolboxem* (SPTOOL) a *Filter Design&Analysis Toolboxem* (FDATOOL) v prostředí MATLAB, které slouží pro filtraci a analýzu signálů.

Byla vytvořena literární rešerše k teorii pravděpodobnosti, která lépe slouží k nabytí znalostí pro práci se signály.

Signal Processing Toolbox v prostředí MATLAB umožňuje načtená data analyzovat, *Filter Design&Analysis Toolbox* umožňuje vytváření filtrů, jeho editace a ukládání. Byly podrobněji rozebrány funkce SPTOOL, které umožní lépe analyzovat a filtrovat signál, rozebrány možnosti, které *Signal processing toolbox* nabízí a jak se s ním pracuje. Jako součást této práce bylo také zjistit možnosti a schopnosti toolboxu s názvem FDATOOL, v kterém se vytvářejí filtry. Následně na to byly aplikovány praktické příklady na generovaných a reálných datech s použitím daných filtrů rozdílých metod (FIR/IIR), které slouží k lepšímu porovnání daných metod pro filtraci.

CONCLUSION

This thesis is focused on *Signal Processing Toolbox (SPTOOL)* and *Filter Design&Analysis Toolbox (FDATOOL)* in MATLAB environment. These tools serve for filtration and analysis of signal.

Theoretical research was aimed at understanding of probability theory focusing on gaining knowledge for work with signals.

Signal Processing Toolbox in MATLAB environment allows analysis of loaded data. *Filter Design&Analysis Toolbox* is focused on creating filters, their editation and saving whereas *Signal Processing Toolbox* in MATLAB environment allows analysis of loaded data. Analysis of SPTOOL describes its functions excelling in signal analysis and filtering, showing its possibilities and ways how to use it. Part of this thesis aims at possibilities of FDATOOL filters' usage. Comparison of methods (FIR/IIR) was performed on generated and real data using selected filters.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] Ackson, L.B. Signals, systems and transforms. Adison-Wesley. 1991
- [2] Bobál, V., Identifikace systémů (Skripta), VUT Brno, FT Zlín, 1990
- [3] Jan, J. Číslíková filtrace, analýza a restaurace signálů. VUT Brno 1997
- [4] Kraniuskas, P. Transforms in signals and systéme. Adison-Wesley. 1995
- [5] Kubíček, Z., Diplomová práce, VUT Brno, FT, 1997
- [6] Ondráček, O. Signály a systavy. Slovenská technická univerzita v Bratislavě, 2003. ISBN 80-227-1875-0
- [7] Zaplatílek, K., Doňar, B., MATLAB pro začátečníky. vydal: Praha: BEN – technická literature. 2005. ISBN 80-7300-175-6
- [8] Zaplatílek, K., Doňar, B., MATLAB, začínám se signály, vydal: Praha: BEN – technická literature. 2006. ISBN 80-7300-200-0.
- [9] TheMathWorks, Signal Processing Toolbox, Natic, 2004

Internetové odkazy

- [10] http://www.fce.vutbr.cz/veda/juniorstav2008_sekce/pdf/2_7/Gottvald_Jakub_CL.pdf
- [11] www.humusoft.cz/produkty/MATLAB/aknihovny/signal/
- [12] www.wikipedia.org
- [13] www.352.vsb.cz/uc_texty/autorizMATLAB/kap1.html
- [14] <http://homen.vsb.cz/~oti73/cdpast1/KAP04/PRAV4.HTM>
- [15] <http://homen.vsb.cz/~oti73/cdpast1/KAP05/PRAV5.HTM>
- [16] apfyz.upol.cz/ucebnice/down/mini/fourtrans.pdf
- [17] http://www.am.vsb.cz/studium/integralni_transformace/fourierova_transformace/sec5_3.htm
- [18] <http://astronuklfyzika.cz/Filtry.htm>

SEZNAM NEJPOUŽÍVANĚJŠÍCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

<i>*</i>	komplexní sdružení
<i>*.spt</i>	přípona uloženého souboru SPTOOL
<i>*.wav</i>	přípona uloženého souboru audio nahrávky
<i>Apass</i>	útlum signálu propouštěcí frekvence
<i>Apass</i>	útlum signálu zádržné frekvence
<i>Bandpass</i>	pásmová propust
<i>Bandstop</i>	pásmová zádrž
<i>D(X)</i>	rozptyl
<i>dB</i>	decibel
<i>DFT</i>	diskrétní Fourierova transformace
<i>e</i>	log. číslo, přibližně 2,7
<i>E(X)</i>	střední hodnota
<i>F</i>	značení Fourierovy transformace
<i>f</i>	funkce
<i>f(x)</i>	hustota pravděpodobnosti
<i>F(x)</i>	distribuční funkce
<i>FDATOOL</i>	Filter Design&Analysis Toolbox
<i>FFT</i>	rychlá Fourierova transformace
<i>FIR</i>	filtr s konečnou impulsní charakteristikou
<i>Fpass</i>	frekvence nastavení filtru, v kterém pouští fekvence
<i>Fstop</i>	frekvence nastavení filtru, v kterém nepouští fekvence
<i>FT</i>	Fourierova transformace
<i>g</i>	funkce
<i>Highpass</i>	horní prospust

Hz	frekvence - počet stejných cyklů za sekundu
IIR	filtr s nekonečnou impulsní charakteristikou
$K_{xx}(\tau)$	kovariance mezi dvěma hodnotami jednoho signálu
$K_{xy}(\tau)$	kovariance mezi dvěma hodnotami dvou signálů
$Lowpass$	dolní propust
N	počet hodnot
$P(X)$	pravděpodobnost v intervalu 0-1
R	reálné číslo
$R_{xx}(\tau)$	korelace mezi dvěma hodnotami jednoho signálu
$R_{xy}(\tau)$	korelace mezi dvěma hodnotami dvou signálů
$s(k)$	diskrétní funkce (originální) - posloupnost
$s(t)$	spojitá funkce (originální)
$S(\omega)$	Fourierův obraz funkce pro spojitý čas
$S(\Omega)$	Fourierův obraz funkce pro diskrétní čas
$SPTOOL$	Signal Processing Toolbox
$S_{xx}(\omega)$	výkonová spektrální hustota
t	čas
x_i	hodnota veličiny "i-té" pozice
λ	převrácená hodnota střední hodnoty doby čekání do nastoupení sledovaného jevu.
μ	střední hodnota
σ - algebra	na základě ní se definuje pravděpodobnost
σ^2	rozptyl
τ	posunutí o časový úsek
ω	úhlová frekvence [$\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$]

SEZNAM OBRÁZKŮ

<i>Obrázek 1: Graf hustoty pravděpodobnosti</i>	13
<i>Obrázek 2: Graf distribuční funkce</i>	14
<i>Obrázek 3: Exponenciální rozložení - graf hustoty pravděpodobnosti</i>	15
<i>Obrázek 4: Exponenciální rozložení - graf distribuční funkce</i>	16
<i>Obrázek 5: Normální rozdělení - Gaussova-Laplaceova křivka</i>	18
<i>Obrázek 6: Normální rozdělení - graf distribuční funkce</i>	19
<i>Obrázek 7: Normované normální rozdělení - graf hustoty pravděpodobnosti</i>	20
<i>Obrázek 8: Normované normální rozdělení - graf distribuční funkce</i>	20
<i>Obrázek 9: Normální rozložení – grafické znázornění příkladu</i>	22
<i>Obrázek 10: Weibullovo rozdělení - graf hustoty pravděpodobnosti</i>	23
<i>Obrázek 11: Weibullovo rozdělení - graf distribuční funkce</i>	24
<i>Obrázek 12: Binomické rozložení – grafické zobrazení příkladu</i>	29
<i>Obrázek 13: Poissonovo rozdělení – grafické znázornění příkladu</i>	31
<i>Obrázek 14: Hypergeometrické rozdělení – grafické znázornění příkladu</i>	33
<i>Obrázek 15: Dělení signálů</i>	34
<i>Obrázek 16: Výhodnost použití FFT oproti DFT v závislosti na počtu vorků signálu</i>	44
<i>Obrázek 17: Hlavní okno Signal Processing Toolboxu</i>	51
<i>Obrázek 18:SPTOOL – okno Signále</i>	52
<i>Obrázek 19:SPTOOL – okno Signals – ukázka vložení signálu</i>	52
<i>Obrázek 20:SPTOOL - okno Signals – ukázka vložení signálu ve formě dat z Workspace</i>	52
<i>Obrázek 21:SPTOOL – zobrazení vloženého signálu</i>	53
<i>Obrázek 22: SPTOOL – okno Filters</i>	54
<i>Obrázek 23: SPTOOL – okno Spektra</i>	55
<i>Obrázek 24:SPTOOL – zobrazení frekvenčních složek v signálu</i>	57
<i>Obrázek 25: FDATAOOL – hlavní okno</i>	58
<i>Obrázek 26:FDATOOL – Nastavení druhu použitého filtru</i>	59
<i>Obrázek 27:FDATOOL – Nastavení frekvencí filtrů</i>	61
<i>Obrázek 28:FDATOOL – Nastavení útlumu filtru</i>	61
<i>Obrázek 29: Závislost útlumu signálu v dB na frekvenci v Hz daného filtru</i>	62
<i>Obrázek 30: Závislost fáze v radiánech na frekvenci v Hz daného filtru</i>	63

<i>Obrázek 31: Závislost fáze a útlumu na frekvenci daného filtru</i>	63
<i>Obrázek 32: Impulsní charakteristika filtru.....</i>	64
<i>Obrázek 33: Skoková charakteristika filtru</i>	64
<i>Obrázek 34: Zobrazení nul a pólů daného filtru.....</i>	65
<i>Obrázek 35: Složení třech signálů 10+20+30 Hz, každý o amplitudě 1</i>	66
<i>Obrázek 36: Test dolní propusti - Filtr FIR - Equiripple, F_s 400 Hz, $A_{pass} = 1dB$</i>	67
<i>Obrázek 37: Test dolní propusti - Filtr FIR - Equiripple, F_s 400 Hz, $A_{pass} = 0.01dB$</i>	68
<i>Obrázek 38: Test dolní propusti - Filtr FIR - Equiripple, $F_s = 40$ Hz</i>	69
<i>Obrázek 39: Test dolní propusti - Filtr FIR – Least-squares</i>	70
<i>Obrázek 40: Test dolní propusti - Filtr FIR – Complex Equiripple.....</i>	71
<i>Obrázek 41: Test dolní propusti - Filtr IIR – Butterworth</i>	72
<i>Obrázek 42: Test dolní propusti - Filtr IIR – Chebyshev Type I</i>	73
<i>Obrázek 43: Test dolní propusti - Filtr IIR – Chebyshev Type II</i>	74
<i>Obrázek 44: Test dolní propusti - Filtr IIR – Elliptic</i>	75
<i>Obrázek 45: Test dolní propusti - Filtr IIR – Maximally flat</i>	76
<i>Obrázek 46: Test pásmové propusti - Filtr FIR - Equiripple, F_s 400 Hz.....</i>	77
<i>Obrázek 47: Test pásmové propusti - Filtr FIR - Equiripple, F_s 60 Hz.....</i>	78
<i>Obrázek 48: Test pásmové propusti - Filtr FIR – Least-squares</i>	79
<i>Obrázek 49: Test pásmové propusti - Filtr FIR – Windows</i>	80
<i>Obrázek 50: Test pásmové propusti - Filtr FIR – Constr. Least-squares</i>	81
<i>Obrázek 51: Test pásmové propusti - Filtr IIR – Butterworth.....</i>	82
<i>Obrázek 52: Test pásmové propusti - Filtr IIR – Chebyshev Type I.....</i>	83
<i>Obrázek 53: Test pásmové propusti - Filtr IIR – Chebyshev Type II.....</i>	84
<i>Obrázek 54: Test pásmové propusti - Filtr IIR - Elliptic.....</i>	85
<i>Obrázek 55: Návrh filtru pro jeho realizaci s audio nahrávkou.....</i>	86
<i>Obrázek 56: Filtr pro realizaci s audio nahrávkou.....</i>	86
<i>Obrázek 57: Původní audio nahrávka</i>	87
<i>Obrázek 58: Okno SPTOOL.....</i>	88
<i>Obrázek 59: Okno pro potvrzení aplikování filtru na daný signál.....</i>	88
<i>Obrázek 60: Audio nahrávka, na kterou byl aplikován filtr</i>	89

SEZNAM TABULEK

Tabulka 1: Seznam použitých ikoněk SPTOOL	53
Tabulka 2: Seznam použitých ikoněk v SPTOOL – spektra	55