

**Aplikace numerických metod integrace v prostředí Mathematica  
vhodných pro předmět Matematika I a bezpečnostní aplikace  
v průmyslu komerční bezpečnosti**

**Application of numerical methods of integration in Mathematica environment  
that are suitable for Mathematics I subject and security applications  
in commercial security industry**

Martin Fleischmann

---

Bakalářská práce  
2012



Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně  
Fakulta aplikované informatiky

---

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně  
Fakulta aplikované informatiky  
akademický rok: 2011/2012

## ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Martin FLEISCHMANN**  
Osobní číslo: **A09577**  
Studijní program: **B 3902 Inženýrská informatika**  
Studijní obor: **Bezpečnostní technologie, systémy a management**

Téma práce: **Aplikace numerických metod integrace v prostředí Mathematica vhodných pro předmět Matematika I a bezpečnostní aplikace v průmyslu komerční bezpečnosti**

Zásady pro vypracování:

1. Na základě aktuálních výukových materiálů používaných vedoucím práce v předmětu Matematika I navrhnete po vzájemné shodě vedoucím práce formu vypracování navazujících elektronických studijních materiálů ze základních numerických metod integrace, včetně Rombergovy integrace, a příklady naprogramujete v systému počítačové algebry Mathematica.
2. V materiálech navazujících na stávající elektronickou příručku, které by měly být stručným úvodem do problematiky numerických metod integrace, kladte vedle srozumitelnosti a názornosti také důraz na jejich motivující roli pro studenty BTSM.
3. Materiály implementujte do prostředí PowerPoint a do výukového kurzu v Moodle pro studenty BTSM.
4. Výklad vybrané metody doplňte vždy motivačními řešenými příklady a efektivnost dosažených výsledků přehledně vyhodnoťte .
5. Zpracujte elektronickou oporu pro přednášky předmětu Matematika I.

Rozsah bakalářské práce:

Rozsah příloh:

Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

1. CHRAMCOV, Bronislav. **Základy práce v prostředí Mathematica. Vydání 2.** Zlín: Univerzita Tomáše Bati, 2006. ISBN 80-7318-510-5.
2. DOBRAKOVÁ, J., M. KOVÁČOVÁ a Viera ZÁHONOVÁ. **Mathematica 5.2: tréninkové materiály.** Bratislava: Slovenská technická univerzita v Bratislavě, 2008. ISBN 80-969562-2-1.
3. FIALKA, Miloslav a Hana, CHARVÁTOVÁ. **Matematika I. Dotisk 2. vydání.** Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2009. ISBN 978-80-7318-584-8.
4. MÍKA, S. **Numerické metody ALGEBRY.** Praha: SNTL, 1985.
5. PŘIKRYL, Petr. **Numerické metody matematické analýzy.** Praha: SNTL, 1985.
6. RALSTON, A. **Základy numerické matematiky. 2. vydání.** Praha: Academia, 1976.
7. REKTORYS, Karel. **Přehled užití matematiky I. 6. vydání.** Praha: Prometheus, 1995. ISBN 80-85849-92-5.
8. REKTORYS, Karel. **Přehled užití matematiky II. 6. vydání.** Praha: Prometheus, 1995. ISBN 80-85849-62-3.
9. VITÁSEK, E. **Numerické metody.** Praha: SNTL, 1987.

Vedoucí bakalářské práce: **RNDr. Miloslav Fialka, CSc.**  
Ústav matematiky

Datum zadání bakalářské práce: **24. února 2012**

Termín odevzdání bakalářské práce: **25. května 2012**

Ve Zlíně dne 24. února 2012



L.S.

  
prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.  
*děkan*

  
doc. Mgr. Milan Adámek, Ph.D.  
*ředitel ústavu*

## ABSTRAKT

Cílem bakalářské práce není podrobná numerická analýza, ale vypracování navazujících elektronických studijních materiálů ze základních numerických metod integrace - kvadratury v prostředí Wolfram Mathematica 8. Sestavené příklady, mají studentům ukázat použití této části matematiky v rozmanitých aplikacích. V teoretické části je popsána literární rešerše k danému tématu. Zejména pro Newton-Cotesovy vzorce včetně Rombergovy kvadratury a popisu základních pilířů softwaru Mathematica . V praktické části se nachází kolekce nejrůznějších řešených příkladů včetně algoritmu zápisu a srovnání jednotlivých výsledných metod. Pro názornost je práce doplněna o obrázky, grafy a tabulkami.

Klíčová slova: Numerický výpočet integrálu, Numerická kvadratura, Newton-Cotesovy vzorce, Rombergova kvadratura, Kubický splajn, Wolfram Mathematica, Richardsonova extrapolace

## ABSTRACT

The aim of my bachelor work isn't detailed numerical analysis, but the development of electronic study materials related to basic numerical methods of integration - quadrature in the environment of Wolfram Mathematica 8th. There are assembled examples which should show students the use of this part of mathematics in a variety of applications. The theoretical part describes the literature sources on the specific topic. Particularly for the Newton-Cotes formulas, including Romberg quadrature and the description of the basic pillars of the software Mathematica. In the practical part there is a collection of a various solved examples including the registration of algorithm and the comparison of each of the resulting methods. For illustration is the work supplemented with pictures, graphs and tables.

Keywords: Numerical calculation of integrals, Numerical quadrature, Newton-Cotes formulas, Romberg quadrature, Cubic spline, Wolfram Mathematica, Richardson extrapolation.

Tímto bych chtěl poděkovat panu RNDr. Miloslavu Fialkovi, CSc. Za odborné vedení, konzultace, připomínky a čas při tvorbě této práce.

Také bych chtěl poděkovat studentovi Lukáši Urbančokovi za poskytnuté hodnoty efektivního proudu do Příkladu 6.

**Prohlašuji, že**

- beru na vědomí, že odevzdáním bakalářské práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb. o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších právních předpisů, bez ohledu na výsledek obhajoby;
- beru na vědomí, že bakalářská práce bude uložena v elektronické podobě v univerzitním informačním systému dostupná k prezenčnímu nahlédnutí, že jeden výtisk bakalářské práce bude uložen v příruční knihovně Fakulty aplikované informatiky Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně a jeden výtisk bude uložen u vedoucího práce;
- byl/a jsem seznámen/a s tím, že na moji bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších právních předpisů, zejm. § 35 odst. 3;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 1 autorského zákona má UTB ve Zlíně právo na uzavření licenční smlouvy o užití školního díla v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 2 a 3 autorského zákona mohu užít své dílo – bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití jen s předchozím písemným souhlasem Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše);
- beru na vědomí, že pokud bylo k vypracování bakalářské práce využito softwaru poskytnutého Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně nebo jinými subjekty pouze ke studijním a výzkumným účelům (tedy pouze k nekomerčnímu využití), nelze výsledky bakalářské práce využít ke komerčním účelům;
- beru na vědomí, že pokud je výstupem bakalářské práce jakýkoliv softwarový produkt, považují se za součást práce rovněž i zdrojové kódy, popř. soubory, ze kterých se projekt skládá. Neodevzdání této součásti může být důvodem k neobhájení práce.

**Prohlašuji,**

- že jsem na bakalářské práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval. V případě publikace výsledků budu uveden jako spoluautor.
- že odevzdaná verze bakalářské práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG jsou totožné.

Ve Zlíně

.....

podpis diplomanta

**OBSAH**

<b>ÚVOD</b> .....	<b>9</b>
<b>I TEORETICKÁ ČÁST</b> .....	<b>10</b>
<b>1. NUMERICKÝ VÝPOČET INTEGRÁLU - NUMERICKÁ KVADRATURA</b> .....	<b>11</b>
1.1 NEWTON-COTESOVY VZORCE .....	11
1.1.1 Lichoběžníkové pravidlo.....	12
1.1.2 Obdélníkové pravidlo.....	13
1.1.3 Simpsonovo parabolické pravidlo.....	14
1.2 ROMBERGOVA KVADRATURA.....	15
1.2.1 Rombergův kvadrturní vzorec.....	15
<b>2 KUBICKÝ SPLINE</b> .....	<b>17</b>
<b>3 WOLFRAM MATHEMATICA</b> .....	<b>19</b>
3.1 INTERAKTIVNÍ NÁPOVĚDA.....	19
3.2 MATHEMATICA NOTEBOOK .....	20
3.3 MATHEMATICA JAKO PROGRAMOVACÍ JAZYK .....	20
3.4 ZOBRAZOVACÍ FUNKCE .....	20
3.5 NUMERICKÉ A SYMBOLICKÉ OPERACE.....	20
3.6 NÁSTROJOVÉ PALETY .....	21
<b>II PRAKTICKÁ ČÁST</b> .....	<b>22</b>
<b>4 ŘEŠENÍ PŘÍKLADŮ VE WOLFRAM MATHEMATICA</b> .....	<b>23</b>
4.1 ZPŮSOB ŘEŠENÍ (ZADÁNÍ TABULKOU).....	23
4.1.1 Obecný zápis algoritmu (zadání tabulkou) .....	23
4.2 ZPŮSOB ŘEŠENÍ (ZADÁNÍ FUNKCÍ) .....	24
4.2.1 Obecný zápis algoritmu (zadání funkcí) .....	25
4.2.2 Obecný zápis algoritmu lichoběžníkového pravidla (zadání funkcí).....	25
4.2.3 Obecný zápis algoritmu Rombergovy kvadratury (zadání funkcí) .....	25
4.3 PŘÍKAZY POUŽITÉ PŘI VÝPOČTECH .....	25
<b>5 PŘÍKLAD 1</b> .....	<b>27</b>
5.1 VYHODNOCENÍ VÝSLEDKŮ PŘÍKLADU 1 .....	28
5.2 SHRNUÍ PŘÍKLADU 1 .....	29
5.2.1 Výpočet Příkladu 1 (zadání tabulkou).....	29
5.2.2 Výpočet příkladu 1 (zadání funkcí).....	29
5.2.3 Výpočet příkladu 1 (N-C obdélníkové pravidlo) .....	30
5.2.4 Výpočet příkladu 1 (N-C lichoběžníkové pravidlo).....	30
<b>6 PŘÍKLAD 2</b> .....	<b>31</b>
6.1 VYHODNOCENÍ VÝSLEDKŮ PŘÍKLADU 2 .....	32
6.2 SHRNUÍ PŘÍKLADU 2 .....	33
6.2.1 Výpočet Příkladu 2 (zadání tabulkou).....	33
6.2.2 Výpočet příkladu 2 (zadání funkcí).....	33
6.2.3 Výpočet příkladu 2 (N-C obdélníkové pravidlo) .....	34
6.2.4 Výpočet příkladu 2 (N-C lichoběžníkové pravidlo).....	34
<b>7 PŘÍKLAD 3</b> .....	<b>35</b>

7.1	VYHODNOCENÍ VÝSLEDKŮ PŘÍKLADU 3 .....	36
7.2	SHRnutí PŘÍKLADU 3 .....	37
7.2.1	Výpočet Příkladu 3 (zadání tabulkou).....	37
7.2.2	Výpočet příkladu 3 (zadání funkcí).....	37
7.2.3	Výpočet příkladu 3 (N-C obdélníkové pravidlo) .....	38
7.2.4	Výpočet příkladu 3 (N-C lichoběžníkové pravidlo).....	38
<b>8</b>	<b>PŘÍKLAD 4.....</b>	<b>39</b>
8.1	VYHODNOCENÍ VÝSLEDKŮ PŘÍKLADU 4 .....	40
8.2	SHRnutí PŘÍKLADU 4 .....	41
8.2.1	Výpočet Příkladu 4 (zadání tabulkou).....	41
8.2.2	Výpočet příkladu 4 (zadání funkcí).....	41
8.2.3	Výpočet příkladu 4 (N-C obdélníkové pravidlo) .....	42
8.2.4	Výpočet příkladu 4 (N-C lichoběžníkové pravidlo).....	42
<b>9</b>	<b>PŘÍKLAD 5.....</b>	<b>43</b>
9.1	VYHODNOCENÍ VÝSLEDKU PŘÍKLADU 5 .....	43
9.2	SHRnutí PŘÍKLADU 5 .....	44
9.2.1	Výpočet příkladu 5 (zadání funkcí).....	44
<b>10</b>	<b>PŘÍKLAD 6.....</b>	<b>46</b>
10.1	VYHODNOCENÍ VÝSLEDKŮ PŘÍKLADU 6 .....	47
10.2	SHRnutí PŘÍKLADU 6 .....	47
10.2.1	Výpočet Příkladu 6 (zadání tabulkou).....	48
<b>ZÁVĚR .....</b>		<b>49</b>
<b>ZÁVĚR V ANGLIČTINĚ.....</b>		<b>CHYBA! ZÁLOŽKA NENÍ DEFINOVÁNA.</b>
<b>SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY.....</b>		<b>51</b>
<b>SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK.....</b>		<b>52</b>
<b>SEZNAM OBRÁZKŮ .....</b>		<b>53</b>
<b>SEZNAM TABULEK.....</b>		<b>54</b>



## ÚVOD

S rozvojem výpočetní techniky se rozvinuly i softwary, které umožňují přesně vypočítat numerický výpočet integrálu – numerickou kvadraturu. Wolfram Mathematica 8, ve kterém jsou vypočteny příklady v praktické části této práce, patří mezi nejpopulárnější komerční matematické softwary. Cílem této práce není podrobná numerická analýza, ale vypracování navazujících elektronických studijních materiálů ze základních numerických metod integrace - kvadratury v prostředí Wolfram Mathematica 8. Sestavené příklady mají studentům ukázat použití této části matematiky v rozmanitých aplikacích. V teoretické části je popsána literární rešerše k danému tématu. Zejména jsou uvedeny Newton-Cotesovy vzorce včetně Rombergovy kvadratury a jsou popsány základní pilíře, na kterých je postaven software Mathematica. Jsme si vědomi toho, že existují i další metody pro výpočet numerické kvadratury. S vedoucím práce jsme se dohodli, že pro názornost a uvedení do problematiky numerické kvadratury postačí výše zmíněné metody. V praktické části jsou uvedeny nejrůznější řešené příklady včetně algoritmů zápisu a výsledky použitých metod jsou vzájemně porovnány v každém příkladu. Pro názornost je práce doplněna o obrázky, grafy a tabulky.

## **I. TEORETICKÁ ČÁST**

## 1. NUMERICKÝ VÝPOČET INTEGRÁLU - NUMERICKÁ KVADRATURA

Pro numerickou hodnotu  $K(f)$  aproximace zadaného určitého integrálu:

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx,$$

se pro funkci  $f$  rovněž užívá termín numerická kvadratura  $K(f)$ . Přitom platí přibližná rovnost:

$$K(f) \approx I(f).$$

Pro přibližné výpočty hodnot  $K(f)$ , se užívají takzvané kvadraturní vzorce. Numerická kvadratura se používá, když integrand  $f(x)$ :

- nelze integrovat analytickými metodami.
- je analytický výpočet sice možný, ale je příliš zdlouhavý.
- funkce je zadána jinak než analytickým vzorcem (Tabulkou, grafem).

U numerické kvadratury je velmi příznivé pro přesnost výpočtu, když integrovatelná funkce  $\varphi(x)$  je dobrou aproximací integrovatelné funkce  $f(x)$ , tj. platí  $f(x) \approx \varphi(x)$  na celém intervalu  $[a, b]$ . Pak integrál z  $\varphi(x)$  je rovněž dobrou aproximací integrálu z  $f(x)$ , neboť:

$$\begin{aligned} |\varepsilon| &= \left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx \right| = \left| \int_a^b (f - \varphi) dx \right| \leq \int_a^b |f - \varphi| dx \\ &\leq (b - a) \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - \varphi(x)| \end{aligned}$$

### 1.1 Newton-Cotesovy vzorce

Pro další úvahy rozdělíme interval  $[a, b]$  na  $N$  částí stejné délky:

$$h = \frac{b - a}{N} = konst.$$

Pomocí uzlových bodů, tzv. ekvidistančních uzlů:

$$x_k = x_0 + k \cdot h, k = 0, 1 \dots N$$

Ekvidistanční uzly jsou od sebe vzdáleny o konstantní velikost  $h$  tak, že:

$$x_0 = a, x_N = b.$$

Jestliže je funkce  $f$  zadána tabulkou svých hodnot na intervalu  $[a, b]$  jen v uzlech  $x_k$ , tj. množinou bodů:

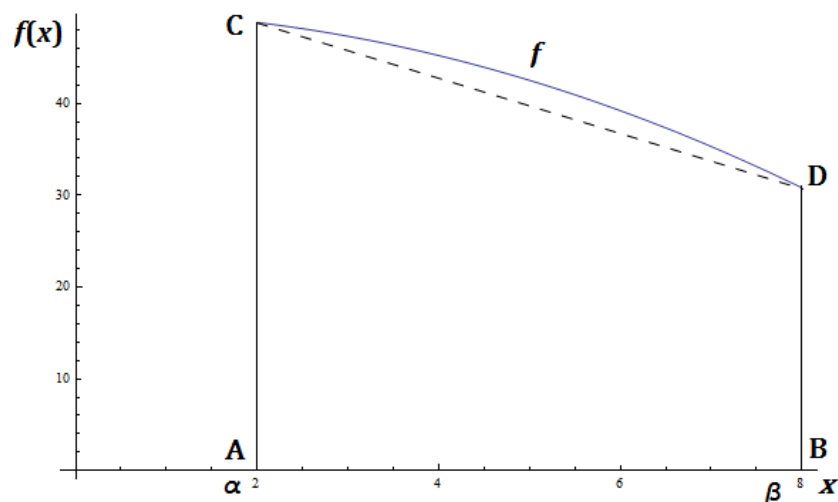
$$\{(x_k, f(x_k), k = 0, 1, \dots, N)\},$$

pak  $h$  se nazývá ekvidistantní tabulkový krok a  $x_k$  jsou tabulkové body. Základní tvar Newton-Cotesových vzorců dostaneme tak, že na každém vhodném podintervalu intervalu integrace  $[a, b]$  nahradíme funkci  $f$  jejím interpolačním polynomem  $\varphi(x)$ , tj. polynomem splňujícím interpolační podmínky pro funkční hodnoty v tabulkových bodech  $x_k$ :

$$\varphi(x_k) = f(x_k), k = 0, 1, \dots, N$$

O interpolaci se jedná, chceme-li interpolačním polynomem  $\varphi(x)$  stanovit přibližnou hodnotu funkce  $f$  dané tabulkou pro nějaký bod  $\tilde{x}$ , který leží mezi dvěma tabulkovými body. O extrapolaci se jedná, použijeme-li  $\varphi(x)$  k výpočtu přibližných hodnot interpolované funkce  $f$  vně intervalu zadaných tabulkových bodů. Interpolace je oproti extrapolaci operace přesnější.

### 1.1.1 Lichoběžníkové pravidlo



Obrázek 1- Lichoběžníkové pravidlo

Je to metoda, kdy při výpočtu integrálu  $I(f)$  nahradíme funkci  $f$  lineárním interpolačním polynomem  $\varphi_1(x)$ , tj. polynomem prvního stupně, neboli přímkou, která prochází body C, D. Takže nebudeme počítat obsah křivočarého lichoběžníka, ale obyčejného lichoběžníka:

$$S_{ABCD} = \frac{\beta - \alpha}{2} \cdot [f(\alpha) + f(\beta)].$$

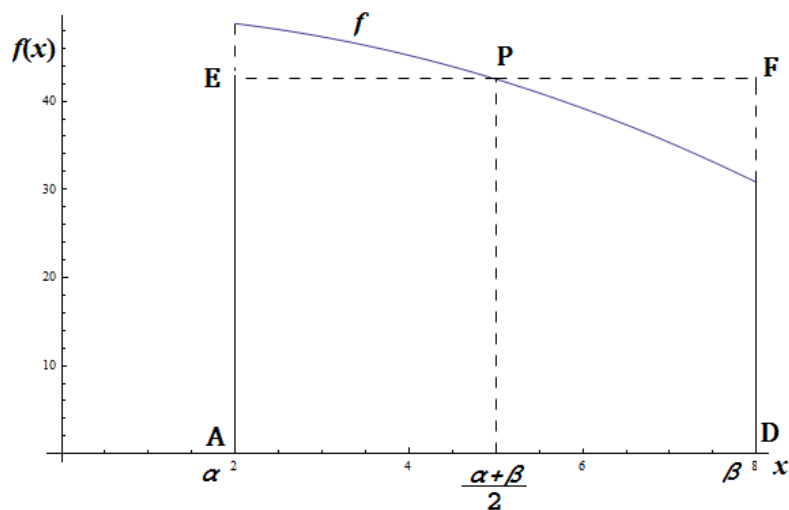
Obecně v bodech  $x_k, x_{k+1}$  funkci  $f$  znovu nahradíme lineárním interpolačním polynomem, který interpoluje funkci v uzlech  $x_k, x_{k+1}$ . Tj. má tam tytéž hodnoty jako funkce  $f$ . Vzorec tedy bude mít tvar:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \approx \frac{h}{2} [f(x_k) + f(x_{k+1})] = T_z(f, h).$$

Složený vzorec pro celý interval  $[a, b]$  je dán součtem základních vzorců pro jednotlivé podintervaly  $[x_k, x_{k+1}]$ . Složený vzorec tedy má tvar:

$$\begin{aligned} \int_b^a f(x) dx &= \sum_{k=0}^N \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \approx \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{N-1}) + f(x_N)] \\ &= \frac{h}{2} [f(x_0) + 2 \sum_{k=1}^{N-1} f(x_k) + f(x_n)] = T(f, h). \end{aligned}$$

### 1.1.2 Obdelníkové pravidlo



Obrázek 2- Obdelníkové pravidlo

Při této metodě se při výpočtu integrálu  $I(f)$  aproximuje  $f$  konstantním interpolačním polynomem  $\varphi_0(x)$ , tj. polynomem stupně nula, neboli přímkou, která je rovnoběžná s osou  $x$  a prochází bodem:

$$P = \left[ \frac{\alpha + \beta}{2}, f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \right].$$

To znamená, že se zde bude počítat obsah obdelníka AEFD, který je:

$$S_{AEFD} = (\beta - \alpha) f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right).$$

Základní vzorec proto pro uzlový bod  $x_k + \frac{h}{2}$ , v němž  $f$  nahradíme konstantní funkcí  $f\left(x_k + \frac{h}{2}\right)$ , má tvar:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \approx h \cdot f\left(x_k + \frac{h}{2}\right) \equiv R_z(f, h).$$

Složený vzorec má pak tvar:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \approx h \left[ f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) + f\left(x_1 + \frac{h}{2}\right) + \dots + f\left(x_{N-1} + \frac{h}{2}\right) \right] \\ &= h \cdot \sum_{k=0}^{N-1} f\left(x_k + \frac{h}{2}\right) \equiv R(f, h). \end{aligned}$$

To odpovídá tomu, že jsme funkci  $f$  na intervalu  $[a, b]$  nahradili aproximací  $\varphi(x)$ , což je po částech konstantní funkce.

### 1.1.3 Simpsonovo parabolické pravidlo

Základní Simpsonovo parabolické pravidlo se za předpokladu, že  $f \in C^4[a, b]$ , odvodí tak, že na intervalu  $[x_k, x_{k+2}]$  délky  $2h$  nahradíme funkci  $f$  kvadratickým interpolačním polynomem  $\varphi_2(x)$ , tj. polynomem druhého stupně – parabolou ve třech sousedních uzlech  $x_k, x_{k+1}, x_{k+2}$  vzdálených o  $h$ . Platí: [1]

$$\int_{x_k}^{x_{k+2}} f(x) dx \approx \int_{x_k}^{x_{k+2}} \varphi_2(x) dx = \frac{h}{3} [f(x_k) + 4f(x_{k+1}) + f(x_{k+2})] \equiv S_z(f, h).$$

V případě složeného Simpsonova pravidla musí být  $N$  sudé číslo. Tj. interval  $[a, b]$  je rozdělen na  $N/2$  podintervalů délky  $2h$ , tzn., že máme celkem  $\frac{N}{2}$  parabol  $\varphi_2(x)$ .

Složený vzorec má potom tvar:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) \\ &\quad + 4f(x_3) + \dots + 2f(x_{N-2}) + 4f(x_{N-1}) + f(x_N)] \equiv S(f, h). \end{aligned}$$

Koeficienty u posledního vzorce jsou 1,4,2,...,2,4,1, se nazývají koeficienty kvadrurního vzorce.

## 1.2 Rombergova kvadratura

Je založena na využití složeného lichoběžníkového pravidla, na které je opakovaně aplikována Richardsonova extrapolace – Rungeho metoda polovičního kroku. Její princip spočívá v tom, že integrál nejprve vypočteme s krokem  $h$  a poté s polovičním krokem  $h/2$ . Vztah pro zpřesnění integrálu má potom tvar:

$$I = T\left(f, \frac{h}{2}\right) + \frac{1}{2^n - 1} \cdot \left[ T\left(f, \frac{h}{2}\right) - T(f, h) \right],$$

kde  $n = 1, 2, \dots$

Richardsonovu extrapolaci by bylo možné využít i na složené obdélníkové pravidlo. Avšak u složeného lichoběžníkového pravidla efektivněji využije hodnot funkce  $f$  vyčíslených v předchozích krocích. V roce 1963 byl proveden rozbor, který ukázal, že se jedná o algoritmus numericky stabilní, tj. zejména málo citlivý na šíření zaokrouhlovacích chyb, vhodný především pro dostatečně hladké funkce. Přesto se její přednosti neuplatní výrazněji oproti složenému lichoběžníkovému pravidlu například při numerické kvadratuře periodických funkcí nebo kvadratuře neohrazeného intervalu.

### 1.2.1 Rombergův kvadrurní vzorec

Počítá se podle tzv. T-schématu:

$$\begin{array}{cccc} T_{00} & & & \\ T_{01} & T_{10} & & \\ T_{02} & T_{11} & T_{20} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ T_{0m} & T_{1,m-1} & T_{2,m-2} & \dots \cdot T_{m0} \end{array}$$

Obrázek 3 – Znáornění T-schématu

kde  $T_{0k}$  v prvním sloupci jsou hodnoty vypočtené lichoběžníkovým pravidlem, o velikosti integračního kroku:

$$h = \frac{b - a}{2^k}.$$

Hodnoty dalších sloupců se postupně dopočítají pro  $m = 1, 2 \dots$  podle vzorce:

$$T_{mk} = \frac{1}{4^{m-1}} (4^m T_{m-1, k+1} - T_{m-1, k}),$$

kde  $k = 0, 1, \dots$

Z posloupnosti  $\{T_{0m}\}$  aproximací daného integrálu lichoběžníkovým pravidlem se tedy sestrojuje postupně „diagonální“ posloupnost  $\{T_{m0}\}$ . Tato nová posloupnost konverguje k hodnotě integrálu obvykle podstatně rychleji než původní posloupnost. Rychlost konvergence je tím vyšší, čím je integrovaná funkce hladší.[5]



## 2 KUBICKÝ SPLINE

Kubický splajn je funkce po částech polynomická, tj. příslušná křivka na intervalu  $[a, b]$ , je složena z jednotlivých kubických polynomů, vytvořených na každém podintervalu  $[x_i, x_{i+1}]$ . Důvod proč je kubický splajn tak populární je, že pokud je funkce dostatečně hladká, pak proložením bodů kubickým splajnem dosáhneme nejmenší křivosti interpolační funkce. Obecně lze interpolační splajn označit jako druh lokální interpolace, která prochází všemi body funkce  $f(x_i) = y_i$  a má spojitou minimálně první derivaci v každém bodě  $x_i$ , takže: [10]

$$\lim_{x \rightarrow x_{i-}} f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_{i+}} f'(x) = y'_i$$

V každém podintervalu  $[x_i, x_{i+1}]$  interpolačního splajnu musí být splněny tyto 4 podmínky:

$$y(x_1) = y_1,$$

$$y(x_2) = y_2,$$

$$y'_{x_1} = y'_{x_2}.$$

Z podmínek vyplývá, že funkce musí mít alespoň 4 parametry (kubický polynom).

$$y = dx^3 + cx^2 + bx + a.$$

Jelikož požadujeme, aby první derivace byla spojitá, platí:

$$y''_2 = f''(x_1) = y''_1 \text{ a } f''(x_1).$$

Obě podmínky dosadíme do druhé derivace kubického polynomu a dostaneme lineární rovnice:

$$y''_1 = 6dx_1 + 2c,$$

$$y''_2 = 6dx_2 + 2c.$$

Pokud rovnice od sebe odečteme, zjistíme parametr  $d$ :

$$6d = \frac{y''_1 - y''_2}{x_1 - x_2}.$$

Abychom zjistili parametr  $c$ , dosadíme do jedné z předchozích rovnic:

$$c = \frac{x_1 y''_2 - x_2 y''_1}{x_1 - x_2}.$$

Jestliže se vrátíme k původní podmínce  $f(x_i) = y_i$ , tak:

$$y_1 = dx_1^3 + cx_1^2 + bx_1 + a,$$

$$y_2 = dx_2^3 + cx_2^2 + bx_2 + a.$$

Pokud rovnice od sebe odečteme, zjistíme hodnotu parametru  $b$ , a následně parametru  $a$ .

Výslednou aproximaci pak můžeme zapsat ve tvaru:

$$y = Ay_1 + By_2 + Cy_1'' + Dy_2'',$$

$$A = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1},$$

$$B = 1 - A,$$

$$C = \frac{1}{6}(A^3 - A) \cdot (x_2 - x_1)^2,$$

$$D = \frac{1}{6}(B^3 - A) \cdot (x_2 - x_1)^2.$$

Derivace  $y'$  z předchozí rovnice má tvar:

$$y'(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{1}{6}(x_2 - x_1) \cdot (3A^2 - 1) \cdot y_1'' + \frac{1}{6}(x_2 - x_1) \cdot (3B^2 - 1) \cdot y_2''.$$

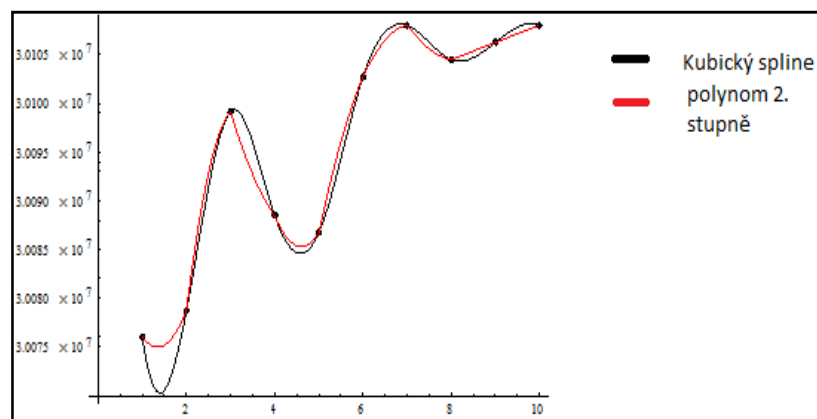
Hodnoty  $y''$  určíme z podmínky:

$$y_{01}'(x) = y_{12}'(x).$$

Po dosazení, rozepsání a úpravě dostaneme:

$$\frac{x_1 - x_0}{6} y_0'' + \frac{x_2 - x_0}{3} y_1'' + \frac{x_2 - x_1}{6} y_2'' = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Pro více bodů, bychom počítali soustavu lineárních rovnic pro druhé derivace. Matice této soustavy je triagonální.[6] Pokud nejsou známy krajní hodnoty, volíme je jejich hodnotu 0.



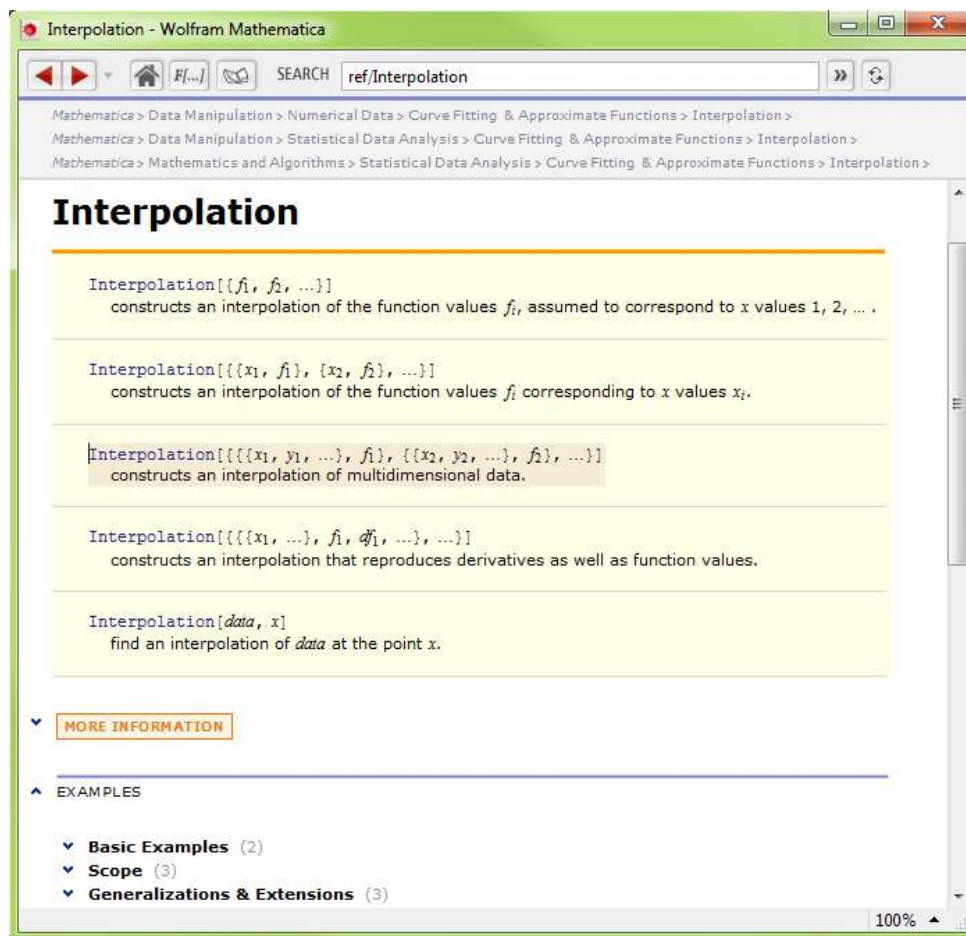
Obrázek 4-Kubický splajn vs. polynom druhého stupně

### 3 WOLFRAM MATHEMATICA

Wolfram Mathematica obsahuje prostředí, které sjednotilo jak práci se symbolickou a numerickou matematikou, tak i dokumentační a grafický systém, který zajišťuje spolupráci s dalšími programovými aplikacemi jako Excel, SQL, JAVA a jiné. Software Wolfram Mathematica je postaven na šesti základních pilířích.

#### 3.1 Interaktivní nápověda

Nápověda obsahuje všechny funkce programu včetně jejich dokumentace. Funguje jako vyhledávací indexový notebook, ve kterém je každá funkce programu Mathematica přehledně a srozumitelně popsána, a to včetně definice dané funkce, názorného příkladu použití a množství hypertextových odkazů s příslušnou nebo podobnou problematikou. Velkou výhodou je možnost úpravy vzorových příkladů a jejich vykreslení, aniž by změny zůstaly zachovány. To umožňuje rychlejší a efektivnější porozumění problematice zápisu.



Obrázek 5- Nápověda programu Wolfram Matematika

### 3.2 Mathematica notebook

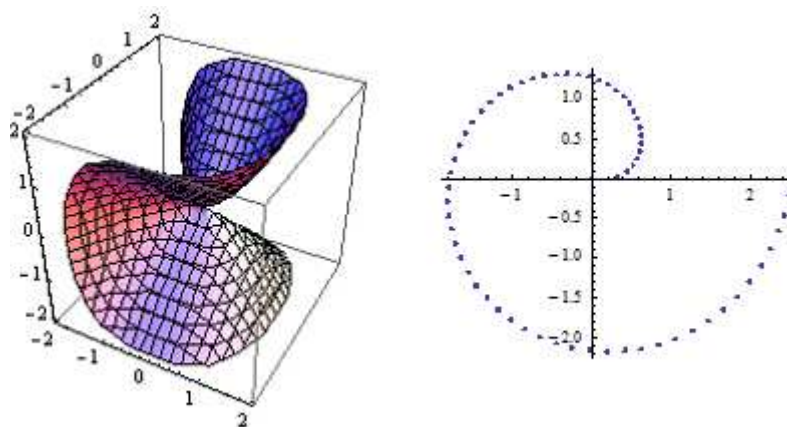
Slouží pro technickou dokumentační činnost. Jsou v něm implementovány funkce pro práci s matematickými výrazy, grafické funkce nebo funkce pro úpravu a formátování textu, animací a hypertextu.

### 3.3 Mathematica jako programovací jazyk

Mathematica poskytuje silné programové prostředí. Programový kód Mathematica dokáže odrážet specifickou problematiku, což jej dělá kratším a snadněji čitelným. Tato pružnost činí přechod z jiného programovacího jazyka jednodušším a efektivnějším.[2]

### 3.4 Zobrazovací funkce

Wolfram Mathematica může vyobrazovat prvky ve 2D i 3D. Součástí je mnoho již vestavěných vzorců pro zobrazování výstupu. Rovněž dokáže zobrazit statistické a vrstevnicové grafy.



Obrázek 6- Ukázka zobrazení 3D a 2D

### 3.5 Numerické a symbolické operace

S každou funkcí, která je zapsána do notebookového systému lze ve Wolfram Mathematice pracovat buď numericky nebo symbolicky.

Práce ve Wolfram Mathematice symbolicky:

$$\text{In}[1] := \sum_{i=1}^n m$$

$$\text{Out}[1] = m \cdot n$$

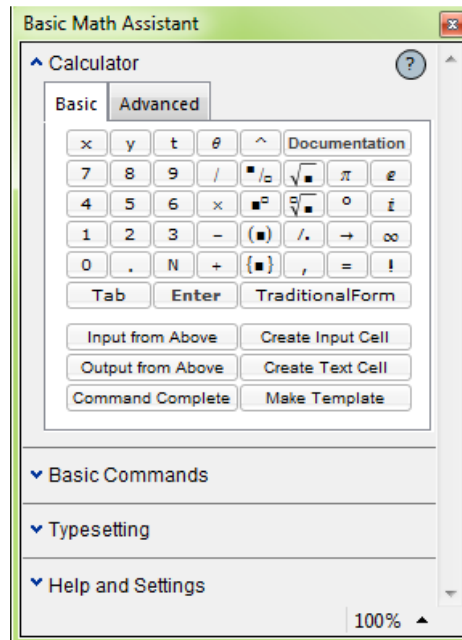
Práce ve Wolfram Mathematice numericky:

$$\text{In}[1] := \sum_{i=1}^{10} \frac{i}{3} // N$$

$$\text{Out}[1] = 8.7869$$

### 3.6 Nástrojové palety

Software Mathematica je vybaven řadou nástrojových palet. Tyto palety slouží k okamžitému použití operací nejrůznějšího charakteru. Mathematica dovoluje vytvoření vlastních nástrojových palet, do kterých si uživatel může nadefinovat nástroje podle vlastní úvahy.



Obrázek 7- Paleta se základními matematickými operacemi

## **II. PRAKTICKÁ ČÁST**

## 4 ŘEŠENÍ PŘÍKLADŮ VE WOLFRAM MATHEMATICA

V této kapitole se budeme zabývat způsobem řešení praktických příkladů. U zadaných příkladů, budeme počítat střední hodnoty funkce  $f(x)$  na intervalu  $[a, b]$ . Obecný tvar vzorce pro výpočet střední hodnoty  $\langle f \rangle$  je podle věty o střední hodnotě integrálního počtu dán vztahem:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Vzorec pro výpočet střední hodnoty funkce  $f(x)$  na intervalu  $[a, b]$  je analogií známého vzorečku ze střední školy pro výpočet aritmetického průměru, který má tvar:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

Příklady řešené v praktické části této práce mohou být zadány dvěma způsoby, a to:

1. Tabulkou – známe funkční hodnoty na zadaném intervalu
2. Funkcí – známe závislost proměnné veličiny

### 4.1 Způsob řešení (zadání tabulkou)

Příklady zadané tabulkou, budeme řešit pomocí interpolačního polynomu, který má tu vlastnost, že prochází všemi zadanými body. Tím dosáhneme toho, že vypočtené hodnoty budou přesnější. U některých příkladů budeme během interpolace využívat metodu interpolačního kubického splajnu. Díky tomu jsme schopni relativně přesně spočítat jak obsah plochy pod interpolačním polynomem, tak i střední hodnotu funkce  $f(x)$ , na intervalu  $[a, b]$ . Pro výpočet střední hodnoty budeme postupovat podle obecného vzorce pro výpočet střední hodnoty. Místo funkce  $f(x)$ , spočítáme numerickou kvadraturu interpolačního polynomu.

#### 4.1.1 Obecný zápis algoritmu (zadání tabulkou)

1. V prvním kroku nadefinujeme zadané hodnoty do proměnné  $f$ .

$$f = \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n\};$$

2. V druhém kroku provedeme interpolaci hodnot uložených do proměnné  $f$ . Výstup z procesu interpolace uložíme do proměnné  $ifun$ .

$$ifun = \text{Interpolation}[f, \text{Method} \rightarrow \text{"Spline"}];$$

3. Ve třetím kroku vykreslíme interpolační funkci *ifun* za pomoci příkazu *Show*, který slouží pro zobrazování několika grafů do jedné soustavy.

```
Show[ListPlot[{f}, PlotStyle
→ {Black, PointSize[Medium]}], Plot[ifun[t], {t, y1, yn}, Filling
→ 0, PlotStyle → {Black}], PlotRange → All, AspectRatio → 1]
```

V řešených příkladech níže, bude u grafu funkční závislosti nahrazena nezávisle proměnná veličina číslem měření - indexem, jak požaduje pro zobrazení grafu wolfram. Toto číslo zobrazené v grafu však wolfram stále interpretuje jako hodnotu původní nezávisle proměnné, nikoliv jako číslo měření.

Je to z toho důvodu, že Mathematica vyžaduje pro uskutečnění interpolace nadefinování hodnot nebo proměnné, ve které jsou hodnoty uloženy. Jelikož jsou u některých příkladů hodnoty zadány pomocí tabulky. Tj. známe jejich *y*-ové souřadnice. Mathematica přiřadí k *x*-ovým souřadnicím hodnotu indexu *y*-ové souřadnice.

Například mějme bod  $A = [x_1, y_1]$  a bod  $B = [x_2, y_2]$ , kde:

$$y_1 = 2, y_2 = 5$$

$$x_1 = 1, x_2 = 2.$$

Pak:

$$A = [1,2] \text{ a bod } B = [2,5].$$

4. Ve čtvrtém kroku vypočítáme střední hodnotu funkce  $f(x)$  na intervalu  $[a, b]$  interpolačního polynomu. Klauzulí `Method → "NewtonCotesRule"` určíme, že Mathematica použije při svých interních výpočtech jednu z Newton-Cotesových metod.

$$\frac{NIntegrate[ifun[f], \{f, x_{min}, x_{max}\}, Method \rightarrow "NewtonCotesRule"]}{x_{max} - x_{min}}$$

## 4.2 Způsob řešení (zadání funkcí)

V příkladech, které budou zadány funkcí, budeme počítat střední hodnotu s využitím vzorce pro výpočet střední hodnoty funkce  $f(x)$  na intervalu  $[a, b]$ . Obecný tvar je:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$



#### 4.2.1 Obecný zápis algoritmu (zadání funkcí)

1. Výslednou hodnotu podělíme rozdílem hodnot intervalu  $[a, b]$

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

#### 4.2.2 Obecný zápis algoritmu lichoběžníkového pravidla (zadání funkcí)

1. Numerická kvadratura  $f(x)$  na intervalu  $[a, b]$

`NIntegrate[f(x), {x, a, b}, {Method → "TrapezoidalRule", Method → "Points" → N}],`

kde `Method → "TrapezoidalRule"` je formule pro použití lichoběžníkového pravidla a `Method → "Points" → N` je klauzulí pro rozdělení intervalu na  $N$  stejných částí.

#### 4.2.3 Obecný zápis algoritmu Rombergovy kvadratury (zadání funkcí)

1. Numerická kvadratura  $f(x)$  na intervalu  $[a, b]$

`NIntegrate[f(x), {x, a, b}, {Method → "TrapezoidalRule", Method  
→ "RombergQuadrature" → {True}}, Method → "Points" → N}],`

kde `Method → "RombergQuadrature" → {True}` určí Mathematice použít Rombergovu kvadraturu.

### 4.3 Příkazy použité při výpočtech

Při řešení zadaných úloh se v příkladech objevují různé příkazy potřebné pro zápis algoritmu řešení.

`Interpolation` – vytvoří interpolační polynom ze zadaných hodnot.

`InterpolationOrder` – určuje stupeň polynomu, kterým funkční hodnoty prokládáme.

`Show`- příkaz umožňující vykreslení více grafů do jedné soustavy.

`ListPlot` – příkaz pro vykreslení bodu nebo bodů do soustavy.

`Plot` – vykreslí do soustavy graf funkce  $f(x)$ .

`Filling` – používá se s vykreslovacími funkcemi, (`Plot`, `ListPlot`). Příkaz pro vyplnění plochy pod bodem nebo funkcí.

`PlotStyle` – příkaz slouží k definování stylu, vykreslování. zejména barev, velikosti zobrazovaných bodů aj.

PointSize – slouží k určení velikosti zobrazeného bodu.

PlotRange – slouží k určení rozsahu, který se má vykreslit.

AspectRatio – Určuje poměr výšky k šířce při vykreslování grafu.

AxesOrigin – příkaz slouží k určení definice pozice os x a y.

AxesLabel – slouží k pojmenování os x a y.

NIntegrate – příkaz pro výpočet numerické kvadratury

Method - slouží k určení metody, kterou má Mathematica použít během vnitřního zpracovávání výpočtu.

Length – příkaz vrací počet členů.

Function – příkaz, ve kterém se definuje funkce.

Points – složí pro nadefinování bodů

NewtonCotesRule – výpočet bude proveden Newton-Cotesovým vzorcem

TrapezoidalRule – výpočet bude proveden lichoběžníkovým pravidlem

RombergQuadrature – výpočet bude proveden Rombergovou kvadraturou

## 5 PŘÍKLAD 1

Celkové výrobní náklady firmy, která začala vyrábět nově vyvinutou bezpečnostní technologii, činili za leden 2011 částku 24,95 tisíc Kč, a za další měsíce téhož roku je uvádí tabulka 1.

**Určete:**

**A)** střední hodnotu vynaložených nákladů za rok 2011 z níže uvedené tabulky 1. Výpočet proveďte numericky, pomocí interpolace zadaných bodů.

**B)** střední hodnotu výrobních nákladů za rok 2011, jestliže závislost  $TC$  je dána vztahem: (Pro možnost porovnání tomuto vztahu vyhovují hodnoty z níže uvedené tabulky 1.)

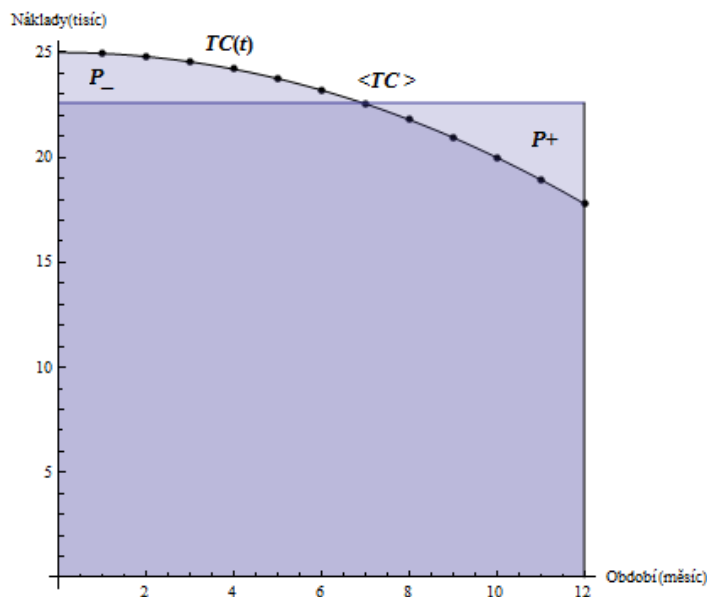
$$TC = 0.5 \cdot (50 - 0.1 \cdot t^2),$$

kde  $t$  je čas.

Tabulka 1- Vynaložené náklady za rok 2011

Období [měsíc]	Cena v tisících Kč
1	24.95
2	24.8
3	24.55
4	24.2
5	23.75
6	23.2
7	22.55
8	21.28
9	20.95
10	20
11	18.95
12	17.8

## 5.1 Vyhodnocení výsledků příkladu 1



Obrázek 8- Graf vynaložených nákladů za rok 2011 s vyznačením střední hodnoty

Na grafu je zobrazen průběh funkce  $TC(t)$ , střední hodnota  $\langle TC \rangle$  a plochy  $P_+$  a  $P_-$ , kde  $P_+ = P_-$ , kde podle věty o střední hodnotě  $\langle TC \rangle$  integrálního počtu, je obsah obdélníka roven obsahu pod danou znázorněnou funkcí  $TC(t)$ .

Metoda	Střední hodnota numericky	Rozdíl k interpolaci	Relativní chyba k interpolaci v %
Interpolací	22.5999	0	0
Funkcí	22.5999		
N-C obdélníkové pravidlo	22.6042	0.0043	0.019
N-C lichoběžníkové pravidlo	22.6000	0.0001	0.0004

Tabulka 2 – Výsledné střední hodnoty jednotlivých metod

## 5.2 Shrnutí příkladu 1

U příkladu 1 jsme měli spočítat střední hodnotu funkce  $TC$ . Funkce zde byla zadána jak tabulkou, tak funkcí. Z tabulky 2 můžeme vypožorovat, že při použití metody interpolace je výsledná střední hodnota stejná jako při klasickém výpočtu. Zajímavostí je, že při analytickém výpočtu pomocí N-C obdélníkovým a lichoběžníkovým pravidlem je vypočítaná střední hodnota rozdílná. Relativní chyba je menší, než 1 %, takže výsledky můžeme považovat za relativně přesné.

### 5.2.1 Výpočet Příkladu 1 (zadání tabulkou)

1. Definice tabulkových hodnot:

$$y = \{24.95, 24.8, 24.55, 24.2, 23.75, 23.2, 22.55, 21.8, 20.95, 20, 18.95, 17.8\};$$

2. Vytvoření interpolačního polynomu:

$$ifun = Interpolation[f, InterpolationOrder \rightarrow 1]$$

3. Vykreslení grafu:

$$Show[ListPlot[{f}, PlotStyle$$

$$\rightarrow \{Black, PointSize[Medium]\}, Plot[ifun2[t], \{t, 0, 12\}, Filling$$

$$\rightarrow 0, PlotStyle \rightarrow \{Black\}, Plot[22.6, \{x, 0, 12\}, Filling$$

$$\rightarrow 0], Graphics[\{Line[\{\{12, 0\}, \{12, 22.6\}\}], PlotRange$$

$$\rightarrow All, AspectRatio \rightarrow 1, AxesOrigin \rightarrow \{0, 0\}, AxesLabel$$

$$\rightarrow \{Období[měsíc], Náklady[tisíc]\}]$$

4. Výpočet střední hodnoty:

$$\frac{NIntegrate[ifun[z], \{z, 0, 12\}, Method \rightarrow "NewtonCotesRule"]}{12}$$

### 5.2.2 Výpočet příkladu 1 (zadání funkcí)

1. Výpočet střední hodnoty:

$$\langle TC \rangle = \frac{0.5 \int_0^{12} (50 - 0.1t^2) dt}{12}$$

**5.2.3 Výpočet příkladu 1 (N-C obdélníkové pravidlo)**

1. Definice funkce a potřebných parametrů:

$$g = \text{Function}[t, 0.5 \cdot (50 - 0.1 \cdot t^2)];$$

$$x_0 = 0;$$

$$x_n = 12;$$

$$N = 12;$$

$$h = \frac{x_n - x_0}{N};$$

2. Výpočet střední hodnoty:

$$\langle TC \rangle = \frac{h \sum_{k=0}^{N-1} g[(x_0 + k \cdot h) + \frac{h}{2}]}{x_n - x_0}$$

**5.2.4 Výpočet příkladu 1 (N-C lichoběžníkové pravidlo)**

1. Výpočet střední hodnoty

$$\langle TC \rangle = \frac{N \text{Integrate}[0.5 \cdot (50 - 0.1 \cdot v^2), \{v, 0, 12\}, \text{Method} \rightarrow \text{"TrapezoidalRule"}, \text{Method} \rightarrow \text{"Points"} \rightarrow 10]}{12}$$

## 6 PŘÍKLAD 2

Ve výuce předmětu Technické prostředky bezpečnostního průmyslu (konkrétně ve cvičení Elektromagnetické detektory I) se studenti setkají s popisem následujícího děje.

Ultrazvuk o frekvenci  $f_0 = 30$  MHz vysílaný MW detektorem (z angl. „microwave“) je po odrazu od narušitele, který se pohybuje rychlostí  $v$  směrem k detektoru, přijímán přijímačem detektoru v důsledku Dopplerova principu na vyšší frekvenci  $f$ , který je dán vztahem:

$$f = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}}$$

**Určete:**

**A)** střední hodnotu přijímané frekvence z naměřených hodnot rychlostí pohybu narušitele (z Tabulky 3).

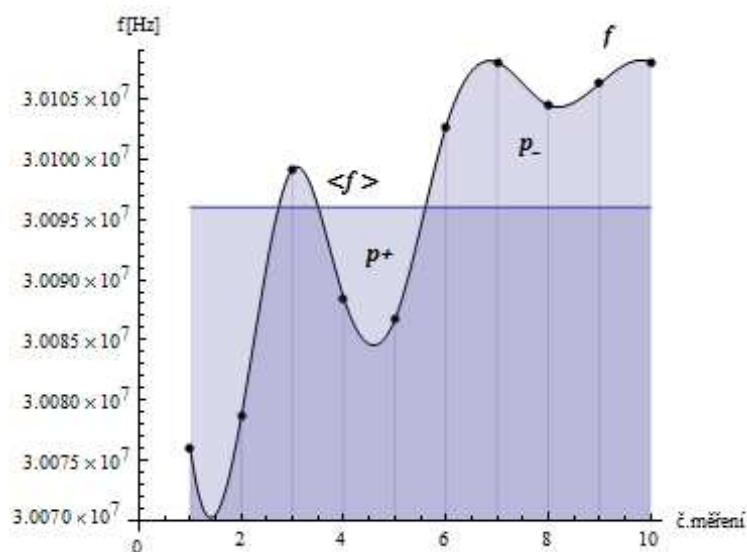
**B)** střední hodnotu frekvence v závislosti na rychlosti podle vzorce Dopplerova principu, který je dán vztahem:

$$f = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}}$$

Číslo měření	Rychlost [ $m \cdot s^{-1}$ ]	Dopočítaná frekvence [MHz]
1	0.86	3.00761
2	0.89	3.00787
3	1.12	3.00992
4	1	3.00885
5	0.98	3.00867
6	1.16	3.0103
7	1.22	3.0109
8	1.18	3.0105
9	1.20	3.0106
10	1.22	3.0108

Tabulka 3 – Tabulka rychlostí pohybu narušitele a dopočítané frekvence

## 6.1 Vyhodnocení výsledků příkladu 2



Obrázek 9- Graf průběhu frekvence s vyznačením střední hodnoty

Na grafu je zobrazen průběh frekvence  $f$ , střední hodnota  $\langle f \rangle$  a plochy  $P_+$  a  $P_-$ ,

kde  $P_+ = P_-$ .

Metoda	Střední hodnota frekvence numericky [MHz]	Rozdíl k interpolaci	Relativní chyba k interpolaci v %
Interpolací	30.09602330695341	3974.28	0.0132071
Funkcí	30.09204902760724		
N-C obdélníkové pravidlo	30.09204905950545	3974.25	0.0132069
N-C lichoběžníkové pravidlo	30.09204908779193	3974.22	0.0132068

Tabulka 4 – Výsledné střední hodnoty jednotlivých metod



## 6.2 Shrnutí příkladu 2

U příkladu 2 jsme měli vypočítat střední hodnotu frekvence. Funkce zde byla zadána jak tabulkou, tak funkcí. Z tabulky 4 je zřejmé, že při použití metody interpolace je výsledná střední hodnota frekvence větší, než u metody kdy funkci známe. Při použití analogických metod pro N-C obdélníkové a lichoběžníkové pravidlo je výsledná střední hodnota u obou metod větší. Vzhledem k tomu, že rozdíl mezi jednotlivými metodami není relativně velký, můžeme metodu interpolace označit za poměrně přesnou.

### 6.2.1 Výpočet Příkladu 2 (zadání tabulkou)

1. Dopočítání frekvence podle vzorce Dopplerova principu:

$$f = \text{Function}\left[v, \frac{30 \cdot 10^6}{1 - \frac{v}{340}}\right]$$

*rychlost* = {0.86, 0.89, 1.12, 1, 0.98, 1.16, 1.22, 1.18, 1.2, 1.22}

$$\textit{frekvence} = f[\textit{rychlost}]$$

2. Vytvoření interpolačního polynomu:

$$\textit{ifun} = \textit{Interpolation}[\textit{frekvence}, \textit{Method} \rightarrow \textit{"Spline"}]$$

3. Vykreslení grafu:

```
Show[ListPlot[{frekvence2}, Filling → 3.007 · 107, PlotStyle
→ {Black, PointSize[Medium]}], Plot[ifun[t], {t, 1, 10}, Filling
→ Axis, PlotStyle
→ {Black}], Plot[3.009602330695344 × 107, {z, 1, 10}, Filling
→ 3.007 · 107, PlotRange → {All}], PlotRange → All, AxesOrigin
→ {0, 3.007 · 107}, AspectRatio → 0.9, AxesLabel → {č.měření, f[Hz]}]
```

4. Výpočet střední hodnoty:

$$\frac{N\textit{Integrate}[ifun[s], \{s, 1, 10\}, \textit{Method} \rightarrow \textit{"NewtonCotesRule"}]}$$

9

### 6.2.2 Výpočet příkladu 2 (zadání funkcí)

1. Výpočet střední hodnoty:

$$\langle f \rangle = \frac{1.02 \cdot 10^{10} \int_{0.86}^{1.22} \frac{dv}{340-v}}{0.36}$$

**6.2.3 Výpočet příkladu 2 (N-C obdélníkové pravidlo)**

1. Definice funkce a potřebných parametrů:

$$g = \text{Function}\left[v, 1.02 \cdot 10^{10} \cdot \frac{1}{340 - v}\right];$$

$$x_0 = 0.86;$$

$$x_n = 1.22;$$

$$N = 10;$$

$$h = \frac{x_n - x_0}{N}$$

2. Výpočet střední hodnoty:

$$\langle f \rangle = \frac{h \sum_{k=0}^{N-1} g\left[\left(x_0 + k \cdot h\right) + \frac{h}{2}\right]}{x_n - x_0}$$

**6.2.4 Výpočet příkladu 2 (N-C lichoběžníkové pravidlo)**

1. Výpočet střední hodnoty:

$$\langle f \rangle = \frac{N \text{Integrate}\left[1.02 \cdot 10^{10} \frac{1}{340 - v}, \{v, 0.86, 1.22\}, \text{Method} \rightarrow \text{"TrapezoidalRule"}, \text{Method} \rightarrow \text{"Points"} \rightarrow 10\right]}{0.36}$$

## 7 PŘÍKLAD 3

Ve výuce předmětu Technické prostředky bezpečnostního průmyslu (konkrétně ve cvičení Elektromagnetické detektory II) se studenti setkají s popisem následujícího děje.

Intenzita  $H$  ( $W \cdot m^{-2}$ ) infračerveného záření vyzařovaného člověkem o teplotě těla  $T_b = 309,15$  K (tj.  $36^\circ C$ ) a povrchem těla  $S_b = 2m^2$ , kterou ve vzdálenosti  $L$  zachytí pyroelement PIR detektoru (z angl. „passive infrared“) o teplotě  $T_s = 293,15$  K (tj.  $20^\circ C$ ), je v důsledku Stefan-Boltzmannova zákona dána vztahem.:

$$H = \varepsilon_b \cdot \varepsilon_s \cdot \delta_0 \cdot (T_b - T_s)^4 \frac{S_b}{2\pi L^2},$$

kde  $\varepsilon_b$ , resp.  $\varepsilon_s$  je emisivita povrchu lidského těla, resp. dielektrika o hodnotě 0,9 resp. 1,  $\delta_0 = 5,67 \cdot 10^{-8}$  ( $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$ ) je součinitel záření neboli Stefan-Boltzmannovakonstanta.

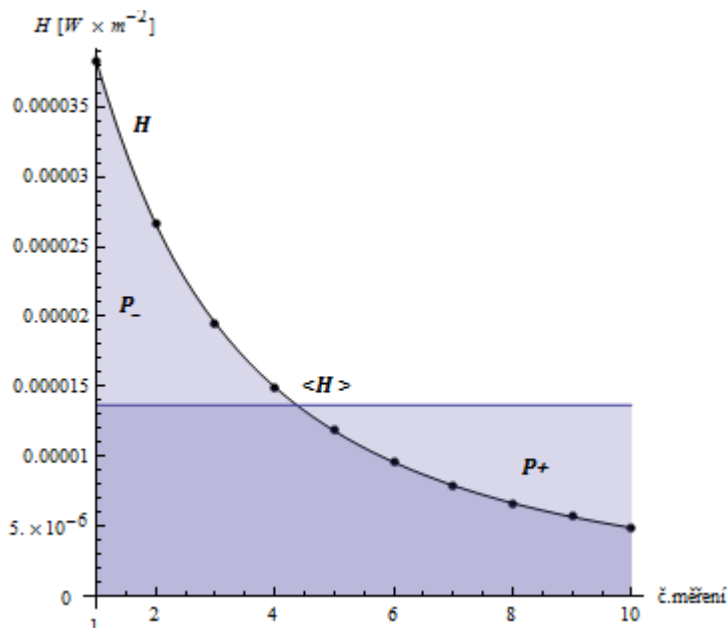
**Určete:**

- A) střední hodnotu nově vznikajících Intenzit  $H$  infračerveného záření, které vznikají při vstupu narušitele do objektu chráněného PIR detektorem. Intenzita se mění podle různé vzdálenosti pachatele od detektoru (viz Tabulka 5).
- B) střední hodnotu Intenzity  $H$  v závislosti na vzdálenosti od PIR detektoru, jestliže je funkce pro výpočet intenzity dána vztahem uvedeným výše.

Č. měření	Vzdálenost [m]	Dopočítaná Intenzita $H$ [ $W \cdot m^{-2}$ ]
1	5	$3.83229 \cdot 10^{-5}$
2	6	$2.66131 \cdot 10^{-5}$
3	7	$1.95525 \cdot 10^{-5}$
4	8	$1.49699 \cdot 10^{-5}$
5	9	$1.1828 \cdot 10^{-5}$
6	10	$9.58072 \cdot 10^{-6}$
7	11	$7.91795 \cdot 10^{-6}$
8	12	$6.65328 \cdot 10^{-6}$
9	13	$5.66906 \cdot 10^{-6}$
10	14	$4.88812 \cdot 10^{-6}$

Tabulka 5 – Vzdálenost narušitele a dopočítaná intenzita  $H$

## 7.1 Vyhodnocení výsledků příkladu 3



Obrázek 10- Graf průběhu intenzity s vyznačením střední hodnoty

Na grafu je zobrazen průběh intenzity  $H$ , střední hodnota  $\langle H \rangle$  a plochy  $P_+$  a  $P_-$ ,

kde  $P_+ = P_-$ .

Metoda	Střední hodnota Intenzity numericky	Rozdíl k interpolaci	Relativní chyba k interpolaci v %
Interpolací	$136877.631966 \cdot 10^{-10}$	$102072.456 \cdot 10^{-14}$	0.007458
Funkcí	$136867.42472 \cdot 10^{-10}$		
N-C obdélníkové pravidlo	$136325.08908 \cdot 10^{-10}$	$552542.886 \cdot 10^{-13}$	0.405313
N-C lichoběžníkové pravidlo	$136867.42472 \cdot 10^{-10}$	$102072.456 \cdot 10^{-14}$	0.007458

Tabulka 6 – Výsledné střední hodnoty jednotlivých metod

## 7.2 Shrnutí příkladu 3

U příkladu 3 jsme měli za úkol vypočítat střední hodnotu Intenzity  $H$ . Příklad je zadán jak tabulkou, tak funkcí. Z tabulky 6 vyplývá, že při použití metody interpolace je výsledná střední hodnota větší, než u metody kdy funkci známe. Odchylka N-C obdélníkového a lichoběžníkového pravidla od metody interpolace je menší než 1%. Protože rozdíl mezi jednotlivými metodami není velký, můžeme metodu interpolace označit za relativně přesnou a efektivní.

### 7.2.1 Výpočet Příkladu 3 (zadání tabulkou)

1. Dopočítání intenzity pro každou vzdálenost podle Stefan-Boltzmannova zákona:

$$F = \text{Function} \left[ L, 9.580719730041132 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{1}{L^2} \right]$$

$$L = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\};$$

$$H = F[L];$$

2. Vytvoření interpolačního polynomu:

$$\text{ifun} = \text{Interpolation}[H, \text{InterpolationOrder} \rightarrow 1]$$

3. Vykreslení grafu:

$$\begin{aligned} &\text{Show}[\text{ListPlot}[\{H\}, \text{PlotStyle} \\ &\rightarrow \{Black, \text{PointSize}[\text{Medium}]\}], \text{Plot}[\text{ifunk}[t], \{t, 1, 10\}, \text{Filling} \\ &\rightarrow 0, \text{PlotStyle} \rightarrow \{Black\}], \text{Plot}[0.00001368, \{f, 1, 10\}, \text{Filling} \\ &\rightarrow \text{Axis}], \text{PlotRange} \rightarrow \text{All}, \text{AspectRatio} \rightarrow 1, \text{AxesOrigin} \\ &\rightarrow \{1, 0\}, \text{AxesLabel} \rightarrow \{\text{"č. měření"}, \text{"H}[W \cdot m^{-2}]\}] \end{aligned}$$

4. Výpočet střední hodnoty:

$$\underline{\underline{NIntegrate[\text{ifun}[z], \{z, 1, 10\}, \text{Method} \rightarrow \text{"NewtonCotesRule"}]}}$$

9

### 7.2.2 Výpočet příkladu 3 (zadání funkcí)

1. Výpočet střední hodnoty:

$$\langle H \rangle = \frac{9.580719730041132 \cdot 10^{-4}}{9} \cdot \int_5^{14} \frac{dL}{L^2}$$

**7.2.3 Výpočet příkladu 3 (N-C obdélníkové pravidlo)**

1. Definice funkce a potřebných parametrů:

$$g = \text{Function} \left[ L, 9.580719730041132 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{1}{L^2} \right];$$

$$x_0 = 5;$$

$$x_n = 14;$$

$$N = 10;$$

$$h = \frac{x_n - x_0}{N}$$

2. Výpočet střední hodnoty:

$$\langle H \rangle = \frac{h \sum_{k=0}^{N-1} g\left[x_0 + k \cdot h + \frac{h}{2}\right]}{x_n - x_0}$$

**7.2.4 Výpočet příkladu 3 (N-C lichoběžníkové pravidlo)**

1. Výpočet střední hodnoty:

$$\langle H \rangle = \frac{0.0009580719730041132 \cdot \text{NIntegrate}\left[\left(\frac{1}{R^2}\right), \{R, 5, 14\}, \text{Method} \rightarrow \text{"TrapezoidalRule"}, \text{Method} \rightarrow \text{"Points"} \rightarrow 10\right]}{9}$$

## 8 PŘÍKLAD 4

Ve výuce předmětu Technické prostředky bezpečnostního průmyslu (konkrétně ve cvičení Elektromagnetické detektory I) se studenti setkají s popisem následujícího děje.

Elektromagnetické vlnění o frekvenci  $f_0 = 2,4$  GHz vysílané MW detektorem (z angl. „microwave“) je po odrazu od narušitele, který se pohybuje rychlostí  $v$  směrem k detektoru, přijímáno přijímačem detektoru v důsledku Dopplerova principu na vyšší frekvenci  $f$ , přičemž platí:

$$f = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}}$$

**Určete:**

**A)** střední hodnotu přijímané frekvence z naměřených hodnot rychlostí pohybu narušitele (Tabulka 3).

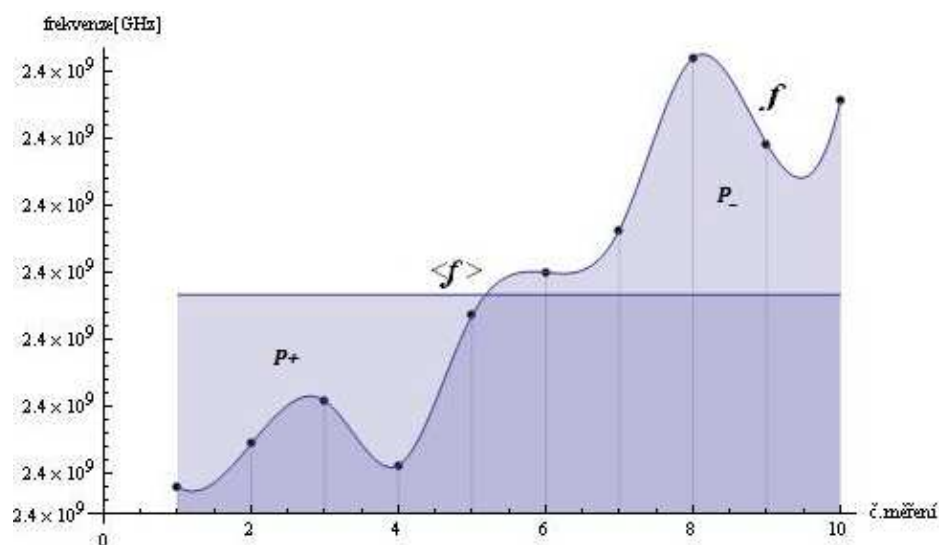
**B)** střední hodnotu frekvence v závislosti na rychlosti dle vzorečku Dopplerova principu, který je dán vztahem:

$$f = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}}$$

Číslo měření	Rychlost [ $m \cdot s^{-1}$ ]	Dopočítaná frekvence [GHz]
1	0.8	2.4000000064
2	0.84	2.4000000067
3	0.88	2.4000000070
4	0.82	2.4000000065
5	0.96	2.4000000076
6	1	2.4000000080
7	1.04	2.4000000083
8	1.20	2.4000000096
9	1.12	2.4000000089
10	1.16	2.4000000092

Tabulka 7 – Tabulka rychlostí pohybu narušitele a dopočítané frekvence

## 8.1 Vyhodnocení výsledků příkladu 4



Obrázek 11- Graf průběhu frekvence

Na grafu je zobrazen průběh frekvence  $f$ , střední hodnota  $\langle f \rangle$  a plochy  $P_+$  a  $P_-$ ,

kde  $P_+ = P_-$ .

Metoda	Střední hodnota frekvence numericky [GHz]	Rozdíl k interpolaci	Relativní chyba k interpolaci v %
Interpolací	2.4000000078325505	190.744	$7.9476 \cdot 10^{-6}$
Funkcí	2.4000001985768904		
N-C obdélníkové pravidlo	2.400000008	0.167	$6.9583 \times 10^{-9}$
N-C lichoběžníkové pravidlo	2.4000000080000006	0.167	$6.9583 \times 10^{-9}$

Tabulka 8 – Výsledné střední hodnoty jednotlivých metod



## 8.2 Shrnutí příkladu 4

U příkladu 4 jsme měli za úkol spočítat střední hodnotu frekvence  $f$ . Zadání u tohoto příkladu bylo zadáno jak tabulkou, tak funkcí. Z tabulky 8 můžeme vyzorovat, že při použití metody interpolace je výsledná střední hodnota menší, než u metody, kdy funkci známe. Vzhledem k tomu, že rozdíl mezi jednotlivými metodami není velký, můžeme metodu interpolace označit za relativně přesnou a efektivní.

### 8.2.1 Výpočet Příkladu 4 (zadání tabulkou)

1. Dopočítání frekvence dle zadané rychlosti:

$$f = \text{Function}[v, 7.2 \cdot 10^{17} \cdot \frac{dv}{3 \cdot 10^8 - v}]$$

$$\text{rychlost} = \{0.8, 0.84, 0.88, 0.82, 0.96, 1, 1.04, 1.2, 1.12, 1.16\};$$

$$\text{frekvence} = f[\text{rychlost}]$$

2. Vytvoření interpolačního polynomu:

$$\text{ifun} = \text{Interpolation}[f, \text{Method} \rightarrow \text{"Spline"}]$$

3. Vykreslení grafu:

$$\begin{aligned} &\text{Show}[\text{ListPlot}\{\text{frk}\}, \text{Filling} \rightarrow 2.4000000062 \cdot 10^9, \text{PlotStyle} \\ &\rightarrow \{\text{Black}, \text{PointSize}[\text{Medium}]\}, \text{Plot}[\text{ifn}[t], \{t, 1, 10\}, \text{Filling} \\ &\rightarrow 2.4000000062 \cdot 10^9], \text{Plot}[2.40000000783255 \\ &\cdot 10^9, \{x, 1, 10\}, \text{Filling} \rightarrow 2.4000000062 \cdot 10^9], \text{AxesOrigin} \\ &\rightarrow \{0, 2.4000000062 \cdot 10^9\}, \text{AxesLabel} \\ &\rightarrow \{\text{"č. měření"}, \text{"frekvence[GHz]"}\}] \end{aligned}$$

4. Výpočet střední hodnoty

$$\underline{\underline{NIntegrate[\text{ifun}[s], \{s, 1, 10\}, \text{Method} \rightarrow \text{"NewtonCotesRule"}]}}$$

9

### 8.2.2 Výpočet příkladu 4 (zadání funkcí)

1. Výpočet střední hodnoty:

$$\langle f \rangle = \frac{7.2 \times 10^{17} \int_{0.8}^{1.2} \frac{dv}{3 \cdot 10^8 - v}}{0.4}$$

**8.2.3 Výpočet příkladu 4 (N-C obdélníkové pravidlo)**

1. Definice funkce a potřebných parametrů:

$$g = \text{Function}\left[v, \frac{7.2 \cdot 10^{17}}{340 - v}\right];$$

$$x_0 = 0.8;$$

$$x_n = 1.20;$$

$$N = 10;$$

$$h = \frac{x_n - x_0}{N}$$

2. Výpočet střední hodnoty:

$$\langle f \rangle = \frac{h \sum_{k=0}^{N-1} g\left[\left(x_0 + k \cdot h\right) + \frac{h}{2}\right]}{x_n - x_0}$$

**8.2.4 Výpočet příkladu 4 (N-C lichoběžníkové pravidlo)**

1. Výpočet střední hodnoty:

$$\langle f \rangle = \frac{N \text{Integrate}\left[\left(7.2 \cdot 10^{17}\right) \cdot \frac{1}{3 \cdot 10^8 - v}, \{v, 0.8, 1.2\}, \text{Method} \rightarrow \text{"TrapezoidalRule"}, \text{Method} \rightarrow \text{"Points"} \rightarrow 10\right]}{0.4}$$

## 9 PŘÍKLAD 5

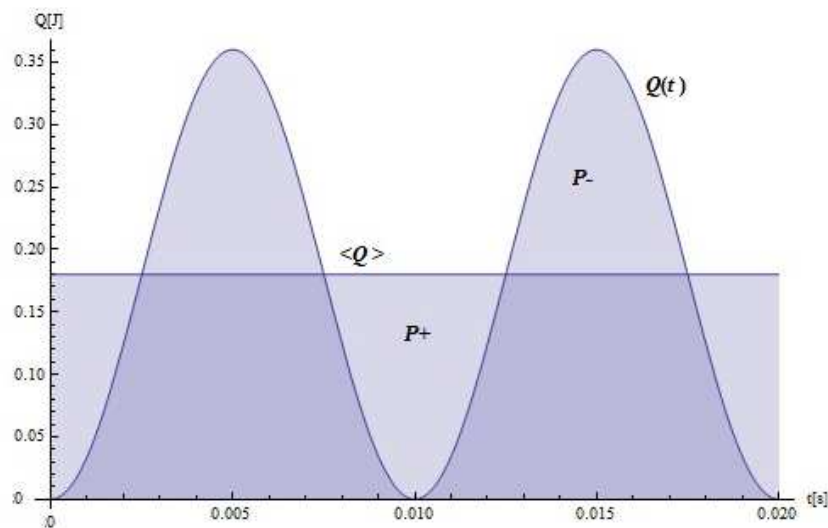
Určete střední hodnotu Joulova tepla  $\langle Q \rangle$ , střídavého sinového proudu  $I$  s frekvencí  $f = 50$  Hz, jestliže velikost efektivního proudu  $I_{ef}$  je 60 mA a odpor rezistoru  $R$  je  $100 \Omega$ .

Vzorec pro výpočet Joulova tepla má tvar:

$$Q = R \cdot i^2 \cdot t,$$

kde  $i = I_{ef} \cdot \sin(\omega t)$ ,  $R$  je elektrický odpor rezistoru,  $\omega = 2\pi f$  je úhlová frekvence a  $t$  je čas, po který proud prochází vodičem.

### 9.1 Vyhodnocení výsledku příkladu 5



Na grafu je zobrazen průběh Joulova tepla  $Q$ , střední hodnota  $\langle Q \rangle$  a plochy  $P_+$  a  $P_-$ ,

kde  $P_+ = P_-$

Obrázek 12-Graf průběhu Joulova tepla v závislosti na čase

Metoda	Střední hodnota numericky
Funkcí – Rombergova kvadratura	0.18
Funkcí – „Klasické řešení“	0.18
Symbolické řešení Wolfram	$\frac{I_{ef}^2 \cdot R}{2}$
Symbolické řešení - ručně	$\frac{I_{ef}^2 \cdot R}{2}$

Tabulka 9 – Výsledné střední hodnoty Joulova tepla a symbolického řešení

## 9.2 Shrnutí příkladu 5

V příkladu 5 jsme měli za úkol vypočítat střední hodnotu Joulova tepla  $Q$ . Příklad byl zadaný funkcí a k jeho výpočtu jsme použili numerický způsob řešení pomocí Rombergovy kvadratury a řešení „klasické“, kdy jsme integrovali zadanou funkci  $Q(t)$ . Výsledná střední hodnota vyšla u obou případů 0.18 J. Při výpočtu jsme pracovali i se symbolickým řešením, srovnané s řešením ručním. Jak lze vyčíst z tabulky 9, výsledky obou symbolických řešení jsou stejné.

$$\langle Q \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

### 9.2.1 Výpočet příkladu 5 (zadání funkcí)

1. Ruční výpočet (symbolicky):

$$\begin{aligned} \langle Q \rangle &= \frac{R \cdot I_{ef}^2 \cdot \int_0^T \sin^2(\omega \cdot t) dt}{T} = R \cdot I_{ef}^2 \cdot f \cdot \int_0^{\frac{1}{f}} \frac{1 - \cos 2(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} R \cdot I_{ef}^2 \cdot f \cdot \left[ t - \frac{1}{2} \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) \right]_0^{\frac{1}{f}} \\ &= \frac{1}{2} R \cdot I_{ef}^2 \cdot f \cdot \left[ \frac{1}{f} - \frac{1}{2} \sin 2 \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot f}{f} \right] = \frac{1}{2} \cdot R \cdot I_{ef}^2 \end{aligned}$$

2. Výpočet pomocí softwaru Mathematica (symbolicky)

Vstup:

$$f \cdot R \cdot I_{ef}^2 \cdot \int_0^{\frac{1}{f}} (\sin[2 \cdot \pi \cdot f \cdot t])^2 dt$$

Výstup:

$$\frac{I_{ef}^2 \cdot R}{2}$$

3. Numerický výpočet (Rombergova kvadratura):

$$18 \cdot NIntegrate[(Sin[100 \cdot \pi \cdot b])^2, \{b, 0, \frac{1}{50}\}, Method$$

→ {"TrapezoidalRule", "RombergQuadrature"} → True]

4. Klasický výpočet:

$$18 \cdot \int_0^{\frac{1}{50}} (\sin[100 \cdot \pi \cdot t])^2 dt // N$$

5. Vykreslení grafu:

```
Show[Plot[(100 · 0.062 · (Sin[100 · π · t])2), {t, 0,  $\frac{1}{50}$ }, Filling  
→ 0], Plot[0.18, {x, 0, 0.02}, Filling → 0], AxesLabel  
→ {"t[s]", "Q[J]"}]
```

## 10 PŘÍKLAD 6

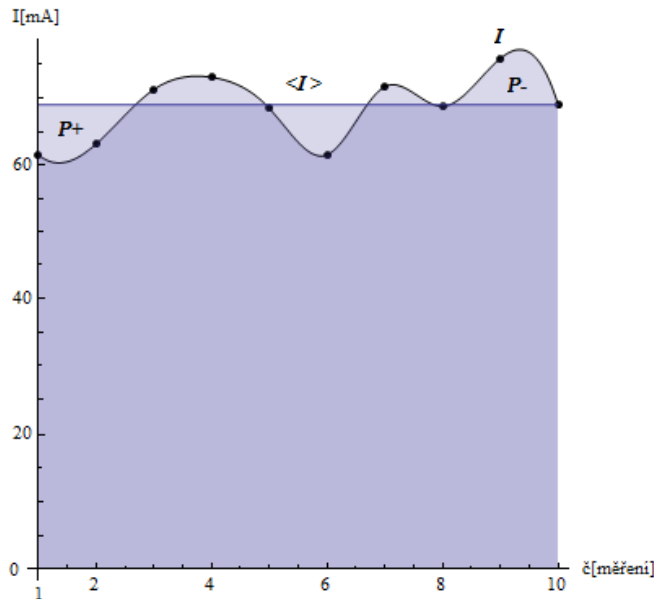
V předmětu Prostředky bezpečnostního průmyslu byly za pomoci multimetru naměřeny hodnoty proudu  $I$  [mA]. Multimetr patří do kategorie elektronických přístrojů, které umožňují již v základní verzi změřit proud, napětí a elektrický odpor.

Určete střední hodnotu proudu, jestliže naměřené hodnoty proudu odpovídají hodnotám uvedených v tabulce 10.

č. měření	I [mA]
1	61,60
2	63,20
3	71,30
4	73,10
5	68,50
6	61,60
7	71,70
8	68,80
9	75,90
10	69,10

Tabulka 10 - Hodnoty proudu naměřené pomocí multimetru

## 10.1 Vyhodnocení výsledků příkladu 6



Obrázek 13- Graf průběhu proudu

Na grafu je zobrazen průběh proudu  $I$ , střední hodnota  $\langle I \rangle$  a plochy  $P_+$  a  $P_-$ ,

kde  $P_+ = P_-$

Metoda	Střední hodnota numericky
Interpolací	69.062

Tabulka 11 – Vyhodnocení metod interpolace a funkce

## 10.2 Shrnutí příkladu 6

V příkladu 6 jsme měli určit střední hodnotu proudu  $I$ . Příklad byl zadán tabulkou, která obsahovala jednotlivá čísla měření a naměřené hodnoty proudu. Výsledná střední hodnota proudu byla vyčíslena jako 69.062. Vzhledem k tomu, že jsme u tohoto typu příkladu neměli zadání funkcí, nemůžeme výsledek porovnat s ostatními metodami. S ohledem na výsledky předchozích příkladů, kdy rozdíl mezi jednotlivými metodami nebyl velký, můžeme předpokládat, že vypočítaná střední hodnota bude relativně přesná

### 10.2.1 Výpočet Příkladu 6 (zadání tabulkou)

1. Definice tabulkových hodnot

$$f = \{61.60, 63.20, 71.30, 73.10, 68.50, 61.60, 71.70, 68.80, 75.90, 69.10\};$$

2. Vytvoření interpolačního polynomu:

$$ifun = Interpolation[f, Method \rightarrow "Spline"]$$

3. Vykreslení grafu:

$$Show[ListPlot[\{f\}, PlotStyle$$
$$\rightarrow \{Black, PointSize[Medium]\}], Plot[ifun[t], \{t, 1, 10\}, Filling$$
$$\rightarrow 0, PlotStyle$$
$$\rightarrow \{Black\}], Plot[69.01623630672927, \{x, 1, 10\}, Filling$$
$$\rightarrow 0], PlotRange \rightarrow All, AspectRatio \rightarrow 1, AxesOrigin$$
$$\rightarrow \{1, 0\}, AxesLabel \rightarrow \{"\check{c}[m\check{r}\check{e}n\check{ı}]", "I[mA]"\}]$$

4. Výpočet střední hodnoty

$$\underline{NIntegrate[ifun[z], \{z, 1, 10\}, Method \rightarrow NewtonCotesRule]}$$



## ZÁVĚR

V teoretické části jsem se zaměřil na výklad metod numerické kvadratury, které jsou v inženýrských aplikacích velmi často využívány. Podrobněji jsem se zaměřil na Newton-Cotesovy vzorce včetně Rombergovy kvadratury. V práci je také popsán kubický splajn, který je v praktické části využíván pro přesnější numerické výpočty.

Software Wolfram Mathematica 8, ve kterém je zpracována série motivačních příkladů pro studenty, se i přes řadu nedostatků projevil pro zpracování studované problematiky jako vyhovující. Nedostatkem tohoto softwaru je, že nepodporuje příkaz pro určení N-C obdélníkového pravidla. To mělo za následek to, že při řešení úloh jsem musel N-C obdélníkové pravidlo počítat analogicky pomocí vzorce. Obdobné to je i se Simpsonovým parabolickým pravidlem, kde jsme se s vedoucím práce dohodli, že pro náročnost výpočtu jej vynecháme.

V praktické části jsou vyřešeny motivační příklady pro výuku předmětu Matematika I, se kterými se mohou studenti oboru Bezpečnostní technologie a management na UTB ve Zlíně Fakultě aplikované informatiky setkat. Numerický výpočet integrálu – numerická kvadratura se v inženýrských aplikacích využívá zejména v případech, kdy je funkce  $f$  sice známa, avšak je příliš komplikovaná nebo kdy tuto funkční závislost vůbec neznáme, ale například z experimentů jsou k dispozici pouze výsledky hodnot závisle proměnné odpovídající hodnotám nezávisle proměnné.

## CONCLUSION

In the theoretical part, I focused on the interpretation of numerical quadrature methods, which are often used in engineering applications. I focused in detail on Newton-Cotes formulas, including Romberg quadrature. In the work there is also described the cubic spline, which is in the practical part often used for more accurate numerical calculations.

Despite many shortcomings, software Wolfram Mathematica 8, processing a series of motivating examples for students, seems to be appropriate. The drawback of this software is that it does not support command to determine the N-C rectangle rule. Therefore, I had to compute the N-C rectangle rule analogy using formula.

Very similar is also the Simpsons parabolic rule, where we decided with my supervisor to omit it because of its difficulty.

In the practical part there are solved motivating examples which can encounter students of Security Technology and Management at the Faculty of Applied Informatics, TBU, Zlín in studying Mathematica I course.

Numerical calculation of integrals – numerical quadrature is used in engineering applications, especially in cases where the function  $f$  is known but it is too complicated or when this functional dependence is unknown, but for example from experiments are available only values of the dependent variable corresponding to the values of the independent variable.

**SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY**

- [1] FIALKA, Miloslav a Hana CHARVÁTOVÁ. *Matematika I*. Dotisk 2. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně Academia centrum, 2009. ISBN 978-80-7318-584-8.
- [2] BRONISLAV CHRAMCOV. *Základy práce v prostředí Mathematica* [Skripta]. 2. Vydání Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně: Univerzita Tomáše Bati Academia centrum, 2006 [cit. 2012-05-07]. ISBN 80-7318-510-5.
- [3] DOBRAKOVÁ, J., M. KOVÁČOVÁ a Viera ZÁHONOVÁ. *Mathematica 5.2: tréninkové materiály*. Bratislava: Slovenská technická univerzita v Bratislavě, 2008. ISBN 80-969562-2-1.
- [4] PŘÍKRYL, Petr. *Numerické metody matematické analýzy*. Praha: SNTL, 1985.
- [5] REKTORYS, Karel. *Přehled užití matematiky I*. 6. vydání. Praha: Prometheus, 1995. ISBN 80-85849-92-5.
- [6] REKTORYS, Karel. *Přehled užití matematiky II*. 6. vydání. Praha: Prometheus, 1995. ISBN 80-85849-62-3.
- [7] MÍKA, S. *Numerické metody ALGEBRY*. Praha: SNTL, 1985.
- [8] RALSTON, A. *Základy numerické matematiky*. 2. vydání. Praha: Academia, 1976.
- [9] VITÁSEK, E. *Numerické metody*. Praha: SNTL, 1987.
- [10] LIMPOUCH, Jiří. InterpoláčnÍ Spline. In: *ČVUT, FJFI, Katedra fyzikální elektroniky* [online]. Praha, 2000, 24.3.2000 [cit. 2012-05-24]. Dostupné z: <http://kfe.fjfi.cvut.cz/~limpouch/numet/aprox/node8.html>

**SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK**

N-C	-	Newton-Cotesovy vzorce
f	-	frekvence
GHz	-	Gigahertz (jednotka frekvence)
H	-	Intenzita
I	-	Proud
J	-	Joule (jednotka práce)
K	-	Kelvin (jednotka teploty)
L	-	Vzdálenost
m	-	Metr (jednotka délky)
m <sup>2</sup>	-	Metr čtverečný (jednotka obsahu)
Mathematica	-	Software Wolfram Mathematica
MHz	-	Megahertz (jednotka frekvence)
mA	-	Miliampéry (jednotka proudu)
N-C	-	Newton-Cotesovy vzorce
P	-	Označení plochy
Q	-	Joulovo teplo
R	-	Odpor
T	-	Perioda, Teplota v [K]
t	-	čas
TC	-	Total cost (celková cena)
W	-	Watt (jednotka výkonu)
$\langle f \rangle$	-	Střední hodnota
TC	-	Total cost (celková cena)

**SEZNAM OBRÁZKŮ**

Obrázek 1- Lichoběžníkové pravidlo .....	12
Obrázek 2- Obdelníkové pravidlo.....	13
Obrázek 3 – Znázornění T-schématu .....	15
Obrázek 4-Kubický splajn vs. polynom druhého stupně .....	18
Obrázek 5- Návod programu Wolfram Mathematica .....	19
Obrázek 6- Ukázka zobrazení 3D a 2D .....	20
Obrázek 7- Paleta se základními matematickými operacemi .....	21
Obrázek 8- Graf vynaložených nákladů za rok 2011 s vyznačením střední hodnoty.....	28
Obrázek 9- Graf průběhu frekvence s vyznačením střední hodnoty .....	32
Obrázek 10- Graf průběhu intenzity s vyznačením střední hodnoty .....	36
Obrázek 11- Graf průběhu frekvence .....	40
Obrázek 12-Graf průběhu Joulova tepla v závislosti na čase .....	43
Obrázek 13- Graf průběhu proudu.....	47

**SEZNAM TABULEK**

Tabulka 1- Vynaložené náklady za rok 2011 .....	27
Tabulka 2 – Výsledné střední hodnoty jednotlivých metod .....	28
Tabulka 3 – Tabulka rychlostí pohybu narušitele a dopočítané frekvence.....	31
Tabulka 4 – Výsledné střední hodnoty jednotlivých metod .....	32
Tabulka 5 – Vzdálenost narušitele a dopočítaná intenzita $H$ .....	35
Tabulka 6 – Výsledné střední hodnoty jednotlivých metod .....	36
Tabulka 7 – Tabulka rychlostí pohybu narušitele a dopočítané frekvence.....	39
Tabulka 8 – Výsledné střední hodnoty jednotlivých metod .....	40
Tabulka 9 – Výsledné střední hodnoty Joulova tepla a symbolického řešení .....	43
Tabulka 10 - Hodnoty proudu naměřené pomocí multimetru .....	46
Tabulka 11 – Vyhodnocení metod interpolace a funkce .....	47