

Inovace výuky předmětu Matematika I obsahující ukázky řešení úloh v prostředí Mathematica

Inovation of education of Mathematics I subject containing examples of solving problems in Mathematica environment

Dalibor Klučka

Bakalářská práce
2011



Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky
akademický rok: 2010/2011

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: Dalibor KLUČKA
Osobní číslo: A08052
Studijní program: B 3902 Inženýrská informatika
Studijní obor: Informační a řídicí technologie

Téma práce: Inovace výuky předmětu Matematika I na FAI UTB ve Zlíně elektronickou podporou obsahující ukázky řešení vybraných úloh v prostředí Mathematica

Zásady pro vypracování:

1. Zpracujte příručku obsahující řešení vybraných nejzákladnějších úloh z předmětu Matematika I v prostředí Mathematica.
2. Zařadte do příručky variantní situace grafického zobrazení funkcí v rovině, zjednodušení matematických výrazů, základní vektorové a maticové operace, řešení nelineárních rovnic.
3. Navrhněte do příručky ukázky z diferenciálního počtu funkcí jedné proměnné.
4. Navrhněte do příručky ukázky z integrálního počtu funkcí jedné proměnné.
5. Zrealizujte zpřístupnění vytvořené elektronické podpory ve webovém rozhraní.

Rozsah bakalářské práce:

Rozsah příloh:

Forma zpracování bakalářské práce: tištěná/elektronická

Seznam odborné literatury:

1. DOBRAKOVÁ, Jana; KOVÁČOVÁ, Monika; ZÁHONOVÁ, Viera. Mathematica 5.2 :
tréninové materiály. Bratislava : Slovenská technická univerzita v Bratislavě,
2008. 277 s. ISBN 80-969562-2-1.
2. FIALKA, Miloslav; CHARVÁTOVÁ, Hana. Matematika I. Vyd. 2. Zlín : Univerzita
Tomáše Bati ve Zlíně, 2006. 108 s. ISBN 978-80-7318-584-8.
3. CHRAMCOV, Bronislav. Základy práce v prostředí Mathematica. Vyd. 2. Zlín :
Univerzita Tomáše Bati, 2006. 122 s. ISBN 80-7318-510-5.
4. KŘENEK, Josef; OSTRAVSKÝ, Jan. Diferenciální a integrální počet funkce jedné
proměnné s aplikacemi v ekonomii. Vyd. 6. Zlín : Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně,
2005. 231 s. ISBN 978-80-7318-761-3.
5. Mathematica – ELKAN : Dokumenty [online]. 2011 [cit. 2011-02-01]. Mathematica.
Dostupné z WWW: [http://www.mathematica.cz/dokumenty.php].
6. Wolfram Research. Wolfram [online]. 2011 [cit. 2011-02-01]. Dostupné z WWW:
[http://www.wolfram.com/].

Vedoucí bakalářské práce:

RNDr. Miloslav Fialka, CSc.

Ústav matematiky

Datum zadání bakalářské práce:

25. února 2011

Termín odevzdání bakalářské práce:

7. června 2011

Ve Zlíně dne 25. února 2011

prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.
děkan



prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.
ředitel ústavu

ABSTRAKT

Bakalářská práce je zaměřena na zpracování příručky obsahující ukázky řešení vybraných nejzákladnějších matematických úloh týkajících se diferenciálního a integrálního počtu funkcí jedné proměnné v programu Wolfram Mathematica. Teoretická část obsahuje popis tohoto programu a matematické definice i popis jednotlivých matematických problémů. Praktická část obsahuje ukázky kódu a výstupu z programu Mathematica, které vedou ke grafickému zobrazení a řešení vybraných příkladů, včetně animací.

Klíčová slova: Wolfram Mathematica, diferenciální počet, integrální počet, animace.

ABSTRACT

The bachelor work is focused on creating a manual containing examples of solving selected basic mathematical problems, which is concerned to differential and integral calculus of one variable functions in Wolfram Mathematica environment. The theoretical part includes a description of this environment and the mathematical definitions and description of mathematical problems. The practical part includes samples of code and output of Mathematica, which lead to graphical display and resolution of selected examples including animations.

Keywords: Wolfram Mathematica, differential calculus, integral calculus, animations.

Tímto děkuji vedoucímu bakalářské práce panu RNDr. Miloslavu Fialkovi, CSc. za jeho čas, připomínky a odborné vedení v průběhu vypracování práce.

Prohlašuji, že

- beru na vědomí, že odevzdáním bakalářské práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb. o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších právních předpisů, bez ohledu na výsledek obhajoby;
- beru na vědomí, že bakalářská práce bude uložena v elektronické podobě v univerzitním informačním systému dostupná k prezenčnímu nahlédnutí, že jeden výtisk bakalářské práce bude uložen v příruční knihovně Fakulty aplikované informatiky Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně a jeden výtisk bude uložen u vedoucího práce;
- byl/a jsem seznámen/a s tím, že na moji bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších právních předpisů, zejm. § 35 odst. 3;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 1 autorského zákona má UTB ve Zlíně právo na uzavření licenční smlouvy o užití školního díla v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 2 a 3 autorského zákona mohu užít své dílo – bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití jen s předchozím písemným souhlasem Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše);
- beru na vědomí, že pokud bylo k vypracování bakalářské práce využito softwaru poskytnutého Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně nebo jinými subjekty pouze ke studijním a výzkumným účelům (tedy pouze k nekomerčnímu využití), nelze výsledky bakalářské práce využít ke komerčním účelům;
- beru na vědomí, že pokud je výstupem bakalářské práce jakýkoliv softwarový produkt, považují se za součást práce rovněž i zdrojové kódy, popř. soubory, ze kterých se projekt skládá. Neodevzdání této součásti může být důvodem k neobhájení práce.

Prohlašuji,

- že jsem na bakalářské práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval. V případě publikace výsledků budu uveden jako spoluautor.
- že odevzdaná verze bakalářské práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG jsou totožné.

Ve Zlíně

.....
podpis diplomanta

OBSAH

ÚVOD	9
I TEORETICKÁ ČÁST	10
1 WOLFRAM MATHEMATICA	11
1.1 VZNIK.....	11
1.2 PROSTŘEDÍ PROGRAMU MATHEMATICA	11
1.3 INTERAKTIVNÍ NÁPOVĚDA	13
2 DIFERENCIÁLNÍ POČET FUNKCÍ JEDNÉ PROMĚNNÉ - MATEMATICKÉ DEFINICE.....	15
2.1.1 Reálná funkce reálné proměnné	15
2.1.2 Rozdělení funkcí.....	15
2.1.3 Rozšířená množina reálných čísel R^*	15
2.2 LIMITA FUNKCE.....	16
2.3 DERIVACE FUNKCE.....	17
2.3.1 Jednostranné derivace	17
2.3.2 Diferenciál funkce	18
2.3.3 Derivace vyšších řádů.....	18
2.3.4 Bernoulliovo - l'Hospitalovo pravidlo.....	19
2.4 EXTRÉMY FUNKCE, KONVEXNOST A KONKÁVNOST, INFLEXNÍ BOD	20
2.4.1 Lokální extrémů funkce	20
2.4.2 Globální (absolutní) extrémů funkce.....	20
2.4.3 Konvexnost a konkávnost funkce.....	20
2.4.4 Inflexní bod	22
3 INTEGRÁLNÍ POČET FUNKCÍ JEDNÉ PROMĚNNÉ - MATEMATICKÉ DEFINICE.....	24
3.1 NEURČITÝ INTEGRÁL.....	24
3.2 URČITÝ INTEGRÁL REIMANNŮV	25
3.2.1 Dělení intervalu	25
3.2.2 Integrální součet	25
3.2.3 Riemannův integrál.....	26
3.2.4 Newton-Liebnizova formule	26
II PRAKTICKÁ ČÁST.....	27
4 MATEMATICKÉ FUNKCE V PROSTŘEDÍ MATHEMATICA	28
4.1 ZÁKLADNÍ MATEMATICKÉ FUNKCE	28
4.2 ZÁKLADNÍ VEKTOROVÉ A Maticové OPERACE.....	31
4.3 NELINEÁRNÍ ROVNICE	34
5 DIFERENCIÁLNÍ POČET FUNKCÍ JEDNÉ PROMĚNNÉ	36
5.1 REÁLNÁ FUNKCE REÁLNÉ PROMĚNNÉ.....	36
5.2 INVERZNÍ FUNKCE	37
5.3 CYKLOMETRICKÉ FUNKCE	38
5.3.1 Arcsin x	38
5.3.2 Arccos x	39
5.3.3 Arctan x	40

5.3.4	Arcot x	41
5.4	LIMITA FUNKCE.....	43
5.4.1	Vlastní limita ve vlastním bodě.....	43
5.4.2	Nevlastní limita ve vlastním bodě.....	44
5.4.3	Vlastní limita v nevlastním bodě.....	45
5.4.4	Nevlastní limita v nevlastním bodě.....	45
5.5	DŮLEŽITÉ PŘÍKLADY LIMIT.....	46
5.5.1	Příklad limity funkce $\sin x$	46
5.5.2	Příklad limity funkce $\frac{1}{x} \sin x$	46
5.5.3	Příklad limity funkce $\sin \frac{1}{x}$	47
5.5.4	Příklad limity funkce $x \cdot \sin \frac{1}{x}$	48
5.5.5	Příklad limity funkce $x \cdot \sin x$	49
5.5.6	Řešené příklady.....	50
5.6	DERIVACE FUNKCE.....	53
5.6.1	Jednostranné derivace.....	53
5.6.2	Derivace vybraných elementárních funkcí.....	53
5.7	DERIVACE V BODĚ.....	57
5.8	LOKÁLNÍ A GLOBÁLNÍ EXTRÉMY FUNKCE.....	57
6	INTEGRÁLNÍ POČET FUNKCÍ JEDNÉ PROMĚNNÉ.....	61
6.1	NEURČITÝ INTEGRÁL.....	61
6.1.1	Tabulkové vzorce pro integrování elementárních funkcí.....	61
6.1.2	Řešené příklady.....	64
6.2	URČITÝ INTEGRÁL RIEMANNŮV.....	65
6.2.1	Výpočet obsahu plochy.....	65
6.2.2	Řešené příklady.....	66
	ZÁVĚR.....	68
	ZÁVĚR V ANGLIČTINĚ.....	69
	SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY.....	70
	SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK.....	71
	SEZNAM OBRÁZKŮ.....	72
	SEZNAM TABULEK.....	74
	SEZNAM PŘÍLOH.....	75

ÚVOD

Cílem této práce je připravit pro studenty předmětu Matematika I¹ na Univerzitě Tomáše Bati ve Zlíně příručku, v níž se seznámí s programem *Wolfram Mathematica* a budou jej moci použít při řešení problémů vyskytujících se v tomto předmětu.

Celá práce je zpracována na základě skript Matematika I [2] na téma Diferenciální a integrální počet funkcí jedné proměnné. Je postupováno v souladu s pořadím kapitol v těchto skriptech a je na ně odkazováno z daných látek pro zjištění více informací, než je uvedeno v této práci.

Teoretická část obsahuje základní informace o prostředí *Mathematica* a jeho ovládaní zaměřené na činnosti využívané v této práci a základní teoretické informace týkající se diferenciálního a integrálního počtu. V praktické části jsou názorné ukázky využití programu při řešení matematických úloh, jako je zjednodušení matematických výrazů, základní vektorové a maticové operace, řešení nelineárních rovnic, výpočet derivací a integrálů, vykreslení grafů apod. U každé ukázky je obsažen zdrojový kód, který je vždy popsán tak, aby student věděl, co který příkaz či parametr dělá. Pod zdrojovým kódem je výstup, který se po potvrzení provede, a to buď ve formě obrázku (graf) nebo textu (číselný nebo textový výstup). Práce rovněž obsahuje soubory s dynamicky znázorněnou problematikou, které jsou k práci přiloženy jako příloha.

¹Sylabus předmětu Matematika I dostupný na adrese <<http://portal.utb.cz/stag?urlid=prohlizeni-predmet-sylabus&predmetZkrPrac=AUM&predmetZkrPred=A1MAT&predmetRok=2010&predmetSemestr=LS&formRozvrhZobrazeni=0>>

TEORETICKÁ ČÁST

1 WOLFRAM MATHEMATICA

Software *Mathematica* je jedním z prostředí, jenž integruje nástroje pro numerickou a symbolickou matematiku, grafický a dokumentační systém a zajišťuje pokročilé propojení s dalšími aplikacemi [3].

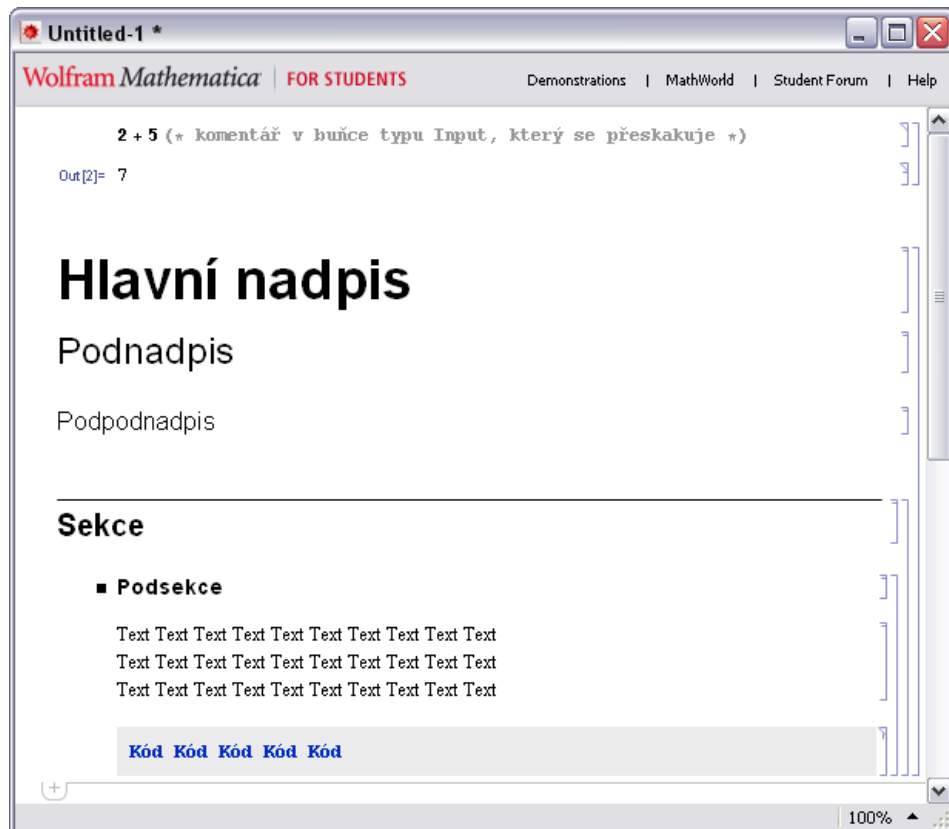
1.1 Vznik

V roce 1987 byla založena Stephenem Wolframem společnost Wolfram Research, Inc., ve které byl a je tento produkt vytvářen. Již první vydání software *Mathematica* v roce 1988 mělo zásadní význam na způsob využívání počítačů v řadě technických i jiných odvětví. Říká se, že právě vydáním software *Mathematica* začal nový věk tzv. technical computing. Od 60tých let minulého století existovaly samostatné sady, ale byly vhodné vždy jen pro určité specifické úlohy. Např. sady pro úlohy numerické, algebraické, grafické a jiné. A právě software *Mathematica* je převratný v tom, že integruje všechny potřebné sady v jednom produktu [3].

Nejnovější verze je s číslem 8.0.1 vydaná v březnu 2011 a dostupná pro platformy Microsoft Windows, MacOS X a Linux, která s sebou přinesla vylepšení jako generování kódu do jazyka C, lepší zpracování obrazu pro vývoj rychlejších a výkonnějších aplikací, rozšíření možností importu a exportu dat a mnohé další.

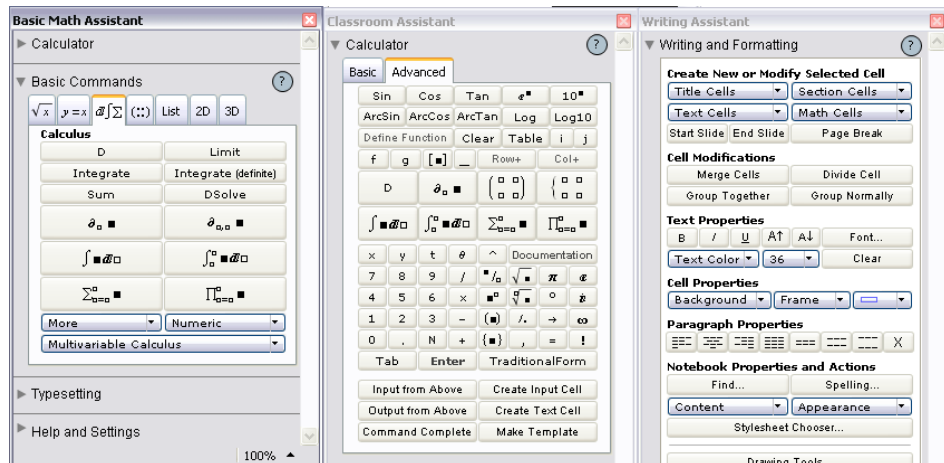
1.2 Prostředí programu Mathematica

Hlavní částí programu je tzv. notebook, do kterého se zapisují všechny výrazy. Notebook je složen z buněk, které lze libovolně formátovat (stylovat) co se funkce i vzhledu týče. Standardní formátování je typu Input, do kterého se zapisují vstupní výrazy. Každý výraz v buňce se spustí stiskem kláves SHIFT + ENTER nebo klávesou ENTER na numerické klávesnici. Poté se objeví nová buňka, tentokrát již typu Output, která obsahuje výsledek provedeního výpočtu. Další styly může být různé nadpisy, podnadpisy, sekce, texty, odrážky, kódy apod. (viz Obr. 1.1.). Styl buňky lze změnit v menu Format → Style nebo kliknutím pravým tlačítkem na závorku na pravé straně dané buňky. Lze také využít předvolených šablon pro dokonalejší vzhled v menu Format → Stylesheet.



Obr. 1.1.: Ukázka notebooku s různými styly

V menu Palettes lze otevřít tzv. asistenty pro usnadnění práce při psaní kódu. Jsou to Basic Math Assistant, Classroom Assistant a Writing Assistant. Tyto palety obsahují tlačítka pro vkládání již připravených funkcí, do kterých už jen doplňujeme proměnné a parametry. Ukázka těchto tří asistentů je na obrázku Obr. 1.2. Na Obr. 1.3. potom můžeme vidět zápis funkce za pomoci využití asistenta, kde do jednotlivých políček zapíšeme výrazy (expr), proměnné (var), hodnoty (value), index, startovní (start) a konečné (end) číslo.



Obr. 1.2.: Ukázka palet (asistentů) pro usnadnění psaní funkcí

$$\text{Limit} [\text{expr} , \text{var} \rightarrow \text{value}]$$

$$\text{D} [\text{expr} , \text{var}]$$

$$\text{Integrate} [\text{expr} , \text{var}]$$

$$\text{Sum} [\text{expr} , \{ \text{index} , \text{start} , \text{end} \}]$$

Obr. 1.3.: Zápis funkce do políček

Při psaní funkcí můžeme využít tzv. našeptávač. Ten zpřístupníme stisknutím kláves CTRL + K po zadání alespoň prvního písmena z názvu funkce. Našeptávač poté zobrazí nabídku dostupných funkcí začínajících tímto písmenem.

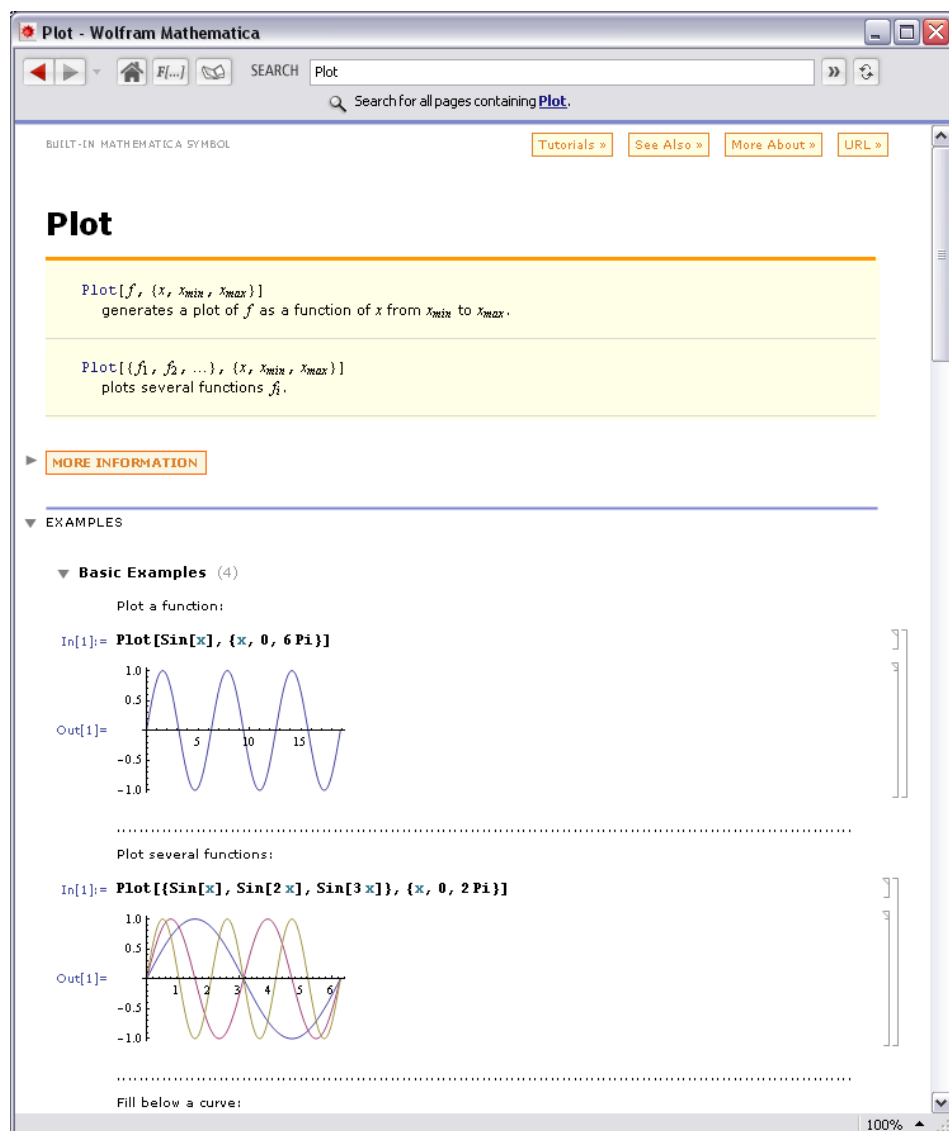
1.3 Interaktivní nápověda

Velmi důležitou věcí v programu *Mathematica* je výborně propracovaná nápověda. Ta obsahuje velké množství příkladů a ukázek jednotlivých funkcí. U každé funkce je možnost zobrazit si veškeré její atributy, včetně názorných ukázek.

Nápověda v software *Mathematica* zahrnuje kompletní dokumentaci pro všechny funkce v software *Mathematica* a úplný text *The Mathematica Book* jako plně indexovaný notebook s pokročilými vyhledávacími schopnostmi včetně hypertextových odkazů. Nápověda také obsahuje interaktivní příklady, které demonstrují použití funkcí, jejich hlavní schopnosti a nejlepší způsob, jak jich využít. Na rozdíl od jiných software,

Mathematica umožňuje upravovat a vyhodnocovat příklady uvedené v nápovědě. Uživatelské změny nejsou trvalé. V případě vymazání části textu či příkladu je pouze potřeba znovu zavést tuto stranu a tím obnovit originální informace [3].

Přístup k nápovědě získáme stisknutím klávesy F1. Pokud se v kódu vyskytuje nám neznámá funkce a chceme zjistit, o co se jedná, nemusíme otevírat nápovědu a funkci znovu přepisovat do vyhledávacího pole, ale stačí pouze kurzorem kliknout na funkci přímo v kódu a po stisknutí klávesy F1 se otevře okno nápovědy přímo s požadovanou funkcí.



Obr. 1.4.: Okno nápovědy programu Mathematica

2 DIFERENCIÁLNÍ POČET FUNKCÍ JEDNÉ PROMĚNNÉ - MATEMATICKÉ DEFINICE

2.1 Pojem reálné funkce reálné proměnné, rozdělení funkcí, množina \mathbf{R} a \mathbf{R}^*

2.1.1 Reálná funkce reálné proměnné

Každé zobrazení f množiny $M \subseteq \mathbf{R}$ do množiny všech reálných čísel \mathbf{R} se nazývá reálná funkce jedné reálné proměnné. Množina M se nazývá definiční obor a bývá označována jako Df .

2.1.2 Rozdělení funkcí

Algebraické - racionální - celistvé

- ryze lomené

- neryze lomené

- iracionální

Transcendentní - nižší

- patří sem např. exponenciální, logaritmické, goniometrické a cyklotrické funkce

- vyšší

- patří sem funkce, které nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí v konečném tvaru, např. $\text{ent } x$, $\text{sgn } x$

2.1.3 Rozšířená množina reálných čísel \mathbf{R}^*

Množina \mathbf{R} je uspořádaná množina všech reálných čísel. Množina \mathbf{R}^* je rozšíření množiny \mathbf{R} o prvky $+\infty$ a $-\infty$. Tedy $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$. Tyto prvky poté nazýváme nevlastní hodnoty (body) $+\infty$ a $-\infty$, ostatní prvky vlastní hodnoty.

2.2 Limita funkce

Nechť f je funkce, mějme bod (též číslo) $x_0 \in \mathbf{E}_1^*(\mathbf{R}^*)$ a bod $l \in \mathbf{E}_1^*(\mathbf{R}^*)$. Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 limitu rovnu l a píšeme

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \quad (2.1)$$

právě když ke každému okolí $O(l)$ bodu (čísla) l existuje redukované (též neúplné, též ryzí) okolí $O^*(x_0)$ takové, že pro každé $x \in O^*(x_0)$ platí

$$f(x) \in O(l) \quad (2.2)$$

Bod x_0 se nazývá limitní bod [2].

Přitom \mathbf{R}^* je rozšíření množiny reálných čísel o nevlastní hodnoty $+\infty$ a $-\infty$, kdy $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$.

\mathbf{E}_1^* je rozšíření reálné osy jednorozměrného euklidovského prostoru o dva nevlastní body $+\infty$ a $-\infty$, kdy $\mathbf{E}_1^* = \mathbf{E}_1 \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$.

Existuje několik případů limity:

- Vlastní limita ve vlastním bodě - kdy l i x_0 jsou reálná čísla

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \quad (2.3)$$

- Nevlastní limita ve vlastním bodě - kdy $l = \pm\infty$ a x_0 je reálné číslo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty \quad (2.4)$$

- Vlastní limita v nevlastním bodě - kdy l je reálné číslo a $x_0 = \pm\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l \quad (2.5)$$

- Nevlastní limita v nevlastním bodě - kdy $l = \pm\infty$ a $x_0 = \pm\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm\infty \quad (2.6)$$

2.3 Derivace funkce

Řekněme, že funkce $f(x)$ má v bodě $x_0 \in Df$ derivaci, jestliže existuje vlastní (konečná) limita zapsaná

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (2.7)$$

resp.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (2.8)$$

Tuto limitu pak nazýváme derivace funkce $f(x)$ v bodě x_0 a značíme ji $f'(x_0)$. Neexistuje-li tato limita, říkáme, že f nemá v bodě x_0 derivaci. Geometricky to znamená, že v daném bodě grafu funkce $y = f(x)$ neexistuje tečna [2].

2.3.1 Jednostranné derivace

Mějme funkci $f(x)$, $x_0 \in \mathbf{R}$. Existuje-li jednostranná limita

$$f'(x_0-) := \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (2.9)$$

resp.

$$f'(x_0+) := \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (2.10)$$

pak tuto limitu nazýváme derivace funkce $f(x)$ v bodě x_0 zleva, resp. zprava.

Nechť $f(x)$ je funkce, $x_0 \in \mathbf{R}$. Jestliže platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty \quad (2.11)$$

pak řekneme, že $f(x)$ má v x_0 nevlastní derivaci $\pm\infty$ a píšeme $f'(x) = \pm\infty$.

2.3.2 Diferenciál funkce

Řekneme, že funkce $f(x)$ je v bodě x_0 diferencovatelná, když její přírůstek - difference $\Delta f(x_0)$ v tomto bodě lze zapsat

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = k \cdot h + \varepsilon(h) \cdot h \quad (2.12)$$

kde konstanta $k \in \mathbf{R}$ a $\varepsilon(h)$ je funkce, pro kterou platí

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0 \quad (2.13)$$

Výraz $k \cdot h$, což je lineární funkce proměnné h , a tedy i proměnné x , se nazývá diferenciál funkce $f(x)$ v x_0 a značí se

$$df(x_0) = k \cdot h = k \cdot (x - x_0) \quad (2.14)$$

Geometrický význam diferenciálu: Diferenciál je lineární přírůstek funkce měřený po tečnu t [2].

2.3.3 Derivace vyšších řádů

K funkci $f(x)$ s definičním oborem Df jsme zavedli funkci $f'(x)$ s definičním oborem Df' . Mluvíme také o první derivaci nebo o derivaci 1. řádu. Podobně můžeme uvažovat množinu Df'' , v jejíchž bodech má funkce $f'(x)$ derivaci a na množině Df'' definovat funkci $(f'(x))' = f''(x)$, kterou nazveme druhou derivací funkce $f(x)$ nebo derivací druhého řádu funkce $f(x)$. Druhou derivací $f''(x)$ funkce $f(x)$ v bodě x_0 definujeme

$$f''(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} \quad (2.15)$$

[4].

Derivace n -tého řádu funkce $f(x)$ se značí $f^{(n)}(x_0)$ a definujeme ji

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0 + h) - f^{(n-1)}(x_0)}{h} \quad (2.16)$$

2.3.4 Bernoulliho - l'Hospitalovo pravidlo

Používá se pro výpočet limit, které vedou na neurčité výrazy $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Máme-li funkce $f(x)$ a $g(x)$, které mají limitu v bodě x_0 rovnu 0

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \quad (2.17)$$

a existuje-li vlastní nebo nevlastní limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (2.18)$$

pak platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (2.19)$$

Stejně tak to platí, pokud mají obě dvě funkce limitu v bodě x_0 rovnu $\pm\infty$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty \quad (2.20)$$

nebo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty \quad (2.21)$$

pak rovněž platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (2.22)$$

Pokud nastane situace, že podíl vyšších derivací téhož řádu n výše uvedených funkcí v bodě x_0 vede opět na neurčitý výraz, použije se B-H pravidlo opakovaně, tj platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} \quad (2.23)$$

Poznámka: Vždy je třeba si uvědomit, že nederivujeme podíl, nýbrž čitatele a jmenovatele zvlášť!

Neurčité výrazy: $\left(\frac{0}{0}\right)$; $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$; $(\infty - \infty)$; $(0 \cdot \infty)$; (0^0) ; (∞^0) ; (1^∞) .

2.4 Extrémy funkce, konvexnost a konkávnost, inflexní bod

2.4.1 Lokální extrémy funkce

Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě $x_0 \in Df$ (neostré) lokální maximum, resp. lokální minimum, jestliže existuje redukované okolí $O^*(x_0)$ bodu x_0 tak, že v něm pro všechna x platí $f(x) \leq f(x_0)$, resp. $f(x) \geq f(x_0)$.

Jestliže v něm platí ostré nerovnosti, tj. $f(x) < f(x_0)$, resp. $f(x) > f(x_0)$, pak jde o ostré lokální maximum, resp. ostré lokální minimum a píšeme

$$f(x_0) = \max_{x \in O^*(x_0)} f(x) \geq f(x_0) \quad (2.24)$$

nebo

$$f(x_0) = \max_{x \in O^*(x_0)} f(x) > f(x_0) \quad (2.25)$$

apod. [2].

2.4.2 Globální (absolutní) extrémy funkce

Řekněme, že funkce $f(x)$ má na množině $M \subseteq Df$ globální extrém v bodě x_0 , když pro každé x z M platí

a) $f(x) \leq f(x_0)$, tom případě se x_0 nazývá globální maximum

b) $f(x) \geq f(x_0)$, tom případě se x_0 nazývá globální minimum

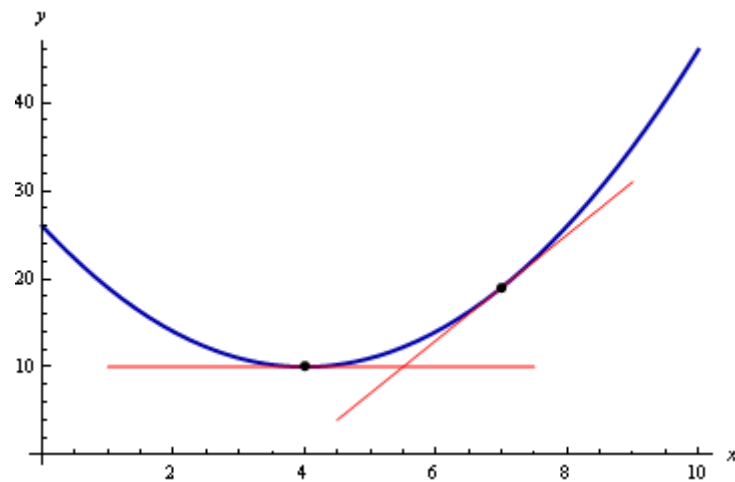
Společně se oba extrémy nazývají globální extrémy [2].

2.4.3 Konvexnost a konkávnost funkce

Funkce $f(x)$ je v bodě $x_0 \in Df$ (ryze) konvexní, jestliže existuje redukované okolí $O^*(x_0)$, kde pro všechna x platí

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad (2.26)$$

Tečna na Obr. 2.1. je pod grafem, proto platí, že funkce je konvexní.

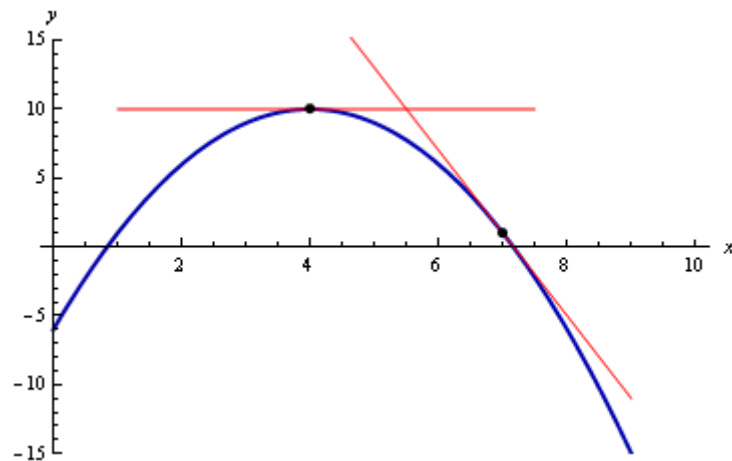


Obr. 2.1.: Graf konvexní funkce

Funkce $f(x)$ je v bodě $x_0 \in Df$ (ryze) konkávní, jestliže existuje redukované okolí $O^*(x_0)$, kde pro všechna x platí

$$f(x) < f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad (2.27)$$

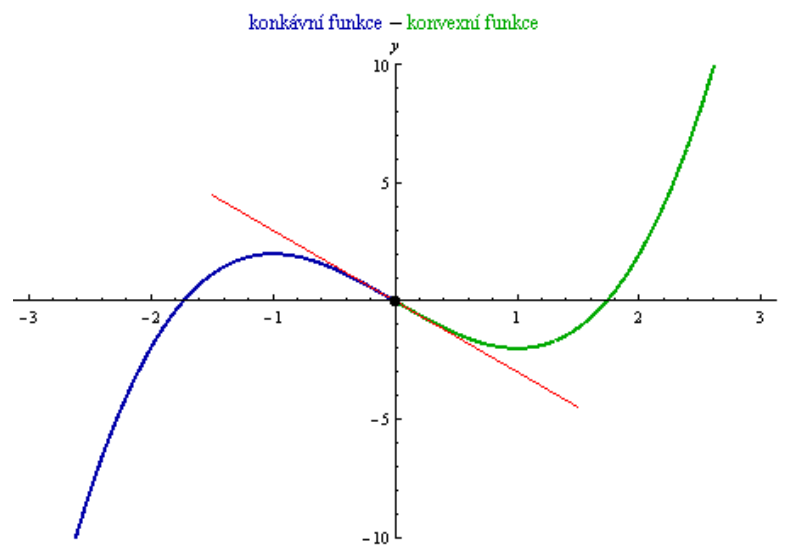
Na Obr. 2.2. je tečna nad grafem, proto je zobrazená funkce konkávní.



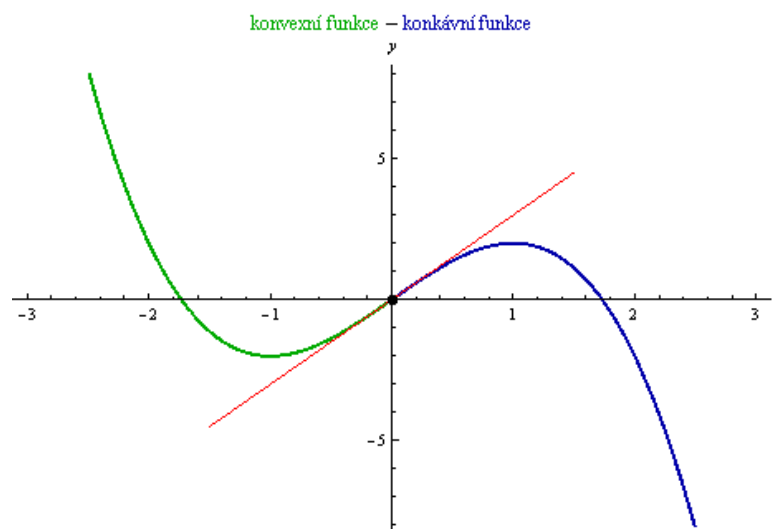
Obr. 2.2.: Graf konkávní funkce

2.4.4 Inflexní bod

Bod x_0 je inflexní bod funkce $f(x)$ (o níž předpokládáme, že je v x_0 spojitá a má zde vlastní nebo i nevlastní derivaci $f'(x_0)$), existuje-li redukované (též neúplné, též ryzí) levé okolí ${}^{-}O^*(x_0)$ bodu x_0 tak, že v každém bodě okolí je funkce $f(x)$ ryze konvexní (ryze konkávní), a existuje-li redukované pravé okolí ${}^{+}O^*(x_0)$ bodu x_0 tak, že v každém bodě x_0 tohoto okolí je funkce $f(x)$ ryze konkávní (ryze konvexní).



Obr. 2.3.: Inflexní bod funkce $f(x) = x^3 - 3x$



Obr. 2.4.: Inflexní bod funkce $f(x) = -x^3 + 3x$

Jestliže existuje $f''(x_0)$ a x_0 je inflexní bod funkce $f(x)$, pak $f''(x_0) = 0$.

Jestliže v bodě x_0 pro funkci $f(x)$ platí $f''(x_0) = 0$ a funkce $f''(x)$ mění v bodě x_0 znaménko, pak bod x_0 je inflexní bod funkce $f(x)$.

Má-li funkce $f(x)$ třetí derivaci $f'''(x)$ a je-li $f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) \neq 0$, pak bod x_0 je inflexním bodem funkce $f(x)$ [4].

3 INTEGRÁLNÍ POČET FUNKCÍ JEDNÉ PROMĚNNÉ - MATEMATICKÉ DEFINICE

3.1 Neurčitý integrál

Nechť funkce $f(x)$ je definována v intervalu J s krajními body a, b , kde je $a < b$, přičemž hodnoty a, b mohou být i nevlastní. Říkáme, že $F(x)$ je primitivní funkce (též antiderivace) k jisté funkci $f(x)$ na intervalu J (otevřeném či uzavřeném a ohraničeném či neohraničeném), když platí:

- a) $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b)$
- b) $F'(a+) = f(a) \quad (\text{patří-li bod } a \text{ do intervalu } J)$
- c) $F'(b-) = f(b) \quad (\text{patří-li bod } b \text{ do intervalu } J)$

což stručně vyjádříme zápisem $F' = f$ na J [2].

Neurčitý integrál se značí $\int f(x)dx$. Symbol \int se nazývá integrálním znakem. Vznikl protažením písmena S , které je prvním písmenem slova *SUMA*. Funkci $f(x)$ nazýváme integrandem. Symbol dx budeme chápat zcela formálně jako jakousi „tečku“, která uzavírá zápis integrálu a navíc nás informuje, že nezávisle proměnná u funkce, kterou integrujeme, je označena x [4].

Základní vlastností neurčitého integrálu je jeho linearita:

$$\int (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x)) dx = c_1 \int f_1(x) dx + c_2 \int f_2(x) dx + \dots + c_n \int f_n(x) dx \quad (3.0)$$

kde $c_i \in \mathbf{R}$ a i je celé kladné číslo $(1, 2, \dots, n)$ a existují neurčité integrály z funkcí f_1, \dots, f_n .

Homogenita neurčitého integrálu:

$$\text{pro } n = 1: \quad \int c \cdot f(x) dx = c \int f(x) dx \quad (3.1)$$

Aditivita neurčitého integrálu:

pro $n = 2: \quad c_1 = c_2 = 1:$

$$\int (f_1(x) + f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx \quad (3.2)$$

[2].

3.2 Určitý integrál Reimannův

3.2.1 Dělení intervalu

Bud' $[a, b]$ uzavřený interval $-\infty < a < b < \infty$. Dělením intervalu $[a, b]$ rozumíme konečnou posloupnost $D = \{x_0, x_1, \dots, x_m\}$ bodů z intervalu $[a, b]$ s vlastností

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{m-1} < x_m = b \quad (3.3)$$

Čísla x_i nazýváme dělicí body. Normou dělení D rozumíme číslo, které udává maximální vzdálenost sousedních dělicích bodů. Normu dělení D označujeme $\|D\|$. Je tedy

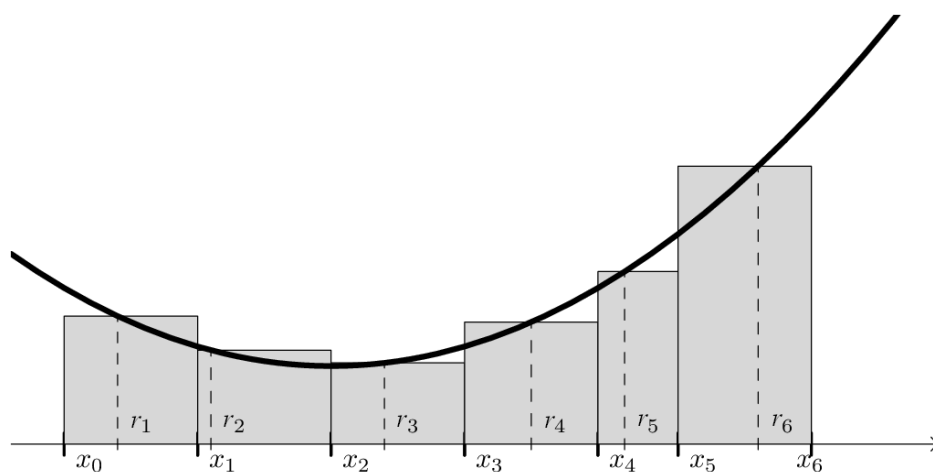
$$\|D\| = \max\{x_i - x_{i-1}, 1 \leq i \leq n\} \quad (3.4)$$

[9].

3.2.2 Integrální součet

Nechť je $[a, b]$ uzavřený interval a $f(x)$ je funkce ohraničená na intervalu $[a, b]$. Nechť je dáno dělení D intervalu $[a, b]$ na podintervaly $[x_{i-1}, x_i]$. Zvolme zcela náhodně v každém podintervalu bod $r_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, m$ a nazvěme jej i -tý reprezentant. Jejich množinu $V = \{r_1, \dots, r_m\}$ nazvěme výběr reprezentantů. Riemannův integrální součet funkce f příslušný dělení D intervalu $[a, b]$ a výběru V reprezentantů je tedy [2]

$$s(f, D, V) = \sum_{i=1}^m f(r_i)(x_i - x_{i-1}) \quad (3.5)$$



Obr. 3.1.: Grafické znázornění integrálního součtu [9]

3.2.3 Riemannův integrál

Bud' $[a, b]$ uzavřený interval a funkce $f(x)$ ohraničená na intervalu $[a, b]$. Bud' $\{D_n\}$ posloupnost dělení intervalu $[a, b]$ a $\{V_n\}$ posloupnost reprezentantů. Řekneme, že funkce f je Riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, b]$, jestliže existuje číslo $I \in \mathbf{R}$ s vlastností [9]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s(f, D_n, V_n) = I \quad (3.6)$$

pro libovolnou posloupnost dělení $\{D_n\}$ splňující $\lim_{n \rightarrow \infty} \|D_n\| = 0$ při libovolném výběru $\{V_n\}$ reprezentantů r_i , kde $s(f, D_n, V_n)$ je odpovídající integrální součet funkce f . Číslo I nazýváme Riemannův integrál funkce f na intervalu $[a, b]$ a označujeme [9]

$$\int_a^b f(x) dx \quad (3.7)$$

3.2.4 Newton-Liebnizova formule

Nechť funkce $f(x)$ je integrovatelná na intervalu $[a, b]$ a necht'

- a) primitivní funkce $F(x)$ k funkci $f(x)$ je spojitá na $[a, b]$, tj. $F(x) \in C[a, b]$
- b) rovnost $F'(x) = f(x)$ platí ve všech bodech $[a, b]$ až na konečný počet. Potom platí Newtonova-Liebnizova formule (vzorec)

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b \quad (3.8)$$

Význam této formule spočívá v tom, že spojuje probraný neurčitý integrál s určitým integrálem, takže známe-li primitivní funkci $F(x)$ k integrandu $f(x)$, pak není nutné tvořit Riemannovy integrální součty $s(f, D, V)$ a hledat jejich limitu, nýbrž stačí určit $F(b) - F(a)$, tj. rozdíl funkčních hodnot primitivní funkce v horní a dolní mezi [2].

PRAKTICKÁ ČÁST

4 MATEMATICKÉ FUNKCE V PROSTŘEDÍ MATHEMATICA

V této kapitole si shrneme vybrané funkce programu *Mathematica*, které budou dále použity v této práci.

4.1 Základní matematické funkce

V této kapitole je uvedeno několik vybraných funkcí, které nemusí být jasné na první pohled. Je třeba si uvědomit, že *Mathematica* je key-sensitive, tzn. je třeba rozlišovat malá a velká písmena. Funkce vždy začíná velkým písmenem. Proměnná může mít libovolný název, kromě názvů vyhrazených.

Odmocnina \sqrt{x} je v *Mathematice* vedena podnázvem `Sqrt[x]`. Pokud není výsledkem celé číslo, např. číslo $\sqrt{5}$, tak *Mathematica* nevypíše číslo numericky, ale výpis zůstane ve tvaru $\sqrt{5}$. Pro vyčíslení lze použít funkci `N`. Lze ji použít dvěma způsoby, buď jako postfix `//N` nebo jako funkci `N[]`, kde lze také nastavit počet vypsaných desetinných míst.

```
In[3] := Sqrt[5]//N
```

```
Out[3]= 2.23607
```

nebo

```
In[4] := N[Sqrt[5],20]
```

```
Out[4]= 2.2360679774997896964
```

Exponenciální funkce e^x je vedena pod názvem `Exp[x]`. Eulerovo číslo je možné v *Mathematice* zapsat postupným stisknutím kláves `Esc-e-e-Esc` nebo jej vybrat z některé z pomocných palet. Vyčíslíme rovněž pomocí funkce `N`.

```
In[6] := Exp[4]
```

```
Out[6]= e4
```

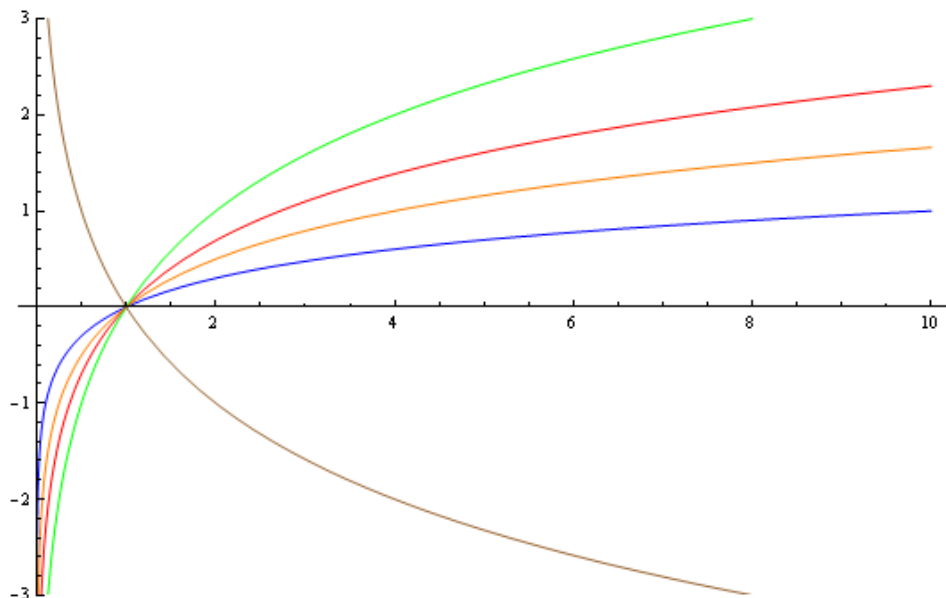
Logaritmus je značen $\text{Log}[x]$ (přirozený logaritmus $\ln x$), případně logaritmus o základu a je $\text{Log}[a, x]$ (tedy $\log_a x$). Dvojkový logaritmus je pak $\text{Log}2[x]$ ($\log_2 x$) a desítkový $\text{Log}10[x]$ ($\log_{10} x$). Více viz Obr. 4.1.

```
In[12] := Log[5,25]
```

```
Out[12]= 2
```

Zápis logaritmů v *Mathematice*:

- přirozený logaritmus $\text{Log}[x]$
- dekadický (desítkový) logaritmus $\text{Log}10[x]$
- binární (dvojkový) logaritmus $\text{Log}2[x]$
- logaritmus o základu $a > 1$ $\text{Log}[a, x]$
- logaritmus o základu $0 < a < 1$ $\text{Log}[0.5, x]$



Obr. 4.1.: Logaritmy v Mathematice

Goniometrické a cyklometrické funkce jsou značeny klasicky, vždy prvními třemi, resp. šesti písmeny názvu funkce. Tedy $\text{Sin}[x]$, $\text{Cos}[x]$, $\text{Tan}[x]$, $\text{Cot}[x]$; $\text{ArcSin}[x]$, $\text{ArcCos}[x]$, $\text{ArcTan}[x]$, $\text{ArcCot}[x]$. Je možno zapsat v obloukové míře (π zapisujeme jako Pi)

```
In[13]:= Sin[Pi/2]
```

```
Out[13]= 1
```

nebo

```
In[38]:= Tan[30]//N
```

```
Out[38]= -6.40533
```

nebo ve stupních

```
In[14]:= Cos[30 Degree]
```

```
Out[14]=  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 
```

Derivace je pod označením `D`. Do hranaté závorky se na první místo zapíše funkce a čárkou se proměnná, podle které se má derivovat.

```
In[15]:= D[x^2 + 3, x]
```

```
Out[15]= 2 x
```

Integrál neurčitý je označen `Integrate` a zápis do hranatých závorek je obdobný jako u derivace, tzn. první pozice výraz (tj. integrovaná funkce – integrand), druhá pozice proměnná, podle které se má integrovat.

```
In[16]:= Integrate[x + 1, x]
```

```
Out[16]=  $x + \frac{x^2}{2}$ 
```

Integrál určitý Riemannův se zapisuje také `Integrate`, ale za funkci oddělenou čárkou se uvedou do složených závorek ještě navíc meze. Pro přímé vyčíslení výsledku je možno použít funkci `NIntegrate`.

```
In[18]:= Integrate[x^2 + 3x, {x, 0, 1}]
```

$$\text{Out}[18]= \frac{11}{6}$$

Všechny výše uvedené zápisy lze navíc provést pomocí pomocných palet, o kterých je zmínka v teoretické části této práce.

Základní vektorové a maticové operace

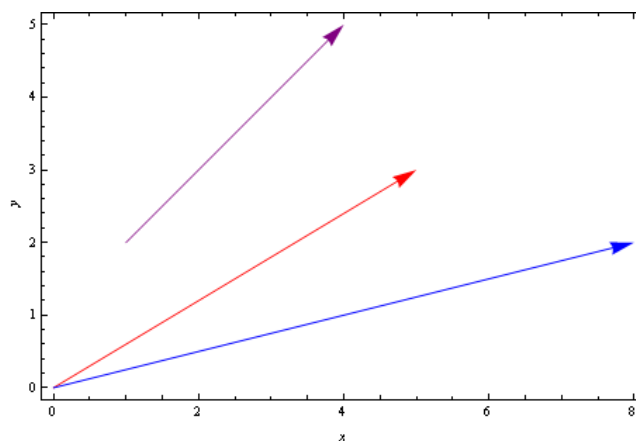
Vektory se v *Mathematice* zadávají do složených závorek, které mohou obsahovat libovolný počet parametrů. Každému vektoru lze také přiřadit jméno pro jednodušší práci v dalších částech programu.

```
In[17]:= vektorA = {{0, 0}, {5, 3}};  
         vektorB = {{0, 0}, {8, 2}};  
         vektorC = {{1, 2}, {4, 5}};
```

Jednotlivé vektory lze vykreslit pomocí funkce `Graphics`. Nevýhodou však je, že standardně je tato funkce nastavena pouze na vykreslení grafiky, proto vektor musíme vykreslit například jako čáru s šipkou pomocí `Arrow` a zobrazit jako graf pomocí souřadnicového rámečku - `Frame`, pro lepší orientaci.

```
In[18]:= Graphics[{Red, Arrow[vektorA],  
                  Blue, Arrow[vektorB],  
                  Purple, Arrow[vektorC]},  
               Frame -> True, FrameLabel -> {x, y}]
```

Vykreslí se



Obr. 4.2.: Vykreslení vektorů

Mezi vektory lze provádět různé operace:

- Násobení skalárem:

```
In[19]:= 3*{1, 2, 0}
```

```
Out[19]= {3,6,0}
```

- Skalární součin:

```
In[20]:= {1, 2, 0}·{0, 1, 2}
```

```
Out[20]= 2
```

- Vektorový součin:

```
In[21]:= Cross[{1, 2, 0},{0, 1, 2}]
```

```
Out[21]= {4,-2,1}
```

- Úhel mezi dvěma vektory (vycházejících z počátku):

```
In[22]:= VectorAngle[{4, 0},{4, 4}]
```

```
Out[22]=  $\frac{\pi}{4}$ 
```

- Vzdálenost dvou bodů:

```
In[23]:= EuclideanDistance[{5, 3},{8, 2}]
```

```
Out[23]= Sqrt[10]
```

Matice se zadává stejně jako vektory. Jednotlivé řádky se zapisují do složených závorek a oddělí čárkou.

```
In[24]:= M = {{1, 2, 3},{5, 4, 5},{2, 1, 0}}
```

Pro standardní zobrazení matice slouží `MatrixForm` (lze jej psát jako funkci i jako postfix).

```
In[25]:= MatrixForm[M]
```

$$\text{Out[25]//MatrixForm} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Operace, které lze provádět s maticemi:

- Násobení matic - stejné jako u vektorů

- Inverzní matice:

```
In[26]:= Inverse[M] //MatrixForm
```

$$\text{Out[26]//MatrixForm} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

- Transponovaná matice:

```
In[27]:= Transpose[M] //MatrixForm
```

$$\text{Out[27]//MatrixForm} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

- Determinant matice:

```
In[28]:= Det[M]
```

```
Out[28]= 6
```

- Hodnost matice:

```
In[29]:= MatrixRank[M]
```

```
Out[29]= 3
```

- Jednotková matice (rozměr se uvede do hranatých závorek, v tomto případě tedy 4x4):

```
In[30]:= IdentityMatrix[4] //MatrixForm
```

$$\text{Out[30]//MatrixForm} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.2 Nelineární rovnice

Pro nalezení kořenů jakékoliv nelineární rovnice slouží v *Mathematice* funkce `Solve`, `Roots` a `NRoots`. Rozdíl při použití těchto funkcí je pouze ve formátu výsledku.

Kvadratická rovnice:

```
In[31]:= Solve[x^2 + 2x - 4 == 0, x]
```

```
Out[31]= {{x -> -1 - \sqrt{5}}, {x -> -1 + \sqrt{5}}}
```

nebo

```
In[32]:= Roots[x^2 + 2x - 4 == 0, x]
```

```
Out[32]= x == -1 - \sqrt{5} || x == -1 + \sqrt{5}
```

nebo použitím funkce `NRoots`, která kořeny přímo vyčíslí:

```
In[33]:= NRoots[x^2 + 2x - 4 == 0, x]
```

```
Out[33]= x == -3.23607 || x == 1.23607
```

Algebraická rovnice (pátého stupně):

```
In[34]:= NRoots[x^5 + x^3 + x^2 - x == 3x^2 + 2x, x]
```

```
Out[34]= x == 0.858944 || x == -0.27046 - 1.55623 i ||
```

```
x == -0.27046 + 1.55623 i || x == 0. || x == 1.39986
```

Algebraická rovnice (standardní, tj. anulovaný tvar):

```
In[35]:= Solve[x^3 + x^2 - x + 15 == 0, x]
```

```
Out[35]= {{x → -3}, {x → 1-2i}, {x → 1+2i}}
```

Nelineární rovnice (s parametrem b zapsané složenými funkcemi):

```
In[36]:= Solve[Log[ArcCos[ArcSin[x^(2/3) - b] - 1]] + 2 == 0, x]
```

```
Out[36]= {{x → (b + Sin[1 + Cos[ $\frac{1}{e^2}$ ]])3/2}, {x → (b + Sin[1 + Cos[ $\frac{1}{e^2}$ ]])3/2}}
```

5 DIFERENCIÁLNÍ POČET FUNKCÍ JEDNÉ PROMĚNNÉ

Tato kapitola se zabývá diferenciálním počtem funkcí jedné proměnné. Podrobně je tato látka probrána v kapitole I ve skriptech Matematika I [2].

5.1 Reálná funkce reálné proměnné

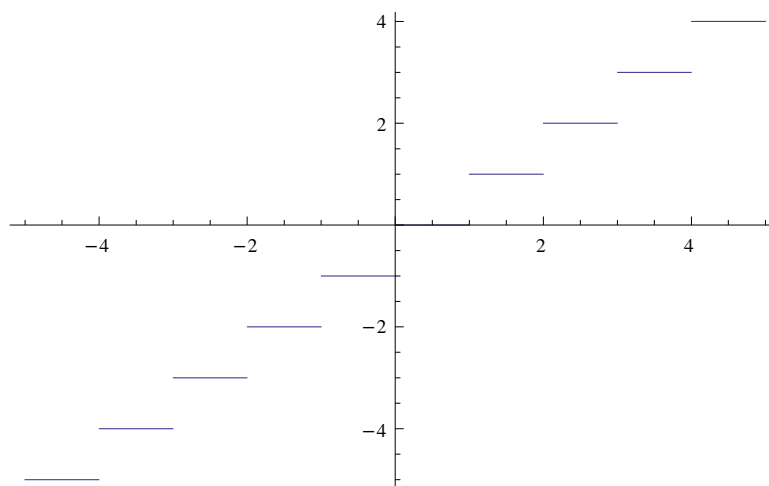
Co je reálná funkce a je vysvětleno v teoretické části této práce, případně podrobněji je tato látka probrána ve skriptech [2] v kapitole 1.

Funkce ent x

Funkce ent x (zvána také celá část) je největší celé číslo nejvýše rovné x (tj. menší než x nebo rovné x), tj. platí pro něj $\text{ent } x \leq x < \text{ent } x + 1$.

V *Mathematice* je tato funkce označena jako `Floor`. Příkaz `Plot` slouží k vykreslení 2D grafu. Do jeho hranatých závorek se zadá funkce, kterou chceme vykreslit a za ní následuje čárka a ve složených závorkách rozmezí x -ové osy.

```
Plot[Floor[x], {x, -5, 5}]
```



Obr. 5.1.: Funkce ent x v prostředí Mathematica

Funkce $\operatorname{sgn} x$

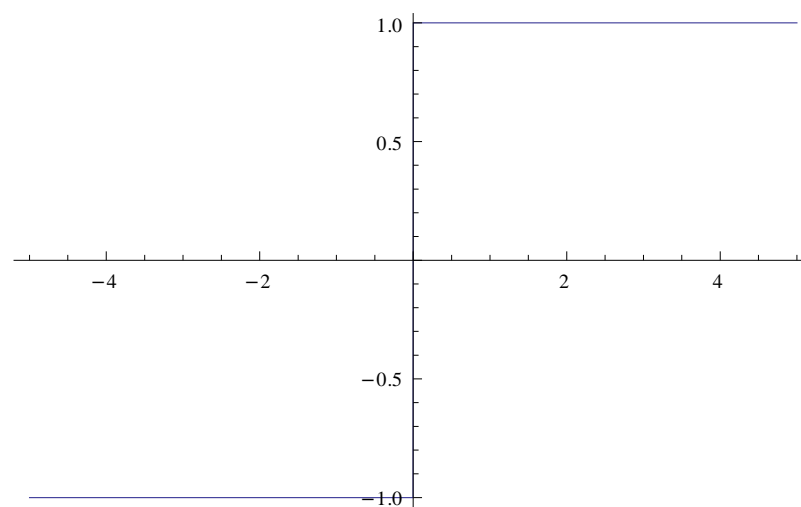
platí: $\operatorname{sgn} x = 1, \quad x > 0$

$\operatorname{sgn} x = -1, \quad x < 0$

$\operatorname{sgn} x = 0, \quad x = 0$

V *Mathematice* je tato funkce pod názvem *Sign*.

```
Plot[Sign[x], {x, -5, 5}]
```



Obr. 5.2.: Funkce $\operatorname{sgn} x$

5.2 Inverzní funkce

Nechť $y = f(x)$ je prostá funkce s definičním oborem Df a oborem hodnot Hf . Pak funkce $f^{-1}(y)$, $y \in Hf$, kde $Hf = f(Df)$ se nazývá inverzní funkce.

Příklad:

$$y = e^x = f(x), \quad x \in \mathbf{R}$$

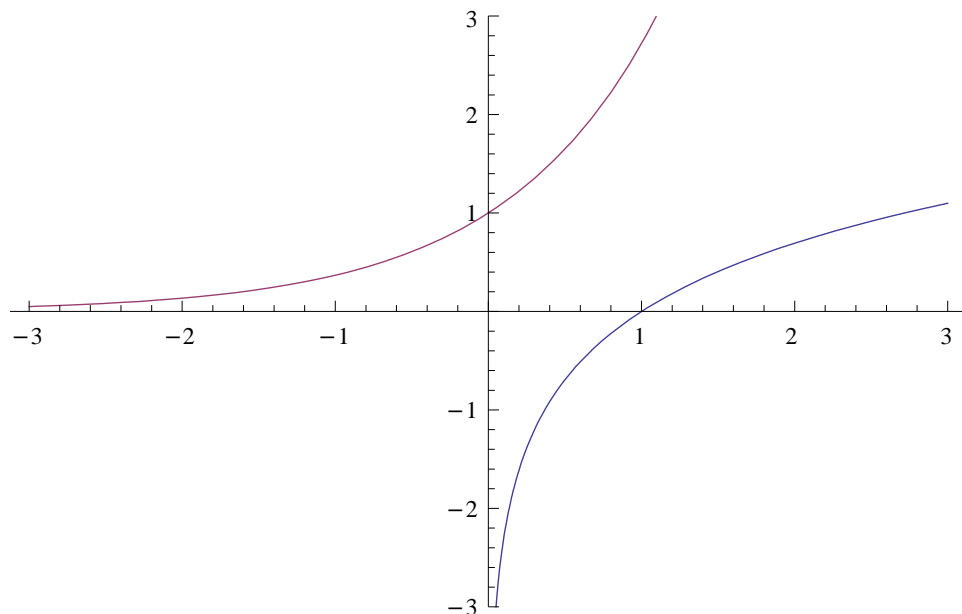
$$\ln y = x \cdot \ln e = x$$

$$\ln y = x$$

$$y = \ln x = f^{-1}(x)$$

Pro vykreslení více grafů pomocí jednoho `Plot` lze dát na první pozici mezi hranaté závorky více funkcí uzavřených ve složených závorkách. Další pozice ve složených závorkách určuje rozsah vykreslení vodorovné osy, možnost `PlotRange` pak rozsah vykreslení osy svislé.

```
Plot[{Log[x], Exp[x]}, {x, -3, 3}, PlotRange -> {-3, 3}]
```



Obr. 5.3.: Inverzní funkce k funkci e^x

5.3 Cyklometrické funkce

Funkce $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arccot} x$, nazývány také jako inverzní kruhové funkce. Jsou to inverzní funkce k funkcím goniometrickým, jelikož ty nejsou na celém svém intervalu prosté. U cyklometrických funkcí se proto omezujeme pouze na interval, na němž je příslušná goniometrická funkce prostá. Podrobnější výklad o cyklometrických funkcích lze najít ve skriptech Matematika I [2] v kapitole 4.

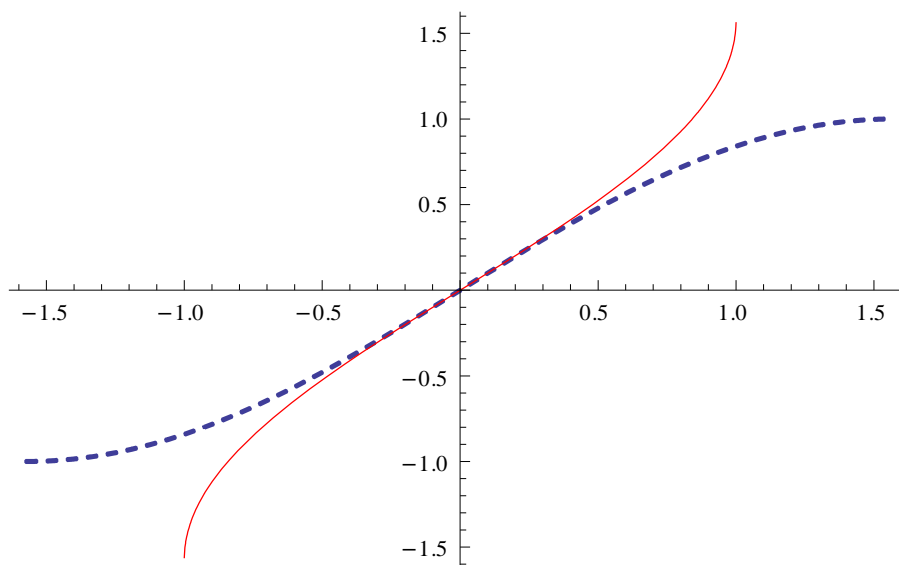
5.3.1 Arcsin x

Funkce $y = \sin x$ zúžená na interval $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, na němž je funkce rostoucí a zobrazuje interval $[-1, 1]$, je prostá a existuje k ní tedy inverzní funkce $\arcsin x$, která je také rostoucí.

Její definiční obor je $Df = [-1, 1]$ a obor hodnot $Hf = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, viz [4]. Funkce $\sin x$ a $\arcsin x$ jsou zobrazeny na Obr. 5.4.

Číslo π se v *Mathematice* zapisuje jako `Pi`. Možnost `PlotStyle` v zápisu kódu určuje vzhled jednotlivých grafů. U více grafů se zapisuje do složených závorek a přiřazují se ve stejném pořadí, jako jsou zapsány funkce.

```
Plot[{Sin[x], ArcSin[x]}, {x, -Pi/2, Pi/2},
  PlotStyle -> {Dashed, Red}]
```



Obr. 5.4.: Funkce $\arcsin x$ v porovnání se $\sin x$

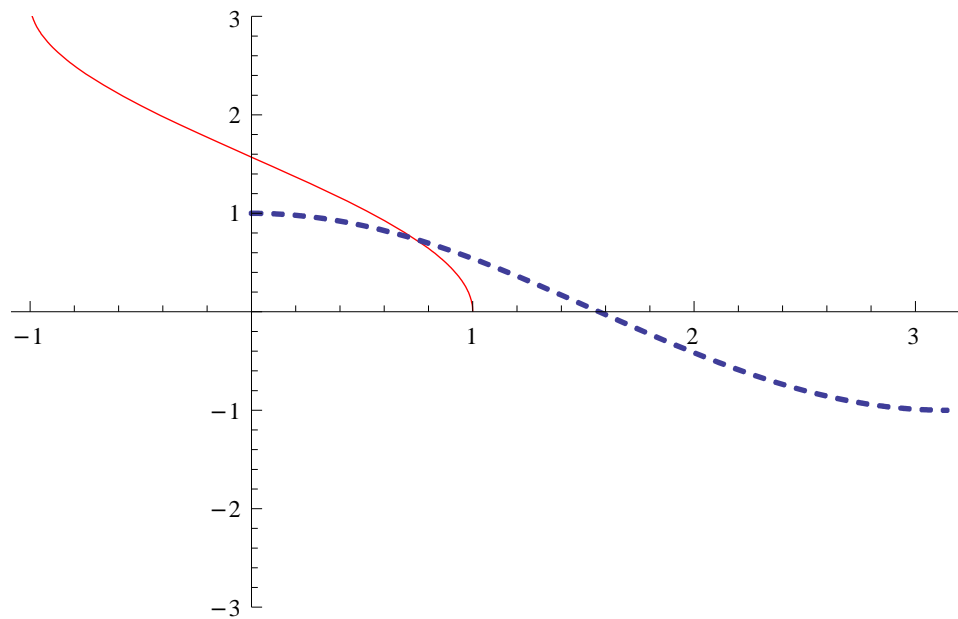
5.3.2 Arccos x

Funkce $y = \cos x$ na interval $[0, \pi]$, na němž je funkce klesající a zobrazuje interval $[-1, 1]$, je prostá a existuje k ní tedy inverzní funkce $\arccos x$, která je také klesající a její definiční obor je $Df = [-1, 1]$ a obor hodnot $Hf = [0, \pi]$, viz [4]. Funkce $\cos x$ a $\arccos x$ jsou znázorněny na Obr. 5.5.

Pro vykreslení dvou funkcí do jednoho grafu s rozdílným rozsahem osy x už nelze použít pouze příkaz `Plot`. Vhodné je použít například `Show`, který zobrazuje grafické objekty s různými vlastnostmi. Jednotlivé funkce vykreslíme pomocí `Plot` a teprve ty pomocí `Show` (barevně odlišeno pro lepší názornost). Rozsah prvního grafu určuje

celkový rozsah vykresleného grafu, je v něm tedy třeba uvést celý rozsah $[-1, \pi]$, ne pouze $[-1, 1]$, jak by mělo odpovídat pro $\arccos x$.

```
Show[Plot[ArcCos[x], {x, -1, Pi}, PlotStyle -> Red, PlotRange -> Pi],
      Plot[Cos[x], {x, 0, Pi}, PlotStyle -> Dashed]]
```



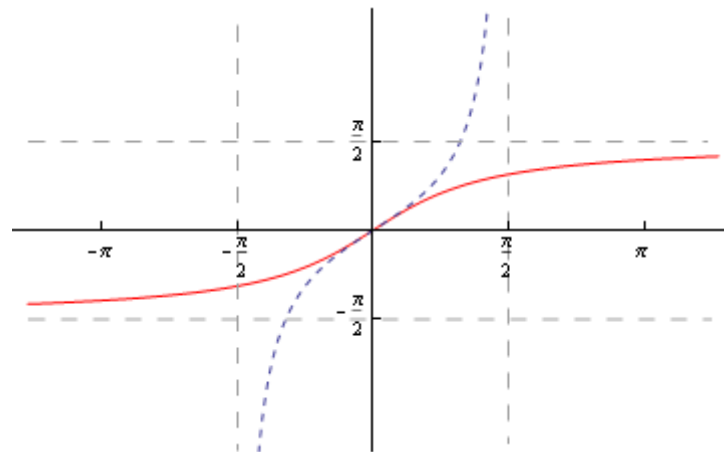
Obr. 5.5.: Funkce $\arccos x$ v porovnání s $\cos x$

5.3.3 Arctan x

Funkce $y = \tan x$ zúžená na interval $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, na němž je funkce rostoucí a zobrazuje interval $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ na interval $(-\infty, \infty)$, je prostá a existuje k ní tedy inverzní funkce $\arctan x$, která je také rostoucí a její definiční obor je $Df = (-\infty, \infty)$ a obor hodnot $Hf = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, viz [4]. Zobrazena na Obr. 5.6. spolu s funkcí $\tan x$.

V zápisu je vyznačení zajímavých bodů `Ticks` na ose x a y .

```
Show[Plot[ArcTan[x], {x, -4, 4}, PlotStyle -> Red,
          PlotRange -> {-4, 4}, Ticks -> {{-Pi, -Pi/2, 0, Pi/2, Pi}, {0, Pi/2, Pi}},
      Plot[Tan[x], {x, -Pi/2, Pi/2}, PlotStyle -> Dashed]]
```

Obr. 5.6.: Funkce $\arctan x$ ve srovnání s $\tan x$

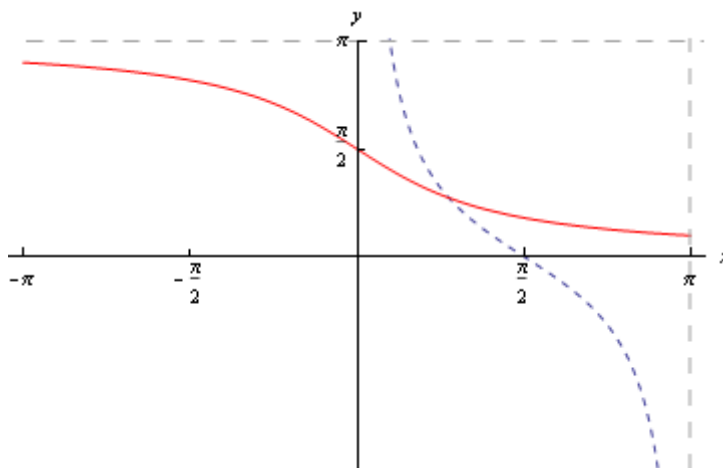
5.3.4 Arccot x

Funkce $y = \cot x$ zúžená na interval $(0, \pi)$, na němž je funkce klesající a zobrazuje interval $(0, \pi)$ na interval $(-\infty, \infty)$, je prostá a existuje k ní tedy inverzní funkce $\operatorname{arccot} x$, která je také klesající a její definiční obor je $Df = (-\infty, \infty)$ a obor hodnot $Hf = (0, \pi)$, viz [4]. Funkce $\cot x$ a $\operatorname{arccot} x$ jsou zobrazeny na Obr. 5.7.

Poznámka: V prostředí *Mathematica* je graf funkce $\operatorname{arccot} x$ definována nestandardně v oboru hodnot $Hf = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ jako nespojitá funkce, kdežto standardně bývá definována na oboru hodnot $Hf = (0, \pi)$ jako funkce spojitá.

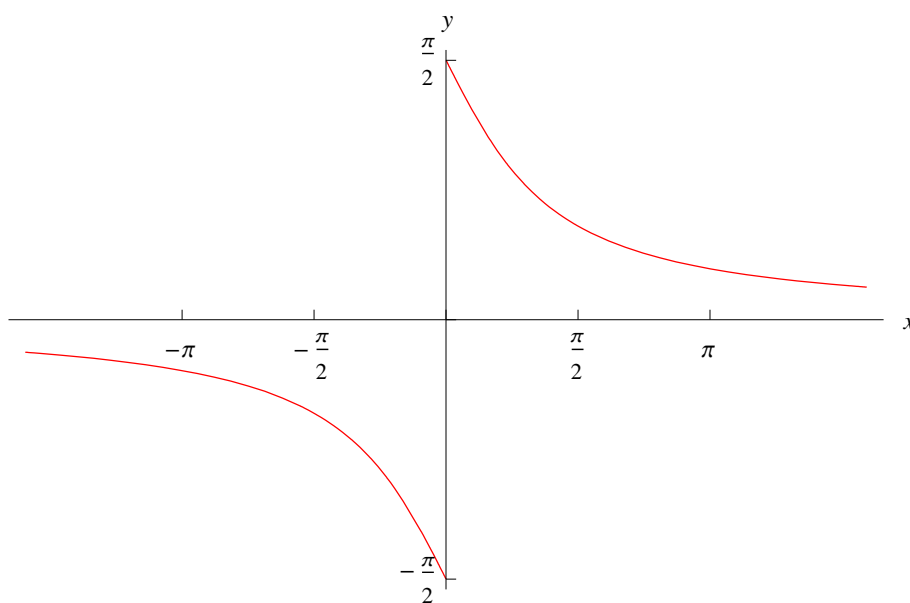
Pro vykreslení námi požadovaného grafu (dle normy) tedy použijeme upravený zápis (funkci vlastně vykreslíme dvakrát, od 0 do $\pi/2$ a přidáme ji k ní ještě jednou v rozsahu od $\pi/2$ do π). V tomto zápisu je zároveň ukázka popisu os `AxesLabel` a vyznačení zajímavých bodů `Ticks` na ose x a y , Obr. 5.7.

```
Show[Plot[ArcCot[x]+Pi,{x,-Pi,Pi}, PlotRange->{0,Pi}, PlotStyle->Red],
Plot[{Cot[x],ArcCot[x]},{x,0,Pi},
PlotStyle->{Dashed,Red}], PlotRange->{-Pi,Pi},
AxesLabel->{x,y}, Ticks->{{-Pi,-Pi/2,0,Pi/2,Pi},{0,Pi/2,Pi}}]
```

Obr. 5.7.: Běžně používaná spojitá funkce $\operatorname{arccot} x$ podle normy

V prostředí *Mathematica* je funkce $\operatorname{arccot} x$ nespojitá.

```
Plot[ArcCot[x], {x, -5, 5}, PlotStyle -> Red,
  AxesLabel -> {x,y}, Ticks -> {{-Pi,-Pi/2,0,Pi/2,Pi},{-Pi/2,0,Pi/2}}]
```

Obr. 5.8.: Nestandardní graf funkce $\operatorname{arccot} x$ definován podle prostředí *Mathematica* nespojitou funkcí

5.4 Limita funkce

Definice limity je uvedena v teoretické části této práce v kapitole 2.2. Podrobněji je limita funkce probrána ve skriptech Matematika I [2] v kapitole 7.

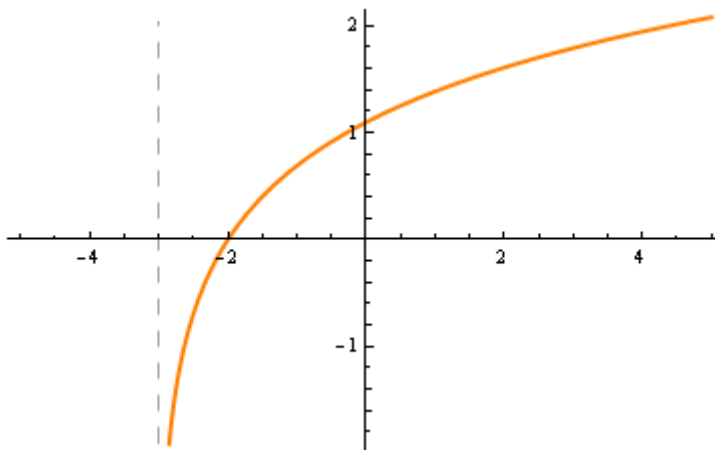
Existuje několik případů limity funkce, kdy limita l nebo limitní bod x_0 může být vlastní bod (číslo) nebo nevlastní bod (symbol $\pm\infty$).

5.4.1 Vlastní limita ve vlastním bodě

O vlastní limitu ve vlastním bodě se jedná za předpokladu, že l i x_0 je reálné číslo, tedy $l \in \mathbf{R}$, $x_0 \in \mathbf{R}$. Jako příklad mějme funkci $\ln(x+3)$, která má ve vlastním bodě -2 limitu 0 .

V *Mathematice* se všechny logaritmy zadávají pomocí funkce `Log` (viz kapitola 4.1), přirozený logaritmus $\ln(x+3)$ zadáme tedy jako `Log[x+3]`. Možnost `Thick` v `PlotStyle` udává, že čára grafu má být vykreslena tučně.

```
Plot[Log[x + 3], {x, -5, 5}, PlotStyle -> {Orange, Thick}]
```



Obr. 5.9.: Funkce $\ln(x+3)$ a ukázka vlastní limity

Pro výpočet limity v prostředí *Mathematica* slouží příkaz `Limit`. Do hranatých závorek napíšeme funkci a za ní následuje bod, ve kterém chceme zjistit limitu, v tomto případě tedy -2 .

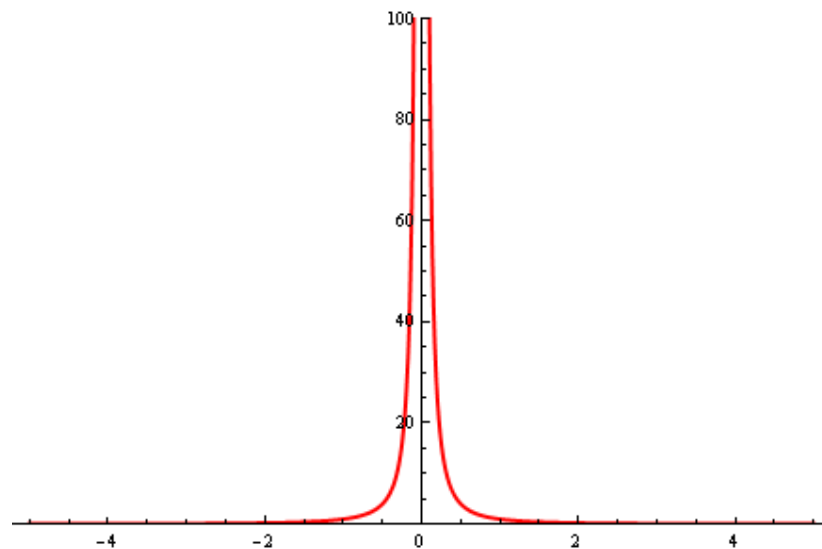
```
In[1] = Limit[Log[x + 3], x -> -2]
```

```
Out[1] = 0
```

5.4.2 Nevlastní limita ve vlastním bodě

O nevlastní limitu ve vlastním bodě jde tehdy, pokud je l nevlastní číslo, tedy $\pm\infty$, a x_0 je reálné číslo, tedy platí $l = \pm\infty$, $x_0 \in \mathbf{R}$. Příkladem je funkce $\frac{1}{x^2}$, která má ve vlastním bodě 0 limitu $+\infty$. Ve všech ostatních bodech má vlastní limitu.

```
Plot[1/x^2, {x, -5, 5}, PlotRange -> {0, 50},  
PlotStyle -> {Red, Thick}]
```



Obr. 5.10.: Funkce $\frac{1}{x^2}$ a ukázka nevlastní limity $+\infty$ v bodě $x_0 = 0$

Samotný výpočet potom zapíšeme ve tvaru:

```
In[2] = Limit[1/x^2, x -> 0]
```

```
Out[2] = ∞
```

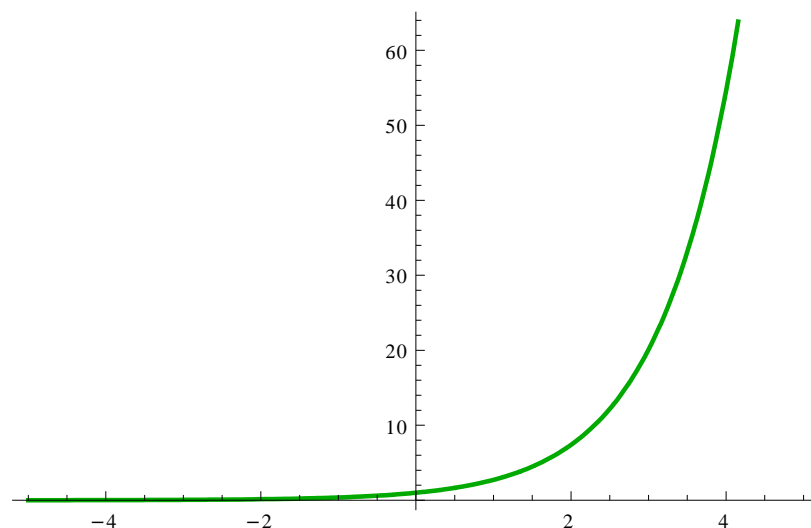
5.4.3 Vlastní limita v nevlastním bodě

Vlastní limita v nevlastním bodě má limitu l vlastní reálné číslo a x_0 nevlastní číslo $\pm\infty$, tedy platí $l \in \mathbf{R}$, $x_0 = \pm\infty$. Příkladem je například funkce e^x na Obr. 5.11., která má v $x_0 = -\infty$ vlastní limitu $l = 0$.

5.4.4 Nevlastní limita v nevlastním bodě

O nevlastní limitu v nevlastním bodě se jedná v případě, jestliže je limita l i limitní bod x_0 nevlastním číslem, tedy $l = \pm\infty$, $x_0 = \pm\infty$. Jako příklad poslouží rovněž funkce e^x , která má v nevlastním bodě $x_0 = +\infty$ nevlastní limitu $l = +\infty$.

```
Plot[Exp[x], {x, -5, 5}, PlotStyle -> {Darker[Green], Thick}]
```



Obr. 5.11.: Ukázka funkce e^x , která má jak vlastní limitu 0 v nevlastním bodě $x_0 = -\infty$, tak zároveň nevlastní limitu $+\infty$ v nevlastním bodě $x_0 = +\infty$

```
In[4] = Limit[Exp[x], x -> Infinity]
```

```
Out[4] = ∞
```

```
In[3] = Limit[Exp[x], x -> -Infinity]
```

```
Out[3] = 0
```

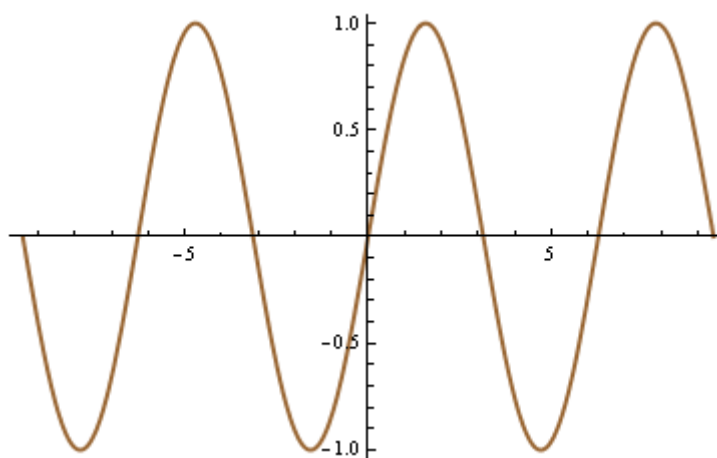
5.5 Důležité příklady limit

5.5.1 Příklad limity funkce $\sin x$

V tomto případě neexistují obě limity, jelikož funkce se k žádné hodnotě neblíží, jestliže x roste nade všechny meze k $+\infty$, popř. klesá pode všechny meze k $-\infty$.

Zapišeme: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sin x$

```
Plot[Sin[x], {x, -3Pi, 3Pi}, PlotStyle -> {Brown, Thick}]
```



Obr. 5.12.: Funkce $\sin x$, která nemá limitu

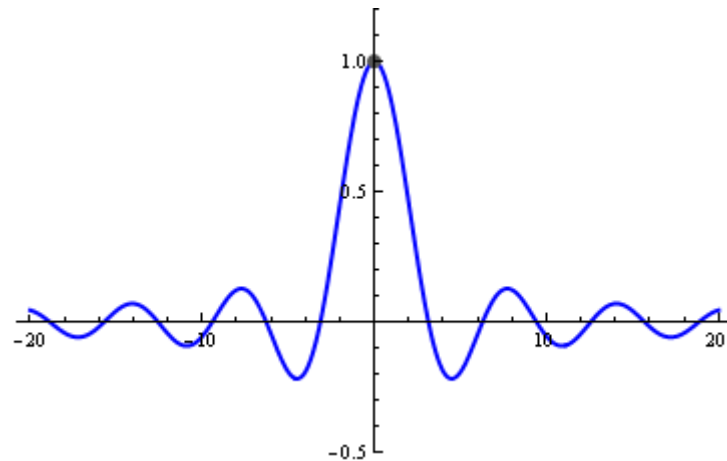
5.5.2 Příklad limity funkce $\frac{1}{x} \sin x$

Funkce $\frac{1}{x} \sin x$ není definována v nule, ale má v ní limitu 1. V $\pm\infty$ má limitu 0.

Zapišeme: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} \sin x$

Možnost `Mesh` zobrazí bod na grafu, pomocí `MeshStyle` můžeme nastavit jeho parametry jako velikost `PointSize` nebo barvu. Tmavší odstín barvy lze zapsat pomocí funkce `Darker`.

```
Plot[Sin[x]/x, {x, -20, 20}, PlotRange -> {-0.5, 1.2},
  PlotStyle -> {Blue, Thick},
  Mesh -> {{0}}, MeshStyle -> {PointSize[0.02], Darker[Gray]}
```

Obr. 5.13.: Funkce $\frac{1}{x} \sin x$

Výpočet těchto limit:

```
In[5] = Limit[Sin[x]/x, x -> 0]
```

```
Out[5] = 1
```

```
In[6] = Limit[Sin[x]/x, x -> Infinity]
```

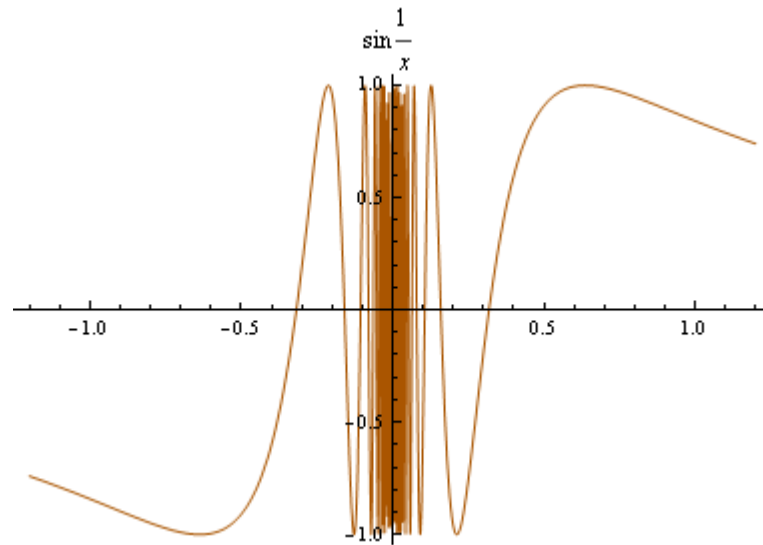
```
Out[6] = 0
```

5.5.3 Příklad limity funkce $\sin \frac{1}{x}$

Limita neexistuje, jelikož v každém okolí bodu $x_0 = 0$ nabývá tato funkce jak hodnot $+1$, tak hodnot -1 .

Při vykreslení grafu jsme tentokrát použili možnost pojmenování názvu grafu pomocí `PlotLabel`.

```
Plot[Sin[1/x], {x, -1.2, 1.2}, PlotStyle -> Darker[Orange],  
PlotLabel -> "sin 1/x"]
```

Obr. 5.14.: Funkce $\sin \frac{1}{x}$

Výpočet limity:

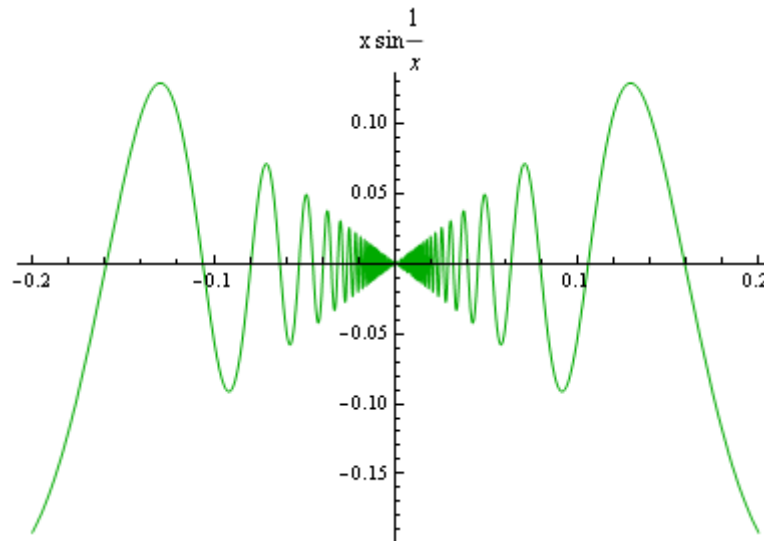
```
In[6] = Limit[Sin[1/x], x -> 0]
```

```
Out[6] = Interval[{-1,1}]
```

5.5.4 Příklad limity funkce $x \cdot \sin \frac{1}{x}$

Limita v bodě $x_0 = 0$ existuje i přes to, že v tomto bodě není funkce definována.

```
Plot[x*Sin[1/x], {x, -0.2, 0.2}, PlotStyle -> Darker[Green],
  PlotLabel -> "x sin 1/x"]
```

Obr. 5.15.: Funkce $x \sin \frac{1}{x}$

Výpočet:

```
In[7] = Limit[x*Sin[1/x], x -> 0]
```

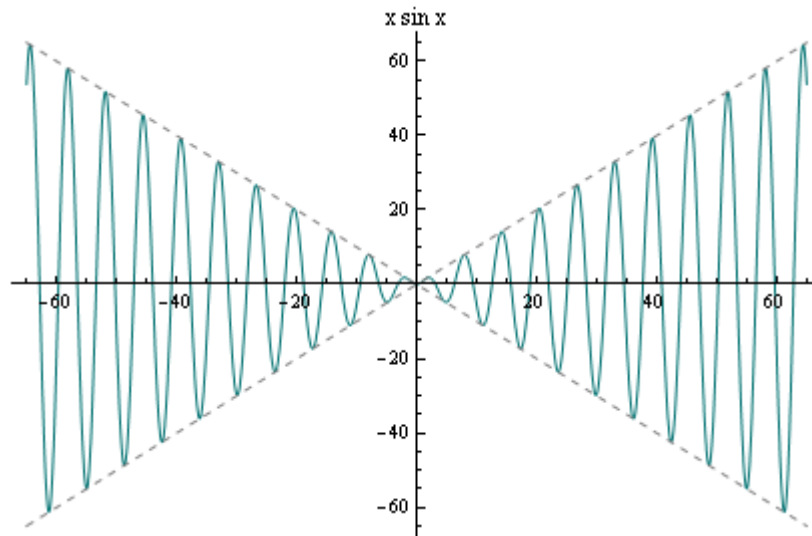
```
Out[7] = 0
```

5.5.5 Příklad limity funkce $x \cdot \sin x$

U funkce $x \cdot \sin x$ neexistují limity v $+\infty$ a $-\infty$.

V *Mathematice* je vykreslen graf i s pomocnými přímkami pomocí jedné funkce `Plot`. Styl jednotlivých grafů je pak v `PlotStyle` ohraničen složenými závorkami oddělenými čárkou, celkem tedy tři skupiny závorek pro tři grafy.

```
Plot[{x*Sin[x], x, -x}, {x, -65, 65},
  PlotStyle -> {Darker[Darker[Cyan]], {Gray, Dashed}, {Gray, Dashed}},
  PlotLabel -> "x sin x"]
```

Obr. 5.16.: Funkce $x \cdot \sin x$ s pomocnými přímkami

Výpočet limity v $+\infty$:

```
In[8] = Limit[x*Sin[x], x -> Infinity]
```

```
Out[8] = Interval[{-∞, ∞}]
```

Výpočet limity v $-\infty$:

```
In[9] = Limit[x*Sin[x], x -> -Infinity]
```

```
Out[9] = Interval[{-∞, ∞}]
```

5.5.6 Řešené příklady

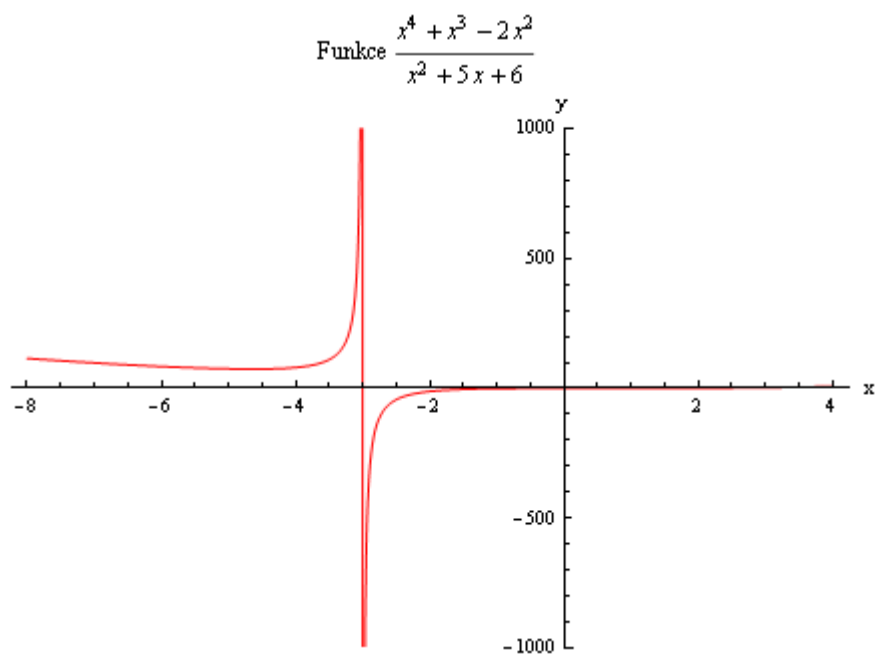
V této kapitole je ukázka řešení limit za pomoci programu *Mathematica*.

Příklad 1: (ve skriptech uveden v kapitole 8.13)

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 + x^3 - 2x^2}{x^2 + 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2(x+2)(x-1)}{(x+2)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2(x-1)}{x+3} = -12 \quad (5.1)$$

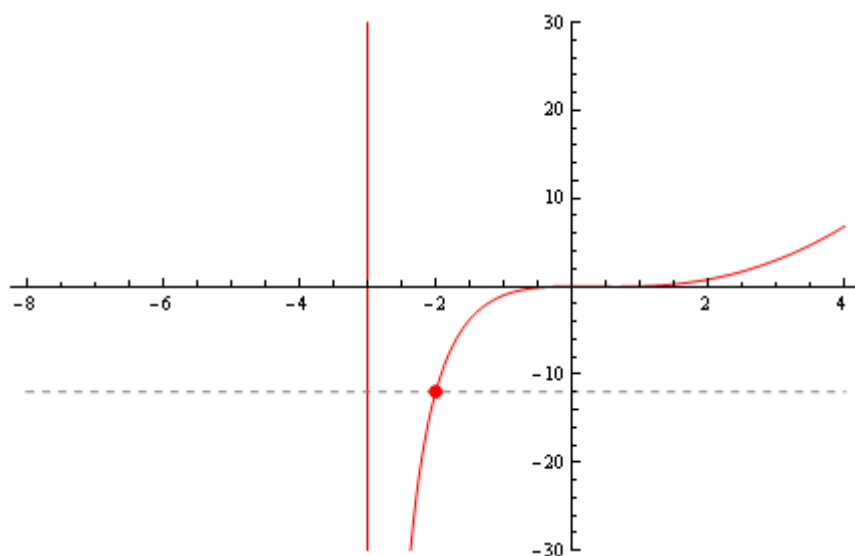
Při vykreslení této funkce programem *Mathematica* byla použita možnost pro popis grafu `PlotLabel` a popis os `AxesLabel`.

```
Plot[(x^4+x^3-2x^2)/(x^2+5x+6), {x, -8, 4}, PlotRange -> {-1000, 1000},
PlotStyle -> Red, PlotLabel -> "Funkce (x^4+x^3-2x^2)/(x^2+5x+6)",
AxesLabel -> {"x", "y"}]
```



Obr. 5.17.: Graf funkce řešeného příkladu 1

Detail na oblast limity:



Obr. 5.18.: Detail na oblast limity s vyznačenou limitou -12

Výpočet výsledné limity:

```
In[10] = Limit[(x^4 + x^3 - 2x^2)/(x^2 + 5x + 6), x -> -2]
```

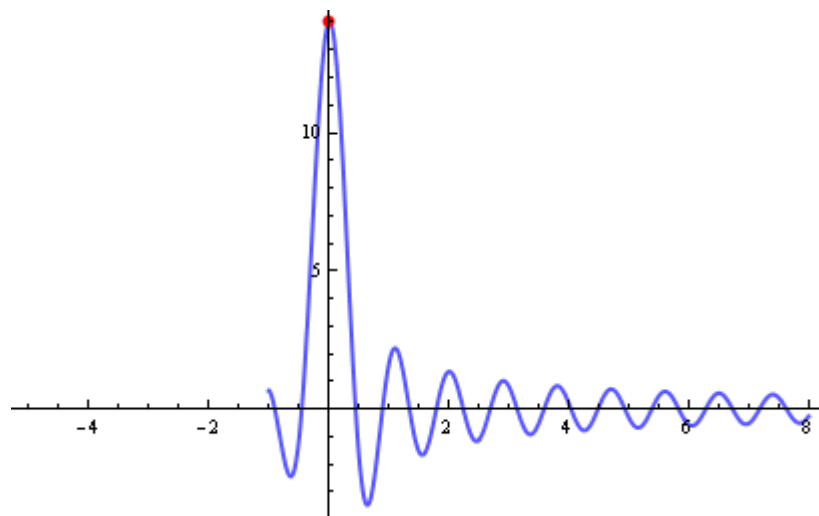
```
Out[10] = -12
```

Příklad 2: (ve skriptech v kapitole 8.13)

(5.2)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(7x)}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sqrt{x+1}-1} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x+1}+1) = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{7x} \cdot 7 = 14$$

```
Plot[Sin[7x]/(Sqrt[x + 1] - 1), {x, -5, 8}, PlotRange -> Full,
  PlotStyle -> {Lighter[Blue], Thick}, Mesh -> {{0}},
  MeshStyle -> {Red, PointSize[0.015]}]
```



Obr. 5.19.: Graf řešeného příkladu číslo 2, kde $x > -1$

Výpočet v *Mathematice*:

```
In[11] = Limit[Sin[7x]/(Sqrt[x + 1] - 1), x -> 0]
```

```
Out[11] = 14
```

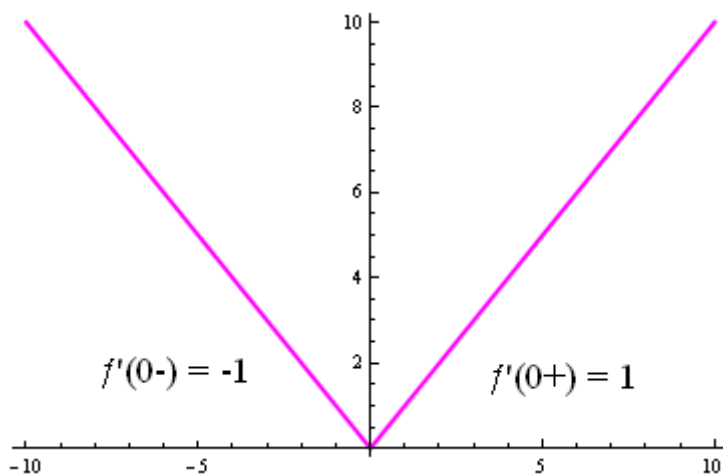
5.6 Derivace funkce

Tato kapitola pojednává o derivaci funkce. Definice derivace jsou uvedeny v teoretické části této práce, v kapitole 2.3 nebo ve skriptech Matematika I [2] v kapitole 11. V této části si ukážeme derivování funkcí pomocí programu *Mathematica*.

5.6.1 Jednostranné derivace

Například spojitá funkce $f(x) = |x|$ nemá derivaci v $f'(0)$, protože derivace zleva je $f'(0-) = -1$ a derivace zprava $f'(0+) = 1$. Tedy $f'(0-) \neq f'(0+)$.

```
Plot[Abs[x], {x, -10, 10}, PlotStyle -> {Magenta, Thick}]
```



Obr. 5.20.: Graf funkce $f(x) = |x|$

5.6.2 Derivace vybraných elementárních funkcí

Principiálně základní technikou je výpočet přímo z definice, tzn. dosazením příslušné funkce do definujících limity a výpočtem této limity. Tento způsob je však obvykle (až na velice jednoduché funkce) dosti komplikovaný a v praxi se nepoužívá. Místo toho se derivace funkcí počítají ze známých derivací několika základních funkcí a jednoduchých algebraických pravidel pro jejich skládání a další úpravy, viz [7].

Polynomy:

1) $(c)' = 0$, [c je konstatní funkce]

```
In[65] := D[Constant, c]
```

```
Out[65] = 0
```

2) $(x^r)' = rx^{r-1}$

```
In[66] := D[x^r, x]
```

```
Out[66] = rx^{(-1+r)}
```

Mocniny, logaritmy:

3) $(e^x)' = e^x$

```
In[67] := D[Exp[x], x]
```

```
Out[67] = e^x
```

4) $(a^x)' = a^x \ln a$, [a ∈ ℝ⁺]

```
In[68] := D[a^x, x]
```

```
Out[68] = a^x Log[a]
```

5) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

```
In[70] := D[Log[x], x]
```

```
Out[70] = 1/x
```

$$6) (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, [a \in \mathbf{R}^+ \setminus \{1\}]$$

```
In[71] := D[Log[a, x], x]
```

```
Out[71] =  $\frac{1}{x \text{Log}[a]}$ 
```

Goniometrické funkce:

$$7) (\cos x)' = -\sin x$$

```
In[72] := D[Cos[x], x]
```

```
Out[72] = -Sin[x]
```

$$8) (\sin x)' = \cos x$$

```
In[73] := D[Sin[x], x]
```

```
Out[73] = Cos[x]
```

$$9) (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Mathematica standardně vyjadřuje $\frac{1}{\cos x}$ jako funkci secans, která se značí $\sec x$, derivace

$\tan x$ je tedy rovna $\frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$.

```
In[74] := D[Tan[x], x]
```

```
Out[74] = Sec[x]^2
```

$$10) (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Podobně jako v předchozím případě, zde *Mathematica* vyjadřuje $\frac{1}{\sin x}$ jako funkci

cosecans, která se značí $\csc x$. Derivace $\cot x$ je tedy vyjádřena jako $-\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$.

```
In[75] := D[Cot[x], x]
```

```
Out[75] = -Csc[x]^2
```

Cyklometrické funkce:

$$11) (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

```
In[76] := D[ArcSin[x], x]
```

```
Out[76] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}
```

$$12) (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

```
In[77] := D[ArcCos[x], x]
```

```
Out[77] = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}
```

$$13) (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

```
In[78] := D[ArcTan[x], x]
```

```
Out[78] = \frac{1}{1+x^2}
```

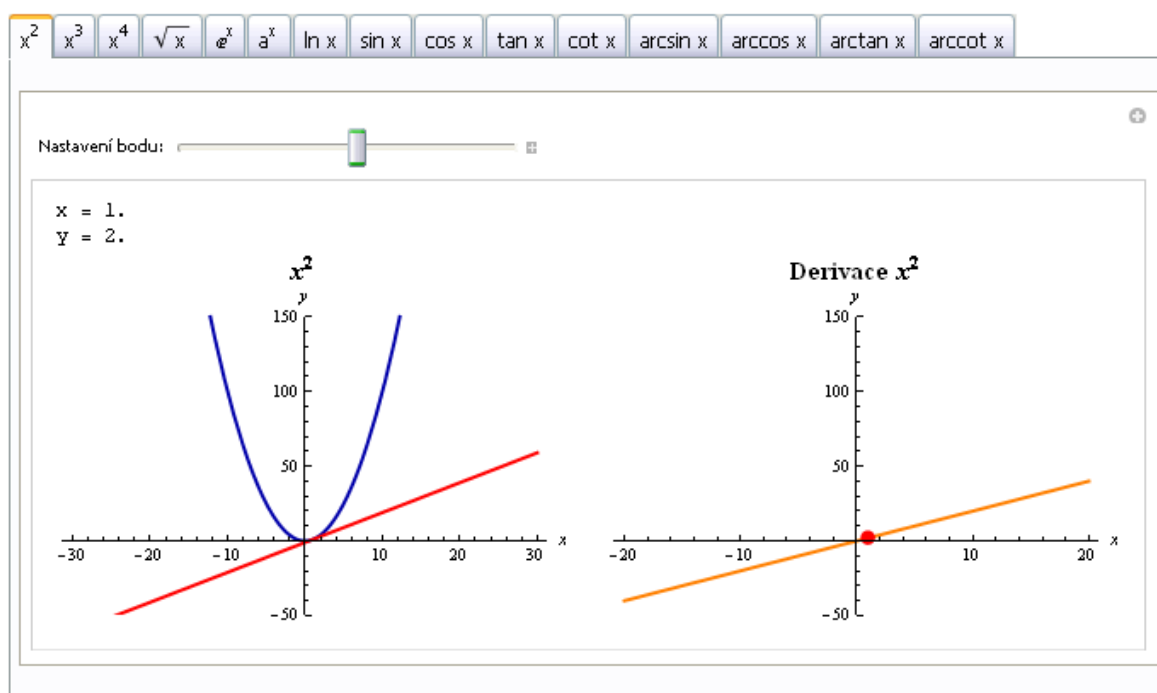
$$14) \operatorname{arccot} x' = -\frac{1}{1+x^2}$$

```
In[79] := D[ArcCot[x], x]
```

```
Out[79] = -\frac{1}{1+x^2}
```

5.7 Derivace v bodě

Součástí této práce je notebook vytvořený v programu *Mathematica*, ve kterém jsou dynamicky znázorněny derivace všech výše jmenovaných funkcí. Posuvníkem lze nastavovat bod, ve kterém chceme derivaci zobrazit. Současně se nám na dvou grafech zobrazují vykreslené grafy - levý graf zobrazuje samotnou derivovanou funkci spolu s tečnou ve zvoleném bodě, pravý graf zobrazuje již derivovanou funkci se zobrazeným zvoleným bodem. V levém horním rohu se zobrazuje hodnota zvoleného bodu a jeho funkční hodnota. Rozkliknutím malého tlačítka „+“ vedle posuvníku lze zapnout automatickou inkrementaci nebo dekrementaci bodu, zvolit rychlost či zobrazovat postupně po krocích.



Obr. 5.21.: Dynamicky zobrazované derivace vybraných funkcí

5.8 Lokální a globální extrémů funkce

Definice lokálních a globálních extrémů funkce je popsána v teoretické části této práce v kapitole 2.4. Podrobněji jsou probrány ve skriptech Diferenciální a integrální počet funkcí jedné proměnné v kapitole 19 a 20.

V *Mathematice* slouží k hledání lokálních extrémů funkce `FindMaximum` a `FindMinimum`. Do hranatých závorek se na první pozici zadá funkce a na druhou proměnná a počáteční bod, odkud se extrém hledá. Výsledkem je nalezený extrém a

funkční hodnota v tomto bodě. Pokud nezadáme počáteční bod, vyhledají se globální extrém.

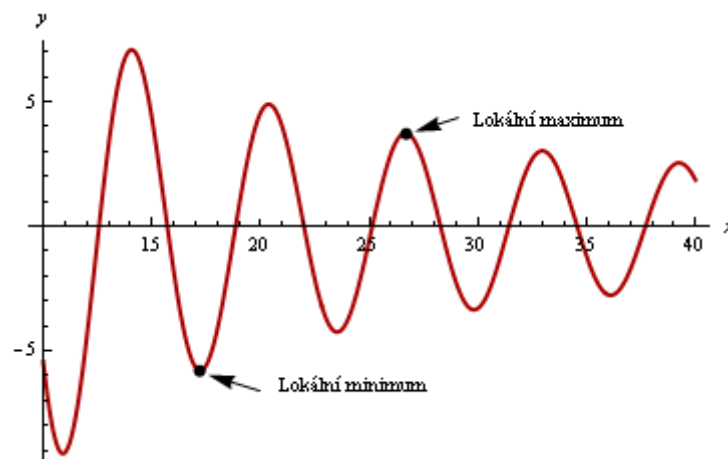
Ukázka na funkci $\frac{100}{x} \sin x$:

```
In[181]:= FindMaximum[100/x*Sin[x], {x, 25}]
```

```
Out[181]= {3.74745, {x -> 26.6661}}
```

```
In[182]:= FindMinimum[100/x*Sin[x], {x, 17}]
```

```
Out[182]= {-5.79718, {x -> 17.2208}}
```



Obr. 5.22.: Lokální extrémů funkce $\frac{100}{x} \sin x$ a jejich nalezení

Ukázka na funkci $x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 40x$:

```
In[353]:= FindMaximum[x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 40x, {x, 0}]
```

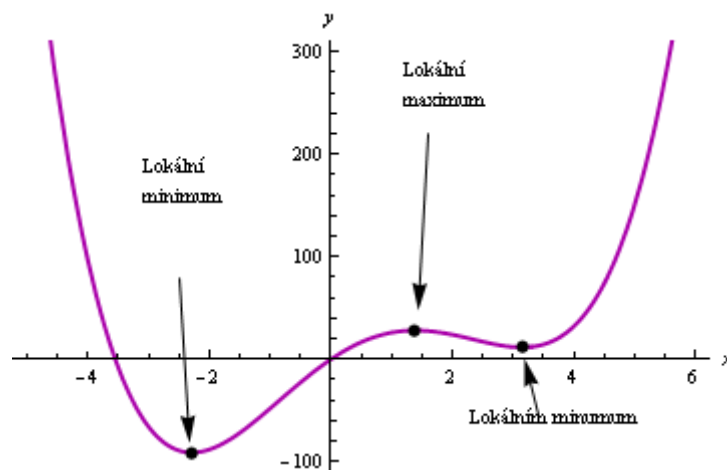
```
Out[353]= {28.091, {x -> 1.38975}}
```

```
In[354]:= FindMinimum[x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 40x, {x, -3}]
```

```
Out[354]= {-91.0021, {x -> -2.28659}}
```

```
In[355]:= FindMinimum[x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 40x, {x, 2}]
```

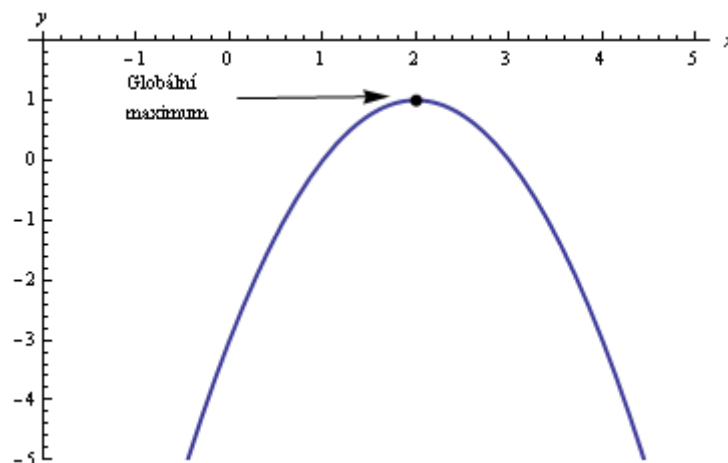
```
Out[355]= {11.6182, {x -> 3.14684}}
```

Obr. 5.23.: Lokální extrémy funkce $x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 40x$

K vyhledání globálního extrému slouží v *Mathematice* funkce `Maximize` a `Minimize`. Zapisují se stejně jako předchozí dvě funkce, jen se nezadáva počáteční bod. Výstupem je funkční hodnota funkce v bodě extrému.

```
In[361]:= Maximize[-x^2 + 4x - 3, x]
```

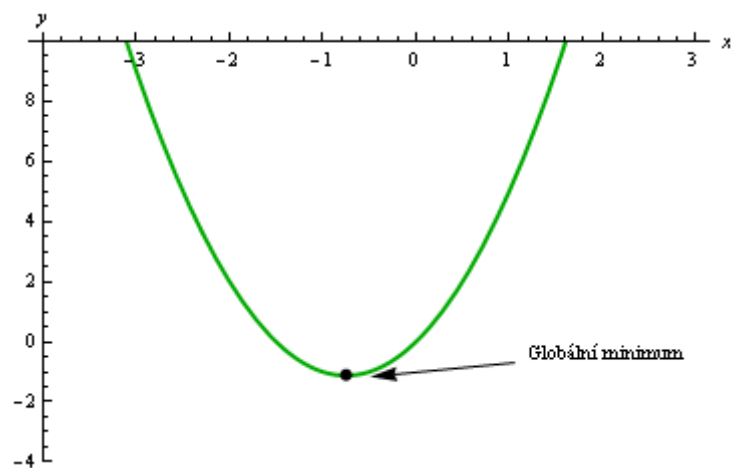
```
Out[361]= {1, {x -> 2}}
```



Obr. 5.24.: Globální extrém - globální maximum

```
In[365]:= Minimize[2x^2 + 3x, x]
```

```
Out[365]= {-9/8, {x -> -3/4}}
```



Obr. 5.25.: Globální extrém - globální minimum

6 INTEGRÁLNÍ POČET FUNKCÍ JEDNÉ PROMĚNNÉ

Tato kapitola pojednává o integrálním počtu funkcí jedné proměnné. Všechny důležité části jsou uvedeny v teoretické části této práce v kapitole 3. Případně další vysvětlení této problematiky je podrobně probráno ve skriptech Diferenciální a integrální počet funkcí jedné proměnné v kapitolách 32 až 54.

6.1 Neurčitý integrál

Tato kapitola pojednává o možnostech využití programu *Mathematica* při výpočtu neurčitého integrálu.

6.1.1 Tabulkové vzorce pro integrování elementárních funkcí

Při ukázkách v prostředí *Mathematica* se ve výsledku nevypisuje konstanta C .

$$1) \int 0 \, dx = C, \quad C \in \mathbf{R}$$

```
In[7] := Integrate[0, x]
```

```
Out[7] = 0
```

$$2) \int 1 \, dx = x + C, \quad x \in \mathbf{R} \text{ (což platí i pro následující případy)}$$

```
In[8] := Integrate[1, x]
```

```
Out[8] = x
```

$$3) \int x^r \, dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, \quad r \neq -1 \text{ (} r \in \mathbf{R} \text{)}$$

```
In[9] := Integrate[x^r, x]
```

```
Out[9] = \frac{x^{r+1}}{r+1}
```

$$4) \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, \quad x \neq 0$$

```
In[10]:= Integrate[1/x, x]
```

```
Out[10]= Log[x]
```

$$5) \int e^x dx = e^x + C$$

```
In[11]:= Integrate[E^x, x]
```

```
Out[11]= e^x
```

$$6) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0 \wedge a \neq 1$$

```
In[12]:= Integrate[a^x, x]
```

```
Out[12]= \frac{a^x}{\text{Log } a}
```

$$7) \int \sin x dx = -\cos x + C$$

```
In[13]:= Integrate[Sin[x], x]
```

```
Out[13]= -Cos[x]
```

$$8) \int \cos x dx = \sin x + C$$

```
In[14]:= Integrate[Cos[x], x]
```

```
Out[14]= Sin[x]
```

$$9) \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C, \quad x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

```
In[25]:= Integrate[1/Sin[x]^2, x]
```

```
Out[25]= -Cot[x]
```

$$10) \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C, \quad x \neq 2k + 1 \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$$

```
In[26]:= Integrate[1/Cos[x]^2, x]
```

```
Out[26]= Tan[x]
```

$$11) \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad a > 0, |x| < a$$

```
In[66]:= Integrate[1/Sqrt[5^2 - x^2], x]
```

```
Out[66]= ArcSin[x/5]
```

$$12) \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$$

```
In[50]:= Integrate[1/(a^2 + x^2), x]
```

```
Out[50]= ArcTan[x/a]/a
```

$$13) \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C, \quad x^2 + a > 0 \quad (a \neq 0, \text{ tj může být } a < 0)$$

```
In[38]:= Integrate[1/Sqrt[x^2 + a], x]
```

```
Out[38]= Log[x + Sqrt[x^2 + a]]
```

$$14) \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C, \quad f(x) \neq 0$$

```
In[49]:= Integrate[(2x)/(x^2 + 1), x]
```

```
Out[49]= Log[1 + x^2]
```

$$15) \int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C, \quad a \neq 0, \text{ kde } F \text{ je primitivní funkce k funkci } f$$

6.1.2 Řešené příklady

Příklad 1: ve skriptech pod číslem 33.2

$$\int 2 \sin x \cos t \, dx = -2 \cos t \cos x + C \quad (6.1)$$

Vidíme důležitost role diferenciálu dx .

Řešení v *Mathematice*:

```
In[70]:= Integrate[2*Sin[x]*Cos[t], x]
```

```
Out[70]= -2 Cos[t] Cos[x]
```

Příklad 2: ve skriptech pod číslem 33.3

$$a) \int \cos(3x-2) \, dx = \frac{1}{3} \sin(3x-2) + C \quad (6.2)$$

Příklad ukazující velkou důležitost vzorce 15) pro integraci funkce lineárního argumentu.

```
In[71]:= Integrate[Cos[3x - 2], x]
```

```
Out[71]= -\frac{1}{3} Cos[3 x] Sin[2] + \frac{1}{3} Cos[2] Sin[3 x]
```

Vidíme, že výraz je složitý a šel by zjednodušit. K těmto účelům slouží funkce *Simplify*. Použitím znaku `%` nemusíme znovu opisovat celý výraz, tento znak nahrazuje poslední výstup, tedy výstup s číslem 71.

```
In[72]:= Simplify[%]
```

```
Out[72]= -\frac{1}{3} Sin[2-3 x]
```

$$b) \int \sqrt[3]{-2x+1} \, dx = -\frac{3}{8}(-2x+1)\sqrt[3]{-2x+1} + C \quad (6.3)$$

```
In[73]:= Integrate[(-2x + 1)^(1/3), x]
```

```
Out[73]= -\frac{3}{8}(1-2x)^{4/3}
```

6.2 Určitý integrál Riemannův

Definice určitého integrálu je probrána v teoretické části této práce v kapitole 3.2 nebo podrobněji ve skriptech Matematika I [2] v kapitole 45.

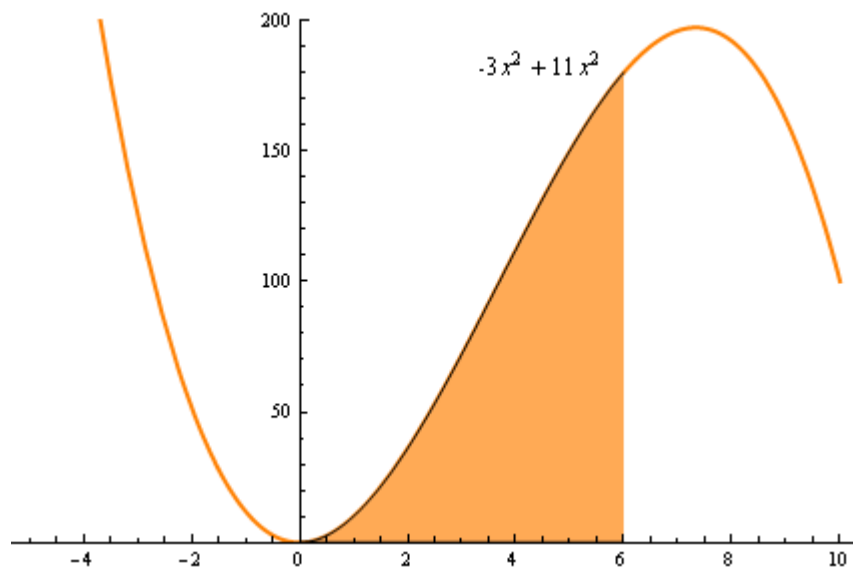
V *Mathematice* se výpočet určitého integrálu provádí funkcí `Integrate`, kde se na druhou pozici a do složených závorek zapíše, podle které proměnné se má funkce integrovat, dolní mez, horní mez.

```
In[86]:= Integrate[x, {x, a, b}]
```

$$\text{Out}[86]= -\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

6.2.1 Výpočet obsahu plochy

Pomocí určitého integrálu lze vypočítat obsah plochy vymezený dvěma body a křivkou. Tyto dva hraniční body jsou vlastně dolní a horní mez, tedy interval $[a, b]$.



Obr. 6.1.: Vymezená plocha pod křivkou

Obsah vyznačené plochy pak vypočteme:

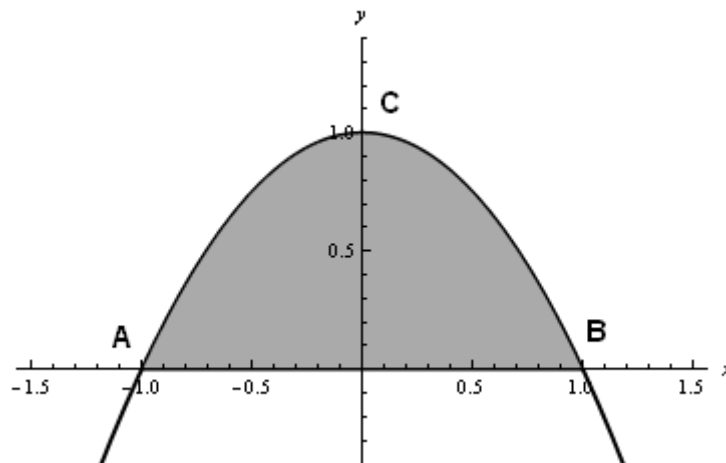
```
In[4]:= Integrate[-x^3 + 11x^2, {x, 0, 6}]
```

```
Out[4]= 468
```

6.2.2 Řešené příklady

Příklad 1: ve skriptech [2] v kapitole 46.5

Určeme obsah P plochy parabolické úsečky na obrázku (Obr. 6.2.). Víme, že parabola je třemi body A, B, C určena jednoznačně.



Obr. 6.2.: Plocha paraboly ohraničená úsečkou

Platí

$$y = ax^2 + bx + c \quad [\text{popř. } y - y_0 = \lambda(x - x_0)^2, \text{ kde } C = (x_0, y_0) = (0, 1)]$$

$$\text{A: } 0 = a - b + c$$

$$\text{B: } 0 = a + b + c \quad \Rightarrow \quad 0 = -2b, \text{ tj. } b = 0. \text{ Pak } a = b - c = -1.$$

$$\text{C: } 1 = \underline{\quad} c \quad \text{Tedy } y = -x^2 + 1.$$

$$P = \int_{-1}^1 (-x^2 + 1) dx = 2 \int_0^1 (-x^2 + 1) dx = 2 \left[-\frac{x^3}{3} + x \right]_0^1 = 2 \left[-\frac{1}{3} + 1 + 0 - 0 \right] = \frac{4}{3} (\text{j}^2) \quad (6.4)$$

Řešení v programu *Mathematica*:

Soustavu lineárních rovnic vyřešíme pomocí funkce `RowReduce`, která vytvoří vlevo jednotkovou matici (tedy podle Gaussovy eliminační metody).

```
In[71] := RowReduce[{{1, -1, 1, 0}, {1, 1, 1, 0}, {0, 0, 1, 1}}] //MatrixForm
```

```
Out[71]//MatrixForm = 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

```

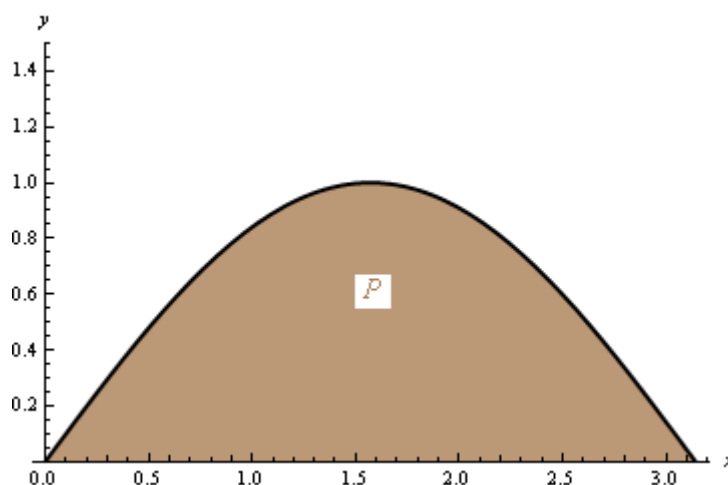
Z posledního sloupce vyčteme hodnoty konstant a, b, c a dosadíme do původní rovnice.

```
In[73]:= Integrate[-x^2 + 1, {x, -1, 1}]
```

```
Out[73]=  $\frac{4}{3}$ 
```

Příklad 2: ve skriptech [2] v kapitole 46.5

Jde o obsah plochy pod půlperiodou sinusoidy.



Obr. 6.3.: Plocha půlperiody sinusoidy

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos \pi - \cos 0 = 2 \quad (6.5)$$

Řešení v *Mathematice*:

```
In[76]:= Integrate[Sin[x], {x, 0, Pi}]
```

```
Out[76]= 2
```

Součástí této části je i notebook, který obsahuje dynamický výpočet plochy. Je v něm vybráno několik funkcí a pomocí posuvníku lze nastavit horní a dolní mez, které ohraničují plochu. Obsah této plochy je pak vypsán nad grafem.

ZÁVĚR

Cílem této práce bylo zpracovat příručku pro studenty předmětu Matematika I na Univerzitě Tomáše Bati ve Zlíně obsahující řešení vybraných matematických úloh prostřednictvím programu Wolfram Mathematica.

V teoretické části této práce se nachází popis programu Mathematica a jeho základní ovládání a práce v tomto prostředí. Dále teoretická část obsahuje dvě kapitoly týkající se diferenciálního počtu funkcí jedné proměnné a integrálního počtu funkcí jedné proměnné. V každé kapitole jsou uvedeny definice, vzorce a popisy vybraných matematických operací spadajících do těchto příslušných kapitol.

V praktické části jsou uvedeny ukázky řešení vybraných problémů v programu Wolfram Mathematica. Pořadí probíraných kapitol odpovídá pořadí kapitol v teoretické části. Na začátku praktické části jsou základní ukázky vybraných matematických funkcí umožňující představit si, jak se s programem Mathematica pracuje. Jsou zde zařazeny variantní situace grafického zobrazení funkcí v rovině, základní vektorové a maticové operace a řešení nelineárních rovnic, to vše včetně ukázek a popisu použitých funkcí v programu Mathematica. Dále jsou zde ukázky řešených úloh na téma diferenciálního a integrálního počtu. V praktické části této práce jsou také soubory programu Mathematica přiložené v elektronické podobě na CD, obsahující zdrojový kód, jenž si student může libovolně upravovat. Také jsou zde dva soubory obsahující dynamicky zpracované ukázky derivací vybraných funkcí a výpočet plochy pomocí určitého Riemannova integrálu. Tyto dynamické ukázky jsou umístěny i v HTML souboru ve formě animovaných obrázků.

ZÁVĚR V ANGLIČTINĚ

The aim of this work was to elaborate a guide for students of Mathematics I course at the Tomas Bata University in Zlín containing examples of solving selected mathematical problems by the Wolfram Mathematica program.

In the theoretical part of this work is a description of the Mathematica program and basic operations and works in this environment. Below, the theoretical part includes two chapters about the differential calculus of functions of one variable and integral calculus of functions of one variable. Each chapter provides definitions, formulas and mathematical descriptions of selected operations belonging to respective chapters.

In the practical part are examples of solving selected problems in Wolfram Mathematica environment. The order of discussed chapters respond to the order of chapters in the theoretical part. At the beginning of the practical part are selected basic math functions allowing you to imagine how to work with the Mathematica environment. There are variant situations included a graphic display functions in the plane, the basic vector and matrix operations and solving linear equations, this all with including examples and a description of used functions in Mathematica environment. There are also examples of solved problems on differential and integral calculus. In the practical part of this work are the Mathematica's files placed as a electronic format on a CD containing the source code, which can student freely modify. Also, there are two files containing dynamically processed samples of selected derivatives of selected functions and calculation of the area by a Riemann integral. These dynamic examples are placed in the HTML file as animated images.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] DOBRAKOVÁ, Jana; KOVÁČOVÁ, Monika; ZÁHONOVÁ, Viera. Mathematica 5.2 : tréningové materiály. Bratislava : Slovenská technická univerzita v Bratislavě, 2008. 277 s. ISBN 80-969562-2-1.
- [2] FIALKA, Miloslav; CHARVÁTOVÁ, Hana. Matematika I. Vyd. 2. Zlín : Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2006. 108 s. ISBN 978-80-7318-584-8.
- [3] CHRAMCOV, Bronislav. Základy práce v prostředí Mathematica. Vyd. 2. Zlín : Univerzita Tomáše Bati, 2006. 122 s. ISBN 80-7318-510-5.
- [4] KŘENEK, Josef; OSTRAVSKÝ, Jan. Diferenciální a integrální počet funkce jedné proměnné s aplikacemi v ekonomii. Vyd. 6. Zlín : Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2005. 231 s. ISBN 978-80-7318-761-3.
- [5] Mathematica - ELKAN : Dokumenty [online]. 2011 [cit. 2011-02-01]. Mathematica. Dostupné z WWW: <<http://www.mathematica.cz/dokumenty.php>>.
- [6] *Integrální počet* [online]. 2007 [cit. 2011-05-24]. Riemannův integrál. Dostupné z WWW: <http://user.mendelu.cz/marik/mat-web/mat-webse10.html>.
- [7] Derivace. *Wikipedia : the free encyclopedia* [online]. St. Petersburg (Florida) : Wikipedia Foundation, 15.8. 2004, poslední editace 16.5. 2011 [cit. 2011-05-17]. Dostupné z WWW: <<http://cs.wikipedia.org/wiki/Derivace>>.
- [8] Limita. In *Wikipedia : the free encyclopedia* [online]. St. Petersburg (Florida) : Wikipedia Foundation, 15.8.2004, last modified on 11.2.2001 [cit. 2011-05-19]. Dostupné z WWW: <<http://cs.wikipedia.org/wiki/Limita>>.
- [9] Wolfram Research. Wolfram [online]. 2011 [cit. 2011-02-01]. Dostupné z WWW: <<http://www.wolfram.com/>>.

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

Všechny použité matematické symboly jsou v souladu s normou ČSN ISO 31-11.

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr. 1.1.: Ukázka notebooku s různými styly	12
Obr. 1.2.: Ukázka palet (asistentů) pro usnadnění psaní funkcí	13
Obr. 1.3.: Zápis funkce do políček	13
Obr. 1.4.: Okno nápovědy programu Mathematica.....	14
Obr. 2.1.: Graf konvexní funkce	21
Obr. 2.2.: Graf konkávní funkce	21
Obr. 2.3.: Inflexní bod funkce $f(x) = x^3 - 3x$	22
Obr. 2.4.: Inflexní bod funkce $f(x) = -x^3 + 3x$	22
Obr. 3.1.: Grafické znázornění integrálního součtu [9].....	25
Obr. 4.1.: Logaritmy v Mathematice.....	29
Obr. 4.2.: Vykreslení vektorů	31
Obr. 5.1.: Funkce ent x v prostředí Mathematica.....	36
Obr. 5.2.: Funkce $\text{sgn } x$	37
Obr. 5.3.: Inverzní funkce k funkci e^x	38
Obr. 5.4.: Funkce $\arcsin x$ v porovnání se $\sin x$	39
Obr. 5.5.: Funkce $\arccos x$ v porovnání s $\cos x$	40
Obr. 5.6.: Funkce $\arctan x$ ve srovnání s $\tan x$	41
Obr. 5.7.: Běžně používaná spojitá funkce $\text{arccot } x$ podle normy	42
Obr. 5.8.: Nestandardní graf funkce $\text{arccot } x$ definován podle prostředí Mathematica nespojitou funkcí.....	42
Obr. 5.9.: Funkce $\ln(x+3)$ a ukázka vlastní limity	43
Obr. 5.10.: Funkce $\frac{1}{x^2}$ a ukázka nevlastní limity $+\infty$ v bodě $x_0 = 0$	44
Obr. 5.11.: Ukázka funkce e^x , která má jak vlastní limitu 0 v nevlastním bodě $x_0 = -\infty$, tak zároveň nevlastní limitu $+\infty$ v nevlastním bodě $x_0 = +\infty$	45
Obr. 5.12.: Funkce $\sin x$, která nemá limitu.....	46
Obr. 5.13.: Funkce $\frac{1}{x} \sin x$	47
Obr. 5.14.: Funkce $\sin \frac{1}{x}$	48
Obr. 5.15.: Funkce $x \sin \frac{1}{x}$	49

Obr. 5.16.: Funkce $x \cdot \sin x$ s pomocnými přímkami	50
Obr. 5.17.: Graf funkce řešeného příkladu 1	51
Obr. 5.18.: Detail na oblast limity s vyznačenou limitou -12.....	51
Obr. 5.19.: Graf řešeného příkladu číslo 2, kde $x > -1$	52
Obr. 5.20.: Graf funkce $f(x) = x $	53
Obr. 5.21.: Dynamicky zobrazované derivace vybraných funkcí.....	57
Obr. 5.22.: Lokální extrémy funkce $\frac{100}{x} \sin x$ a jejich nalezení.....	58
Obr. 5.23.: Lokální extrémy funkce $x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 40x$	59
Obr. 5.24.: Globální extrém - globální maximum.....	59
Obr. 5.25.: Globální extrém - globální minimum	60
Obr. 6.1.: Vymezená plocha pod křivkou.....	65
Obr. 6.2.: Plocha paraboly ohraničená úsečkou.....	66
Obr. 6.3.: Plocha půlperrody sinusoidy	67

SEZNAM TABULEK

Tato práce neobsahuje žádné tabulky.

SEZNAM PŘÍLOH

Všechny přílohy se nacházejí v elektronické podobě na přiloženém CD.