

Stavová teorie lineárního řízení

State Space Approach in Linear Systems

Bc. Michaela Matelová

Diplomová práce
2013



Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

Fakulta aplikované informatiky

akademický rok: 2012/2013

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Bc. Michaela Matelová**
Osobní číslo: **A11855**
Studijní program: **N3902 Inženýrská informatika**
Studijní obor: **Automatické řízení a informatika**
Forma studia: **kombinovaná**

Téma práce: **Stavová teorie lineárního řízení**

Zásady pro vypracování:

1. Nastudujte přehled vnitřních popisů jednorozměrných a vícerozměrných spojitých dynamických systémů.
2. Vytvořte studijní materiál na téma kanonické tvary stavových popisů, vlastnosti systémů, pozorovatelnost, říditelnost,...
3. Vypracujte metody pro odhad a rekonstrukce stavu (Luenberger observer) .
4. Vytvořte studijní materiál stavové řízení bez a s rekonstruktorem stavu ve smyslu Ackermannovy formule.
5. Vypracujte soubor programů v prostředí Matlab, Simulink.
6. Uveďte aspekty diskretizace a stavové teorie diskrétního řízení.

Rozsah diplomové práce:

Rozsah příloh:

Forma zpracování diplomové práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

1. Štecha, J., Havlena, V.: Teorie dynamických systémů. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2005, 248 s. ISBN 80-010-1971-3.
2. Dostál, P., Matušů, R.: Stavová a algebraická teorie řízení. Zlín: FAI UTB, 2010, 90 s. ISBN 978-80-7318-991-4.
3. Mikleš, J., Fikar, M.: Modelovanie, identifikácia a riadenie procesov I, II. STU Bratislava. 2008. ISBN 80-227-1177-2.
4. Kučera V.: Analysis and Design of Discrete Linear Control. Prague: Academia, 1991, 472 s. ISBN 80-200-0252-9.
5. Strejc, V.: Stavová teorie lineárního diskrétního řízení. Academia. Praha. 1978.
6. Navrátil, P.: Popis systémů ve stavovém prostoru. El. skripta FAI UTB ve Zlíně, 2010.
7. Melichar, J.: Lineární systémy I.,II. skripta KK FAV ZČU Plzeň. 2007.
8. Skalický, J.: Teorie řízení. Brno: VUT FEKT, 2002, 98 s. ISBN 80-214-2112-6.
9. Ogata, K.: MATLAB for Control Engineers. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 2008. ISBN 978-013-6150-770.
10. Ogata, K.: Modern Control Engineering. 4th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2002, xi, 964 s. ISBN 01-306-0907-2.

Vedoucí diplomové práce:

prof. Ing. Roman Prokop, CSc.

Ústav automatizace a řídicí techniky

Datum zadání diplomové práce:

24. února 2013

Termín odevzdání diplomové práce:

11. června 2013

Ve Zlíně dne 24. února 2013

prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.
děkan



prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.
ředitel ústavu

ABSTRAKT

V tejto práci sa zameriame na doplnenie vedomostí stavovej teórie lineárneho riadenia. Sú tu popísané poznatky o spojitých a diskretných systémoch, objasnenie fungovania vzťahov, poprípade pravidlá ako ich môžeme použiť. Máme tu spomenuté aj niektoré moderné spôsoby riadenia. V práci nájdeme aj niekoľko ukázkových príkladov, ktoré nám umožnia ľahšie pochopenie menovaných vzťahov. Niektoré ukázkové príklady sú spracované aj v programe Matlab.

Kľúčové slová:

Stavová rovnica, spojitý lineárny systém, diskretný lineárny systém, stavová matica, Ackermannova veta, SISO systém, MIMO systém.

ABSTRACT

In this work we focus on the completion status of knowledge of linear control theory. It describes knowledge of continuous and discrete systems, the functioning clarify relationships, appropriate rules for how they can be used. We have also mentioned some modern management methods. In this work we find several demonstration examples that will allow us to more easily understand the relationships appointed. Some sample examples are processed in Matlab program.

Keywords:

State equation, continuous linear systems, discrete linear systém, state matrix, Ackermann's formula, SISO system, MIMO system.

Rada by som poďakovala vedúcemu mojej diplomovej práce prof. Ing. Romanovi Prokopovi CSc., za jeho veľkú ochotu a trpezlivosť, s akou so mnou spolupracoval. Ďakujem mu aj za poskytnuté materiály a literatúru, ktoré boli veľkým prínosom pre moju prácu.

Prohlašuji, že

- beru na vědomí, že odevzdáním diplomové práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb. o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších právních předpisů, bez ohledu na výsledek obhajoby;
- beru na vědomí, že diplomová práce bude uložena v elektronické podobě v univerzitním informačním systému dostupná k prezenčnímu nahlédnutí, že jeden výtisk diplomové práce bude uložen v příruční knihovně Fakulty aplikované informatiky Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně a jeden výtisk bude uložen u vedoucího práce;
- byla jsem seznámena s tím, že na moji diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších právních předpisů, zejm. § 35 odst. 3;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 1 autorského zákona má UTB ve Zlíně právo na uzavření licenční smlouvy o užití školního díla v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 2 a 3 autorského zákona mohu užít své dílo – diplomovou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití jen s předchozím písemným souhlasem Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše);
- beru na vědomí, že pokud bylo k vypracování diplomové/bakalářské práce využito softwaru poskytnutého Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně nebo jinými subjekty pouze ke studijním a výzkumným účelům (tedy pouze k nekomerčnímu využití), nelze výsledky diplomové práce využít ke komerčním účelům;
- beru na vědomí, že pokud je výstupem diplomové práce jakýkoliv softwarový produkt, považují se za součást práce rovněž i zdrojové kódy, popř. soubory, ze kterých se projekt skládá. Neodevzdání této součásti může být důvodem k neobhájení práce.

Prohlašuji,

- že jsem na diplomové práci pracovala samostatně a použitou literaturu jsem citoval. V případě publikace výsledků budu uveden jako spoluautor.
- že odevzdaná verze diplomové práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG jsou totožné.

Ve Zlíně

.....
podpis diplomanta

OBSAH

ÚVOD	9
1 LINEÁRNE SPOJITÉ DYNAMICKÉ SYSTÉMY (LSDS)	10
1.1 JEDNOROZMERNÉ (SISO) SYSTÉMY	11
1.2 STAVOVÉ ROVNICE.....	12
1.3 VONKAJŠÍ A VNÚTORNÝ POPIS LSDS	14
1.3.1 Určenie vonkajšieho popisu z popisu vnútorného.....	14
1.3.2 Určenie vnútorného popisu z popisu vonkajšieho.....	15
1.4 KANONICKÉ TVARY STAVOVÝCH ROVNÍC.....	16
1.4.1 Priama metóda.....	16
1.4.2 Kanonický tvar vzhľadom k výstupu.....	19
1.4.3 Jordanov kanonický tvar	21
1.5 TRANSFORMÁCIA STAVOV	25
1.6 RIEŠENIE STAVOVÝCH ROVNÍC.....	27
1.6.1 Homogénna stavová rovnica	27
1.6.2 Fundamentálna matica systému.....	28
1.6.3 Nehomogénna stavová rovnica	28
1.7 VIACROZMERNÉ (MIMO) SYSTÉMY	31
1.8 STAVOVÉ ROVNICE A PRENOŠOVÁ MATICA MIMO SYSTÉMOV	32
2 LINEÁRNE DISKRÉTNE DYNAMICKÉ SYSTÉMY (LDDS).....	35
2.1 JEDNOROZMERNÉ DISKRÉTNE (SISO) SYSTÉMY.....	35
2.2 DIFERENČNÉ ROVNICE A STAVOVÉ POPISY LDDS.....	35
2.3 RIEŠENIE DISKRÉTNEJ STAVOVEJ ROVNICE	37
2.4 VIACROZMERNÉ (MIMO) SYSTÉMY	38
2.5 STAVOVÉ ROVNICE DISKRÉTNÝCH (MIMO) SYSTÉMOV	40
3 VLASTNOSTI SYSTÉMOV	42
3.1 RIADITEĽNOSŤ A DOSIAHNUTEĽNOSŤ	42
3.2 POZOROVATEĽNOSŤ A REKONŠTRUOVATEĽNOSŤ	44
3.3 POZOROVATEĽ STAVU DYNAMICKÝCH SYSTÉMOV	47
4 VZŤAH MEDZI SPOJITÝMI A DISKRÉTNÝMI SYSTÉMAMI	50
4.1 PERIÓDA VZORKOVANIA A VZORKOVANIE SIGNÁLOV	50
4.2 PREVOD LSDS NA LDDS PRI EKVIDISTANTNOM VZORKOVANÍ	54
5 STAVOVÉ RIADENIE.....	56
5.1 DISKRÉTNY REGULÁTOR TYPU DEAD-BEAT.....	60
5.2 ACKERMANOVA FORMULA PRE SPOJITÉ RIADENIE.....	61
ZÁVER	65
ZÁVER V ANGLIČTINE.....	66
ZOZNAM POUŽITEJ LITERATÚRY.....	67
ZOZNAM POUŽITÝCH SYMBOLOV A SKRATIEK.....	68
ZOZNAM OBRÁZKOV	70
ZOZNAM TABULIEK	71

ZOZNAM PRÍLOH 72

ÚVOD

Najväčší rozmach zaznamenala teória stavového riadenia v šesťdesiatych rokoch minulého storočia, preto môžeme hovoriť, že ide o relatívne modernú teóriu. Táto teória je založená na stavovom popise systému.

V prvej časti sme sa zamerali na lineárne spojité dynamické systémy. Téma bola rozložená na jednotlivé časti. Popis jednorozmerných a viacrozmerných dynamických systémov. Pri systémoch jednorozmerných sme išli viac do hĺbky. Popísali sme si stavovú rovnicu, jej kanonické tvary a transformáciu stavov. Pri väčšine viacrozmerných systémov pracujeme so vzťahmi, ktoré majú podobný postup riešenia.

Na doposiaľ menované nadväzujeme lineárnymi diskretnými dynamickými systémami. Ako v predchádzajúcej kapitole sa budeme venovať zvlášť jednorozmerným a zvlášť viacrozmerným diskretným dynamickým systémom. Popíšeme si a rozoberieme diferenčné rovnice a stavové popisy. Zoznámili sme sa so stavovými rovnicami viacrozmerných diskretných dynamických systémov.

Tretia kapitola je venovaná vlastnostiam týchto systémov. Dôležitými vlastnosťami lineárnych dynamických systémov sú riaditeľnosť a pozorovateľnosť. Pozornosť bola venovaná aj pozorovateľovi stavu dynamických vlastností.

Vo štvrtej časti je načrtnutý vzťah medzi spojitými a diskretnými systémami. Pre lepšie pochopenie diskretných dynamických systémov sme sa venovali aj perióde vzorkovania a následného tvarovania signálov. Následne sme si mohli vyskúšať diskretizáciu lineárneho spojitého dynamického systému.

Piata kapitola je venovaná stavovému riadeniu. Popísali sme si regulátor konečného počtu krokov – Dead-Beat. Ukázali sme si výpočet Ackermannovho vzorca pre výpočet stavovej matice.

V práci sa nachádzajú riešenia ukázkových príkladov, poprípade ich riešenie v programe Matlab.

1 LINEÁRNE SPOJITÉ DYNAMICKÉ SYSTÉMY (LSDS)

System je fundamentálny a frekventovaný pojem mnohých vedných disciplín. Experimentálne a teoretické vedy sa na tento pojem pozerajú z rôznych pohľadov, spoločnou črtou zostáva, že sa jedná o časť objektívnej reality, ktorá je spojená so svojim okolím. Na systéme je možné pozorovať istý súbor veličín, ktoré reprezentujú spojenie s okolím. Abstraktná definícia systému nie je jednoduchá a predstavuje pomerne obsiahle úvahy, vid' napr. [2], [4]. Podobne je to aj s klasifikáciou systémov. V tejto práci sa budeme zaoberať kauzálnymi dynamickými systémami s lineárnym správaním. O príčinnom vzťahu môžeme uvažovať vtedy, ak sú veličiny rozdelené na závislé a nezávislé. Stručne povedané, bude sa jednať o systémy, ktoré sú matematickým modelom mnohých objektov objektívnej reality, ktorú možno popísať diferenciálnymi rovnicami. Príkladom môžu byť systémy mechanické (výtah, motorové vozidlo, lietadlo, kyvadlo,...), elektrické (RLC obvod, energetická sieť,...), chemické (destilačná kolóna, chemický reaktor, bioreaktor,...) a samozrejme mnohé iné. V každom prípade je možné na systéme rozoznať vstupné a výstupné veličiny, ktorými je systém spojený s okolím.

Vo vzťahu s okolím, môžeme v zásade rozlišovať systémy na otvorené a uzavreté. Ak nastáva, dochádza k interakcii s okolím, hovoríme o systéme otvorenom a ak na systém okolie nepôsobí, potom sa jedná o systém uzavretý.

Ďalej ak sa jedná o systém v čase vyvíjajúcom sa, tak tento systém môžeme volať dynamickým systémom. Systém, kde sú veličiny spojito premenné v čase nazývame spojitým systémom. Pokiaľ sú vzťahy medzi vstupnými, výstupnými (prípadne stavovými) veličinami lineárne, nazýva sa systém lineárny spojitý dynamický systém (LSDS). V prípade, že systémom je objekt riadenia, je obvyklé označovať vstupnú veličinu $u(t)$, výstupnú $y(t)$ a stavové veličiny $x(t)$. Systémom je ale obecné aj regulátor, prípadne spätnoväzbový obvod alebo aj zložitejšia štruktúra. K určení dynamického systému musíme poznať hodnoty vstupu v tomto momente a zároveň dej predchádzajúceho priebehu. Počet vstupných a výstupných veličín (signálov) nám udáva či je systém jednorozmerný alebo viacrozmerný.

Rozoznávame vonkajší a vnútorný popis dynamického systému. Pri vonkajšom popise systému poznáme iba vstupné a výstupné veličiny systému bez podrobnejšej znalosti, čo sa deje vo vnútri. Pri vnútornom popise systému sa uvažujú aj vnútorné (stavové) veličiny, ktoré nemusia byť zo vstupných a výstupných veličín priamo dostupné. Z pohľadu matematiky je interpretácia stavových veličín (u spojitých dynamických systémov) v deriváciách výstupnej a vstupnej veličiny.

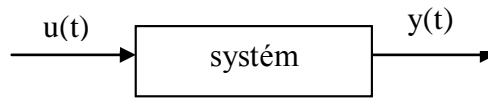
Vonkajším popisom rozumieme:

- diferenciálnu rovnicu,
- prenos systému,
- prechodovú funkciu a prechodovú charakteristiku,
- impulznú funkciu a impulznú charakteristiku,
- frekvenčný prenos v komplexnej rovine a v logaritmických súradniciach,
- póly a nuly systému.

Vnútorný popis je to dokonalejší popis systému.

1.1 Jednorozmerné (SISO) systémy

Jednorozmerný systém (SISO) – jeden vstup a jeden výstup. Odkazuje sa na jednoduchý riadiaci systém o jednej premennej. Tieto systémy sú menej komplexné ako viacrozmerné (MIMO) systémy.



Obr.1: SISO systém

Pre analýzu a návrh SISO systému sa používa niekoľko možností:

- diferenciálna rovnica – modeluje dynamiku koncentrovanú v dynamickom systéme v nepretržitom čase
- Laplaceova transformácia (LT)

Aby $f(t)$ bol originál, musí funkcia splniť tieto pravidlá:

- pre záporný čas t musí byť funkcia nulová, danú časovú funkciu je treba vynásobiť Heavisidovým jednotkovým skokom
- funkcia musí byť aspoň po častiach spojitá
- musí byť exponenciálneho rádu

Definícia LT –

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (1.1)$$

- Nyquistova krivka

Grafické zobrazenie frekvenčného prenosu $G(j\omega)$ v komplexnej rovine pre $\omega \in \langle 0, \infty \rangle$ nám dáva frekvenčnú charakteristiku, tzv. amplitúdovo-fázovú frekvenčnú charakteristiku v komplexnej rovine, inak povedané Nyquistovu krivku.

$$G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega} = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \quad (1.2)$$

$G(j\omega)$ - charakterizuje frekvenčnú odozvu systému

Frekvenčný prenos je nutné upraviť na zložkový tvar komplexného čísla, aby sme mohli získať frekvenčnú charakteristiku v komplexnej rovine alebo na exponenciálny tvar komplexného čísla.

- Bodeho diagramy

Pre grafické zobrazenie frekvenčnej charakteristiky prenosu $G(j\omega)$ môžeme použiť Bodeho diagramy. Tie sa používajú pre zobrazenie frekvenčného prenosu v logaritmických súradniciach.

Bodeho diagramy ukazujú závislosť fázového posunutia $\varphi(\omega)$ a amplitúdového zosílenia $|F(j\omega)|$ na uhlovej frekvencii $\omega[\text{rad/sec}]$ oddelene.

- amplitúdová logaritmická frekvenčná charakteristika
- fázová logaritmická frekvenčná charakteristika

1.2 Stavové rovnice

Existujú systémy, ktorých dynamické chovanie môžeme popísať diferenciálnou rovnicou n -tého rádu alebo n diferenciálnymi rovnicami prvého rádu. Prvú variantu môžeme prepísať na druhú a naopak. Chovanie systému môžeme popísať sústavou diferenciálnych rovníc prvého rádu v tvare:

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_1, x_2, \dots, x_k, u_1, u_2, \dots, u_s, t) \quad (1.3)$$

$$y_j(t) = g_j(x_1, x_2, \dots, x_k, u_1, u_2, \dots, u_s, t), \quad (1.4)$$

kde rovnica (1.3) je stavová rovnica, (1.4) je výstupná rovnica, $i = 1, 2, \dots, k$ a $j = 1, 2, \dots$.
Rovnice (1.3) a (1.4) budú mať vo vektorovom zápise tvar:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \quad (1.5)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \quad (1.6)$$

Vo vektorovom zápise musíme predpokladať, že funkcie \mathbf{f} a \mathbf{g} sú všeobecne nelineárne. Tieto rovnice voláme stavové rovnice systému. V lineárnom (nestacionárnom) prípade funkcie \mathbf{f} a \mathbf{g} prechádzajú na matice \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} a čo môžeme dosiahnuť úpravou rovníc (1.3),(1.4) nasledovne:

$$\dot{x}_i(t) = a_{i1}(t)x_1(t) + \dots + a_{ik}(t)x_k(t) + b_{i1}(t)u(t) + \dots + b_{is}(t)u_s(t) \quad (1.7)$$

$$y_i(t) = c_{j1}(t)x_1(t) + \dots + c_{jk}(t)x_k(t) + d_{j1}(t)u(t) + \dots + d_{js}(t)u_s(t), \quad (1.8)$$

kde $i = 1, 2, \dots, k$ a $j = 1, 2, \dots$

Rovnice (1.7) a (1.8) budú mať vo vektorovom tvare zápis:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \quad (1.9)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t), \quad (1.10)$$

kde $\mathbf{A}(t)$ je matica systému, $\mathbf{B}(t)$ je matica budenia, $\mathbf{C}(t)$ je výstupná matica, $\mathbf{D}(t)$ je matica prevodu, $\mathbf{u}(t)$ je vektor vstupných, $\mathbf{y}(t)$ vektor výstupných veličín a $\mathbf{x}(t)$ je vektor stavových premenných.

Ak sú matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ konštantné, teda matice reálnych čísiel, hovoríme o tzv. stacionárnom systéme. Stavový model pre lineárny stacionárny dynamický systém ma tvar:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (1.11)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), \quad (1.12)$$

kde rozmery matíc a vektorov sú nasledovné:

$$\mathbf{A}[n \times n] \quad \mathbf{x}(t)[n \times 1]$$

$$\mathbf{B}[n \times s] \quad \mathbf{u}(t)[s \times 1]$$

$$\mathbf{C}[p \times n] \quad \mathbf{y}(t)[p \times 1]$$

$$\mathbf{D}[p \times s]$$

V každom spojitom lineárnom systéme sú obsiahnuté tri základné prvky, ktoré sú potrebné k realizácii lineárneho spojitého systému. Týmito prvkami sú integrátory, ktorých počet je rovný rádu systému n , sumátorov a zosilňovačov.

Stavový popis systémov nie je jednoznačný, pretože jeden systém môže mať viac stavových popisov. Stavovým popisom rozumieme prepis diferenciálnej rovnice n -tého stupňa na n -diferenciálnych rovníc prvého stupňa. Ak nie je priama väzba vstup – výstup, jedná sa o systémy striktné rýdze, a potom je matica \mathbf{D} nulová.

1.3 Vonkajší a vnútorný popis LSDS

Vnútorný a vonkajší popis sú dve základné skupiny, ktorými môžeme popísať dynamické vlastnosti riadených dynamických systémov.

Vnútorným popisom rozumieme stavové rovnice, ktoré sú dané maticami A , B , C , D . Vyjadrujeme reláciu (vstup – stav – výstup), popísanú prechodovou funkciou stavu a výstupnou funkciou.

Vonkajší popis sme mali zahrnutý v úvodnej kapitole. Pre nás bude najdôležitejší prenos v LT.

1.3.1 Určenie vonkajšieho popisu z popisu vnútorného

Pomocou LT môžeme určiť vzťah konverzie stavového popisu na prenosovú funkciu. Táto konverzia je jednoznačná. Pri LT uvažujeme s nulovými počiatocnými podmienkami. Vychádzame z rovníc (1.11) a (1.12). Laplaceovou transformáciou z rovnice (1.11) získame:

$$s\mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \rightarrow \mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) \quad (1.13)$$

Laplaceovou transformáciou rovnice (1.12) získame:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) \quad (1.14)$$

Dosadením rovnice (1.13) do rovnice (1.14) dostaneme rovnicu:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) = (\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D})\mathbf{U}(s) \rightarrow \mathbf{G}(s) \quad (1.15)$$

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (1.16)$$

Ak je prenosová matica $\mathbf{G}(s)$ o rozmere $[1 \times 1]$, potom ide o systém jednorozmerný (SISO systém).

Maticu prechodu môžeme určiť z časti prenosovej matice (1.16), ktorá je v tvare:

$$\boldsymbol{\varphi}(s) = L^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\} \quad (1.17)$$

Nasledujúci vzťah použijeme na výpočet inverznej matice:

$$\boldsymbol{\Phi}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} \quad (1.18)$$

Na chovanie systému majú vplyv vlastné čísla matice A (póly systému), ktoré sú koreňmi charakteristického polynómu $\det(sI - A)$ matice A .

Príklad:

Máme určiť vonkajší popis systému, ktorý je daný nasledujúcim popisom:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [-3 \quad 5] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + [0]u(t)$$

Budeme vychádzať z rovnice (1.16) a pokračovať pomocou L-obrazu z rovnice (1.18)

$$\phi = \left(\begin{bmatrix} s+3 & 0 \\ 0 & s+5 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \frac{1}{(s+3)(s+5)} \begin{bmatrix} s+5 & 0 \\ 0 & s+3 \end{bmatrix}$$

potom:

$$\begin{aligned} G(s) &= [-3 \quad 5] \left(\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + [0] = \\ &= [-3 \quad 5] \frac{1}{(s+3)(s+5)} \begin{bmatrix} s+5 & 0 \\ 0 & s+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + [0] = \\ &= \left[-\frac{3}{s+3} \quad \frac{5}{s+5} \right] \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = -\frac{3}{s+3} + \frac{15}{s+5} = \frac{12(s+5)}{(s+3)(s+5)} \\ G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{12(s+5)}{(s+3)(s+5)} \end{aligned}$$

1.3.2 Určenie vnútorného popisu z popisu vonkajšieho

Na definícii stavových premenných závisí prevod z vonkajšieho popisu na popis stavový. Zvyčajnou voľbou je n stavových veličín pre systém opísaný diferenciálnou rovnicou n -tého stupňa tak, že stavy budeme definovať ako výstupnú veličinu $y(t)$ a $(n-1)$ ich derivácií.

Budeme vychádzať z vonkajšieho popisu jednorozmerného spojitého systému určeného diferenciálnou rovnicou (DR) n -tého rádu:

$$\begin{aligned} a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) &= b_m u^{(m)}(t) + \dots + \\ & b_1 u'(t) + b_0 u(t) \end{aligned} \quad (1.19)$$

alebo prenosom:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^{(m)} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^{(n)} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (1.20)$$

Ak bude splnená podmienka rýdzosti systému, tj. $m \leq n$ a budeme predpokladať, že $m=n$, inak budú niektoré $b_i = 0$ pre $n \geq i > m$. Systém budem mať stavový popis v tvare (1.11) a (1.12).

1.4 Kanonické tvary stavových rovníc

Z uvedeného plynie, že k jednému vonkajšiemu popisu existuje celý rad, dokonca nekonečné množstvo popisov vnútorných. Medzi týmto množstvom však vynikajú niektoré (štvorice matic), ktoré majú špecifický, zvyčajne jednoduchý tvar. Tieto popisy sa nazývajú kanonické. Na zjednodušenie štruktúry systému vzhľadom k jeho vstupnej, výstupnej a stavovej veličine použijeme kanonické tvary stavových rovníc. Jednoduchú maticu riadenia \mathbf{B} má Frobeniov kanonický tvar, tzv. priama metóda. Jednoduchú výstupnú maticu \mathbf{C} má kanonický tvar vzhľadom k výstupu a jednoduchú maticu systému \mathbf{A} nájdeme v Jordanovom kanonickom tvare.

1.4.1 Priama metóda

Ako derivácie pomocnej veličiny $v(t)$ sú zvolené stavové veličiny x_i .

Túto pomocnú veličinu získame nasledovne pre $m \geq 1$:

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Y(s)V(s)}{U(s)V(s)} \quad (1.21)$$

$$\frac{Y(s)}{V(s)} = b(s) \quad \frac{V(s)}{U(s)} = \frac{1}{a(s)},$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b(s)V(s)}{a(s)V(s)} = \frac{b(s)}{a(s)}.$$

Potom môžeme napísať:

$$x_1(t) = v(t), \quad (1.22)$$

$$x_2(t) = \dot{v}(t),$$

$$\begin{aligned}x_3(t) &= \ddot{v}(t), \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ x_n(t) &= v^{n-1}(t).\end{aligned}$$

Súvislosť medzi stavmi systému:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad (1.23)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_3(t),$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t)$$

$$\dot{x}_n(t) = u(t) - a_0x_1(t) - a_1x_2(t) - \dots - a_{n-1}x_n(t)$$

Posledné rovnice sú priamo stavové rovnice systému. Matice \mathbf{A} , \mathbf{B} budú zrejme:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

V matici \mathbf{A} sú jednotky diagonálne a v poslednom riadku má záporné koeficienty takého tvaru, aby koeficient s najvyššou mocninou bol jednotkový. Matica \mathbf{B} je nulová až na posledný riadok, v ktorom je nenulová. Má rozsah jedného stĺpca, čo znamená, že má systém jeden vstup.

Celkový výstup je rovný:

$$y(t) = y_1 + y_2 = b_n u(t) + \bar{b}_0 x_1 + \dots + \bar{b}_{n-1} x_n \quad (1.25)$$

Z toho nám plynú výstupné matice \mathbf{C} a \mathbf{D}

$$\mathbf{C} = [\bar{b}_0 \quad \bar{b}_1 \quad \dots \quad \bar{b}_{n-1}], \quad \mathbf{D} = [b_n], \quad (1.26)$$

Tento tvar stavových rovníc sa volá Frobeniov kanonický tvar. Taký systém, ktorý má $m < n$ je striktne rýdzi – systém nemá priamu väzbu medzi vstupom a výstupom. Vo Frobeniovom tvare obsahujú stavové rovnice systému koeficienty diferenciálnej rovnice.

Příklad:

Máme systém zadaný následovně:

$$G(s) = \frac{5}{3s^2 + 9s + 12}$$

Našou úlohou je zostaviť stavový model tak, aby sme k výpočtu použili priamu metódu.

$$G(s) = \frac{5}{3s^2 + 9s + 12} = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Y(s)}{V(s)} \cdot \frac{V(s)}{U(s)} = 5 \frac{1}{3s^2 + 9s + 12}$$

$$y(t) = 5v(t)$$

$$u(t) = 3\ddot{v}(t) + 9\dot{v}(t) + 12v(t)$$

Zvolíme si stavové premenné:

$$x_1(t) = v(t)$$

$$x_2(t) = \dot{v}(t)$$

následovně:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{v}(t) = \frac{1}{3}u(t) - \frac{9}{3}x_2(t) - \frac{12}{3}x_1(t) = -6x_1(t) - 4,5x_2(t) + 0,333u(t)$$

rovnica pre výstup:

$$y(t) = 5x_1(t)$$

potom bude stavový model nasledovný:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,333 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Příklad v programe Matlab:

```
>> pre_tf=tf([7],[4 8 16]);
```

```
>> [A,B,C,D]=ssdata(pre_tf)
```

```
A = -2 -2
```

```
2 0
```

$$B = 1$$

$$0$$

$$C = 0 \quad 0.8750$$

$$D = 0$$

1.4.2 Kanonický tvar vzhľadom k výstupu

Zložky stavu x zavedieme ako lineárnu kombináciu deriváciu vstupných a výstupných veličín.

$$x_1 = y - b_n u \quad (1.27)$$

$$x_2 = a_{n-1}y + \dot{y} - b_{n-1}u - b_n \dot{u}$$

$$x_3 = a_{n-2}y + a_{n-1}\dot{y} + \ddot{y} - b_{n-2}u - b_{n-1}\dot{u} - b_n \ddot{u}$$

$$\vdots$$

$$x_n = a_1y + a_2\dot{y} + \dots + y^{(n-1)} - b_1u - \dots - b_n u^{(n)} = 0$$

Pre x_{n+1} napíšeme formálnu rovnicu takto:

$$x_{n+1} = a_0y + \dots + y^{(n)} - b_0u - \dots - b_n u^{(n)} = 0 \quad (1.28)$$

Výraz na pravej strane je rovný nule, tzn., že súradnica x_{n+1} je rovná nule. Potom bude výstupná rovnica:

$$y = x_1 + b_n u \quad (1.29)$$

Dosadením výstupu y do rovníc (1.27) a nahradením derivácií $y^{(i)}$ a $u^{(i)}$ deriváciami stavových veličín, ktoré sú definované vždy predchádzajúcou rovnicou dostaneme:

$$x_2 = a_{n-1}x_1 + \dot{x}_1 - (b_{n-1} - a_{n-1}b_n)u, \quad (1.30)$$

$$x_3 = a_{n-2}x_1 + \dot{x}_2 - (b_{n-2} - a_{n-2}b_n)u,$$

$$\vdots$$

$$x_n = a_1x_1 + \dot{x}_{n-1} - (b_1 - a_1b_n)u,$$

$$x_{n+1} = a_0x_1 + \dot{x}_n - (b_0 - a_0b_n)u = 0.$$

Stavové rovnice systému získame prevedením derivácií stavových veličín na ľavú stranu. Potom budú matice A , B , C , D v tvare:

$$A = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & & 0 \\ & & & \ddots & \\ -a_1 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{n-1} - a_{n-1}b_n \\ b_{n-2} - a_{n-2}b_n \\ \vdots \\ b_1 - a_1b_n \\ b_0 - a_0b_n \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

$$C = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \quad (1.33)$$

$$D = [b_n], \quad (1.34)$$

Nad hlavnou diagonálou má matica A jednotky a v prvom stĺpci má matica A záporne vzaté koeficienty monického charakteristického polynómu. Matica C je jednoriadkový vektor a až na jednotku v prvom stĺpci je nulová. Vďaka tomu je tento tvar pomenovaný ako kanonický tvar vzhľadom k výstupu.

Príklad:

Máme daný popis systému:

$$G(s) = \frac{2}{s^2 + 5s + 4}$$

Našou úlohou je určiť stavový model pomocou postupnej integrácie.

$$G(s) = \frac{2}{s^2 + 5s + 4} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

diferenciálna rovnica:

$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 4y(t) = 2u(t)$$

zvolíme si 1.deriváciu:

$$\dot{x}_1(t) = 4y(t) - 2u(t) = x_1(t) = \int [(4y(t) - 2u(t))] dt$$

$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + \dot{x}_1(t) = 0$$

následná úprava:

$$\dot{y}(t) + 5y(t) + x_1(t) = 0.$$

Zasa si zvolíme 1.deriváciu:

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) = 5y(t) + x_1(t) &\rightarrow x_2(t) = \int [(5y(t) + x_1(t))] \\ \dot{y}(t) + \dot{x}_2(t) &= 0 \end{aligned}$$

následná úprava:

$$y(t) + x_2(t) = 0 \rightarrow y(t) = -x_2(t).$$

Vyšla nám sústava rovníc:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) = 4y(t) - 2u(t) &= 4x_2(t) - 2u(t) \\ \dot{x}_2(t) = 5y(t) + x_1(t) &= x_1(t) - 5x_2(t) \end{aligned}$$

Výsledná rovnica:

$$y(t) = -x_2(t).$$

Stavový model potom bude:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [0 \quad -1] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + [0]u(t). \end{aligned}$$

1.4.3 Jordanov kanonický tvar

Aby sa nám dobre pracovalo pri hľadaní Jordanovho kanonického tvaru, budeme začínať z prenosu systému $G(s)$ (1.20). Budeme vychádzať z toho, že charakteristický polynóm prenosu bude mať nenásobné korene. Vďaka tomu budeme môcť prenos $G(s)$ rozdeliť na parciálne zlomky, resp. ich súčet.

$$G(s) = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{s-\lambda_i} + b_n, \quad (1.35)$$

kde sú potom korene Heavisidova rozvoja rovné

$$\alpha_i = \lim_{s \rightarrow \lambda_i} G(s)(s - \lambda_i), \quad (1.36)$$

ak podľa vzťahu zvolíme stavy x_i :

$$\frac{x_i(s)}{U(s)} = \frac{1}{s-\lambda_i} \rightarrow \dot{x}_i(t) = u(t) + \lambda_i x_i(t), \quad (1.37)$$

potom bude na výstupe:

$$y(t) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n + b_n u. \quad (1.38)$$

Vektorový zápis stavových rovníc nám plynie z predchádzajúcich vzťahov. Potom matice A , B , C , D budú nasledovné:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad (1.39)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (1.40)$$

$$\mathbf{C} = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_n], \quad (1.41)$$

$$\mathbf{D} = [b_n]. \quad (1.42)$$

Názov Jordanov kanonický tvar vznikol z matice systému A . Jednotlivé rovnice pre stavové premenné sú na sebe nezávislé, (1.37). Riešenie týchto rovníc je relatívne jednoduché. Musíme poznať prenosové póly λ_i , aby sme mohli určiť Jordanov kanonický tvar.

Příklad:

Máme daný popis:

$$G(s) = \frac{9s^3 + 4s^2 + 3s + 9}{3s^3 + 21s^2 + 42s + 24} = \frac{9s^3 + 4s^2 + 3s + 9}{3(s+1)(s+2)(s+4)}.$$

Našou úlohou je určiť stavový model pomocou postupnej integrácie.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{9s^3 + 4s^2 + 3s + 9}{3s^3 + 21s^2 + 42s + 24} = \frac{9s^3 + 4s^2 + 3s + 9}{3(s+1)(s+2)(s+4)}$$

urobíme rozklad na parciálne zlomky:

$$G(s) = 3 + \frac{A_1}{(s+1)} + \frac{A_2}{(s+2)} + \frac{A_3}{(s+4)}$$

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow -1} G(s)(s + 1) = 0,11$$

$$A_2 = \lim_{s \rightarrow -2} G(s)(s + 2) = 8,83$$

$$A_3 = \lim_{s \rightarrow -4} G(s)(s + 4) = -28,61$$

potom:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Y(s)}{x_i(s)} \cdot \frac{x_i(s)}{U(s)} = \frac{0,11}{(s + 1)} + \frac{8,83}{(s + 2)} - \frac{28,61}{(s + 4)} + 3$$

$$y^1(t) = 0,11x_1(t),$$

$$y^2(t) = 8,83x_2(t),$$

$$y^3(t) = -28,61x_3(t),$$

$$y^4(t) = 3x_4(t),$$

$$y(t) = y^1(t) + y^2(t) + y^3(t) + y^4(t)$$

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + u(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = -2x_2(t) + u(t),$$

$$\dot{x}_3(t) = -4x_3(t) + u(t).$$

Výstupná rovnica potom bude:

$$y(t) = \frac{Y(s)}{U(s)} = A_i + \frac{b_n}{a_n} = 0,11x_1(t) + 8,83x_2(t) - 28,61x_3(t) + 3u(t).$$

Následne môžeme zostaviť stavový model:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [0,11 \quad 8,83 \quad -28,61] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + [3]u(t).$$

Příklad v programe Matlab:

```
>> pre_tf=tf([10 5 3 10],[5 24 48 28]);
```

```
>> cpre=canon(pre_tf)
```

```
a =
```

```
      x1      x2      x3
x1 -1.932    1.5      0
x2 -1.5    -1.932    -0
x3  0      -0    -0.9359
```

```
b =
```

```
      u1
x1 3.945
x2 16.34
x3 6.843
```

```
c =
```

```
      x1      x2      x3
y1 0.1028 -0.5639 0.03041
```

```
d =
```

```
      u1
y1 2
```

Continuous-time model.

```
>>
```

1.5 Transformácia stavov

Z možnosti voľby ľubovoľnej bázy stavového priestoru, ktorá nie je vôbec určená vonkajším popisom, nám vyplývajú rôzne tvary stavových rovníc. Ak budeme vychádzať zo základnej bázy n lineárne nezávislých ortonormálnych vektorov v priestore stavov X .

Vektor x je v základnej báze vyjadrený v tvare:

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n, \quad (1.43)$$

kde:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (1.44)$$

A jeho súradnice v základnej báze sú x_i . Preto môžeme písať

$$\mathbf{x}^T = [x_1, x_2, \dots, x_n]. \quad (1.45)$$

Ďalej zavedieme novú bázu n lineárne nezávislých vektorov \mathbf{q}_1 až \mathbf{q}_n . V novej báze vyjadrený vektor x bude v tvare:

$$\mathbf{x} = v_1 \mathbf{q}_1 + v_2 \mathbf{q}_2 + \dots + v_n \mathbf{q}_n, \quad (1.46)$$

kde v_i sú súradnice jeho súradnice. Lineárne nezávislé vektory tvoria po stĺpcoch regulárnu maticu \mathbf{Q}

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n]. \quad (1.47)$$

Rovnicu (1.46) môžeme pomocou matice \mathbf{Q} zapísať v tvare:

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{v} \quad (1.48)$$

Matica \mathbf{Q} je transformačná matica. Ak chceme transformovať stavové rovnice pri novej báze stavového priestoru, tak sa stav \mathbf{x} podľa (1.46) transformuje na nový stavový vektor \mathbf{v} podľa (1.48). Do stavových rovníc systému (1.11) a (1.12) dosadíme z (1.48) a získame:

$$\mathbf{Q}\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{v} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (1.49)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{Q}\mathbf{v} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (1.50)$$

Z daného nám vyplývajú transformované stavové rovnice:

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{v} + \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u} \quad (1.51)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{Q}\mathbf{v} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (1.52)$$

Voľbou novej bázy stavového priestoru X sa zmenia matice A, B, C, D podľa nasledujúcej schémy:

$$A \rightarrow \bar{A} = Q^{-1}AQ, \quad (1.53)$$

$$B \rightarrow \bar{B} = Q^{-1}B,$$

$$C \rightarrow \bar{C} = CQ,$$

$$D \rightarrow \bar{D} = D.$$

Príklad:

Máme systém opísaný stavovými maticami

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -8 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0,8 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \quad -1] \quad D = [0]$$

Rád systému je 2. Určíme si maticu dosiahnuteľnosti:

$$R = [B, AB] = \begin{bmatrix} 0,8 & 4 \\ -1 & 8,8 \end{bmatrix}$$

Ďalej určíme:

$$Q \rightarrow R = Q\bar{R}$$

pre SISO systémy:

$$Q = R\bar{R}^{-1}$$

$$Q = R\bar{R}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,8 & 4 \\ -1 & 8,8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,8 & 4 \\ -1 & 8,8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 & 4 \\ -1 & 8,8 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = Q^{-1}AQ, \quad \bar{B} = Q^{-1}B, \quad \bar{C} = CQ, \quad \bar{D} = D.$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0,8 & 4 \\ -1 & 8,8 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,8 & 4 \\ -1 & 8,8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3,7 & -3,99 \\ 1 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 0,8 & 4 \\ -1 & 8,8 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0,8 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,99 \\ 6,78 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = CQ = [0 \quad -1] \begin{bmatrix} 0,8 & 4 \\ -1 & 8,8 \end{bmatrix} = [1 \quad -8,8]$$

$$\bar{D} = D = 0.$$

1.6 Riešenie stavových rovníc

Stavové rovnice sú v podstate diferenciálne rovnice prvého rádu. Ak chceme nájsť riešenie, musíme sa pozrieť do numerickej matematiky. Často môžeme nájsť vlastnosti systému priamo z tvaru stavových rovníc, aj keď nehľadáme jej riešenie.

Musíme myslieť na to, že z numerického výpočtu dostaneme len jedno riešenie pre dané počiatočné podmienky. Ak máme len toto jediné riešenie, je dosť pravdepodobné, že nebudeme vedieť odvodiť všeobecné závery. Ale aj tak je riešenie stavových rovníc veľmi dôležitým prvkom simulácie.

1.6.1 Homogénna stavová rovnica

System bude autonómny ak vektor vstupných funkcií $\mathbf{u}(t)$ je rovný nule, jeho stavový model bude zapísaný:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}'(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t) = 0 \quad (1.54)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (1.55)$$

Ak vyriešime rovnicu (1.54), dostaneme riešenie sústavy. Po zistení stavového vektoru $\mathbf{x}(t)$, je výstupná rovnica len násobok stavového vektoru a matice \mathbf{C} . Potom budeme riešiť rovnicu buď ako klasickú diferenciálnu rovnicu alebo použijeme LT.

- Klasická diferenciálna rovnica

Z rovnice (1.54) dostaneme koreň $s = \mathbf{A}$, potom riešenie stavovej rovnice bude nasledujúce:

$$\mathbf{x}(t) = k e^{\mathbf{A}t}, \quad (1.56)$$

Kde k je integračná konštanta, ktorá bude určená z počiatočnej podmienky $t = 0 \rightarrow \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0)$, potom

$$k = \mathbf{x}(0). \quad (1.57)$$

Výsledkom bude:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0), \quad (1.58)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0). \quad (1.59)$$

- Výpočet pomocou LT

Určíme si L-obraz stavovej rovnice (1.54)

$$sX(s) - x(0) = AX(s), \quad (1.60)$$

$$X(s) = \frac{1}{s-A} x(0), \quad (1.61)$$

následne použijeme spätnú LT:

$$\mathbf{x}(t) = L^{-1}\{X(s)\} = e^{At} \mathbf{x}(0), \quad (1.62)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) = \mathbf{C}e^{At} \mathbf{x}(0). \quad (1.63)$$

1.6.2 Fundamentálna matica systému

Ak chceme vyriešiť stavovú rovnicu, budeme musieť vyriešiť fundamentálnu maticu $\boldsymbol{\varphi}(t)$:

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = e^{At} = L^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\}. \quad (1.64)$$

Vlastnosti fundamentálnej matice:

- $\boldsymbol{\varphi}(t) = \mathbf{I}$
- $\boldsymbol{\varphi}(-t) = e^{At} = \boldsymbol{\varphi}^{-1}(t)$
- $\boldsymbol{\varphi}(t_1 + t_2) = \boldsymbol{\varphi}(t_1) \cdot \boldsymbol{\varphi}(t_2)$
- $\mathbf{A}\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t)\mathbf{A}$.

1.6.3 Nehomogénna stavová rovnica

Aby bol systém neautonómny, musí byť vektor vstupných funkcií $\mathbf{u}(t) \neq 0$, jeho stavový model je (1.11) a (1.12), Pre získanie výsledku použijeme partikulárny integrál:

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \int_0^t \boldsymbol{\varphi}(t - \tau) \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (1.65)$$

výsledok je daný súčtom riešenia homogénnej rovnice a partikulárneho integrálu:

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t)\mathbf{x}(0) + \boldsymbol{\psi}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \boldsymbol{\varphi}(t - \tau) \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (1.66)$$

Příklad:

Riešte stavovou rovnici pro $u(t) = 0$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u(t).$$

Na zreteľ budeme brať:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t)\mathbf{x}(0).$$

Určíme fundamentálnu maticu:

1. Spätnou L-transformáciou

$$\boldsymbol{\varphi}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} s & -4 \\ -2 & s+6 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} \text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) =$$

$$\frac{1}{s^2 + 6s + 8} \begin{bmatrix} s+6 & 4 \\ -2 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s+6}{(s+2)(s+4)} & \frac{4}{(s+2)(s+4)} \\ \frac{-2}{(s+2)(s+4)} & \frac{s}{(s+2)(s+4)} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = L^{-1}\{\boldsymbol{\varphi}(s)\} = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} - e^{-4t} & 2e^{-2t} - 2e^{-4t} \\ -e^{-2t} + e^{-4t} & -e^{-2t} + 2e^{-4t} \end{bmatrix}.$$

2. Rozvojom v mocninový radu:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -8 & -24 \\ 12 & 28 \end{bmatrix} \frac{t^2}{2!} + \begin{bmatrix} 48 & 112 \\ -56 & -120 \end{bmatrix} \frac{t^3}{3!} + \dots \\ &= \begin{bmatrix} 1 + 0t - \frac{8t^2}{2!} + \frac{48t^3}{3!} + \dots & 0 + 4t - \frac{24t^2}{2!} + \frac{112t^3}{3!} + \dots \\ 0 - 2t + \frac{12t^2}{2!} - \frac{56t^3}{3!} + \dots & 1 - 6t + \frac{28t^2}{2!} - \frac{120t^3}{3!} + \dots \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^{-2t} - e^{-4t} & 2e^{-2t} - 2e^{-4t} \\ -e^{-2t} + e^{-4t} & -e^{-2t} + 2e^{-4t} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\varphi}(t).$$

Stavová matica:

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t)\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} - e^{-4t} & 2e^{-2t} - 2e^{-4t} \\ -e^{-2t} + e^{-4t} & -e^{-2t} + 2e^{-4t} \end{bmatrix},$$

potom:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} - e^{-4t} & 2e^{-2t} - 2e^{-4t} \\ -e^{-2t} + e^{-4t} & -e^{-2t} + 2e^{-4t} \end{bmatrix}.$$

Riešenie výstupnej rovnice:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) = \mathbf{C}\boldsymbol{\varphi}(t)\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2e^{-2t} - e^{-4t} & 2e^{-2t} - 2e^{-4t} \\ -e^{-2t} + e^{-4t} & -e^{-2t} + 2e^{-4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}(t) = (2e^{-2t} - e^{-4t})x_1(0) + (2e^{-2t} - 2e^{-4t})x_2(0)$$

Ak by bola počiatočná podmienka dajme tomu:

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix},$$

potom pre tento prípad:

$$y(t) = 6e^{-2t} - 6e^{-4t}$$

$$G(s) = \frac{6}{(s+2)(s+4)}.$$

Příklad v programe Matlab:

Chceme nájsť fundamentálnu maticu systému, kde stavová matica $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$

```
>> syms t
```

```
>> A=[0 4;-2 -6];
```

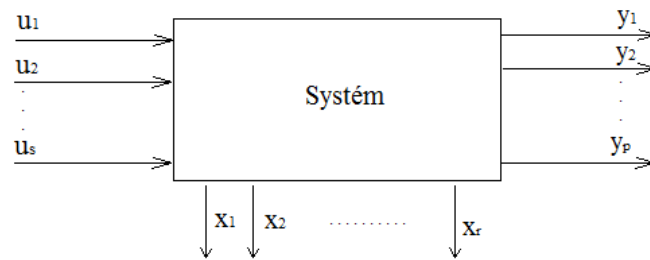
```
>> Fi=expm(t*A)
```

```
Fi = [ 2*exp(-2*t)-exp(-4*t), -2*exp(-4*t)+2*exp(-2*t)]
```

```
 [ exp(-4*t)-exp(-2*t), -exp(-2*t)+2*exp(-4*t)]
```

```
>>
```

1.7 Viacrozmerné (MIMO) systémy



Obr.2 MIMO systém

Regulované sústavy s viac regulovanými veličinami, na ktoré môže pôsobiť aj väčší počet akčných alebo poruchových veličín, ktoré sú s regulovanými veličinami rôzne prepojené, tzn., že jednotlivé sústavy sú na sebe závislé, nazývame viacrozmerné systémy.

Máme viacrozmerný systém s r vstupmi a m výstupmi. Každá výstupná veličina je závislá na všetkých vstupných veličinách. Závislosť i -tej výstupnej a j -tej vstupnej veličiny vyjadríme pri stacionárnom systéme prenosom:

$$G_{ij}(s) = \frac{Y_i(s)}{U_j(s)}, \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq r. \quad (1.67)$$

Z tohto prenosu sa dá vytvoriť matica $\mathbf{G}(s)$ s prvkami G_{ij} . Matica $\mathbf{G}(s)$ je prenosová matica systému.

Pre obraz $Y_i(s)$ i -tého výstupu podľa princípu superpozície zrejme platí:

$$Y_i = G_{i1}(s)U_1(s) + G_{i2}(s)U_2(s) + \dots + G_{ir}(s)U_r(s) \quad (1.68)$$

Zavedieme si obrazy vstupného a výstupného vektoru

$$\mathbf{U}(s) \sim \mathbf{u}(t), \quad \mathbf{U}(s) = [U_1(s), \dots, U_r(s)]^T, \quad (1.69)$$

$$\mathbf{Y}(s) \sim \mathbf{y}(t), \quad \mathbf{Y}(s) = [Y_1(s), \dots, Y_r(s)]^T. \quad (1.70)$$

Potom vzťah medzi nimi vyjadríme:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s), \quad (1.71)$$

kde prenosová matica $\mathbf{G}(s)$ má rozmer $(m \times r)$ a jej prvky sú prenosy $G_{ij}(s)$. Súčin nie je možné komutovať ani prenosovou maticou $\mathbf{G}(s)$ vyjadrovať ako pomer obrazov $\mathbf{Y}(s)$ a $\mathbf{U}(s)$, lebo operácia delenia vektorov nie je definovaná.

Ak spravíme spätnú transformáciu matice $G(s)$, získame maticu $G(t)$. Táto matica je matica impulzných funkcií. Jej prvky $g_{ij}(t)$ sú rovné odozve i -tého výstupu na Diracov impulz v j -tom vstupe.

Príklad:

Určte vonkajší popis MIMO systému:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}.$$

Pre výpočet môžeme použiť rovnice: (1.17) a (1.18).

$$\phi(s) = \begin{bmatrix} s+3 & 0 \\ 0 & s+5 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+3)(s+5)} \begin{bmatrix} s+5 & 0 \\ 0 & s+3 \end{bmatrix},$$

teda:

$$\begin{aligned} G(s) &= \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{(s+3)(s+5)} \begin{bmatrix} s+5 & 0 \\ 0 & s+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{5}{s+3} & -\frac{3}{s+5} \\ \frac{1}{s+3} & -\frac{3}{s+5} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$G_{ij}(s) = \frac{Y_i(s)}{U_j(s)}, \quad G(s) = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{s+3} & -\frac{3}{s+5} \\ \frac{1}{s+3} & -\frac{3}{s+5} \end{bmatrix}.$$

1.8 Stavové rovnice a prenosová matica MIMO systémov

Máme stavovú rovnicu spojitého lineárneho systému v tvare:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (1.72)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (1.73)$$

s počiatočnou podmienkou $\mathbf{x}(0)$. Ak hľadáme prenosovú maticu systému vyjadrujúcu vzťah medzi obrazmi vstupného a výstupného vektoru pri nulových počiatočných

podmienkach, budeme vychádzať z rovnice (1.71). Tu hľadáme súvis medzi vnútorným a vonkajším popisom za pomoci LT stavových rovníc (1.72) a (1.73), z toho získame:

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \quad (1.74)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s), \quad (1.75)$$

kde $\mathbf{X}(s)$, $\mathbf{Y}(s)$, $\mathbf{U}(s)$ sú obrazy vektorov $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y}(t)$, $\mathbf{u}(t)$. Pri nulových počiatočných podmienkach získame z rovníc (1.74) a (1.75) obraz stavu. Potom:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}\mathbf{U}(s), \quad (1.76)$$

kde \mathbf{I} je jednotková matica, potom:

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s). \quad (1.77)$$

Do obrazu výstupných rovníc (1.74) a (1.75) dosadíme obraz stavového vektoru a získame:

$$\mathbf{Y}(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{U}(s). \quad (1.78)$$

Po porovnaní tejto rovnice s rovnicou (1.71) vieme, že prenosová matica bude:

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}. \quad (1.79)$$

Matica $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ je okrem izolovaných bodov v komplexnej rovine s všade regulárna. V daných izolovaných bodoch je potom:

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0. \quad (1.80)$$

Tieto izolované body sú charakteristické čísla matice \mathbf{A} . Charakteristickým polynómom je $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$. Podľa rovnice (1.79) je zrejmé, že:

$$\mathbf{G}(s) = \frac{1}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} \mathbf{C} \operatorname{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{B} + \mathbf{D}, \quad (1.81)$$

kde $\operatorname{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ je adjungovaná matica. Rovnica (1.81) nám aj hovorí o existencii vzťahov medzi prenosovými pólmi a vlastnými číslami matice \mathbf{A} .

Príklad:

Vypočítajte prenosovú maticu $G(s)$. Systém je zadaný stavovými rovnicami $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$, kde sú matice: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = [1 \quad 4]$, $\mathbf{D} = [0 \quad 0]$.

Zostavíme maticu:

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s + 5 \end{bmatrix}$$

následne jej inverziu:

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s(s + 5)} \begin{bmatrix} s + 5 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

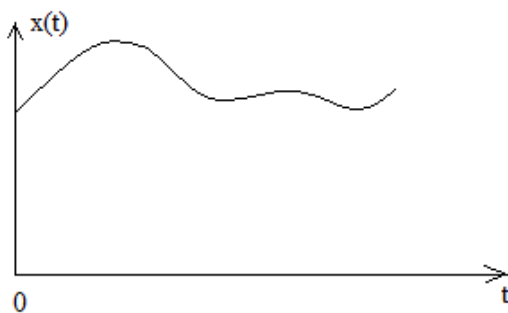
podľa vzorca (1.78) zistíme, že prenosová matica $G(s)$ je:

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 1 + 4s \\ s & s(s + 5) \end{bmatrix}.$$

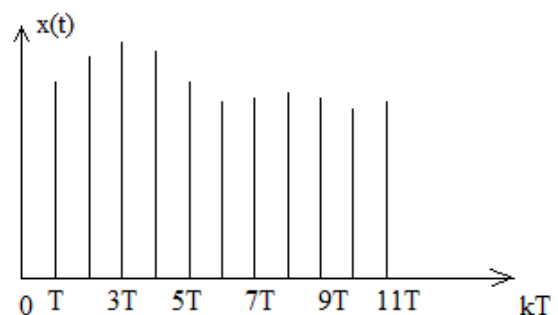
2 LINEÁRNE DISKRÉTNE DYNAMICKÉ SYSTÉMY (LDDS)

Riadiacimi počítačmi je realizované diskkrétne riadenie. Od spojitych sa líši tým, že má väčšiu statickú dlhodobú presnosť, menšiu citlivosť na elektromagnetické rušenie a nie je závislé od zmien teploty.

Že sa jedná o diskrétny signál vieme vďaka tomu, že diskrétny signál je navzorkovaný spojité signál v diskrétnych časových oblastiach. Na obrázkoch bude znázornený rozdiel medzi spojitym a diskrétnym systémom.



Obr.3: Spojitý signál



Obr.4: Diskrétny signál

Systém, v ktorom sa mení jedna alebo viac premenných v diskrétnych časových okamžikoch kT ($k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$) voláme diskrétny riadiaci systém.

2.1 Jednorozmerné diskkrétne (SISO) systémy

Vonkajšie popisy spojitych lineárnych systémov sú podobné (analogické) ako u vonkajších popisoch diskrétnych lineárnych systémov, ibaže nahradíme spojitú funkciu času $f(t)$ a jej Laplaceove obrazy: $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ postupnosťou $f(k)$ a jej obrazmi Z : $F(z) = \mathcal{Z}\{f(k)\}$.

2.2 Diferenčné rovnice a stavové popisy LDDS

Základným matematickým popisom spojitého systému sú diferenciálne rovnice. Podobne je to aj pri diskrétnom systéme. Tieto rovnice nazývame diferenčné rovnice.

Lineárna diferenčná rovnica v normálnom tvare:

$$a_n y(k+1) + a_{n-1} y(k+n-1) + \dots + a_0 y(k) = b_m u(k+m) + \dots + b_0 u(k) \quad (2.1)$$

Ak chceme mať systém fyzikálne realizovateľný, musí byť splnená nasledujúca podmienka: $n \geq m$, tzn., že v čase $(k+n)$ nemôže systém reagovať na nasledujúce hodnoty vstupu.

Aby sme mohli riešiť diferenčnú rovnicu (2.1), musíme poznať hodnoty vstupnej postupnosti $u(k+m+1), \dots$ a počiatočné podmienky: $u(k), \dots, u(k+m), y(k), \dots, y(k+n-1)$.

Ak využijeme vetu o obraze posunutej postupnosti z diferenčnej rovnice (2.1), potom získame prenos diskretného systému v Z-transformácii:

$$Z\{f(k+i)\} = z^i F(z) - \sum_{j=1}^i z^j f(i-j). \quad (2.2)$$

Pri nulových počiatočných podmienkach:

$$a_n z^n Y(z) + \dots + a_1 z Y(z) + a_0 Y(z) = b_m z^m U(z) + \dots + b_0 U(z) \quad (2.3)$$

potom pomer Z-obrazov vstupu a výstupu je rovný prenosu systému:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m z^m + \dots + b_0}{a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0} = \frac{b(z)}{a(z)} \quad (2.4)$$

Prenosové póly systému sú korene polynómu $a(z)$ a prenosové nuly systému sú korene polynómu $b(z)$. Pri nenulových počiatočných podmienkach môžeme získať obraz výstupnej veličiny:

$$Y(z) = \frac{b(z)}{a(z)} U(z) + \frac{c(z)}{a(z)}, \quad (2.5)$$

kde vplyv počiatočných podmienok popisuje polynóm $c(z)$ stupňa maximálne $n-1$.

Môžeme pracovať s diferenčnou rovnicou s alternatívnym popisom diskretných systémov.

$$y(k) + \alpha_1 y(k-1) + \dots + \alpha_n y(k-n) = \beta_0 u(k) + \beta_1 u(k-1) + \dots + \beta_n u(k-n), \quad (2.6)$$

po úprave získame:

$$y(k) = -\sum_{i=1}^n \alpha_i y(k-i) + \sum_{i=0}^n \beta_i u(k-i) \quad (2.7)$$

Tu vidíme, ako je od predchádzajúcich hodnôt vstupov a výstupov závislá hodnota výstupu systému. Ak je hodnota výstupu systému závislá len na konečnom počte predchádzajúcich hodnôt vstupu, potom sú koeficienty $\alpha_i = 0$. V tom prípade:

$$y(k) = \sum_{i=0}^n \beta_i u(k-i). \quad (2.8)$$

Ak použijeme vetu o posunutí:

$$Z\{f(k-i)\} = z^{-i} F(z) \quad (2.9)$$

dokážeme získať zo vzťahu (2.6) vzťah pre prenos:

$$G(z) = \frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})} = \frac{\beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \dots + \beta_n z^{-n}}{1 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_n z^{-n}} = \frac{\beta(z^{-1})}{\alpha(z^{-1})}, \quad (2.10)$$

t.j. ako podiel polynómov v premennej z^{-1} .

Rovnica (2.1) sa dá taktiež zapísať pomocou diferencie definovaných vzťahov:

$$\Delta x(k) = x(k) - x(k-1) \quad (2.11)$$

$$\Delta^i x(k) = \Delta^{i-1} x(k) - \Delta^{i-1} x(k-1) = \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{i}{j} y(k+j-i)$$

v tvare:

$$\Delta^n y(k) + \bar{\alpha}_1 \Delta^{n-1} y(k-1) + \dots + \bar{\alpha}_n y(k-n) = \bar{\beta}_0 \Delta^n u(k) + \dots + \bar{\beta}_n u(k-n) \quad (2.12)$$

Tento tvar je Δ - model diskrétného systému.

2.3 Riešenie diskkrétnej stavovej rovnice

Napíšeme si diferenčnú rovnicu s konštantnými koeficientmi:

$$a_n y[(k+n)T] + \dots + a_1 y[(k+1)T] + a_0 y(kT) = b_0 u(kT) \quad (2.12)$$

Zvolíme stavové premenné:

$$x_1(kT) = y(kT) \quad (2.13)$$

$$x_2(kT) = y[(k+1)T]$$

⋮

$$x_n(kT) = y[(k+n-1)T]$$

nasleduje:

$$x_n[(k+1)T] = y(k+n)T. \quad (2.14)$$

Ak dosadíme vzťahy (2.13) a (2.14) do vzťahu (2.12), potom následnou úpravou získame zložkový tvar stavovej rovnice:

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = \mathbf{M}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{N}u(kT) \quad (2.15)$$

$$y(kT) = \mathbf{C}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{D}u(kT), \quad (2.16)$$

kde: kT je diskrétny čas [$k = 0, 1, 2, 3, \dots$],

T je vzorkovacia perióda,

A, B, C, D sú konštantné matice odpovedajúcich typov,

u, y sú jednorozmerné vektory lineárneho dynamického systému, tzn., že sú to skaláry,

x môže byť tiež vektorom.

Vlastnosti jednorozmerného systému sú obvykle popísané diferenciálnymi rovnicami, poprípade bývajú popísané taktiež prenosom. Od rádu diferenciálnej rovnice je závislý počet stavových veličín $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. Vieme, že získať všetky stavy x_i určujúci stavový vektor x nám umožní vnútorný popis. Naopak, u vonkajšieho nie sú tieto stavy k dispozícii priamo. Totiž u vonkajšieho popisu stavový signál x explicitne nevystupuje, pretože vyjadruje závislosť medzi vstupným signálom u a výstupným signálom y .

Diskrétny systém popísaný vonkajším popisom (2.1) poprípade prenosom (2.10) môžeme previesť na popis vnútorný, čiže stavový popis, niekoľkými metódami:

- metódou postupnej integrácie,
- rozkladom prenosu na čiastkové prenosy,
- metódou znižovania rádu derivácie.

Ako je možné vonkajší popis systému previesť na popis vnútorný, tak je možné tento popis previesť zo stavového popisu na prenos:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = C(zI - A)^{-1}B + D \quad (2.17)$$

2.4 Viacrozmerné (MIMO) systémy

Viacrozmerný dynamický systém so vstupnými veličinami u_1, u_2, \dots, u_n a výstupnými veličinami y_1, y_2, \dots, y_n .

Uvažujme o systéme, ktorého dynamické chovanie môžeme popísať diferenciálnou rovnicou n -tého rádu alebo diferenciálnymi rovnicami prvého rádu, ktorých počet je n . Pritom oba spôsoby popisu môžeme prepísať na ten druhý a naopak. Ak berieme do úvahy

system na obr.2, potom môžeme chovanie systému popísať sústavou diferenciálnych rovníc prvého rádu :

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_1, x_2, \dots, x_r, u_1, u_2, \dots, u_s, t), \quad (2.18)$$

kde sú u_n - akčné veličiny, x_i – stavové veličiny, $i = 1, 2, \dots, r$.

Stavové veličiny nemusia byť merateľné. Vstupné a výstupné veličiny môžu byť merateľné a vďaka nim môžeme určiť veličiny stavové. Funkciou stavových a vstupných veličín je výstupná veličina:

$$y_j(t) = g_j(x_1, x_2, \dots, x_r, u_1, u_2, \dots, u_s, t), \quad (2.19)$$

kde $i = 0, 1, 2, \dots, p$.

Rovnicu (2.18) voláme stavová rovnica a rovnicu (2.19) je výstupná rovnica. Po prepise do vektorového zápisu bude ich tvar:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \quad (2.20)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t].$$

V prípade lineárnych dynamických systémov môžeme vzťah (2.18) a (2.19) napísať v tvaroch:

$$\dot{x}_i(t) = a_{i1}(t)x_1(t) + \dots + a_{ir}(t)x_r(t) + b_{i1}(t)u_1(t) + \dots + b_{is}(t)u_s(t) \quad (2.21)$$

$$y_j(t) = c_{j1}(t)x_1(t) + \dots + c_{jr}(t)x_r(t) + d_{j1}(t)u_1(t) + \dots + d_{js}(t)u_s(t), \quad (2.22)$$

kde $i = 1, 2, 3, \dots, r$ a $j = 1, 2, 3, \dots, p$.

Taktiež môžeme dané vzťahy zapísať vo vektorovo maticovom tvare (1.71) a (1.72). Pre diskretný viacrozmerný systém budeme používať stavový model v tvare:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{M}\mathbf{x}(k) + \mathbf{N}\mathbf{u}(k) \quad (2.23)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \quad (2.24)$$

V diskretnom systéme máme oneskorenie o jednu vzorkovaciu periódu. Z čoho vyplýva, že nám dynamiku realizuje oneskorenie.

2.5 Stavové rovnice diskretných (MIMO) systémov

Rovnice (2.23) a (2.24) udávajú stavový popis diskretnéj lineárnej sústavy n -tého rádu s r vstupmi a m výstupmi.

V týchto rovniciach sa nachádzajú vektory:

$$\mathbf{x}(k) = [x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)]^T,$$

$$\mathbf{u}(k) = [u_1(k), u_2(k), \dots, u_r(k)]^T,$$

$$\mathbf{y}(k) = [y_1(k), y_2(k), \dots, y_m(k)]^T.$$

Taktiež tieto rovnice obsahujú matice o rozmeroch:

$$\mathbf{M}[n \times n], \quad \mathbf{N}[n \times r],$$

$$\mathbf{C}[m \times n], \quad \mathbf{D}[m \times r].$$

Ak máme splnené nulové počiatočné podmienky a ak je matica \mathbf{D} nulová, následne budú rovnice (2.23) a (2.24) po Z-transformácii nasledovné:

$$z\mathbf{X}(z) = \mathbf{M}\mathbf{X}(z) + \mathbf{N}\mathbf{U}(z) \quad (2.25)$$

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{C}\mathbf{X}(z) \quad (2.26)$$

po nasledovnej úprave získame:

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1}\mathbf{N}\mathbf{U}(z) \quad (2.27)$$

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1}\mathbf{N}\mathbf{U}(z) = \mathbf{F}(z)\mathbf{U}(z) \quad (2.28)$$

Reláciou medzi vstupmi a výstupmi bude prenosová matica, ktorá je nasledovná:

$$\mathbf{F}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1}\mathbf{N} \quad (2.29)$$

Rozmer matice \mathbf{F} je nasledovný: $[m \times r]$. Jej úlohou je charakteristika odozvy diskretnéj sústavy na vstupné signály. Maticu inverznú $(z\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1}$ postupne vyjadríme:

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1} = \frac{\text{adj}(z\mathbf{I} - \mathbf{M})}{|z\mathbf{I} - \mathbf{M}|} \quad (2.30)$$

Z rovnice (2.30) vyjadríme prenosovú maticu:

$$\mathbf{F}(z) = \frac{\mathbf{C} \text{adj}(z\mathbf{I} - \mathbf{M}) \mathbf{N}}{|z\mathbf{I} - \mathbf{M}|} \quad (2.31)$$

Korene charakteristickej rovnice sú zároveň aj póly prenosovej matice $\mathbf{F}(z)$:

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{M}| = 0 \quad (2.32)$$

Charakteristická rovnica je následne vyjadrená:

$$z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + a_3 z^{n-3} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0, \quad (2.33)$$

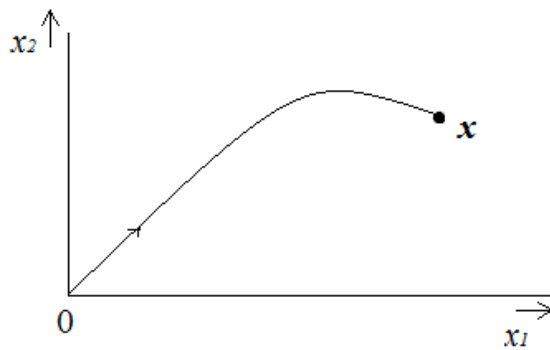
kde sú členy a_i závislé od prvkov matice \mathbf{M} .

3 VLASTNOSTI SYSTÉMOV

V danej kapitole si uvedieme základné vlastnosti dynamických systémov, vyplývajúce zo stavových popisov. Zameriame sa na spojité systémy opísané stavovým modelom. Konkrétne na riaditeľnosť, dosiahnuteľnosť, pozorovateľnosť a rekonštruovateľnosť.

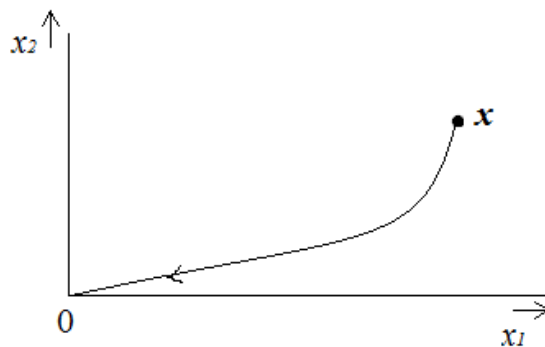
3.1 Riaditeľnosť a dosiahnuteľnosť

Ak existuje riadenie $u(t)$, ktorý prevedie stav $x(t_0) = 0$ do stavu x za konečný čas, hovoríme o stave dosiahnuteľnom. Systém je dosiahnuteľný práve vtedy, ak sú všetky jeho stavy dosiahnuteľné. Budú pre nás dôležitý nulový počiatočný stav a budeme sa pýtať na existenciu riadenia $u(t)$ s uvedenými vlastnosťami.



Obr.5: Dosiahnuteľnosť stavu systému

Ak existuje riadenie $u(t)$, ktoré prevedie stav do počiatku za konkrétny čas, hovoríme o stave riaditeľnom. Systém je riaditeľný práve vtedy, ak sú všetky jeho stavy riaditeľné. Stav x je pri riaditeľnosti počiatočným stavom.



Obr.6: Riaditeľnosť stavu systému

Mohlo by sa nám zdať, že oba systémy splývajú. To znamená, že by sa nám aj mohlo zdať, že ak je stav dosiahnuteľný, tak je aj riaditeľný i naopak. Často k tomu aj dochádza. Ale sú aj jednoduché systémy, u ktorých množina dosiahnuteľných stavov nie je zhodná s množinou riaditeľných stavov.

Aby sme dosiahli kritériá pre odvodenie riaditeľnosti, resp. dosiahnuteľnosti, použijeme to, že každú konvergujúcu nekonečnú mocninovú radu štvorcovej matice \mathbf{A} , reprezentujeme ako polynóm v mocninách matice \mathbf{A} stupňa $p - 1$, kde p je samozrejme najmenší polynóm matice \mathbf{A} . Pritom najnižší polynóm $\Phi(\lambda)$ najnižšieho stupňa p je:

$$\Phi(\lambda) = \lambda^p + a_{p-1}\lambda^{p-1} + \dots + a_0, \quad (3.1)$$

pre daný polynóm platí:

$$\Phi(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^p + a_{p-1}\mathbf{A}^{p-1} + \dots + a_0\mathbf{I} = 0 \quad (3.2)$$

Platí, že $p \leq n$. Z daného je nám jasné, že stupeň p minimálneho polynómu matice \mathbf{A} je najviac rovný jej dimenzii n . Vďaka tomu môžeme exponenciálnu maticu vyjadriť v nasledujúcom tvare:

$$e^{A\tau} = \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i(\tau) \mathbf{A}^i. \quad (3.3)$$

Podľa vzťahu:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = 0; \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(0) = - \int_0^t e^{-A\tau} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (3.4)$$

platí:

$$\mathbf{x} = - \int_0^t \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i(\tau) \mathbf{A}^i \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (3.5)$$

Vyjadrenie vektoru riadenia $\mathbf{u}(\tau)$ bude nasledovné:

$$\mathbf{u}(\tau) = \sum_{j=1}^r u_j(\tau) \mathbf{e}_j, \quad (3.6)$$

Kde veľkosť j -tej zložky riadenia v čase τ je $u_j(\tau)$, bázový vektor je \mathbf{e}_j . Následne môžeme rovnicu (3.5) vyjadriť ako:

$$\mathbf{x} = - \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=1}^r \int_0^t \alpha_i(\tau) u_j(\tau) d\tau \mathbf{A}^i \mathbf{b}_j, \quad (3.7)$$

v tomto prípade je \mathbf{b}_j j -tý stĺpec matice \mathbf{B} . Následným označením:

$$- \int_0^t \alpha_i(\tau) u_j(\tau) d\tau = \beta_{ij}, \quad (3.8)$$

Vhodnou voľbou riadenia $u_j(\tau)$ môže skalárna veličina β_{ij} , pre ľubovoľné t nadobudnúť akékoľvek konečné hodnoty. Zo vzťahu (3.7) môžeme stav \mathbf{x} opísať rovnicou:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=1}^r \beta_{ij} \mathbf{A}^i \mathbf{b}_j. \quad (3.9)$$

Ak sa nachádza v podpriestore generovanom vektormi $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_r, \mathbf{A}\mathbf{b}_1, \mathbf{A}\mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{A}\mathbf{b}_r, \mathbf{A}^{p-1}\mathbf{b}_1, \mathbf{A}^{p-1}\mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{A}^{p-1}\mathbf{b}_r$ stav \mathbf{x} , je tento stav riaditeľný. Po nájdení n lineárne nezávislých vektorov môžeme tvrdiť, že je systém riaditeľný, dosiahnuteľný vtedy, keď je zložená matica \mathbf{P}_c :

$$\mathbf{R} = [\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (3.10)$$

Je nutné dodať, že rozmery matice \mathbf{R} sú $[n \times rn]$.

3.2 Pozorovateľnosť a rekonštruovateľnosť

Stáva sa, že len vstupné a výstupné veličiny sú merateľné veličiny. Musíme zistiť, v akom stave sa systém nachádza. Tento stav sa dá zistiť meraním vstupu a výstupu systému. V určitých prípadoch býva priame meranie stavu systému $\mathbf{x}(t)$ nerealizovateľné. Otázkou je, či sa nám podarí získať z merateľného výstupu stavový vektor.

Pri meraní vstupu a výstupu zisťujeme stav na začiatku a na konci intervalu. Podľa toho, ktorý interval zisťujeme, hovoríme o pozorovateľnosti alebo rekonštruovateľnosti.

Ak zmeriame vstup a výstup na konečnom intervale, potom môžeme zistiť stav systému na začiatku merania. V tomto prípade hovoríme, že ide o systém pozorovateľný. V prípade, keď meriame vstup a výstup systému na koncovom časovom intervale, môžeme zistiť stav systému na konci intervalu merania. V danom prípade hovoríme, že je systém rekonštruovateľný.

Ak chceme jednoznačne určiť koncový stav systému, musíme poznať počiatočný stav systému a priebeh vstupu systému. Preto ak je systém pozorovateľný, je aj rekonštruovateľný. V tomto prípade opační prípad neplatí.

Pri nulovom vstupe bude výstup rovný:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) = \mathbf{C}\sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j(t)\mathbf{A}^j\mathbf{x}(0), \quad (3.11)$$

kde $p \leq n$. U zložky výstupu i potom platí:

$$y_i(t) = \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j(t) \mathbf{c}_i^T \mathbf{A}^j \mathbf{x}(0), \quad (3.12)$$

i -tý riadok matice \mathbf{C} je \mathbf{c}_i^T . Označením dostaneme:

$$\mathbf{c}_i^T \mathbf{A}^j \mathbf{x} = \mathbf{r}_{ij}^T, \quad (3.13)$$

vd'aka tomu si odvodíme:

$$y_i(t) = \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j(t) (\mathbf{r}_{ij}^T \mathbf{x}(\mathbf{0})), \quad (3.14)$$

Ako skalárnu veličinu sme označili skalárny súčin $\mathbf{a}(t)$, $\mathbf{b}(t)$, ktorej rovnica je:

$$\langle \mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t) \rangle = \int_0^t \mathbf{a}^T(t) \mathbf{b}(t) dt. \quad (3.15)$$

Urobíme aj skalárny súčin $y_i(t)$ a $\alpha_k(t)$:

$$\langle \alpha_k, y_i \rangle = \sum_{j=0}^{p-1} (\alpha_k, \alpha_j) \mathbf{r}_{ij}^T \mathbf{x}(\mathbf{0}). \quad (3.16)$$

Tu k, i zobrazujú sústavu rovníc pre neznáme skalárne veličiny. Pre i je v tvare:

$$\begin{bmatrix} \langle \alpha_0, y_i \rangle \\ \langle \alpha_1, y_i \rangle \\ \langle \alpha_2, y_i \rangle \\ \vdots \\ \langle \alpha_{s-1}, y_i \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \alpha_0, \alpha_0 \rangle & \langle \alpha_0, \alpha_1 \rangle & \langle \alpha_0, \alpha_2 \rangle & \dots & \langle \alpha_0, \alpha_{s-1} \rangle \\ \langle \alpha_1, \alpha_0 \rangle & & & & \langle \alpha_1, \alpha_{s-1} \rangle \\ \langle \alpha_2, \alpha_0 \rangle & & & & \langle \alpha_2, \alpha_{s-1} \rangle \\ \vdots & & & & \vdots \\ \langle \alpha_{s-1}, \alpha_0 \rangle & & & & \langle \alpha_{s-1}, \alpha_{s-1} \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{i0}^T \mathbf{x}(\mathbf{0}) \\ \mathbf{r}_{i1}^T \mathbf{x}(\mathbf{0}) \\ \mathbf{r}_{i2}^T \mathbf{x}(\mathbf{0}) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_{i,s-1}^T \mathbf{x}(\mathbf{0}) \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

V sústave existuje vždy riešenie a to preto, lebo funkcia $\alpha_k(t)$ je lineárne nezávislá. Pri riešení pozorovateľnosti a rekonštruovateľnosti bude β_{ij} riešenie predchádzajúcej sústavy pre $(\mathbf{r}_{i0}^T \mathbf{x}(\mathbf{0}))$. Tzn., že:

$$\mathbf{r}_{ij}^T \mathbf{x}(\mathbf{0}) = \beta_{ij}. \quad (3.18)$$

Rovnica (3.18) bude riešená vzhľadom k počiatočnému stavu. Vektory \mathbf{r}_{ij}^T tvoria maticu sústavy, čo znamená, že pravdepodobne táto matica je rovná matici pozorovateľnosti \mathbf{P} :

$$\mathbf{P} = [\mathbf{r}_{ij}^T]_{i=0,1,2,\dots,n, j=0,1,2,\dots,n-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^T \\ \mathbf{c}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{c}_m^T \\ \mathbf{c}_1^T \mathbf{A} \\ \mathbf{c}_2^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_m^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_m^T \mathbf{A}^{s-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \mathbf{CA}^3 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{s-1} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

V danom systéme nám stačí vstup a výstup merať ľubovoľne krátku dobu. Na časový interval totiž nebola dávaná žiadna požiadavka.

Príklad:

Máme dané matice:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -7 & -9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C = [3 \quad 1 \quad 0], \quad D = [0],$$

Našou úlohou je nájsť matice riaditeľnosti a pozorovateľnosti stavu.

$$R[B, AB, A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -9 \\ 1 & -9 & 74 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ -10 & -7 & -6 \end{bmatrix}$$

Príklad v programe Matlab:

Máme stanovené matice systému:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -7 & -9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C = [3 \quad 1 \quad 0], \quad D = [0],$$

Našou úlohou je nájsť matice riaditeľnosti a pozorovateľnosti v programe Matlab.

```
>> A=[0 1 0;0 0 1;-10 -7 -9];
```

```
>> B=[0;0;1];
```

```
>> C=[3 1 0];
```

```
>> D=[0];
```

```
>> pre=ss(A,B,C,D);
```

```
>> R=ctrb(pre)
```

```
R = 0 0 1
```

```
0 1 -9
```

```
1 -9 74
>> rank(R)
ans = 3

>> P=obsv(pre)
P = 3 1 0
    0 3 1
   -10 -7 -6

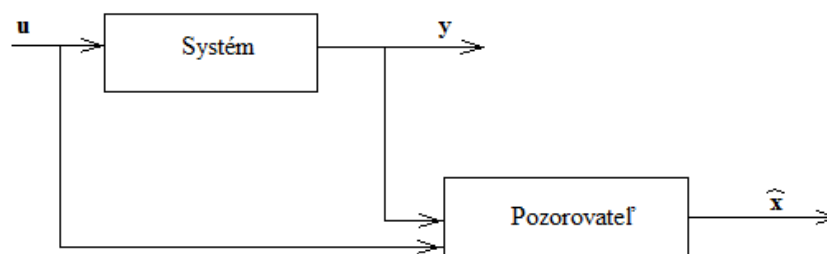
>> rank(P) % hodnost matice pozorovatelnosti
ans = 3

>>
```

3.3 Pozorovateľ stavu dynamických systémov

Podmienkou existencie pozorovateľa stavu systému je realizácia pozorovateľnosti a rekonštruovateľnosti.

Máme systém tvorený štvoricou matic A , B , C , D . Urobíme modelový systém S_M systému S . Budeme predpokladať, že vytvorený systém bude mať rovnaké matice a tento systém bude mať všetky stavy merateľné.



Obr.7: Pozorovateľ stavu systému

Urobíme si výklad tohto systému. Modelový systém označíme so striedkou. Pri výklade zanedbáme D , pretože nám neprináša žiadnu informáciu. Následne budú stavové rovnice oboch systémov nasledovné:

$$S: \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3.20)$$

$$y(t) = Cx(t),$$

$$x(t_0) = x_0$$

$$S_M: \quad \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) \quad (3.21)$$

$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t),$$

$$\hat{x}(t_0) = \hat{x}_0.$$

Vektor odchýlky oboch systémov bude:

$$e = x - \hat{x}. \quad (3.22)$$

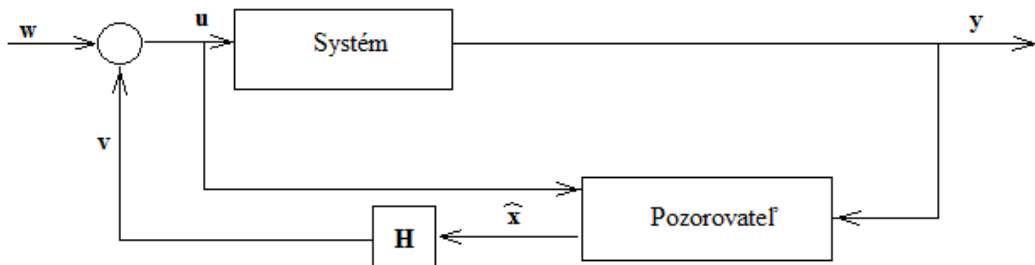
Vďaka stavovým rovniciam (3.20) a (3.21) nám vznikne diferenciálna rovnica odchýlky:

$$\dot{e} = Ae, \quad e(t_0) = x_0 - \hat{x}_0 = e_0. \quad (3.23)$$

Riešením je:

$$e(t) = e^{A(t-t_0)}(x_0 - \hat{x}_0) = e^{A(t-t_0)}e_0. \quad (3.24)$$

Ak má matica A vlastné čísla, ktoré majú zápornú reálnu časť, hovoríme, že systém S je stabilný. Ak nie, potom sa model systému neblíži stavu systému S . Preto musí byť pozorovateľ navrhnutý tak, aby odchýlka systému konvergovala k nule. My si popíšeme pozorovateľa vo spätnej väzbe.



Obr.8: Pozorovateľ stavu systému vo spätnej väzbe

Výstupom daného pozorovateľa sú rekonštruovateľné stavové premenné. Matica \mathbf{H} je spätneväzbová matica pozorovateľa. Strieškou budeme značiť pozorované premenné a výstup. Zo stavových rovníc (3.20) a (3.21) si odvodíme stavové rovnice pre tento prípad:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (3.25)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t),$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{H}(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) \quad (3.26)$$

$$\hat{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t).$$

Po ich úprave získame rovnicu:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{H}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{H}\mathbf{y} \quad (3.27)$$

V rovnici (3.27) nájdeme systémovú maticu pozorovateľa:

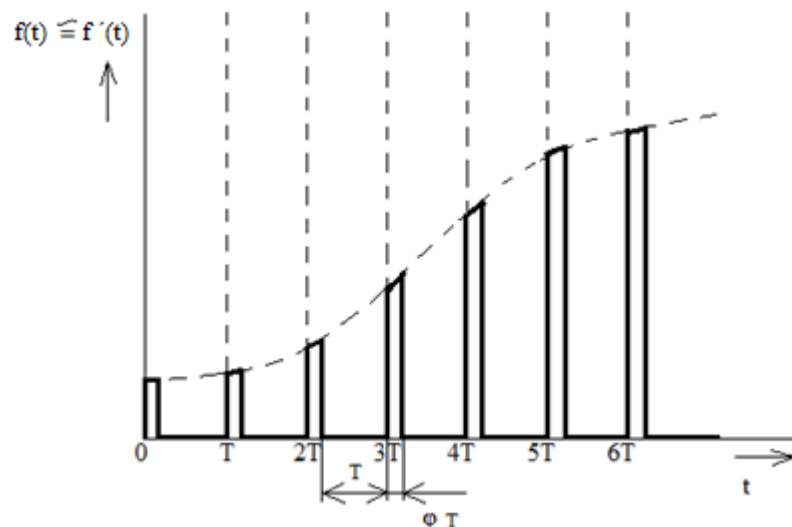
$$\mathbf{F} = (\mathbf{A} - \mathbf{H}\mathbf{C}) \quad (3.28)$$

Podmienkou je, aby vlastné čísla matice \mathbf{A} boli menej zápornejšie ako vlastné čísla systémovej matice \mathbf{F} .

4 VZŤAH MEDZI SPOJITÝMI A DISKRÉTNÝMI SYSTÉMAMI

Občas pre nás môžu byť zaujímavé hodnoty odozvy v určitých diskretných okamžikoch a nie priebeh funkcie ako funkcie času. To sa stane vtedy, keď meranie robíme prevodníkom. Tento prevodník je analógovo-číslícový. Prevodník nám prenesie na číselný údaj zaznamenané analógové hodnoty odozvy v určitých diskretných okamžikoch.

4.1 Perióda vzorkovania a vzorkovanie signálov



Obr.9: Vzorkovanie funkcie vstupného spojitého signálu

Vzorkovací člen sme si ukázali na obr.9. Na diskretný signál $f'(t)$ sa mení spojité signál $f(t)$. Výstupom je postupnosť impulzov veľmi malej šírky φ . Predpokladá sa, že φ je väčšie ako 0 . Hodnoty v okamžikoch vzorkovania sa rovnajú výške φ . Jeden časový okamžik vzorkovania je predpokladaná konštantná perióda vzorkovania T .

Pri vzorkovaní vzniká postupnosť impulzov. Je teda zrejmé, že stály interval (perióda) vzorkovania je T . Potom bude frekvencia vzorkovania daná vzťahom:

$$\omega_{\nabla} = \frac{2\pi}{T}. \quad (4.1)$$

Vzorkovací perioda a tím pádom aj vzorkovacia frekvencia má obmedzenú dĺžku trvania. Frekvenčné spektrum diskretného signálu $f'(t)$ ovplyvňuje veľkosť vzorkovacej periódy a frekvencie. Toto spektrum je vlastne navzorkovaná pôvodná funkcia $f(t)$:

$$|F'(j\omega)| = f(\omega). \quad (4.2)$$

Z rovnice (4.2) vieme, že absolútna hodnota Fourierova obrazu $|F'(j\omega)|$ diskretného signálu $f'(t)$ je naše zmienené frekvenčné spektrum.

Fourierov obraz môžeme popísať rovnicou:

$$F'(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(j\omega + jk\omega_T), \quad (4.3)$$

kde $k = -\infty, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, \infty$. Zavedieme si všeobecnú impulznú funkciu $v(t)$.

Pre výstupnú funkciu zo vzorkovača môžeme použiť vzťah:

$$f'(t) = f(t)\delta_T(t) = f(t) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT), \quad (4.4)$$

kde δ_T je jednotkový, resp. Diracov impulz. Ak bude pre $t < 0$ funkcia $f(t)$ nulová, tak je ešte možné zapísať výstupnú funkciu v tvare:

$$f'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\delta(t - kT). \quad (4.5)$$

Na Fourierovu radu v komplexnom tvare sme si mohli rozpisovať Diracov impulz, pretože je to periodická funkcia s periódou:

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_T t}, \quad (4.6)$$

kde c_k je koeficient komplexnej Fourierovej rady.

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta_T(t) e^{-jk\omega_T t} dt \quad (4.7)$$

Aby sme vypočítali koeficient Fourierovej rady, tak musíme dosadiť vzťah pre Diracov impulz:

$$\delta_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT) \quad (4.8)$$

do rovnice (4.7) nasledovne:-----

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-jk\omega_T t} [\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)] dt = \quad (4.9)$$

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-jk\omega_T t} [\sum_{k=-\infty}^{-1} \delta(t - kT)] dt + \quad .$$

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-jk\omega_{\nabla}t} \delta(t) dt + \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-jk\omega_{\nabla}t} [\sum_{k=1}^{\infty} \delta(t - kT)] dt = \dots$$

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-jk\omega_{\nabla}t} \delta(t) dt. \dots$$

Pretože, len pre $t = 0$ má $\delta(t)$ nenulovú hodnotu, potom môžeme vypracovať tento integrál len pre $t = 0$ a ten je rovný jednej:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) dt = \frac{1}{T}. \quad (4.10)$$

Po dosadení rovnice (4.10) do rovnice (4.6) získame:

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_{\nabla}t}. \quad (4.11)$$

Po dosadení vzťahu (4.11) do vzťahu (4.4) získame vzťah pre výstupné funkcie zo vzorkovača:

$$f'(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t) e^{jk\omega_{\nabla}t}. \quad (4.12)$$

Na základe vety o posunutí v obraze v LT, ktorá znie:

$$F(p) = L\{f(t)\}, \quad (4.13)$$

Potom vieme, že z vety o posunutí obrazu (4.13) získame

$$F(p + a) = L\{e^{-at} f(t)\}. \quad (4.14)$$

Z rovnice (4.14) zostavíme Fourierov obraz diskretnéj funkcie:

$$F'(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(j\omega + jk\omega_{\nabla}), \quad (4.15)$$

Kde na znamienku $jk\omega_{\nabla}$ nezáleží z toho dôvodu, lebo sa mení od $-\infty$ do $+\infty$. Z daných vzťahov nám vyplýva, že Fourierov diskretný obraz funkcie je vlastne súčet posunutých spektier funkcie základnej. Toto posunutie je dané vzťahom:

$$k\omega_{\nabla} = k \frac{2\pi}{T}, \quad (4.16)$$

kde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm \infty$. Pri vzorkovaní vznikajú parazitné spektrá.

Približnú obnovu pôvodného signálu má za úlohu tvarovanie signálu. Ideálnym filtrom spravíme tzv. optimálnu rekonštrukciu pôvodného signálu. Jeho frekvenčný prenos je daný vzťahom:

$$\begin{aligned}
 I(j\omega) &= T \quad \text{pre} \quad -\frac{\omega_{\nabla}}{2} \leq \omega \leq \frac{\omega_{\nabla}}{2}, \\
 &= 0 \quad \text{pre} \quad |\omega| > \frac{\omega_{\nabla}}{2} = \frac{\pi}{T}.
 \end{aligned}
 \tag{4.17}$$

Pomocou spätnej Fourierovej transformácie získam vzťah pre impulznú funkciu ideálneho filtra:

$$j(t) = \frac{\sin \frac{\omega_{\nabla}}{2} t}{\frac{\omega_{\nabla}}{2} t} = \frac{\sin \frac{\pi}{T} t}{\frac{\pi}{T} t} .
 \tag{4.18}$$

Priebeh impulznej funkcie ideálneho filtra $j(t)$ má nekauzálny priebeh, čo znamená, že je fyzikálne nerealizovateľný.

Pre nás to znamená, že budeme robiť vzorkovanie častejšie než ako to požaduje veta o vzorkovaní:

$$\omega_{\nabla} \gg 2\omega_h,
 \tag{4.19}$$

kde ω_h horný medzný kmitočet spektra originálneho signálu. To nám umožní zmenšiť chybu rekonštrukcie. Ak máme všetky prvotné vzorky pôvodnej funkcie $f(t)$, spravíme numericky konvolúciu funkcie $j(t)$ a funkcie $f(t)$ vzniknutej impulznej modulácie. Potom celú funkciu $f'(\tau)$ aj pre $\tau > t$ použijeme na rekonštrukciu funkcie $f(t)$. Tvarovacími členmi môžeme nahradiť ideálny filter. V našom prípade použijeme tvarovací člen nultého rádu. Tvarovací člen vytvára z Diracovho impulzu obdĺžnikový pulz jednotkovej šírky a výšky. Toto je rovné vzorkovacej perióde. Vzťah pre tvarovací člen nultého rádu je udaný prenosom:

$$G_{T0}(s) = \frac{1}{s} (1 - e^{-sT}).
 \tag{4.20}$$

Jeho frekvenčný prenos bude potom:

$$G_{T0}(j\omega) = \frac{1}{j\omega} (1 - e^{-j\omega T}) = T \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} e^{-j \frac{\omega T}{2}}.
 \tag{4.21}$$

Amplitúdová charakteristika je nenulová. Aj pre $\omega > \frac{\omega T}{2}$ bude jeho amplitúdová charakteristika tiež nenulová. Tvarovacie členy vyšších rádov získame z funkcie $f(t)$, jej rozvojom v radu. Ak platí:

$$t \in \langle kT, (k+1)T \rangle
 \tag{4.22}$$

potom:

$$f(t) = f(kT) + \dot{f}(t)|_{t=kT}(t - kT) + \ddot{f}(t)|_{t=kT}(t - kT)^2 + \dots \quad (4.23)$$

Derivácie $f(t)$ nahradíme diferenciami:

$$\dot{f}(t)|_{t=kT} \doteq \frac{1}{T} \Delta f(kT) = \frac{1}{T} (f(kT) - f((k-1)T)), \quad (4.24)$$

$$\ddot{f}(t)|_{t=kT} \doteq \frac{1}{T^2} \Delta^2 f(kT) = \frac{1}{T^2} (\Delta f(kT) - \Delta f((k-1)T)).$$

Odhadom pôvodnej funkcie $f(t)$ bude funkcia $f_0(t)$. Vzťah pre odhad funkcie bude:

$$f_0(t) = f(kT) + \frac{\Delta f(kT)}{T} (t - kT) + \frac{\Delta^2 f(kT)}{T^2} (t - kT)^2 + \dots \quad (4.25)$$

Impulzná modulácia funkcie $f(t)$ je vstup do tvarovacieho členu funkcie $f'(t)$:

$$f'(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - kT). \quad (4.26)$$

Ak teda chceme získať tvarovací člen nultého rádu použijeme len prvý člen rovnice (4.25). Ak zoberieme z rovnice (4.25) dva členy pravej strany dostaneme rovnicu tvarovacieho členu prvého rádu. A takto by sme mohli pokračovať ďalej.

4.2 Prevod LSDS na LDDS pri ekvidistantnom vzorkovaní

Za predpoklad si berieme to, že výstupné okamžiky merania sú ekvidistantné a určené vzťahom:

$$t = kT, \quad (4.27)$$

kde $k = 0, 1, 2, \dots$ je diskretný čas. Vstupná informácia má tiež diskretný charakter. Bude platiť:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(kT) = \text{konšt.} \quad \text{pre } kT \leq t < (k+1)T, \quad (4.28)$$

kde $\mathbf{u}(t)$ je riadiaca veličina. Stavová rovnica $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ v diskretných okamžikoch bude mať tvar:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}((k+1)T) = e^{\mathbf{A}T} \left[e^{\mathbf{A}kT} (\mathbf{x}(0) + \int_0^{kT} e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau) \right] + \\ + e^{\mathbf{A}(k+1)T} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (4.29)$$

Posledný člen rovnice upravíme substitúciou a úpravou získame riešenie stavovej rovnice v diskretnom časovom okamžiku:

$$\mathbf{x}((k+1)T) = e^{AT} \mathbf{x}(kT) + e^{AT} \int_0^T e^{-A\tau} \mathbf{B} d\tau \mathbf{u}(kT). \quad (4.30)$$

Zavedením matic $\mathbf{M} = e^{AT}$, $\mathbf{N} = e^{AT} \int_0^T e^{-A\tau} d\tau \mathbf{B}$ získáme řešení:

$$\mathbf{x}((k+1)T) = \mathbf{M}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{N}\mathbf{u}(kT). \quad (4.31)$$

Potom už ľahko výstupnú rovnicu $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$ prevedieme diskretizáciou do ekvivalentného diskrétného systému:

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{D}\mathbf{u}(kT). \quad (4.32)$$

Príklad v programe Matlab:

Máme matice:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -16 & -8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Períodu vzorkovania sme určili $T = 0,5$. Chceme nájsť z matic spojitého systému, matice diskrétného systému.

```
A=[0 3;-16 -8];
```

```
>> B=[0;1];
```

```
>> T=0.5;
```

```
>> [M,N]=c2d(A,B,T)
```

```
M =
```

```
   -0.0993   0.0221
```

```
   -0.1179  -0.1582
```

```
N =
```

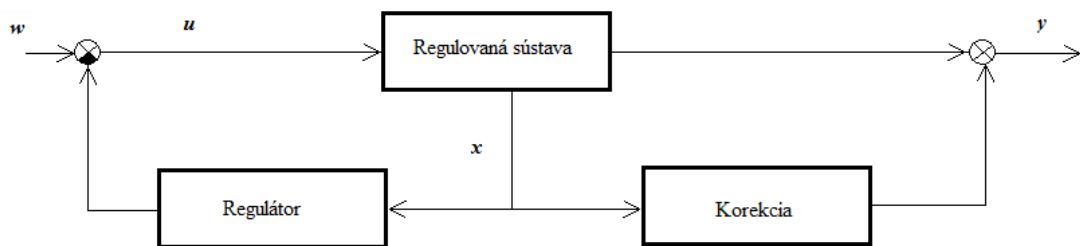
```
   0.0687
```

```
   0.0074
```

```
>>
```

5 STAVOVÉ RIADENIE

Budeme vychádzať zo stavového popisu. Za pomoci stavovej teórie budeme môcť riadiť aj systémy, u ktorých klasické konvenčné teórie nám nedajú uspokojivé výsledky. Na to, aby sme dostali požadovanú reguláciu v kvalitnej forme, môžeme použiť stavový regulátor vo spätnej väzbe. Cieľ regulácie berieme ako $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{w}$. Veľkosť výstupnej veličiny môže ovplyvniť korekcia výstupu.



Obr.10: Schéma regulačného obvodu so stavovým regulátorom

Máme stavovú regulovanú sústavu s prenosom:

$$G_R(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{j_{n-1}s^{n-1} + j_{n-2}s^{n-2} + j_{n-3}s^{n-3} + \dots + j_1s + j_0}{s^n + h_{n-1}s^{n-1} + h_{n-2}s^{n-2} + \dots + h_1s + h_0}, \quad (5.1)$$

pre ktorý je daný stavový model:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_R \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (5.2)$$

$$y(t) = \mathbf{C}_R \mathbf{x}(t),$$

kde:

$$\mathbf{A}_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ -h_0 & -h_1 & -h_2 & \dots & -h_{n-1} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

$$\mathbf{C}_R = [j_0 \quad j_1 \quad j_2 \quad \dots \quad j_{n-1}]. \quad (5.5)$$

Potrebuje nájsť maticu regulátora a maticu korekcie výstupu:

$$\mathbf{R} = [r_1 \quad r_2 \quad r_3 \quad \dots \quad r_n], \quad (5.6)$$

$$\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad \dots \quad k_n], \quad (5.7)$$

tieto matice nám zaistia prenos riadenia:

$$G_{WR}(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + b_{n-3}s^{n-3} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_1s + a_0}. \quad (5.8)$$

Tento prenos tiež rozložíme pomocou stavového modelu:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_{WR}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}w(t), \quad (5.9)$$

$$y(t) = \mathbf{C}_{WR}\mathbf{x}(t), \quad (5.10)$$

kde obsah jednotlivých matíc je:

$$\mathbf{A}_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Matica \mathbf{B} sa rovná rovnici (5.4)

$$\mathbf{C}_{WR} = [b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_{n-1}]. \quad (5.12)$$

Plnenie daného prenosu nám zabezpečí stavový model:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A}_R - \mathbf{B}\mathbf{R})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}w(t) \quad (5.13)$$

$$y(t) = (\mathbf{C}_R + \mathbf{K})\mathbf{x}(t). \quad (5.14)$$

Po porovnaní rovníc (5.9), (5.10), (5.13) a (5.14) získame:

$$\mathbf{A}_{WR} = \mathbf{A}_R - \mathbf{B}\mathbf{R} \quad (5.15)$$

$$\mathbf{C}_{WR} = \mathbf{C}_R + \mathbf{K}. \quad (5.16)$$

Postupné výsledky sú nasledovné:

$$\mathbf{B}\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ r_1 & r_2 & r_3 & \dots & r_n \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

Ďalej zapíšeme rovnice (5.15) a (5.16) ako:

$$A_{WR} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ -(c_0 + r_1) & -(c_1 + r_2) & -(c_2 + r_3) & \dots & -(c_{n-1} + r_n) \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

$$C_{WR} = [j_0 + k_1 \quad j_1 + k_2 \quad j_2 + k_3 \quad \dots \quad j_{n-1} + k_n] \quad (5.20)$$

Porovnaním jednotlivých A_{WR} dostaneme pre jednotlivé prvky matice R a samozrejme aj rovnako porovnaním vzťahov C_{WR} dostaneme jednotlivé prvky matice pre korekciu K . Takže jednotlivé prvky sú nasledovné:

$$r_i = a_{i-1} - h_{i-1}, \quad (5.21)$$

$$k_i = b_{i-1} - j_{i-1}, \quad (5.22)$$

pre $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Činnosť stavového regulátora závisí na tom, že posunie póly regulovanej sústavy do žiadanej polohy, definujúcu žiadané korene menovateľa prenosu riadenia.

Příklad v programe Matlab:

Navrhните diskretný stavový regulátor pre sústavu tvorenú uchyteným vozíkom pripojeným na pružné lano a s tlmičom. Sústava je daná spojitou sústavou rovníc:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -7 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,03 \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \quad 0], \quad D = [0].$$

Periódou vzorkovania voľte $T = 0,3$.

```
>> A=[0 1;-7 -2];
```

```
>> B=[0;0.03];
```

```
>> C=[1 0];
```

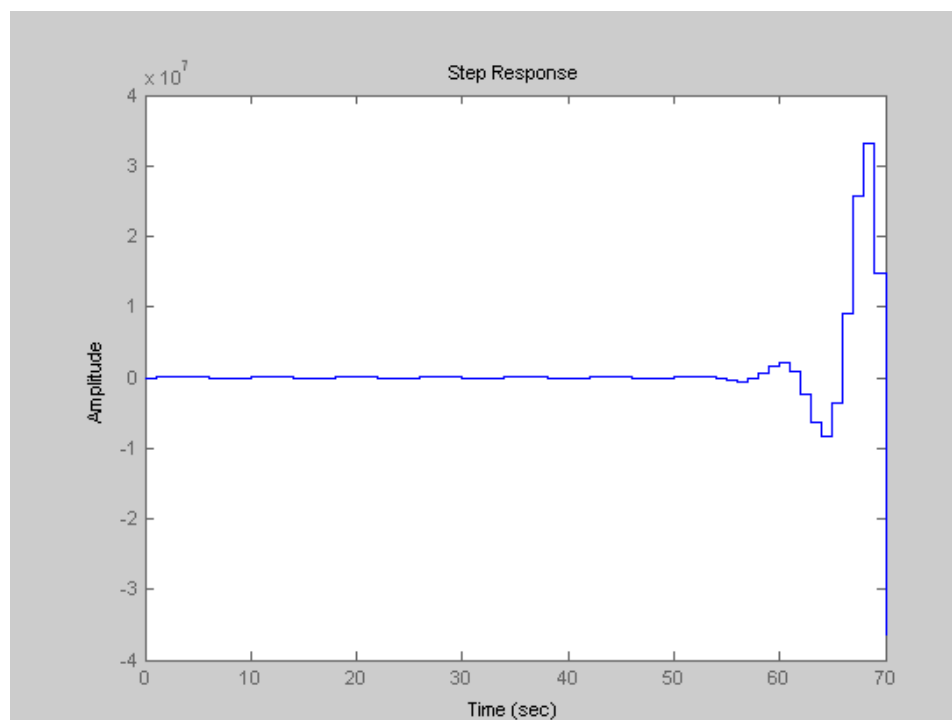
```
>> D=[0];
```

```
>> eig(A)           %vlastné čísla
```

```
ans =
```

```
-1.0000 + 2.4495i
```

```
-1.0000 - 2.4495i
>> T=0.3;
>> [M,N]=c2d(A,B,T)
M =
    0.7524    0.2028
   -1.4194    0.3469
N =
    0.0011
    0.0061
>> cp=[1+1j 1-1j]; %vol'ba pólov
>> K=place(M,N,cp) %spätnoväzobná matica
K =
   285.7203  -197.9021
>> dstep((M-N*K),N,C,D,1,70)
>>
```



Obr.11: Priebeh regulátora

5.1 Diskrétny regulátor typu Dead-beat

Ak budeme žiadať pri návrhu diskretných regulátorov, aby regulovaný stav riadeného systému v konečnom čase o konečnom počte krokov n násobených vzorkovacou periódou mal žiadané hodnoty využijeme v tomto prípade návrh regulátora s konečným počtom krokov Dead-Beat. Je to vlastne regulátor pre riadenie skokovej odozvy s konečným počtom krokov.

V danom prípade bude Z -obraz konečný polynóm. Daný návrh môže mať dve verzie. Jednu silnú, pri ktorej musí byť Z -obraz hodnôt akčných zásahov tiež konečným polynómom. Pri slabej verzii bude v okamžikoch vzorkovania a len v týchto okamžikoch regulačná odchýlka nulová. To znamená, že u silnej verzie bude regulačná odchýlka nulová aj mimo okamžiky vzorkovania. Rovnica pre regulátor je nasledovná:

$$G_{Rdb}(z) = \left(\frac{1}{G_s(z)} \right) \left(\frac{z^{-k}}{1-z^{-k}} \right) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \dots + q_{k_{min}} z^{-k_{min}}}{1 - (p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \dots + p_{k_{min}} z^{-k_{min}})} \quad (5.23)$$

Parametre regulátora budú pomocou odvodenia nasledovné:

$$q_0 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{k_{min}} b_i} = \frac{1}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{k_{min}}} \quad (5.24)$$

$$q_1 = a_1 q_0$$

$$q_2 = a_2 q_0$$

$$q_3 = a_3 q_0$$

$$\vdots$$

$$q_{k_{min}} = a_{k_{min}} q_0$$

Ďalšie parametre sú:

$$p_1 = b_1 q_0 \quad (5.25)$$

$$p_2 = b_2 q_0$$

$$p_3 = b_3 q_0$$

$$\vdots$$

$$p_{k_{min}} = b_{k_{min}} q_0$$

Prvá hodnota je najväčšia hodnota riadiaceho zásahu. Aby boli zabezpečené podmienky realizovateľnosti, jej hodnotu zmenšíme výpočtom (regulátor s obmedzením). Použijeme rovnicu:

$$G_{Rdb}(z) = \frac{Q(z)}{1-P(z)} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \dots + q_{k_{min}} z^{-k_{min}}}{1 - (p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \dots + p_{k_{min}} z^{-k_{min}})} \quad (5.26)$$

Regulátor bude mať nasledujúce parametre:-----

$$q_0 = u(0) = 1 \quad (5.27)$$

$$q_1 = (a_1 - 1)q_0 + \frac{1}{\sum b_i} \quad .$$

$$q_2 = (a_2 - a_1)q_0 + a_1 \frac{1}{\sum b_i} \quad .$$

$$q_3 = a_2 \left(-q_0 + \frac{1}{\sum b_i} \right) \quad .$$

⋮

$$p_1 = b_1 q_0 \quad (5.28)$$

$$p_2 = q_0 (b_2 - b_1) + b_1 \frac{1}{\sum b_i} \quad .$$

$$p_3 = -b_2 \left(q_0 - \frac{1}{\sum b_i} \right) \quad .$$

5.2 Ackermanova formula pre spojité riadenie

Pre výpočet Ackermanovho vzorca použijeme stavovú maticu \mathbf{K} . Túto maticu budeme počítať s prihliadnutím k systému $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$, kde používame stavové riadenie $u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$. Budeme predpokladať, že tento systém je kompletne riaditeľný. Ďalej sa domnievame, že póly požadovanej uzatvorenej slučky sú: $s = \mu_1, s = \mu_2, \dots, s = \mu_n$.

Ak systém nie je úplne riaditeľný, potom maticu \mathbf{K} nie je možné určiť. (Neexistuje riešenie.) Použijeme kontrolu stavovej spätnej väzby:

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x}, \quad (5.29)$$

upravuje rovnicu systému:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}. \quad (5.30)$$

Označíme:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}. \quad (5.31)$$

Požadovaná charakteristická rovnica potom bude:

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}| = |s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}| = (s - \mu_1)(s - \mu_2) \dots (s - \mu_n) = \quad (5.32)$$

$$s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n = 0.$$

Podľa Cayley-Hamiltonovej vety vieme, že $\tilde{\mathbf{A}}$ spĺňa svoju charakteristickú rovnicu vtedy:

$$\phi(\tilde{\mathbf{A}}) = \tilde{\mathbf{A}}^n + \alpha_1 \tilde{\mathbf{A}}^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} \tilde{\mathbf{A}} + \alpha_n \mathbf{I} = 0. \quad (5.33)$$

Budeme používať rovnicu (5.33) k odvodeniu Ackermannovho vzorca. Pre zjednodušenie odvodenia budeme uvažovať o prípade, keď $n=3$. Odvodenie môžeme ľahšie rozšíriť na prípad iného kladného čísla n . Zvážime nasledujúce:

$$\mathbf{I} = \mathbf{I} \quad (5.34)$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{BK}$$

$$\tilde{\mathbf{A}}^2 = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})^2 = \mathbf{A}^2 - \mathbf{ABK} - \mathbf{BK}\tilde{\mathbf{A}}$$

$$\tilde{\mathbf{A}}^3 = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})^3 = \mathbf{A}^3 - \mathbf{A}^2\mathbf{BK} - \mathbf{ABK}\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{BK}\tilde{\mathbf{A}}^2.$$

Vynásobením predchádzajúcich rovníc, v poradí podľa $\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_0$, kde $\alpha_0 = 1$, potom sčítaním výsledkov dostaneme:

$$\begin{aligned} & \alpha_3 \mathbf{I} + \alpha_2 \tilde{\mathbf{A}} + \alpha_1 \tilde{\mathbf{A}}^2 + \tilde{\mathbf{A}}^3 = \quad (5.35) \\ & = \alpha_3 \mathbf{I} + \alpha_2 (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) + \alpha_1 (\mathbf{A}^2 - \mathbf{ABK} - \mathbf{BK}\tilde{\mathbf{A}}) + \mathbf{A}^3 - \mathbf{A}^2\mathbf{BK} - \mathbf{ABK}\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{BK}\tilde{\mathbf{A}}^2 = \\ & = \alpha_3 \mathbf{I} + \alpha_2 \mathbf{A} + \alpha_1 \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 - \alpha_2 \mathbf{BK} - \alpha_1 \mathbf{ABK} - \alpha_1 \mathbf{BK}\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A}^2\mathbf{BK} - \mathbf{ABK}\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{BK}\tilde{\mathbf{A}}^2. \end{aligned}$$

Z odkazom na rovnicu (5.33), musíme:

$$\alpha_3 \mathbf{I} + \alpha_2 \tilde{\mathbf{A}} + \alpha_1 \tilde{\mathbf{A}}^2 + \tilde{\mathbf{A}}^3 = \phi(\tilde{\mathbf{A}}) = 0 \quad (5.36)$$

tiež:

$$\alpha_3 \mathbf{I} + \alpha_2 \mathbf{A} + \alpha_1 \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 = \phi(\mathbf{A}) \neq 0 \quad (5.37)$$

Rovnicu (5.36) a rovnice (5.37) do rovnice (5.35) dostaneme:

$$\phi(\tilde{\mathbf{A}}) = \phi(\mathbf{A}) - \alpha_2 \mathbf{BK} - \alpha_1 \mathbf{BK}\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{BK}\tilde{\mathbf{A}}^2 - \alpha_1 \mathbf{ABK} - \mathbf{ABK}\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A}^2\mathbf{BK} \quad (5.38)$$

Od $\phi(\tilde{\mathbf{A}}) = 0$, dostaneme:

$$\phi(\tilde{\mathbf{A}}) = \mathbf{B}(\alpha_2 \mathbf{K} + \alpha_1 \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}}^2) + \mathbf{AB}(\alpha_1 \mathbf{K} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}}) + \mathbf{A}^2 \mathbf{BK} = \quad (5.39)$$

$$= [\mathbf{B}|\mathbf{AB}|A^2\mathbf{B}] \begin{bmatrix} \alpha_2\mathbf{K} + \alpha_1\mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}}^2 \\ \alpha_1\mathbf{K} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix}.$$

Pretože je systém úplne riaditeľný, inverzná matica k riaditeľnosti k matici $[\mathbf{B}|\mathbf{AB}|A^2\mathbf{B}]$ existuje. Obe strany rovnice (5.39) upravíme podľa riaditeľnej matice dostaneme:

$$[\mathbf{B}|\mathbf{AB}|A^2\mathbf{B}]^{-1}\phi(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \alpha_2\mathbf{K} + \alpha_1\mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}}^2 \\ \alpha_1\mathbf{K} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

Upravíme obe strany poslednej rovnice podľa $[0 \ 0 \ 1]$, dostaneme:

$$[0 \ 0 \ 1][\mathbf{B}|\mathbf{AB}|A^2\mathbf{B}]^{-1}\phi(\mathbf{A}) = [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} \alpha_2\mathbf{K} + \alpha_1\mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}}^2 \\ \alpha_1\mathbf{K} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix} = \mathbf{K}, \quad (5.41)$$

ktorá môže byť prepísaná ako:

$$\mathbf{K} = [0 \ 0 \ 1][\mathbf{B}|\mathbf{AB}|A^2\mathbf{B}]^{-1}\phi(\mathbf{A}). \quad (5.42)$$

Touto poslednou rovnicou získame požadovanú stavovú rovnicu \mathbf{K} . Pre ľubovoľné kladné celé číslo n , máme:

$$\mathbf{K} = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1][\mathbf{B}|\mathbf{AB}|\dots|A^{n-1}\mathbf{B}]^{-1}\phi(\mathbf{A}) \quad (5.43)$$

Rovnicu (5.43) poznáme ako Ackermannovu rovnicu pre stanovenie stavovej matice \mathbf{K} .

Príklad v programe Matlab:

Vypočítajte stavovú maticu \mathbf{K} podľa Ackermannovho vzorca pre systém popísaný maticami:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -10 & -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

```
>> A=[0 1 0;0 0 1;-5 -10 -5];
```

```
>> B=[0;0;1];
```

```
>> J=[-1.5+1.5*j*sqrt(3) -1.5-1.5*j*sqrt(3) -5];
```

```
>> K=acker(A,B,J)
```

K = 40 14 3

>>

ZÁVER

V súčasnosti sa prejavuje veľký záujem o túto tému. Jedným z dôvodov je rýchlo sa rozvíjajúci priemysel. Bolo by potrebné, aby sa stavovej teórii lineárneho riadenia začali viac venovať v školách.

Práca je zameraná na podrobnejšie preskúmanie stavovej teórie lineárnych dynamických systémov. Mohla by sa použiť ako doplnujúci materiál pri štúdiu. Téma bola postupne rozdelená do jednotlivých skupín. Napríklad sme sa venovali zvlášť na SISO systémy. Čo obsahovalo obraz stavového popisu spojitého dynamického systému alebo stavový popis diskretného lineárneho systému. Kapitoly sme venovali aj vzorkovacej perióde, ktorá je dôležitá pri diskretných lineárnych systémoch. Takto sme pokračovali aj s rozdelením MIMO systémov. Určitá časť bola venovaná vlastnostiam systému. Konkrétne to boli: realizovateľnosť a pozorovateľnosť. Pri stavovej teórii je dôležitý aj prevod zo spojitého lineárneho dynamického systému na diskretný lineárny dynamický systém.

Práca nie je rozdelená na teoretickú a praktickú časť. Praktické príklady boli vložené za určitý teoretický celok, aby sa nám v dokumente ľahšie orientovalo. Teoretické celky boli venované stavovej teórii lineárnych dynamických systémov. Bližšie sme sa pozreli na SISO systémy a MIMO systémy, stavové rovnice spojitých a diskretných systémov. V práci sa nachádzajú riešenia ukázkových príkladov, poprípade ich riešenie v programe Matlab. Toto riešenie nájdeme aj v prílohe tejto práce.

ZÁVER V ANGLIČTINE

Currently, takes a keen interest in this topic. One reason is the fast growing industry. It would be necessary that the status linear control theory became more in schools.

The work is aimed to further examine the status of theory of linear dynamical systems. Could be used as additional material for study. The topic has been gradually divided into different groups. For example, we pay extra for SISO systems. Which contained the image of a continuous state space of the dynamic system state description or discrete linear system. Section were also given sampling period, which is important for discrete linear systems. Thus, we continued with the distribution of MIMO systems. Some of the features of the system was given. Specifically, these were: feasibility and observability. In theory, the status is also important transfer of continuous linear dynamic system for discrete linear dynamic system.

The work is divided into theoretical and practical parts. Practical examples were embedded in a theoretical unit to us in the document easier to consult. Theoretical units were devoted to the status theory of linear dynamical systems. Further we looked at SISO systems and MIMO systems, the equation of state of continuous and discrete systems. The work is a prime example of solutions, possibly address them in the program Matlab. This solution can also be found in the Annex to this work.

ZOZNAM POUŽITEJ LITERATURY

- [1] BALÁTĚ, Jaroslav. Vybrané statě z automatického řízení. Vyd. 2. V Brně: VUT, 1996, 359 s. ISBN 80-214-0793-X.
- [2] Dostál, P., Matušů, R.: Stavová a algebraická teorie řízení. Zlín: FAI UTB, 2010, 90 s. ISBN 978-80-7318-991-4.
- [3] Jakuba P.: Porovnání robustnosti dead-beat a Dahlinova regulátoru, Bakalářská práce. FAI UTB ve Zlíně, 2010, 77 s. Dostupné z WWW: https://dspace.k.utb.cz/bitstream/handle/10563/13121/jakuba_2010_bp.pdf?sequence=1
- [4] Kučera V.: Analysis and Design of Discrete Linear Control. Prague: Academia, 1991, 472 s. ISBN 80-200-0252-9.
- [5] Melichar, J.: Lineární systémy I.,II. skripta KK FAV ZČU Plzeň. 2007.
- [6] Mikleš, J., Fikar, M.: Modelovanie, identifikácia a riadenie procesov I, II. STU Bratislava. 2008. ISBN 80-227-1177-2.
- [7] Navrátil, P.: Popis systémů ve stavovém prostoru. El. skripta FAI UTB ve Zlíně, 2010.
- [8] Ogata, K.: MATLAB for Control Engineers. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 2008. ISBN 978-013-6150-770.
- [9] Ogata, K.: Modern Control Engineering. 4th ed. Upper Saddle River,NJ: Prentice-Hall, 2002, xi, 964 s. ISBN 01-306-0907-2.
- [10] [online].[cit.2013-06-06],
<http://books.fs.vsb.cz/cislicovaregulace/data/kapitola2.html>
- [11] Skalický, J.: Teorie řízení. Brno: VUT FEKT, 2002, 98 s. ISBN 80-214-2112-6.
- [12] Strejc, V.: Stavová teorie lineárního diskrétního řízení. Academia. Praha. 1978.
- [13] Štecha, J., Havlena, V.: Teorie dynamických systémů. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2005, 248 s. ISBN 80-010-1971-3..

ZOZNAM POUŽITÝCH SYMBOLOV A SKRATIEK

A	Matica systému (spojitý systém)
a_i	Koeficienty ľavej strany lineárnej diferenciálnej a diferenčnej rovnice
B	Matica budenia (spojitý systém)
b_i	Koeficienty pravej strany lineárnej diferenciálnej a diferenčnej rovnice
C	Výstupná matica
c_k	Koeficient komplexnej Fourierovej rady
D	Prevodná matica
F	Všeobecná funkcia
G	Prenosová funkcia
$G(s)$	Obrazový L-prenos
$G(z)$	Diskrétny Z-prenos
kT	Diskrétny čas
L	L-transformácia
L^{-1}	Spätná L-transformácia
m	Stupeň čitateľa prenosu
M	Stavová matica (diskrétny systém)
n	Stupeň menovateľa prenosu
N	Stavová matica (diskrétny systém)
t	Čas
T	Periódna vzorkovania
u	Akčná veličina
v	Porucha
w	Žiadaná veličina
X	Vstupná veličina

- y Výstupná veličina
- z Nezávisle premenná u Z-transformácie
- $\delta(t)$ Spojitý Diracov impulz
- $\delta(kT)$ Diskrétny Diracov impulz

ZOZNAM OBRÁZKOV

Obr.1: SISO systém

Obr.2: MIMO systém

Obr.3: Spojitý signál

Obr.4: Diskrétny signál

Obr.5: Dosiahnuteľnosť stavu systému

Obr.6: Riaditeľnosť stavu systému

Obr.7: Pozorovateľ stavu systému

Obr.8: Pozorovateľ stavu systému v spätnej väzbe

Obr.9: Vzorkovanie funkcie vstupného spojitého signálu

Obr.10: Schéma regulačného obvodu so stavovým regulátorom

Obr.11: Priebeh regulátora

ZOZNAM TABULIEK

ZOZNAM PRÍLOH

Príloha 1: Ukázkové príklady v programe Matlab

PRÍLOHA P I: NÁZOV PRÍLOHY