

Stabilita systémů

Bc. Tomáš Gromus

Diplomová práce
2014



Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Bc. Tomáš Gromus**
Osobní číslo: **A12400**
Studijní program: **N3902 Inženýrská informatika**
Studijní obor: **Automatické řízení a informatika**
Forma studia: **prezenční**

Téma práce: **Stabilita systémů**

Zásady pro vypracování:

1. Vypracujte literární rešerši na dané téma.
2. Uveďte a vysvětlete základní definice stability.
3. Uveďte běžné způsoby testování stability pro různé typy systémů a popisů i s ukázkovými příklady.
4. Vysvětlete stručně také související pojmy, jako je relativní míra stability a robustní stabilita, uveďte, jakým způsobem lze stabilizovat nestabilní systém.
5. Řešte problém stabilizace vybraných nestabilních systémů a ověřte simulačními prostředky.
6. Otestujte alespoň jeden přístup využitý v předešlém bodu experimentálně na zvoleném reálném modelu z laboratoří Ústavu řízení procesů.

Rozsah diplomové práce:

Rozsah příloh:

Forma zpracování diplomové práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

1. **DOSTÁL, Petr a František GAZDOŠ. Řízení technologických procesů. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně. Fakulta aplikované informatiky, 2006. ISBN 80-7318-465-6.**
2. **BALÁTĚ, Jaroslav. Automatické řízení. Praha: BEN – technická literatura, 2004. ISBN 80-7300-148-9.**
3. **DOSTÁL, Petr; MATUŠŮ, Radek. Stavová a algebraická teorie řízení. Zlín: UTB ve Zlíně, Fakulta aplikované informatiky, 2010. ISBN 978-80-7318-991-4.**
4. **ŠTECHA, Jan; HAVLENA, Vladimír. Teorie dynamických systémů. Praha: ČVUT, FEL, 2002. ISBN 80-01-01971-3.**
5. **HAVLENA, Vladimír a Jan ŠTECHA. Moderní teorie řízení. Praha: ČVUT, 1996. ISBN 8001010767.**
6. **PADMA SREE, R.; CHIDAMBARAM, M. Control of unstable systems. Oxford: Alpha Science, 2006. ISBN 1-84265-287-7.**

Vedoucí diplomové práce:

doc. Ing. František Gazdoš, Ph.D.

Ústav řízení procesů

Datum zadání diplomové práce:

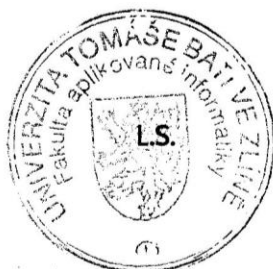
7. března 2014


Termín odevzdání diplomové práce:

11. června 2014

Ve Zlíně dne 7. března 2014


prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.
děkan




prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.
ředitel ústavu

Prohlašuji, že

- beru na vědomí, že odevzdáním diplomové/bakalářské práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb. o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších právních předpisů, bez ohledu na výsledek obhajoby;
- beru na vědomí, že diplomová/bakalářská práce bude uložena v elektronické podobě v univerzitním informačním systému dostupná k prezenčnímu nahlédnutí, že jeden výtisk diplomové/bakalářské práce bude uložen v příruční knihovně Fakulty aplikované informatiky Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně a jeden výtisk bude uložen u vedoucího práce;
- byl/a jsem seznámen/a s tím, že na moji diplomovou/bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších právních předpisů, zejm. § 35 odst. 3;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 1 autorského zákona má UTB ve Zlíně právo na uzavření licenční smlouvy o užití školního díla v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 2 a 3 autorského zákona mohu užít své dílo – diplomovou/bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití jen s předchozím písemným souhlasem Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše);
- beru na vědomí, že pokud bylo k vypracování diplomové/bakalářské práce využito softwaru poskytnutého Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně nebo jinými subjekty pouze ke studijním a výzkumným účelům (tedy pouze k nekomerčnímu využití), nelze výsledky diplomové/bakalářské práce využít ke komerčním účelům;
- beru na vědomí, že pokud je výstupem diplomové/bakalářské práce jakýkoliv softwarový produkt, považují se za součást práce rovněž i zdrojové kódy, popř. soubory, ze kterých se projekt skládá. Neodevzdání této součásti může být důvodem k neobhájení práce.

Prohlašuji,

- že jsem na diplomové práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval. V případě publikace výsledků budu uveden jako spoluautor.
- že odevzdaná verze diplomové práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG jsou totožné.

Ve Zlíně

.....
podpis diplomanta

ABSTRAKT

Diplomová práce se zabývá stabilitou různých systémů. Jsou zde popsány definice Ljapunovy stability a BIBO stability a ukázány odezvy různých druhů systémů na jednotkový skok. Dále popisuje testování stability pomocí různých kritérií stability, kde ke každému kritériu jsou ukázkové příklady. Také jsou zde popsány základních vlastnosti systému, stabilizace nestabilních systémů, robustní stabilita a míra stability. Ke stabilizaci systémů jsou vypracovány simulace a také řízení reálného modelu magnetické levitace.

Klíčová slova: Stabilita systému, testování stability, kritéria stability, stabilizace, příklady, simulace, magnetická levitace, MATLAB.

ABSTRACT

This thesis covers stability of different systems. It describes definitions of Ljapunov stability and BIBO stability and shows various systems respond to unit step function. Thesis also includes stability testing using different criteria where each has an example. Basic system properties, stabilization of unstable system, robust stability and the degree of stability are also mentioned. System stabilization includes simulations and control of realistic model of magnetic levitation.

Keywords: System stability, stability testing, stability criteria, stabilization, examples, simulations, magnetic levitation, MATLAB.

Tímto bych rád poděkoval mému vedoucímu práce, kterým je pan doc. Ing. František Gazdoš, Ph.D. za trpělivost, odborné vedení, hodnotné rady a připomínky a hlavně za veškerý čas mě věnovaný.

Prohlašuji, že odevzdaná verze diplomové práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG jsou totožné.

OBSAH

ÚVOD	9
I TEORETICKÁ ČÁST	10
1 STABILITA OBECNĚ	11
1.1 LJAPUNOVSKÁ STABILITA	12
1.2 BIBO STABILITA.....	13
2 TESTOVÁNÍ STABILITY SYSTÉMU	15
2.1 STAVOVÝ POPIS	15
2.2 SPOJITÝ A DISKRÉTNÍ SYSTÉM.....	16
2.3 KRITÉRIA STABILITY SPOJITÝCH SYSTÉMŮ	17
2.3.1 Routh-Shurovo kritérium	18
2.3.2 Hurwitzovo kritérium.....	20
2.3.3 Michailovovo-Leonhardovo kritérium	21
2.3.4 Nyquistovo kritérium	24
2.4 KRITÉRIA STABILITY DISKRÉTNÍCH SYSTÉMŮ.....	26
2.4.1 Kritérium postupné redukce	27
2.4.2 Nekolného kritérium	30
3 ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI SYSTÉMU	32
3.1 DOSAŽITELNOST A ŘIDITELNOST.....	32
3.1.1 Dosažitelnost stavu.....	32
3.1.2 Řiditelnost stavu.....	33
3.1.3 Řiditelnost výstupu.....	34
3.2 POZOROVATELNOST A REKONSTRUOVATELNOST	34
3.2.1 Pozorovatelnost stavu.....	34
3.2.2 Rekonstruovatelnost stavu	35
4 STABILIZACE NESTABILNÍHO SYSTÉMU	37
4.1 STAVOVÝ POPIS	37
4.2 POLYNOMIÁLNÍ PŘÍSTUP	38
4.2.1 Konfigurace řízení s jedním stupněm volnosti - 1DOF.....	39
4.2.2 Konfigurace řízení se dvěma stupni volnosti – 2DOF	41
5 ROBUSTNÍ STABILITA	44
6 MÍRA STABILITY	45
6.1 RELATIVNÍ TLUMENÍ.....	45
6.2 STUPEŇ STABILITY.....	45
6.3 AMPLITUDOVÁ A FÁZOVÁ BEZPEČNOST	46
II PRAKTICKÁ ČÁST	48
7 PROSTŘEDÍ MATLAB	49

7.1	SIMULINK	50
8	STABILIZACE NESTABILNÍCH SYSTÉMŮ.....	51
8.1	MODEL MAGNETICKÉ LEVITACE CE152	51
8.1.1	Linearizace systému	52
8.1.2	Návrh regulátoru polynomiální metodou 1DOF	54
8.1.3	Návrh regulátoru polynomiální metodou 2DOF	55
8.1.4	Návrh schémat regulátorů 1DOF a 2DOF pro matematický a reálný model.....	57
8.1.5	Výsledné grafické průběhy.....	58
8.1.5.1	Grafický průběh při použití 1DOF regulátoru	58
8.1.5.2	Grafický průběh při použití 2DOF regulátoru	60
8.2	SIMULACE STABILIZACE VE STAVOVÉM PROSTORU	61
8.3	SIMULACE STABILIZACE POMOCÍ LJAPUNOVY METODY	64
	ZÁVĚR	68
	SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY.....	69
	SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK	70
	SEZNAM OBRÁZKŮ	71
	SEZNAM TABULEK.....	73
	SEZNAM PŘÍLOH.....	74

ÚVOD

Stabilita systému je jedna z nejdůležitějších vlastností systému. Určuje schopnost systému vrátit se po vychýlení zpět do ustáleného stavu. Proto je důležité umět určit jestli je systém stabilní. Stabilitu můžeme určit například vypočítáním pólů systému. U systémů vyšších řádů je ale velmi obtížné bez výpočetního softwaru tyto póly získat. Proto se pro zjištění stability používá mnoho různých kritérií.

Tato práce se v druhé kapitole zabývá testováním stability pomocí těchto kritérií. Pro spojitý systém jsou popsány dva příklady algebraických kritérií a dva příklady geometrických kritérií. Pro diskrétní systémy je popsána bilineární transformace pro převod diskrétní stabilní oblasti z jednotkové kružnice na zápornou polorovinu, aby se mohli použít kritéria pro spojitě systémy. Navíc jsou uvedeny dvě metody přímo pro diskrétní systémy. Vždy je také uveden alespoň jeden nebo dva příklady.

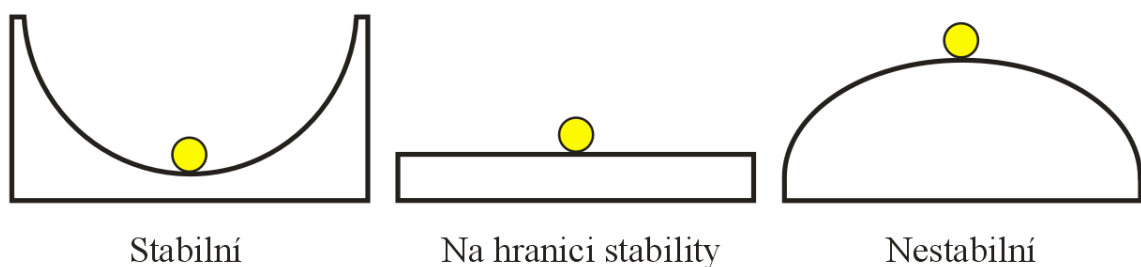
Dále se práce zaměřuje na stabilizaci nestabilních systémů. O tomto tématu pojednává kapitola čtyři, kde jsou uvedeny postupy jak stabilizovat systém. Je zde postup pro systémy popsané stavovým popisem, ale také postupy pro systémy popsané přenosem. Tyto postupy jsou následně ověřeny buď simulačně, nebo simulačně a na reálném modelu. Pro polynomiální přístupy 1DOF a 2DOF byly vytvořeny simulační obvody magnetické levitace v programovacím prostředí MATLAB - Simulink a navržené regulátory pro simulaci se testovali na reálném modelu magnetické levitace. Další simulace jsou pro stabilizaci ve stavovém prostoru a stabilizaci pomocí Ljapunovy metody.

V odstavcích pět a šest jsou stručně vysvětleny související pojmy robustní stabilita a míra stability.

I. TEORETICKÁ ČÁST

1 STABILITA OBECNĚ

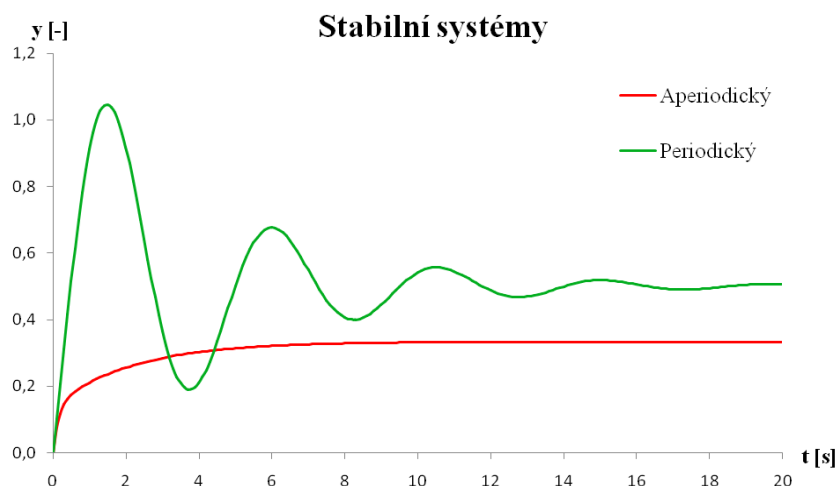
Stabilita systému je schopnost vrátit se do ustáleného stavu, pokud na vstup přivedeme nějaký signál nebo na systém zapůsobí nějaká porucha. Tato schopnost je v automatizaci, ale také v jiných odvětvích, velice důležitá. Pokud není systém stabilní, ve většině standardních případů by se nedal použít, jelikož by nebylo možné dosáhnout požadovaného výsledku. Existují tři způsoby dělení systémů dle stability, a to stabilní, nestabilní a na hranici stability. Výstižným příkladem je chování míčku v gravitačním poli, které je znázorněno v obrázku (Obr. 1). [2], [4], [7]



Obrázek 1: Ukázka stability na chování míčku v gravitačním poli

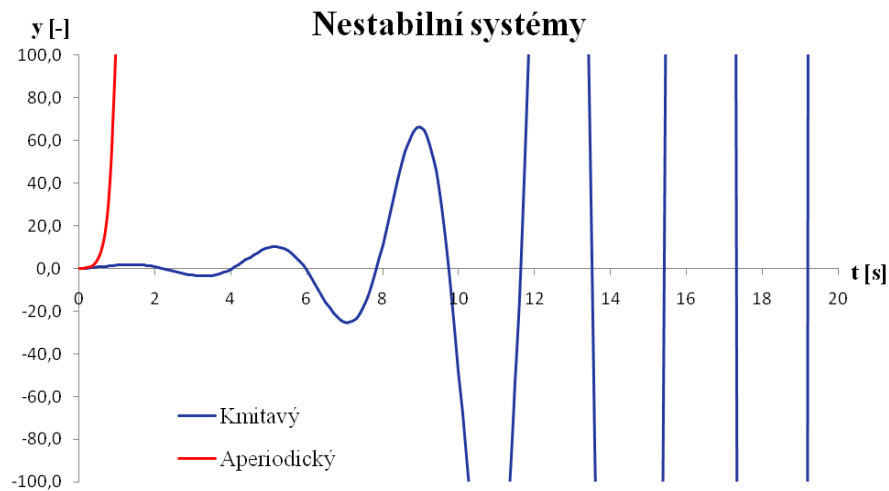
V levé části obrázku (Obr. 1) se kulička po vychýlení z původního klidového stavu vrátí vždy do stejného klidového stavu. To znamená, že tento systém je stabilní. Uprostřed obrázku se kulička po vychýlení může zastavit v jiném klidovém stavu nebo spadnout. Tento systém je na hranici stability. V pravé části obrázku kulička po vychýlení spadne a proto je systém nestabilní.

Příklady odezvy na jednotkový skok různých stabilních systémů je na obrázku (Obr. 2).

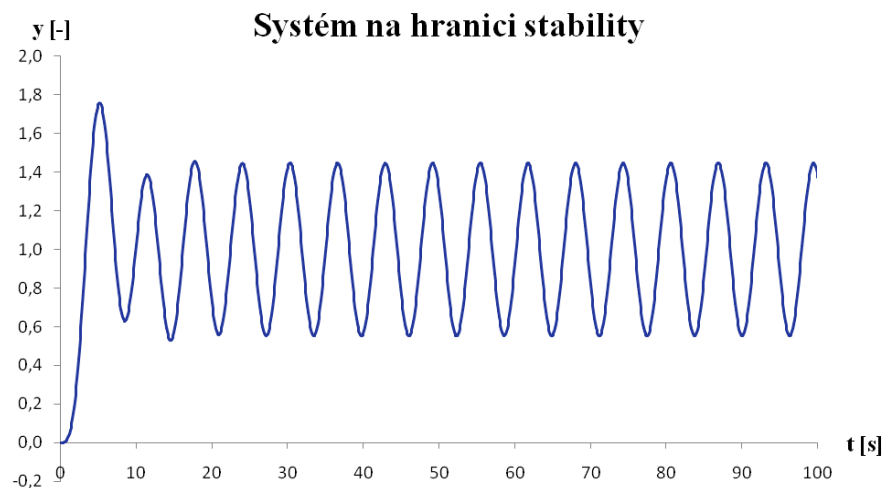


Obrázek 2: Odezva stabilních systémů na jednotkový skok

Následují ukázky odezvy na jednotkový skok u nestabilních systémů (Obr. 3) a systému na hranici stability (Obr. 4).



Obrázek 3: Odezva nestabilního systému na jednotkový skok



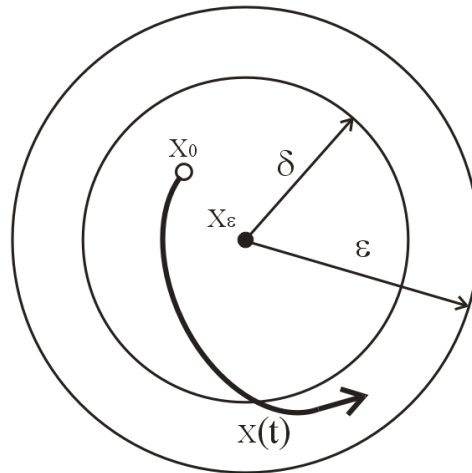
Obrázek 4: Odezva systému na hranici stability na jednotkový skok

Existuje mnoho definic stability, které se liší podle typu testované soustavy. V současné době se nejvíce používají dvě definice, a to Ljapunovská stabilita a BIBO stabilita.

1.1 Ljapunovská stabilita

U Ljapunovské stability definujeme stabilitu stavů systému. Ljapunovsky stabilní je rovnovážný stav x_e pouze tehdy, když ke všem $\varepsilon > 0$ existují $\delta > 0$ takové, že pro jakýkoliv počáteční stav x_0 ležící v okolí rovnovážného stavu platí, že všechny stavy $x(t)$

leží v blízkosti rovnovážného stavu. Lajpunovská stabilita tedy nepožaduje, aby $x(t)$ konvergovalo do rovnovážného stavu. Stačí pouze, aby se od rovnovážného bodu příliš nevzdalovalo. Tato definice je znázorněna na obrázku (Obr. 5).



Obrázek 5: Ljapunovská stabilita

Definovali jsme stabilitu vnitřních stavů, ale může se vyskytnout situace, že nestabilní stav se vůbec na výstupu neprojeví. Takže systém bude na výstupu stabilní, i když nemá stabilní stav. Bude-li systém pozorovatelný, stabilita stavu a stabilita výstupu budou totožné.

U lineárního systému je řešení stability jednoduché. Stačí pouze, když bude rovnovážný stav $x_e = 0$ stabilní. Pokud je tato podmínka splněna, tak můžeme říct, že celý systém je stabilní.

U nelineárního systému je určení stability obtížnější, protože pro některé počáteční podmínky bude systém stabilní a pro jiné bude zase nestabilní. Tyto systémy se popisují diferenciálními rovnicemi. Většinou obsahuje několik lineárních členů a jeden nebo více nelineárních členů. V tomto případě můžeme stabilitu řešit například převedením na lineární systém. Leniarizaci provádíme kolem zvoleného pracovního bodu. Poté by jsme se ale měli pohybovat v okolí tohoto pracovního bodu. Dalším řešením je převedení na Ljapunovovu funkci. [4]

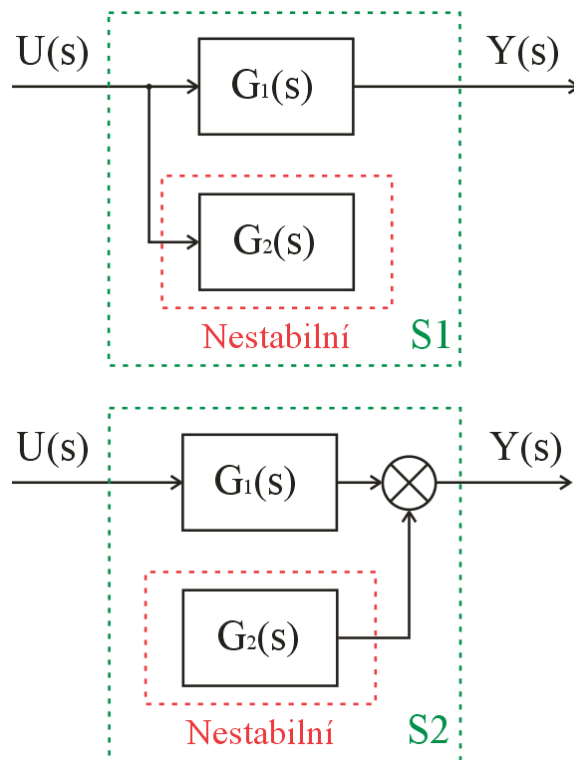
1.2 BIBO stabilita

Tento typ stability je zaměřen na vnější chování systému. BIBO stabilita anglicky znamená Bounded Input-Bounded Output. Po překladu z angličtiny dostaneme omezený

vstup-omezený výstup. To znamená, že odezva na každý omezený vstupní signál je také omezená. Tím pádem musí systém nabývat konečných hodnot na celém časovém intervalu $t \in < 0, \infty$). Toto pravidlo je možno ověřit na impulsní charakteristice systému. Na vstup pošleme jednotkový impuls, a tím získáme impulsní charakteristiku. Pokud bude absolutní integrál této charakteristika menší než nekonečno, systém bude BIBO stabilní. [4]

Dalším možným způsobem ověření stability je výpočet pólů, které musí ležet ve stabilní oblasti Gaussovy roviny. O tomto tématu pojednává odstavec 2.2.

Existují BIBO stabilní systémy, které mají uvnitř nestabilní část. Mohou nastat dvě varianty. Schéma těchto systémů je na obrázku (Obr. 6).



Obrázek 6: BIBO stabilní systémy s vnitřní nestabilitou

Systémy jsou složeny ze subsystémů $G_1(s)$ a $G_2(s)$. Subsystém $G_1(s)$ je stabilní, zatímco $G_2(s)$ je nestabilní (například integrátor $1/s$). Přivedeme u systémů na vstup $U(s)$ jednotkový skok. Subsystém $G_1(s)$ bude konvergovat, ale integrátor $G_2(s)$ bude divergovat. U systému S1 je nestabilní část říditelná, ale není připojená na výstup a z venku není pozorovatelná. Tím pádem výstup nijak neovlivní. U systému S2 je nestabilní část připojená k výstupu, ale protože není připojena k vstupu, bude nulová. Není tedy říditelná, ale na výstupu systému se neprojeví.

2 TESTOVÁNÍ STABILITY SYSTÉMU

2.1 Stavový popis

U lineárního časově invariantního systému je stavová rovnice $x'(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t)$ a výstupní rovnice $y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t)$. Ve stavovém popisu lineárního spojitého systému se testuje stability pomocí matice A , z které zjistíme, jestli je systém stabilní nebo nestabilní. Vypočítáme determinant matice $[s \cdot I - A]$ a položíme jej roven nule:

$$\det[s \cdot I - A] = 0 \quad (2.1)$$

Získáme tím vlastní čísla matice A , které jsou taktéž póly, podle kterých se určí stabilita daného stavového popisu. Aby byl stavový popis stabilní, musí být vlastní čísla matice A ve stabilní polorovině. Tedy musí být záporné u spojitéch systémů. U diskretních systémů musí vlastní čísla být v jednotkové kružnici. [3]

Příklad testování stability stavového popisu:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 5 & -5 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$s \cdot I - A = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 5 & -5 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+1 & 0 & 0 \\ -5 & s+5 & -3 \\ -2 & 0 & s+2 \end{bmatrix}$$

$$\det[s \cdot I - A] = (s+1) \cdot (s+5) \cdot (s+2)$$

Nyní spočítáme kořeny determinantu $[s \cdot I - A]$ a zjistíme jestli je systém stabilní:

$$\det[s \cdot I - A] = (s+1) \cdot (s+5) \cdot (s+2)$$

$$s_1 = -1 \quad s_2 = -5 \quad s_3 = -2$$

Všechny póly jsou menší než nula. To znamená že leží ve stabilní polorovině a tím pádem je systém stabilní.

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 5 & -5 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$$y = [3 \quad 0 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$s \cdot I - A = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 5 & -5 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+1 & 0 & 0 \\ -5 & s+5 & -3 \\ -2 & 0 & s-2 \end{bmatrix}$$

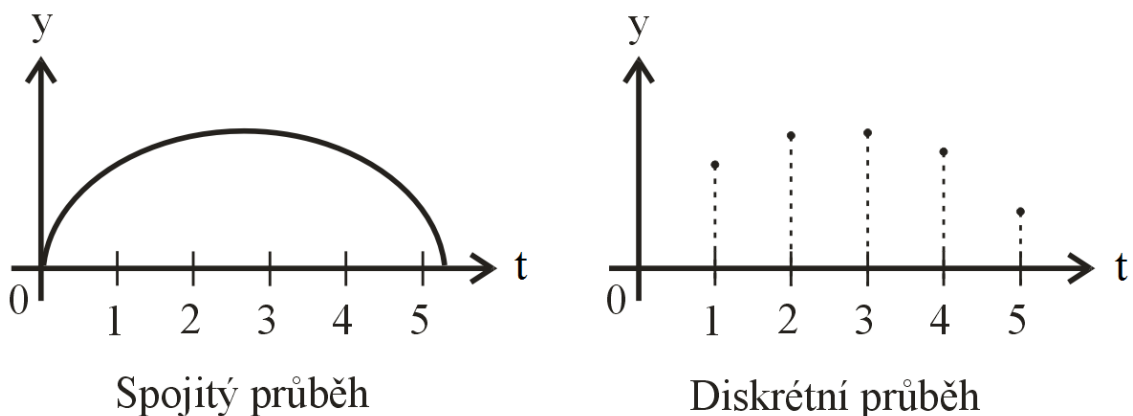
$$\det[s \cdot I - A] = (s+1) \cdot (s+5) \cdot (s-2)$$

$$s_1 = -1 \quad s_2 = -5 \quad s_3 = 2$$

Pól s_3 leží v nestabilní polorovině. Proto bude systém nestabilní.

2.2 Spojitý a diskrétní systém

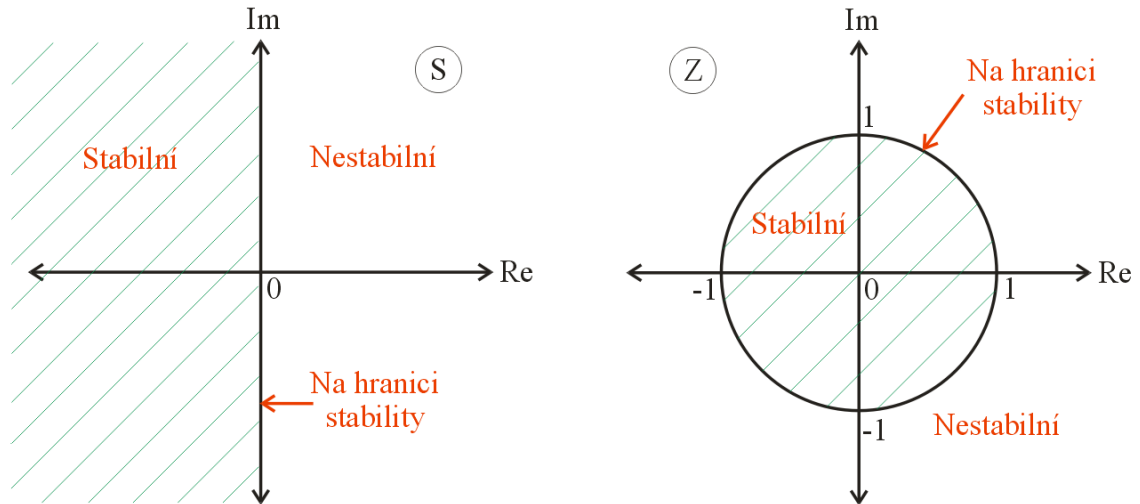
Spojitý systém má v každém časovém okamžiku jednu určitou hodnotu. Není tedy nijak přerušovaný. Naproti tomu diskrétní systém je sledován pouze v časech periody, to znamená, že nemá v každém časovém okamžiku jednu určitou hodnotu. Je tedy přerušovaný. Rozdíly mezi spojitým a diskrétním systémem jsou vidět na obrázku (Obr. 7).



Obrázek 7: Rozdíl mezi spojitým a diskrétním průběhem

U obou systémů hledáme póly, abychom mohli určit, jestli je systém stabilní. Ale o tom, jestli jsou tyto systémy stabilní, rozhodují rozdílná pravidla umístění těchto pólů v Gaussově rovině.

U spojitých systémů musí být vypočítané póly v levé polovině Gaussovy roviny, aby byl systém stabilní. U diskretních systémů musí být vypočítané póly uvnitř jednotkové kružnice, aby byl systém stabilní. Pro lepší představu je zde obrázek (Obr. 8). [2], [7]



Obrázek 8: Oblast stability spojitých (s) a diskretních (z) systémů

2.3 Kritéria stability spojitých systémů

Víme, že homogenní lineární diferenciální rovnice regulačního obvodu je pro posouzení stability rozhodující. Tato rovnice vypadá následovně:

$$a_n \cdot y^{(n)}(t) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 \cdot y'(t) + a_0 \cdot y(t) = 0 \quad (2.2)$$

Zavedením partikulárního řešení $y = e^{st}$ dostaneme:

$$a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_1 \cdot s + a_0 = 0 \quad (2.3)$$

Následně se používá pro výpočty pólů rovnice:

$$N(s) = a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_1 \cdot s + a_0 \quad (2.4)$$

Stabilita systému lze zjistit výpočtem kořenů (pólů) charakteristické rovnice. Tyto kořeny se dají jednoduše zjistit za pomoci výpočetního prostředí jako je například MATLAB nebo Mathematica. Pokud ale tyto výpočetní prostředí nemáme k dispozici, stává se výpočet kořenů rovnic vyšších řádů velmi obtížný. Proto se pro testování stability používají různá kritéria stability. Existují dva typy kritérií.

První typ jsou algebraická kritéria. Vycházejí z charakteristického polynomu a určují, zda je systém stabilní. Bohužel neurčí tlumení obvodu. Nelze je použít na systémy s dopravním zpožděním. Patří sem Routh-Shurovo a Hurwitzovo kritérium.

Druhý typ jsou geometrická kritéria. Také určují, jestli je systém stabilní, ale navíc tlumení obvodu a to na základě frekvenční charakteristiky. Tento typ můžeme použít i na systémy s dopravním zpožděním. Sem patří Michailovo-Leonhardovo a Nyquistovo kritérium.

Kritéria stability mohou určit, jestli je systém stabilní, aniž by se museli počítat póly systému. [2], [7]

2.3.1 Routh-Shurovo kritérium

Mějme charakteristický polynom (2.3). Pokud splňuje podmínku ($a_0, \dots, a_n > 0$), můžeme použít následující postup:

- 1.) Koeficienty (a_0, \dots, a_n) napíšeme vedle sebe sestupně od nejvyšší mocniny.
- 2.) Rozdělíme posloupnost těchto koeficientů na sudou a lichou část.
- 3.) Vynásobíme sudé koeficienty podílem prvního a druhého koeficientu. Výsledek zařadíme pod posloupnost a posuneme ho o jeden koeficient doleva.
- 4.) Vznikne nám nová řada koeficientů, kterou následně odečteme od první. Posloupnost se touto operací zkrátí o jeden člen.
- 5.) Jestliže budou všechny koeficienty v nové posloupnosti větší než nula, budeme celý proces znovu opakovat.

Pokud se při redukci stane, že jakýkoliv koeficient je záporný, ukončíme výpočet. Víme totiž, že kořen charakteristického polynomu je nestabilní

- 6.) Podaří li se postupnou redukcí dostat ke třem kladným koeficientům, znamená to, že kořeny charakteristického polynomu jsou všechny ve stabilní oblasti

[2], [7]

Obecné schéma uvedeného postupu:

a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_{n-3}	\dots	a_1	a_0
$-\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot a_{n-1}$		$-\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot a_{n-3}$		\dots	$-\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot a_0$	
0	a_{n-1}	$a_{n-2} - \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot a_{n-3}$	a_{n-3}	\dots	$a_1 - \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot a_0$	a_0
	↓	↓	↓		↓	↓
0	f_n	f_{n-1}	f_{n-3}	\dots	f_1	f_0
	$-\frac{f_n}{f_{n-1}} \cdot f_{n-1}$		$-\frac{f_n}{f_{n-1}} \cdot f_{n-4}$	\dots		
					\vdots	
					fx_2	fx_1
						fx_0

Příklady testování stability pomocí Routh-Shurova kritéria:

$$\underline{\underline{F(s) = s^5 + 3 \cdot s^4 + 4 \cdot s^3 + 5 \cdot s^2 + 2 \cdot s + 1}}$$

1	3	4	5	2	1
$-\frac{1}{3} \cdot 3$		$-\frac{1}{3} \cdot 5$		$-\frac{1}{3} \cdot 1$	
0	3	$\frac{7}{3}$	5	$\frac{5}{3}$	1
	-3		$-\frac{9}{7} \cdot \frac{5}{3}$		
	0	$\frac{7}{3}$	$\frac{60}{21}$	$\frac{5}{3}$	1
		$-\frac{7}{3}$		$-\frac{147}{180}$	
		0	$\frac{60}{21}$	$\frac{153}{180}$	1

Všechny členy jsou kladné, charakteristický polynom je stabilní.

$$\underline{\underline{F(s) = 2 \cdot s^5 + 3 \cdot s^4 + 4 \cdot s^3 + 5 \cdot s^2 + 2 \cdot s + 1}}$$

$-\frac{2}{3} \cdot 3$	3	$-\frac{2}{3} \cdot 5$	5	$-\frac{2}{3} \cdot 1$	1
0	3	$\frac{2}{3}$	5	$\frac{4}{3}$	1
	-3		$-\frac{9}{2} \cdot \frac{4}{3}$		
	0	$\frac{2}{3}$	-1	$\frac{4}{3}$	1

Jeden člen je záporný, charakteristický polynom je nestabilní.

2.3.2 Hurwitzovo kritérium

Základem tohoto kritéria je opět charakteristický polynom (2.3). Taktéž musí splňovat podmínku ($a_0, \dots, a_n > 0$). Všechny koeficienty vepíšeme do matice. Tato matice se nazývá Hurwitzova, a má následující tvar:

$$H = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_0 \end{bmatrix} \quad H = [n \times n] \quad (2.5)$$

Do prvního řádku matice zapisujeme liché koeficienty, do druhého řádku sudé koeficienty. Tyto dva řádky dále opisujeme pod sebe a pokaždé je posuneme doprava. Matice je vždy čtvercová a počet sloupců a řádků je určen nejvyšším stupněm charakteristického polynomu. Dalším krokem je určení subdeterminantů H_n , které odpovídají hlavním minorům Hurwitzovy matice:

$$H_1 = a_{n-1} \quad H_2 = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{bmatrix} \quad H_3 = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{bmatrix} \quad \cdots \quad H_n = a_0 \cdot H_{n-1}$$

Pokud budou všechny subdeterminanty $H_n > 0$, můžeme říci, že systém je stabilní. Pokud vyjde subdeterminant $H_{n-1} = 0$, je systém na mezi stability. Dva jeho kořeny jsou ryze imaginární. [2], [7]

Příklad testování stability pomocí Hurwitzova kritéria:

$$\underline{F(s) = s^5 + 3 \cdot s^4 + 4 \cdot s^3 + 5 \cdot s^2 + 2 \cdot s + 1}$$

$$H = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \quad H_1 = 3 \quad H_2 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = 12 - 5 = 7$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} = 60 + 3 - 18 - 25 = 20 \quad H_4 = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} = 120 - 20 = 100$$

Všechny subdeterminanty H_n jsou kladné, charakteristický polynom je stabilní.

$$\underline{F(s) = 2 \cdot s^5 + 3 \cdot s^4 + 4 \cdot s^3 + 5 \cdot s^2 + 2 \cdot s + 1}$$

$$H = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \quad H_1 = 3 \quad H_2 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 12 - 10 = 2$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} = 60 + 6 - 18 - 50 = -2$$

Třetí subdeterminant je záporný, charakteristický polynom je nestabilní.

2.3.3 Michailovovo-Leonhardovo kritérium

Vycházíme z charakteristického polynomu (2.3), ve kterém nahradíme komplexní proměnnou (s) za komplexní kmitočet ($j\omega$). Po této náhradě dostaneme Michailovovu křivku $N(j\omega)$.

Po dosazení $(j\omega)$ za (s) bude vypadat rovnice následovně:

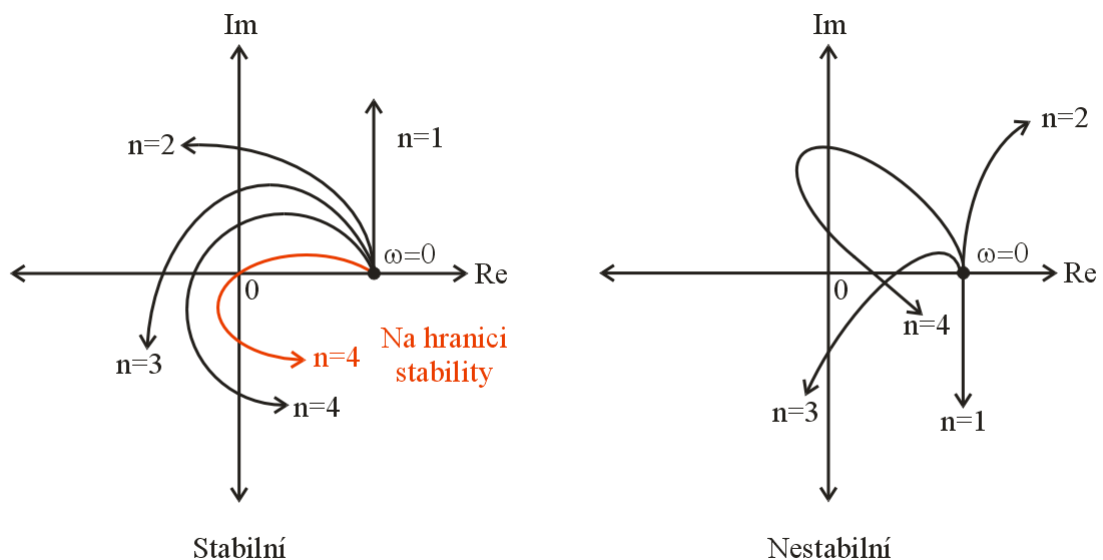
$$N(j\omega) = a_n \cdot (j\omega)^n + a_{n-1} \cdot (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 \cdot j\omega + a_0 \quad (2.6)$$

Platí zde pravidlo: $j^2 = -1$

Michailovovu funkce rozdělíme na reálnou a imaginární část:

$$\begin{aligned} N_r(\omega) &= a_0 - a_2 \cdot \omega^2 + a_4 \cdot \omega^4 - a_6 \cdot \omega^6 + \dots \\ N_i(\omega) &= a_1 \cdot \omega - a_3 \cdot \omega^3 + a_5 \cdot \omega^5 - a_7 \cdot \omega^7 + \dots \end{aligned} \quad (2.7)$$

Charakteristický polynom je stabilní, pokud charakteristika $N(j\omega)$ začíná na kladné reálné ose. Dále musí při změně kmitočtu ω postupně procházet tolika kvadranty, kolik je stupeň charakteristického polynomu. Křivka prochází kvadranty proti směru hodinových ručiček (kladný smysl). Pokud začne charakteristika v počátku souřadného systému $[0;0]$, bude polynom na nekmitavé hranici stability. Když bude stupeň polynomu $n > 2$ a křivka bude procházet nulou, je polynom na kmitavé hranici stability. [2], [7]



Obrázek 9: Různé případy Michailovových charakteristik

Příklad testování stability pomocí Michailovova-Leonhardova kritéria:

$$\underline{F(s) = s^5 + 3 \cdot s^4 + 4 \cdot s^3 + 5 \cdot s^2 + 2 \cdot s + 1}$$

$$N(j\omega) = j^5 \omega^5 + 3 \cdot j^4 \omega^4 + 4 \cdot j^3 \omega^3 + 5 \cdot j^2 \omega^2 + 2 \cdot j\omega + 1$$

$$N(j\omega) = j\omega^5 + 3 \cdot \omega^4 - 4 \cdot j\omega^3 - 5 \cdot \omega^2 + 2 \cdot j\omega + 1$$

$$N_r(\omega) = 1 - 5 \cdot \omega^2 + 3 \cdot \omega^4$$

$$N_i(\omega) = 2 \cdot \omega - 4 \cdot \omega^3 + \omega^5$$

$$\begin{array}{l} 1 - 5 \cdot \omega^2 + 3 \cdot \omega^4 = 0 \\ \omega_2 = 0,4821 \\ \omega_4 = 1,1976 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2 \cdot \omega - 4 \cdot \omega^3 + \omega^5 = 0 \\ \omega \cdot (2 - 4 \cdot \omega^2 + \omega^4) = 0 \\ \omega_1 = 0 \\ \omega_3 = 0,7654 \\ \omega_5 = 1,8479 \end{array}$$

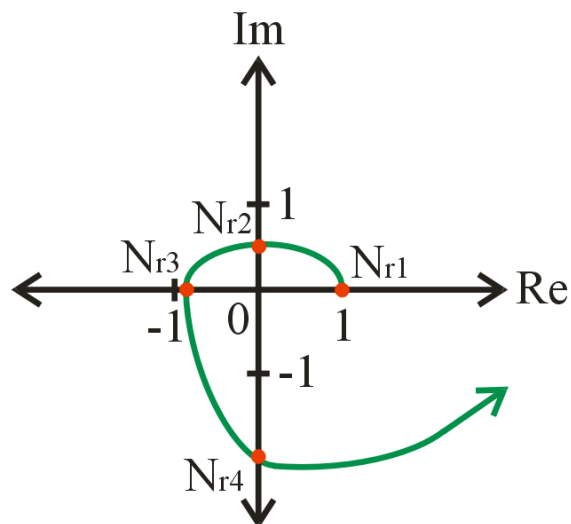
$$N_{r1} = 1 - 5 \cdot \omega_1^2 + 3 \cdot \omega_1^4 = 1$$

$$N_{i2} = 2 \cdot \omega_2 - 4 \cdot \omega_2^3 + \omega_2^5 = 0,9642 - 0,4482 + 0,02304 = 0,53904$$

$$N_{r3} = 1 - 5 \cdot \omega_3^2 + 3 \cdot \omega_3^4 = 1 - 2,9292 + 1,0296 = -0,8996$$

$$N_{i4} = 2 \cdot \omega_4 - 4 \cdot \omega_4^3 + \omega_4^5 = 2,3952 - 6,8706 + 2,4635 = -2,0119$$

$$N_{r5} = 1 - 5 \cdot \omega_5^2 + 3 \cdot \omega_5^4 = 1 - 17,0737 + 34,9812 = 18,9075$$



Obrázek 10: Michailovova křivka polynomu

Jak je patrné z obrázku (Obr. 10), Michailovova křivka prochází pěti kvadranty proti směru hodinových ručiček (kladném směru). Jelikož je zadán charakteristický polynom pátého stupně, vychází nám že je stabilní.

$$\underline{\underline{F(s) = 2 \cdot s^5 + 3 \cdot s^4 + 4 \cdot s^3 + 5 \cdot s^2 + 2 \cdot s + 1}}$$

$$N(j\omega) = 2 \cdot j^5 \omega^5 + 3 \cdot j^4 \omega^4 + 4 \cdot j^3 \omega^3 + 5 \cdot j^2 \omega^2 + 2 \cdot j\omega + 1$$

$$N(j\omega) = 2 \cdot j\omega^5 + 3 \cdot \omega^4 - 4 \cdot j\omega^3 - 5 \cdot \omega^2 + 2 \cdot j\omega + 1$$

$$N_r(\omega) = 1 - 5 \cdot \omega^2 + 3 \cdot \omega^4$$

$$N_i(\omega) = 2 \cdot \omega - 4 \cdot \omega^3 + 2 \cdot \omega^5$$

$$1 - 5 \cdot \omega^2 + 3 \cdot \omega^4 = 0$$

$$\omega_2 = 0,4821$$

$$\omega_4 = 1,1976$$

$$2 \cdot \omega - 4 \cdot \omega^3 + 2 \cdot \omega^5 = 0$$

$$\omega \cdot (2 - 4 \cdot \omega^2 + 2 \cdot \omega^4) = 0$$

$$\omega_1 = 0$$

$$\omega_3 = 1$$

$$\omega_5 = -1$$

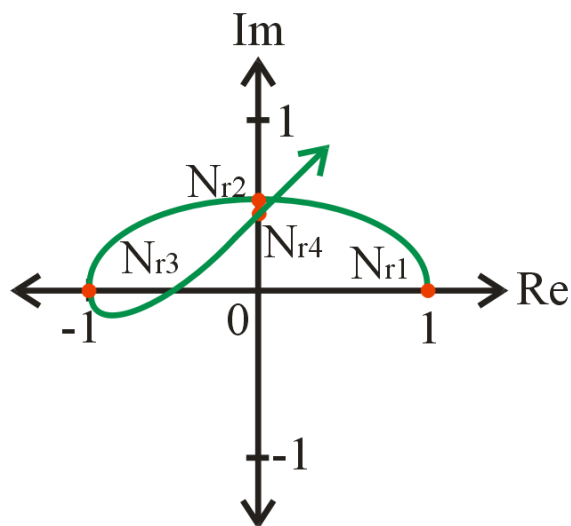
$$N_{r1} = 1 - 5 \cdot \omega_1^2 + 3 \cdot \omega_1^4 = 1$$

$$N_{i2} = 2 \cdot \omega_2 - 4 \cdot \omega_2^3 + 2 \cdot \omega_2^5 = 0,9642 - 0,4482 + 0,05209 = 0,5681$$

$$N_{r3} = 1 - 5 \cdot \omega_3^2 + 3 \cdot \omega_3^4 = 1 - 5 + 3 = -1$$

$$N_{i4} = 2 \cdot \omega_4 - 4 \cdot \omega_4^3 + 2 \cdot \omega_4^5 = 2,3952 - 6,8706 + 4,9271 = 0,4517$$

$$N_{r5} = 1 - 5 \cdot \omega_5^2 + 3 \cdot \omega_5^4 = 1 - 5 + 3 = -1$$

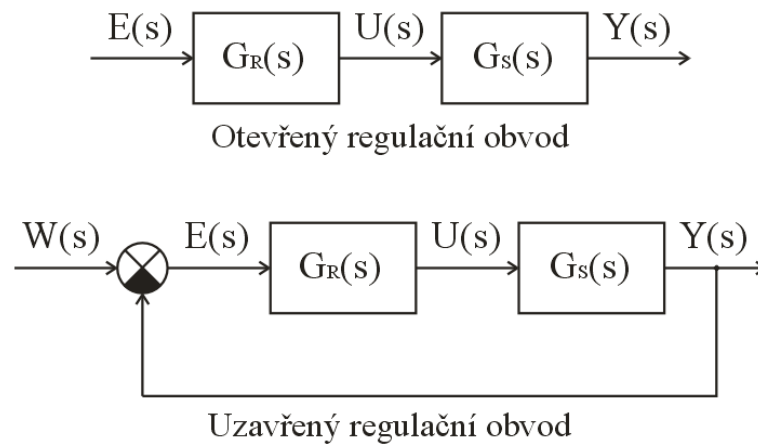


Obrázek 11: Michailovova křivka polynomu

Na obrázku (Obr. 11) vidíme, že křivka se ve třetím kvadrantu stáčí a vrací se zpátky do druhého kvadrantu. Neprochází tedy postupně všemi kvadranty, proto můžeme říct, že charakteristický polynom je nestabilní.

2.3.4 Nyquistovo kritérium

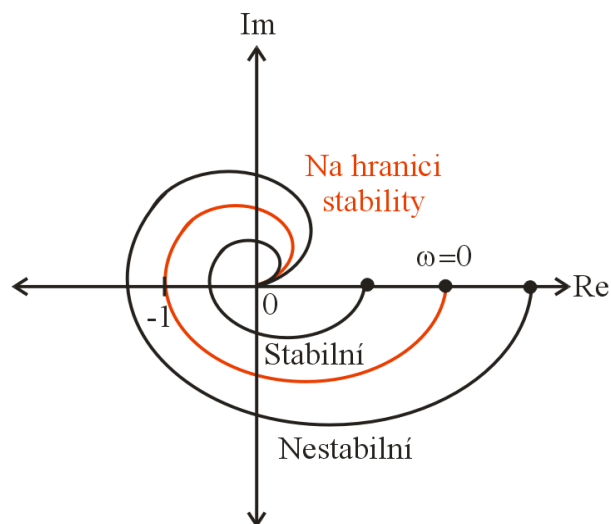
Velmi významné kritérium, protože na základě frekvenční charakteristiky otevřeného regulačního obvodu ověřuje stabilitu uzavřeného regulačního obvodu.



Obrázek 12: Otevřený a uzavřený regulační obvod

Na obrázku (Obr. 12) jsou $W(s)$ žádaná veličina, $E(s)$ regulační odchylka, $G_R(s)$ regulátor, $U(s)$ akční veličina, $G_S(s)$ regulovaná soustava a $Y(s)$ regulovaná veličina.

Uzavřený regulační obvod je stabilní, pokud amplitudově-fázová frekvenční charakteristika otevřeného obvodu neobklopí bod $[-1;0]$ na záporné reálné ose. Tento bod nazýváme kritický, jelikož nám rozhoduje o stabilitě uzavřeného regulačního obvodu.



Obrázek 13: Možné průběhy Nyquistovy křivky

Pokud bude otevřený regulační obvod nestabilní, bude mít "x" nestabilních kořenů, které leží v pravé nestabilní polorovině. V tomto případě bude uzavřený regulační obvod stabilní pouze v případě, když amplitudově-fázová frekvenční charakteristika otevřeného regulačního obvodu obklopí kritický bod $[-1;0]$ v kladném smyslu $0,5 \cdot x$ krát. [2], [7]

Velkou výhodou tohoto kritéria je možnost aplikace na systémy s dopravním zpožděním.

2.4 Kritéria stability diskrétních systémů

Pro testování stability diskrétních systému můžeme použít kritéria pro testování stability spojitého systému. Je ale zapotřebí provést bilineární transformaci, která převede diskrétní stabilní oblast z jednotkové kružnice na zápornou polorovinu, aby se mohla kritéria pro spojité systémy použít i u diskrétních systémů. Tato transformace má tvar:

$$z = \frac{s+1}{s-1} \quad (2.8)$$

Pokud máme funkci $F(z)$ a použijeme bilineární transformaci, bude to vypadat následovně:

$$\begin{aligned} F(z) &= a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \dots + a_1 \cdot z + a_0 \\ &\Downarrow \\ F(s) &= a_n \cdot \left(\frac{s+1}{s-1}\right)^n + a_{n-1} \cdot \left(\frac{s+1}{s-1}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \cdot \left(\frac{s+1}{s-1}\right) + a_0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Po této transformaci roznásobíme závorky a následně už můžeme použít všechna kritéria stability pro spojité systémy. [7]

Příklad testování stability diskrétního systému pomocí Hurwitzova kritéria:

$$\underline{\underline{F(z) = 4 \cdot z^5 + 3 \cdot z^4 + 4 \cdot z^3 + 5 \cdot z^2 + 2 \cdot z + 1}}$$

$$F(s) = 4 \cdot \left(\frac{s+1}{s-1}\right)^5 + 3 \cdot \left(\frac{s+1}{s-1}\right)^4 + 4 \cdot \left(\frac{s+1}{s-1}\right)^3 + 5 \cdot \left(\frac{s+1}{s-1}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{s+1}{s-1}\right) + 1$$

$$F(s) = 0$$

$$4 \cdot \left(\frac{s+1}{s-1}\right)^5 + 3 \cdot \left(\frac{s+1}{s-1}\right)^4 + 4 \cdot \left(\frac{s+1}{s-1}\right)^3 + 5 \cdot \left(\frac{s+1}{s-1}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{s+1}{s-1}\right) + 1 = 0 \quad / (s-1)^5$$

$$4 \cdot (s+1)^5 + 3 \cdot (s+1)^4 \cdot (s-1) + 4 \cdot (s+1)^3 \cdot (s-1)^2 + 5 \cdot (s+1)^2 \cdot (s-1)^3 + 2 \cdot (s+1) \cdot (s-1)^4 + (s-1)^5 = 0$$

$$19 \cdot s^5 + 17 \cdot s^4 + 42 \cdot s^3 + 30 \cdot s^2 + 19s + 1 = 0$$

$$H = \begin{bmatrix} 17 & 30 & 1 & 0 & 0 \\ 19 & 42 & 19 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & 30 & 1 & 0 \\ 0 & 19 & 42 & 19 & 0 \\ 0 & 0 & 17 & 30 & 1 \end{bmatrix} \quad H_1 = 17 \quad H_2 = \begin{bmatrix} 17 & 30 \\ 19 & 42 \end{bmatrix} = 714 - 570 = 144$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} 17 & 30 & 1 \\ 19 & 42 & 19 \\ 0 & 17 & 30 \end{bmatrix} = 21420 + 323 - 5491 - 17100 = -848$$

Třetí subdeterminant je záporný, charakteristický polynom je tedy nestabilní.

$$\underline{\underline{F(s) = 3 \cdot z^4 + 4 \cdot z^3 + 5 \cdot z^2 + 2 \cdot z + 1}}$$

$$F(s) = 3 \cdot \left(\frac{s+1}{s-1}\right)^4 + 4 \cdot \left(\frac{s+1}{s-1}\right)^3 + 5 \cdot \left(\frac{s+1}{s-1}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{s+1}{s-1}\right) + 1$$

$$F(s) = 0$$

$$3 \cdot \left(\frac{s+1}{s-1}\right)^4 + 4 \cdot \left(\frac{s+1}{s-1}\right)^3 + 5 \cdot \left(\frac{s+1}{s-1}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{s+1}{s-1}\right) + 1 = 0 \quad / (s-1)^4$$

$$3 \cdot (s+1)^4 + 4 \cdot (s+1)^3 \cdot (s-1) + 5 \cdot (s+1)^2 \cdot (s-1)^2 + 2 \cdot (s+1) \cdot (s-1)^3 + (s-1)^4 = 0$$

$$15 \cdot s^4 + 12 \cdot s^3 + 14 \cdot s^2 + 4s + 3 = 0$$

$$H = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 0 & 0 \\ 15 & 14 & 3 & 0 \\ 0 & 12 & 4 & 0 \\ 0 & 15 & 14 & 3 \end{bmatrix} \quad H_1 = 12 \quad H_2 = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 15 & 14 \end{bmatrix} = 168 - 60 = 108$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 0 \\ 15 & 14 & 3 \\ 0 & 12 & 4 \end{bmatrix} = 672 - 432 - 240 = 0$$

Třetí subdeterminant vyšel nula, systém je na hranici stability.

Pro diskretní systémy můžeme tedy použít kritéria pro spojité systémy, ale také máme vlastní kritéria stability pro diskretní systémy. První kritérium postupné redukce pracuje s charakteristickým polynomem $F(z)$, druhé kritérium Nekolného pracuje s charakteristickým polynomem $F(z^{-1})$.

2.4.1 Kritérium postupné redukce

Následující kritérium vychází z charakteristického polynomu $F(z)$, který má tvar:

$$F(z) = a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \dots + a_1 \cdot z + a_0 \quad (2.10)$$

Tento polynom opakovaně redukuje do té doby, než nám zůstane polynom prvního řádu, ze kterého už lze jednoduše vypočítat jeho kořen. Při redukci polynomu musí být vždy splněna podmínka $|a_n| > |a_0|$. Pokud tato podmínky není v kterémkoliv kroku splněna, charakteristický polynom je nestabilní. Pokud je tato podmínka vždy splněna a z posledního polynomu vypočítáme kořen, který bude ležet v jednotkové kružnici, je charakteristický polynom stabilní.

Postup redukce je následovný:

Máme polynom „ n “ stupně. Nový polynom bude „ $n-1$ “ stupně. Zavedeme si proměnnou $x = 0, 1, \dots, n-1$. Nové koeficienty redukovaného polynomu se vypočítají pomocí vzorce:

$$a_{n-1-x} = a_n \cdot a_{n-x} - a_0 \cdot a_x \quad (2.11)$$

Následně dostaneme polynom $F_1(z)$, který bude ve tvaru:

$$F_1(z) = a_{n-1} \cdot z^{n-1} + a_{n-2} \cdot z^{n-2} + \dots + a_1 \cdot z + a_0 \quad (2.12)$$

Další redukce se provádí z nového polynomu $F_1(z)$ stejným způsobem, dokud nám nezůstane polynom prvního řádu:

$$F_n(z) = a_n \cdot z + a_0 \quad (2.13)$$

[7]

Příklad testování stability diskrétního systému pomocí kritéria postupné redukce:

$$\underline{F(z) = 4 \cdot z^4 + 4 \cdot z^3 + 5 \cdot z^2 + 2 \cdot z + 1} \quad n = 4$$

$$a_{n-1-x} = a_n \cdot a_{n-x} - a_0 \cdot a_x$$

$$a_n > a_0$$

$$x = 0: \quad a_{n-1-0} = a_n \cdot a_{n-0} - a_0 \cdot a_0 = 4 \cdot 4 - 1 \cdot 1 = 15$$

$$x = 1: \quad a_{n-1-1} = a_n \cdot a_{n-1} - a_0 \cdot a_1 = 4 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 14$$

$$x = 2: \quad a_{n-1-2} = a_n \cdot a_{n-2} - a_0 \cdot a_2 = 4 \cdot 5 - 1 \cdot 5 = 15$$

$$x = 3: \quad a_{n-1-3} = a_n \cdot a_{n-3} - a_0 \cdot a_3 = 4 \cdot 2 - 1 \cdot 4 = 4$$

$$F1(z) = 15 \cdot z^3 + 14 \cdot z^2 + 15 \cdot z + 4 \quad n = 3$$

$$a_n > a_0$$

$$x = 0: \quad a2_{n-1-0} = a_n \cdot a_{n-0} - a_0 \cdot a_0 = 15 \cdot 15 - 4 \cdot 4 = 209$$

$$x = 1: \quad a2_{n-1-1} = a_n \cdot a_{n-1} - a_0 \cdot a_1 = 15 \cdot 14 - 4 \cdot 15 = 150$$

$$x = 2: \quad a2_{n-1-2} = a_n \cdot a_{n-2} - a_0 \cdot a_2 = 15 \cdot 15 - 4 \cdot 14 = 169$$

$$F2(z) = 209 \cdot z^2 + 150 \cdot z + 169 \quad n = 2$$

$$a_n > a_0$$

$$x = 0: \quad a3_{n-1-0} = a_n \cdot a_{n-0} - a_0 \cdot a_0 = 209 \cdot 209 - 169 \cdot 169 = 15120$$

$$x = 1: \quad a3_{n-1-1} = a_n \cdot a_{n-1} - a_0 \cdot a_1 = 209 \cdot 150 - 169 \cdot 150 = 6000$$

$$F3(z) = 15120 \cdot z + 6000$$

$$15120 \cdot z + 6000 = 0$$

$$z = -\frac{6000}{15120} = -0,3968$$

Kořen $z = -0,3968$ zredukovaného polynomu $F3(z)$ leží v jednotkové kružnici, charakteristický polynom je stabilní.

$$\underline{F(z) = 3 \cdot z^4 + 4 \cdot z^3 + 5 \cdot z^2 + 2 \cdot z + 1} \quad n = 4$$

$$a1_{n-1-x} = a_n \cdot a_{n-x} - a_0 \cdot a_x$$

$$a_n > a_0$$

$$x = 0: \quad a1_{n-1-0} = a_n \cdot a_{n-0} - a_0 \cdot a_0 = 3 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = 8$$

$$x = 1: \quad a1_{n-1-1} = a_n \cdot a_{n-1} - a_0 \cdot a_1 = 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 10$$

$$x = 2: \quad a1_{n-1-2} = a_n \cdot a_{n-2} - a_0 \cdot a_2 = 3 \cdot 5 - 1 \cdot 5 = 10$$

$$x = 3: \quad a1_{n-1-3} = a_n \cdot a_{n-3} - a_0 \cdot a_3 = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 4 = 2$$

$$F1(z) = 8 \cdot z^3 + 10 \cdot z^2 + 10 \cdot z + 2 \quad n = 3$$

$$a_n > a_0$$

$$x = 0: \quad a2_{n-1-0} = a_n \cdot a_{n-0} - a_0 \cdot a_0 = 8 \cdot 8 - 2 \cdot 2 = 60$$

$$x = 1: \quad a2_{n-1-1} = a_n \cdot a_{n-1} - a_0 \cdot a_1 = 8 \cdot 10 - 2 \cdot 10 = 60$$

$$x = 2: \quad a2_{n-1-2} = a_n \cdot a_{n-2} - a_0 \cdot a_2 = 8 \cdot 10 - 2 \cdot 10 = 60$$

$$F2(z) = 60 \cdot z^2 + 60 \cdot z + 60 \quad n = 2$$

$$a_n < a_0$$

U polynomu $F2(z)$ nebyla splněna podmínka $a_n > a_0$, charakteristický polynom je nestabilní.

2.4.2 Nekolného kritérium

U tohoto kritéria je charakteristická polynom z kterého vycházíme v záporných mocninách:

$$F(z^{-1}) = a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + \dots + a_{n-1} \cdot z^{-(n-1)} + a_n \cdot z^{-n} \quad (2.14)$$

Postup kroků Nekolného kritéria:

- 1.) Koeficienty a_0 až a_n zapíšeme do prvního řádku.
- 2.) Do druhého řádku zapíšeme koeficienty opačně a_n až a_0 .
- 3.) Druhý řádek vynásobíme podílem $-a_n/a_0$, tím nám vznikne nová řada koeficientů, kterou následně přičteme k prvnímu řádku. Tímto zkrátíme řadu koeficientů o jeden člen. Tyto podíly si pojmenujeme „ x_i “, kde platí, že $i = 0, 1, \dots, n-1$.
- 4.) Tento postup opakujeme tak dlouho, až nám zůstane pouze jeden člen v řadě. Charakteristický polynom bude stabilní pouze v případě, že všechny podíly $|x_i| < 1$. [7]

Obecné schéma postupu vypadá následovně:

a_0	a_1	\dots	a_{n-1}	a_n	
a_n	a_{n-1}	\dots	a_1	a_0	$x_1 = -\frac{a_n}{a_0}$
$a_0 - \frac{a_n}{a_0} \cdot a_n$	$a_1 - \frac{a_n}{a_0} \cdot a_{n-1}$	\dots	$a_{n-1} - \frac{a_n}{a_0} \cdot a_0$	$a_n - a_n$	
\downarrow	\downarrow		\downarrow		
f_0	f_1	\dots	f_n	0	
f_n	f_{n-1}	\dots	f_0	0	$x_2 = -\frac{f_n}{f_0}$
\vdots					
fx_0	0				

Příklad testování stability diskrétního systému pomocí Nekolného kritéria:

$$\underline{\underline{F(z) = 4 + 4 \cdot z^{-1} + 5 \cdot z^{-2} + 2 \cdot z^{-3} + 1z^{-4}}}$$

4	4	5	2	1		
1	2	5	4	4	$x_1 = -\frac{1}{4}$	$ x_1 < 1$
<hr/>						
$\frac{15}{4}$	$\frac{14}{4}$	$\frac{15}{4}$	1	0		
1	$\frac{15}{4}$	$\frac{14}{4}$	$\frac{15}{4}$		$x_2 = -\frac{4}{15}$	$ x_2 < 1$
<hr/>						
$\frac{209}{60}$	$\frac{10}{4}$	$\frac{169}{60}$	0			
$\frac{169}{60}$	$\frac{10}{4}$	$\frac{209}{60}$			$x_3 = -\frac{169}{209}$	$ x_3 < 1$
<hr/>						
$\frac{252}{209}$	$\frac{100}{209}$	0				
$\frac{100}{209}$	$\frac{252}{209}$				$x_4 = -\frac{100}{252}$	$ x_4 < 1$
<hr/>						
$\frac{64}{63}$	0					

Podmínka $x_i < 1$ byla splněna u všech x_i , charakteristický polynom je stabilní.

3 ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI SYSTÉMU

System lze popsat nejčastěji dvěma způsoby. První je vstupně-výstupní (vnější) popis. U tohoto popisu neřešíme, co se děje uvnitř systému, ale zajímá nás pouze vstup $u(t)$ a výstup $y(t)$. Může být ve tvaru diferenciální rovnice nebo přenosu $G(s) = Y(s) / U(s)$.

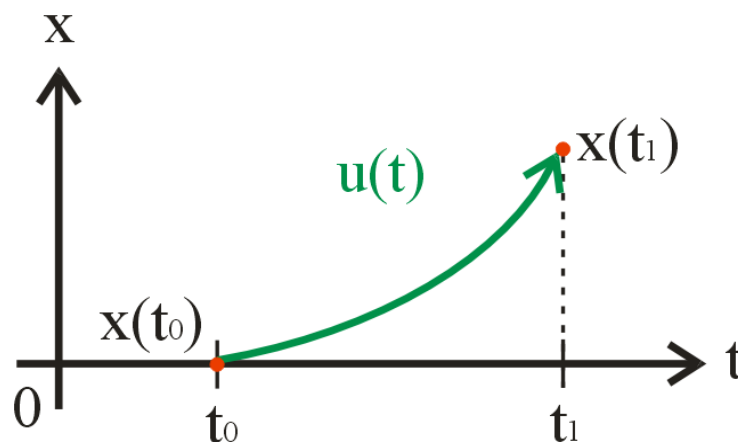
Druhý způsob je stavový (vnitřní) popis. Zde nás zajímá vstup $u(t)$, také výstup $y(t)$ a navíc oproti vstupně-výstupnímu popisu zde máme vnitřní stavy $x(t)$. Popis systému tímto způsobem je podrobnější a skládá se ze stavové rovnice $x'(t) = f[x(t), u(t), t]$ a výstupní rovnice $y(t) = g[x(t), u(t), t]$. U lineárního časově invariantního systému je stavová rovnice $x'(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t)$ a výstupní rovnice $y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t)$ kde A , B , C a D jsou matice.

Pokud chceme řídit nějakou soustavu, znamená to za pomoci akční veličiny $u(t)$ dostat systém z počátečního stavu $x(t_0)$ do žádaného stavu $x(t_1)$. Je ale možné, že neexistuje určitá akční veličina, která by nás do žádaného stavu $x(t_1)$ dostala. Proto je zapotřebí než vůbec začneme navrhovat nějaký regulátor zjistit, zda je tento stav vůbec dosažitelný a říditelný. [1], [2], [5]

3.1 Dosažitelnost a říditelnost

3.1.1 Dosažitelnost stavu

Žádaný stav $x(t_1)$ je dosažitelný, pokud existuje akční veličina $u(t)$, která v konečném čase přemění počáteční stav $x(t_0) = 0$ na žádaný stav $x(t_1)$.

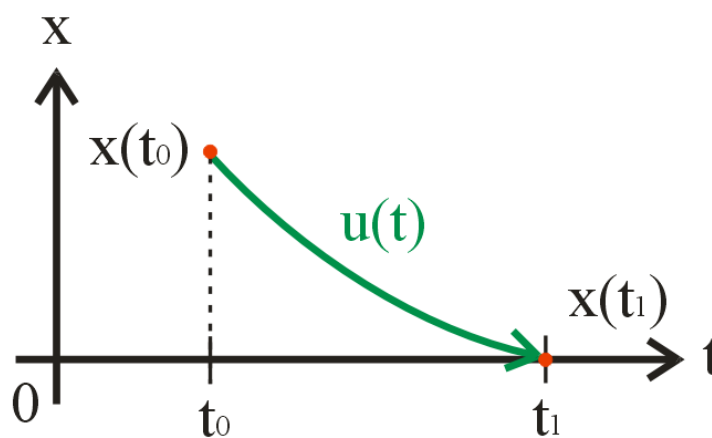


Obrázek 14: Dosažitelnost stavu

System bude dosažitelný, pokud všechny jeho stavy budou dosažitelné. Pokud je stav dosažitelný, většinou existuje více akčních veličin, které k tomuto žádanému stavu $x(t_1)$ vedou. V takovém případě můžeme mezi křivkami vybrat tu nejvhodnější. Tímto výběrem se zabývá optimální řízení.

3.1.2 Řiditelnost stavu

Stav $x(t_1)$ je říditelný, pokud existuje akční veličina $u(t)$, která v konečném čase přemění počáteční stav $x(t_0)$ na žádaný stav $x(t_1) = 0$.



Obrázek 15: Řiditelnost stavu

System bude říditelný, pokud všechny jeho stavy budou říditelné. V mnoha případech řídíme system tak, aby jsme na výstupu dostali žádanou hodnotu. Můžeme tedy system bez problémů řídit i když bude mít stavy které nejsou říditelné. U nestacionárních systémů měnících se v čase je zapotřebí dosažitelnost a říditelnost stavů vázat na čas.

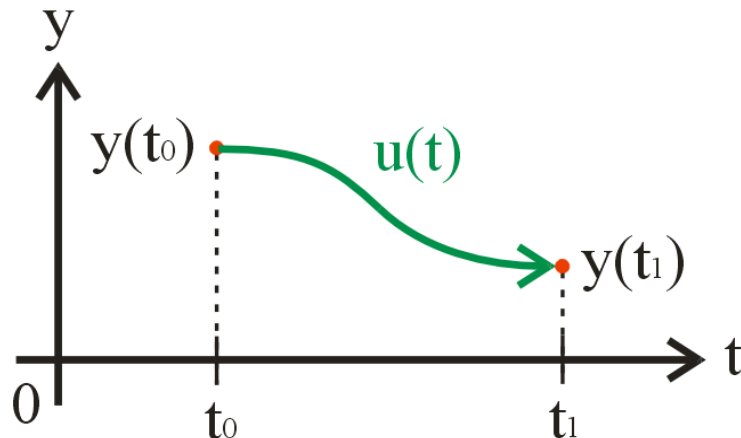
Při výpočtu říditelnosti stavu vycházíme ze stavového popisu. Jsou zde zapotřebí matice system (A) a váhová matice vstupu (B). Kritérium pak vypadá následovně:

$$Q_R = [B, AB, \dots, A^{n-1}B] \quad (3.1)$$

Pokud se bude hodnota matice Q_R rovnat počtu stavů ($Q_R = n$), bude system úplně říditelný. [2], [5]

3.1.3 Řiditelnost výstupu

Definice řiditelnost výstupu je velmi podobná definici řiditelnosti stavu. Žádaný výstup $y(t_1)$ je řiditelný, pokud existuje akční veličina $u(t)$, která v konečném čase přemění jakýkoliv počáteční výstup $y(t_0)$ na jakýkoliv jiný žádaný výstup $y(t_1)$.



Obrázek 16: Řiditelnost výstupu

Při výpočtu řiditelnosti výstupu vycházíme taktéž ze stavového popisu. Jsou zde ale zapotřebí matice systém (A), váhová matice vstupu (B) a váhová matice stavu (C). Kritérium pak vypadá následovně:

$$Q_r = [CB, CAB, \dots, CA^{n-1}B] \quad (3.2)$$

Pokud se bude hodnota matice Q_r rovnat počtu výstupů ($Q_r = r$), bude výstup řiditelný.

[2], [5]

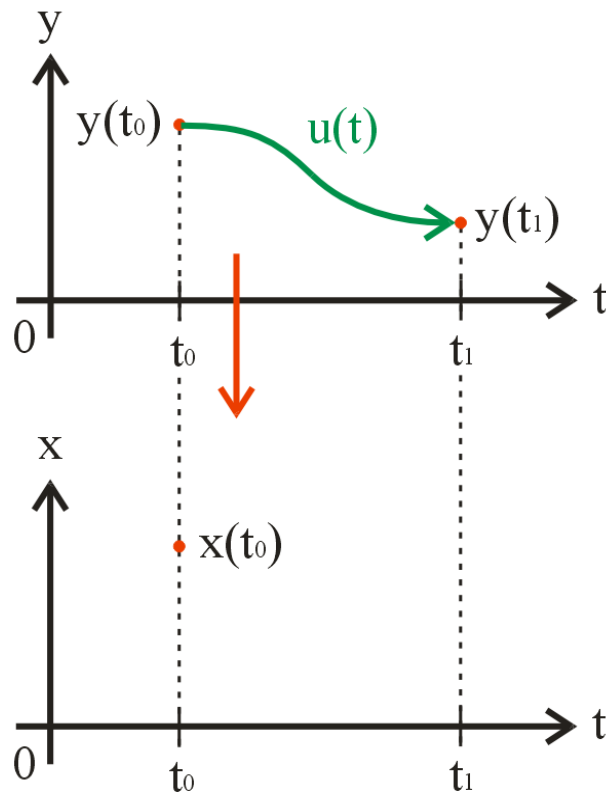
3.2 Pozorovatelnost a rekonstruovatelnost

Tyto dvě vlastnosti jsou důležité pro určení dynamických vlastností systému při experimentální identifikaci systému. Přímé měření stavů je většinou v praxi nemožné. Proto se provádí měření vstupů a výstupů, z nich se pak stavy zjišťují. Zda jde o pozorovatelnost nebo rekonstruovatelnost nám rozhoduje, jestli určujeme stav systému na počátku nebo na konci intervalu.

3.2.1 Pozorovatelnost stavu

Stav $x(t_0)$ je pozorovatelný, pokud získáme hodnotu měřením vstupu a výstupu na konečném časovém intervalu, a bude možné určit hodnotu stavu $x(t_0)$ na začátku měření.

Jestliže nelze měřením vstupu a výstupu určit počáteční hodnotu stavu $x(t_0)$ na konečném časovém intervalu, stav bude nepozorovatelný. To znamená, že se na výstupu tento stav nijak neprojeví.



Obrázek 17: Pozorovatelnost stavu

U LTI systémů platí, že pokud je systém pozorovatelný, můžeme tvrdit že je i rekonstruovatelný. Opačně to však neplatí. Pokud totiž určíme měřením vstupu a výstupu počáteční stav systému $x(t_0)$, známe tedy průběh vstupu. Poté můžeme určit koncový stav systému. [2], [5]

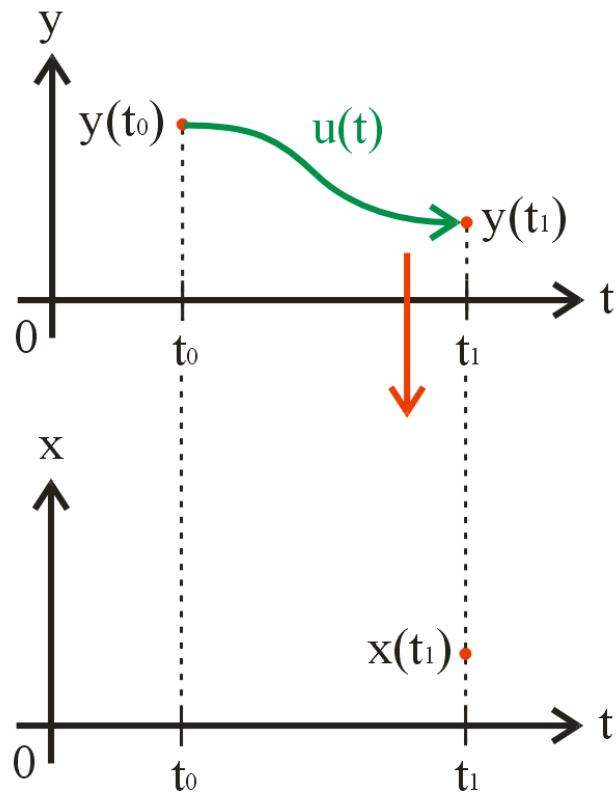
3.2.2 Rekonstruovatelnost stavu

Stav $x(t_1)$ je rekonstruovatelný, pokud získáme hodnotu měřením vstupu a výstupu na konečném časovém intervalu, a bude možné určit hodnotu stavu $x(t_1)$ na konci měření.

Pro výpočtu pozorovatelnosti a tím i rekonstruovatelnosti stavu vycházíme ze stavového popisu. Jsou zde zapotřebí matice systém (A), a váhová matice stavu (C). Kritérium pak vypadá následovně:

$$Q_p = [C, CA, \dots, CA^{n-1}] \quad (3.3)$$

Pokud se bude hodnost matice Q_p rovnat počtu stavů ($Q_p = n$), bude všechny stavy pozorovatelný a u LTI systémů také rekonstruovatelné. [2], [5]



Obrázek 18: Rekonstruovatelnost stavu

4 STABILIZACE NESTABILNÍHO SYSTÉMU

Pokud je systém nestabilní, lze jej stabilizovat pomocí zpětné vazby. Jejím správným navržením se tato soustava stabilizuje. Existuje mnoho metod, jak stabilizovat nestabilní systém. Nejpoužívanější metody v rámci stavového popisu jsou optimální řízení a přiřazení pólů stavovým regulátorem. V rámci vstupně-výstupního popisu je častý polynomiální přístup s konfiguracemi 1DOF (pouze zpětnovazební regulátor) a 2DOF (zpětnovazební a přímovazební regulátor). Těchto několik metod si popíšeme v následujících odstavcích, a následně v praktické části simulačně ověříme. Polynomiální přístup s konfiguracemi 1DOF a 2DOF je také použit na reálný model magnetické levitace. [3]

4.1 Stavový popis

Pokud máme LTI systém popsany stavovou rovnicí $x'(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t)$, kde matice A je nestabilní, můžeme ji stabilizovat zpětnou vazbou za použití stavového regulátoru. Jestli je matice stabilní nebo ne zjistíme, když vypočítáme její vlastní čísla, tedy determinant $(\lambda \cdot I - A)$ položíme roven nule. [3]

$$\det(\lambda \cdot I - A) = 0 \quad (4.29)$$

Pokud tedy bude matice A nestabilní, zavádíme stavový regulátor R :

$$u(t) = -R \cdot x(t) \quad (4.30)$$

Dosazením do stavové rovnice dostaneme:

$$x'(t) = A \cdot x(t) + B \cdot [-R \cdot x(t)] = (A - BR) \cdot x(t) \quad (4.31)$$

A zde potom matice $(A - BR)$ musí být stabilní. Ukázkový příklad:

$$x_1' = x_1 - 2x_2 + u_1$$

$$x_2' = -3x_2 + u_2$$

$$y_1 = x_1; y_2 = x_2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda \cdot I - A) = \det\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 0 & \lambda + 3 \end{pmatrix}$$

$$\det = (\lambda - 1) \cdot (\lambda + 3) \quad \lambda_1 = 1 \rightarrow \text{nestabilní} \quad \lambda_2 = -3$$

Z vypočítaného determinantu jsme získali dva kořeny $\lambda_{1,2}$ a jeden z nich je nestabilní, jelikož leží v nestabilní polorovině. Následně spočítáme matici $(A-BR)$, z které opět získáme dva kořeny.

$$(A - BR) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_{11} & 0 \\ 0 & r_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-r_{11} & -2 \\ 0 & -3-r_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda \cdot I - (A - BR)) = \det\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1-r_{11} & -2 \\ 0 & -3-r_{22} \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} \lambda-1+r_{11} & 2 \\ 0 & \lambda+3+r_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det = (\lambda-1+r_{11}) \cdot (\lambda+3+r_{22}) \quad \lambda_1 = 1-r_{11} \quad \lambda_2 = -3-r_{22}$$

Aby matice $(A-BR)$ byla stabilní, musí být vypočítané kořeny ve stabilní polorovině, tedy:

$$\begin{array}{ll} \lambda_{1,2} < 0 & \\ 1-r_{11} < 0 & -3-r_{22} < 0 \\ \underline{\underline{r_{11} > 1}} & \underline{\underline{r_{22} > -3}} \end{array} \quad \text{Např.: } R = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.2 Polynomiální přístup

Tento přístup se nejčastěji používá pro regulaci lineárních systémů, které jsou v čase neměnné. Regulátory se navrhují pomocí řešení polynomiálních rovnic, které vycházejí z popisu řízeného systému, regulátoru i ostatních signálů obvodu ve tvaru podílu dvou polynomů a také z definice cílů řízení. Tyto bývají nejčastěji: stabilita systému řízení, fyzikální realizovatelnost, kompenzace poruch vstupujících do systému a určitá kvalita řízení. Regulátorem sestaveným touto metodou se potom dají řídit například i nestabilní systémy a také ho lze použít pro systémy, kterým na vstup přivádíme jiné než skokové změny. [3]

Uvažujme, že přenosy řízeného systému $G(s)$ a poruchy $G_V(s)$ jsou ve tvarech:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b(s)}{a(s)} \quad G_V(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{c(s)}{a(s)} \quad (4.1)$$

Předpokládáme, že polynomy $b(s)$, $a(s)$ a $c(s)$, $a(s)$ jsou nesoudělné. Platí následující nerovnost:

$$\partial b(s) \leq \partial a(s) \quad \partial c(s) \leq \partial a(s) \quad (4.2)$$

Přenos regulátoru $Q(s)$ má tvar:

$$Q(s) = \frac{q(s)}{p(s)} \quad (4.3)$$

I zde jsou $q(s)$ a $p(s)$ nesoudělné a platí:

$$\partial q(s) \leq \partial p(s) \quad (4.4)$$

Vstupy - žádanou hodnotu $W(s)$ a poruchu $V(s)$ můžeme uvažovat také jako přenosy, budou mít tvar:

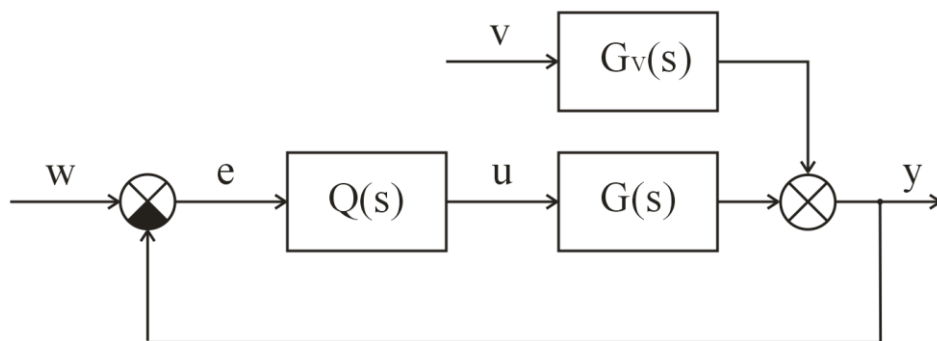
$$W(s) = \frac{h_w(s)}{f_w(s)} \quad V(s) = \frac{h_v(s)}{f_v(s)} \quad (4.5)$$

Například pro vstupy ve tvaru skokové (konstantní) funkce budou tyto přenosy:

$$W(s) = \frac{w_0}{s} \quad V(s) = \frac{v_0}{s} \quad (4.6)$$

4.2.1 Konfigurace řízení s jedním stupněm volnosti - 1DOF

U této konfigurace se jedná o standardní regulační obvod - systém se zpětnou vazbou, regulátorem a poruchovou veličinou, znázorněný na obrázku (Obr. 19).



Obrázek 19: Schéma 1DOF systému

Na obrázku (Obr. 19) lze vidět přenos regulované soustavy $G(s)$, přenos kompenzované poruchy $G_v(s)$, regulátor $Q(s)$. Dále žádaná hodnota výstupu w , akční zásah u , výstupní hodnota y , porucha v a regulační odchylka $e = w - y$.

Regulační obvod bude stabilní, pokud budou polynomy regulátoru $p(s)$ a $q(s)$ dány řešením polynomiální rovnice :

$$a(s) \cdot p(s) + b(s) \cdot q(s) = d(s) \quad (4.7)$$

Kde d je stabilní charakteristický polynom uzavřeného regulačního obvodu.

Pro splnění požadavků kompenzace poruchy a asymptotického sledování musí být regulační odchylka v konečném čase nulová. Tento požadavek bude splněn, pokud se nám podaří odstranit jmenovatele $f_W(s)$ a $f_V(s)$. Musíme tedy zjistit nejmenší společný násobek $f(s)$ těchto dvou jmenovatelů, tím zajistíme že polynom $p(s)$ jimi bude dělitelný.

Následně pro polynom $p(s)$ musí platit:

$$p(s) = f(s) \cdot \tilde{p}(s) \quad (4.8)$$

Po dosazení do rovnice (4.7) dostaneme upravenou polynomiální rovnici:

$$a(s) \cdot f(s) \cdot \tilde{p}(s) + b(s) \cdot q(s) = d(s) \quad (4.9)$$

V této rovnici neznáme stupeň polynomů $\tilde{p}(s)$ a $q(s)$. Pro zjištění těchto stupňů musíme získat stupeň polynomu $d(s)$, který se rovná vyššímu stupni členů na levé straně. Vždy bude platit $\partial(a\tilde{p}) \geq \partial(bq)$ a proto výpočet stupně $d(s)$ bude $\partial d = \partial(a\tilde{p}) = \partial a + \partial \tilde{p}$.

Dále potřebujeme znát počet neznámých koeficientů PN a počet rovnic PR :

$$PN = \partial \tilde{p} + \partial q + 2 \quad PR = \partial d + 1 = \partial a + \partial \tilde{p} + 1 \quad (4.10)$$

Počet neznámých a rovnic musí být stejný, tedy $PN = PR$ a tím dostaneme stupeň $q(s)$:

$$\partial q = \partial a + \partial \tilde{p} - 1 \quad (4.11)$$

Podle podmínky (4.4) následně dostaneme pro stupeň $\tilde{p}(s)$:

$$\partial \tilde{p} \geq \partial a - 1 \quad (4.12)$$

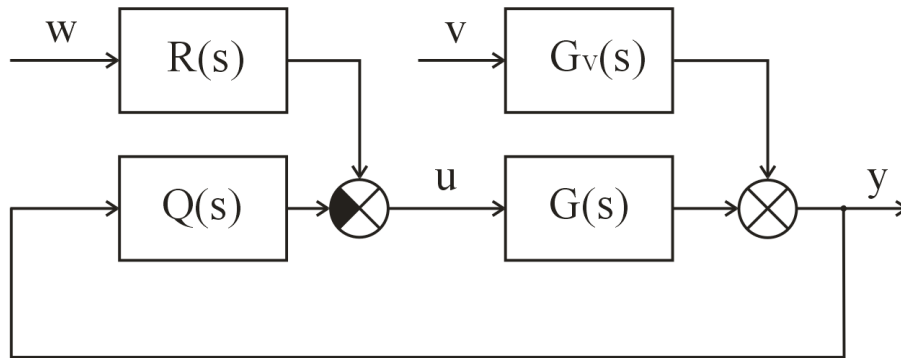
A dále dostaneme výsledný stupeň $d(s)$:

$$\partial d \geq 2 \cdot \partial a + \partial \tilde{p} - 1 \quad (4.13)$$

Pomocí těchto tří vztahů lze jednoduše dopočítat strukturu regulátoru $Q(s)$ a pak řešením polynomiální rovnice (4.9) například metodou neurčitých koeficientů s nějakým zvoleným stabilním polynomem $d(s)$ získat i jeho parametry $q(s)$ a $\tilde{p}(s)$. [3]

4.2.2 Konfigurace řízení se dvěma stupni volnosti – 2DOF

U této konfigurace je regulátor rozšířen o přímovazební část, která filtruje žádanou hodnotu. Schéma tohoto regulátoru je na obrázku (Obr. 20).



Obrázek 20: Schéma 2DOF systému

Opět máme na obrázku (Obr. 20) přenos regulované soustavy $G(s)$, přenos poruchy $G_v(s)$, zpětnovazební regulátor $Q(s)$ s přímovazební částí $R(s)$.

I zde platí, že regulační obvod bude stabilní, pokud budou polynomy $p(s)$ a $q(s)$ dány řešením polynomiální rovnice :

$$a(s) \cdot p(s) + b(s) \cdot q(s) = d(s) \quad (4.14)$$

Kde d je stabilní charakteristický polynom uzavřeného regulačního obvodu.

Pro splnění požadavků kompenzace poruchy, tedy odstranění jmenovatele $f_v(s)$, musíme zajistit, aby byl polynom $p(s)$ tímto jmenovatelem dělitelný. Proto polynom $p(s)$ musí mít tvar:

$$p(s) = f_v(s) \cdot \tilde{p}(s) \quad (4.15)$$

Pro splnění požadavků asymptotického sledování, tedy odstranění jmenovatele $f_w(s)$, musíme zajistit, aby byl polynom $d(s) - b(s) \cdot r(s)$ tímto jmenovatelem dělitelný. Proto polynom $d(s) - b(s) \cdot r(s)$ musí být roven součinu nějakého polynomu t a jmenovatele $f_w(s)$ tedy:

$$d(s) - b(s) \cdot r(s) = t(s) \cdot f_w(s) \quad (4.16)$$

Po dosazení do rovnic (4.14) a (4.16) dostaneme upravené polynomiální rovnice:

$$a(s) \cdot f_v(s) \cdot \tilde{p}(s) + b(s) \cdot q(s) = d(s) \quad (4.17)$$

$$t(s) \cdot f_w(s) + b(s) \cdot r(s) = d(s) \quad (4.18)$$

Pro vypočítání neznámých stupňů polynomů v těchto rovnicích budeme potřebovat vypočítat stupeň $d(s)$ který bude $\partial d = \partial(a f_v \tilde{p}) = \partial a + \partial f_v + \partial \tilde{p}$.

Počet neznámých koeficientů $PN1$ a počet rovnic $PR1$ v rovnici (4.17):

$$PN1 = \partial \tilde{p} + \partial q + 2 \quad PR = \partial d + 1 = \partial a + \partial f_v + \partial \tilde{p} + 1 \quad (4.19)$$

Počet neznámých a rovnic musí být stejný, tedy $PN1 = PR1$ a tím dostaneme stupeň $q(s)$:

$$\partial q = \partial a + \partial f_v - 1 \quad (4.20)$$

Podle podmínky (4.4) následně dostaneme $\tilde{p}(s)$, ale navíc zavádíme koeficient k :

$$\partial \tilde{p} = \partial a - 1 + k \quad (4.21)$$

Koeficient k se spočítá podle vzorce (4.27). Koeficient k může být pouze roven nule, nebo kladným celým číslem. Pokud tedy vyjde výpočet koeficientu k záporně, zvolíme, že $k = 0$.

Následně dostaneme výsledný stupeň $d(s)$:

$$\partial d = 2 \cdot \partial a + \partial f_v - 1 + k \quad (4.22)$$

Pomocí těchto tří vztahů lze jednoduše dopočítáme strukturu zpětnovazebního regulátoru $Q(s)$ a pak řešením polynomiální rovnice (4.17) například metodou neurčitých koeficientů s nějakým zvoleným stabilním polynomem $d(s)$ získat i jeho parametry $q(s)$ a $\tilde{p}(s)$.

Přenos přímovazební části regulátoru $R(s)$ má tvar:

$$R(s) = \frac{r(s)}{p(s)} \quad (4.23)$$

Opět $r(s)$ a $p(s)$ jsou nesoudělné a platí podmínka:

$$\partial r(s) \leq \partial p(s) \quad (4.24)$$

Pro zjištění neznámých stupňů polynomů platí, že $\partial d \geq \partial(br)$. Potom tedy $\partial d = \partial t + \partial f_w$.

Neznámé stupně polynomů jsou u $r(s)$ a $t(s)$.

Počet neznámých koeficientů $PN2$ a počet rovnic $PR2$ v rovnici (4.18):

$$PN2 = \partial t + \partial r + 2 \quad PR2 = \partial d + 1 = \partial t + \partial f_w + 1 \quad (4.25)$$

Počet neznámých a rovnic musí být stejný, tedy $PN2 = PR2$ a tím dostaneme stupeň $r(s)$:

$$\partial r = \partial f_w - 1 \quad (4.26)$$

Pro výpočet koeficientu k dosadíme do podmínky (4.24) rovnici (4.15), výpočet stupně $\tilde{p}(s)$ (4.21) a $r(s)$ (4.26). Získáme $\partial f_w - 1 \leq \partial f_v + \partial a - 1 + k$. Poté upravíme na:

$$k \geq \partial f_w - \partial f_v - \partial a \quad (4.27)$$

Nakonec musíme vypočítat stupeň polynomu $t(s)$:

$$\partial t = \partial d - \partial f_w = 2 \cdot \partial a + \partial f_v - \partial f_w - 1 + k \quad (4.28)$$

Nyní už lze dopočítat přímovazební část regulátoru $R(s)$ a pak řešením polynomiální rovnice (4.18) například metodou neurčitých koeficientů s nějakým zvoleným stabilním polynomem $d(s)$ získat i jeho parametry $r(s)$ a $\tilde{p}(s)$. [3]

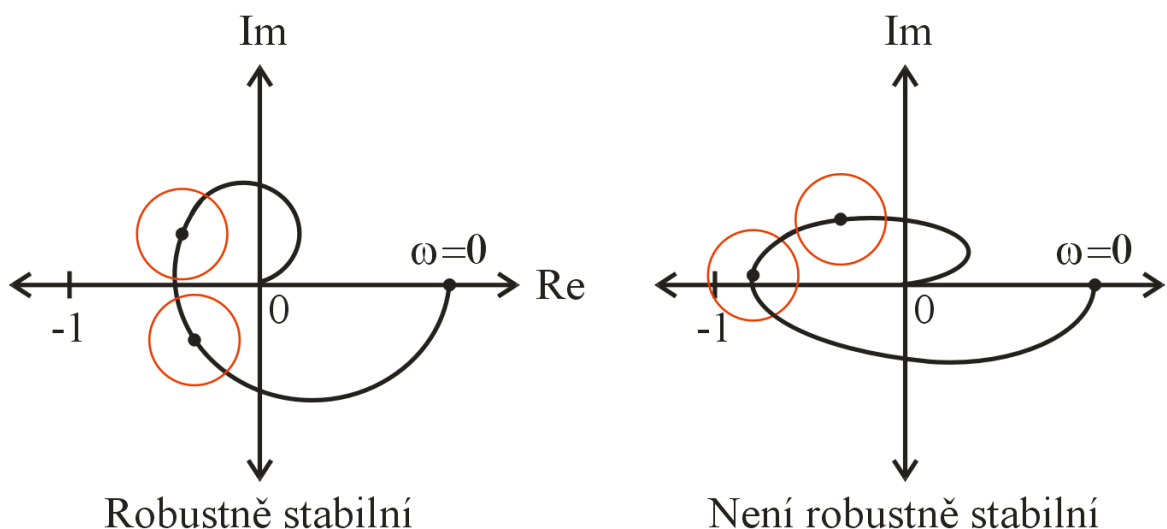
5 ROBUSTNÍ STABILITA

Pokud navrhujeme regulátor na základě matematického modelu řízené soustavy, většinou předpokládáme, že tento model odpovídá svému reálnému protějšku. Většinou ale tento model úplně neodpovídá reálnému systému, protože ho úmyslně zjednodušíme (linearizujeme nelineární systém, zanedbáváme rychlé dynamické jevy, systém se v čase pomalu mění nebo neznáme dokonale celý systém).

Robustnost systému řízení znamená, že regulátor který je navržen pro regulaci určitého nominálního systému dokáže regulovat i určitou soustavu systémů danou nějakým okolím tohoto nominálního systému. Určitou robustnost poskytují i standardně navrhované regulátory. Pokud se ale už od začátku zabýváme touto soustavou systémů, vytváříme neurčitý model a následně robustní řízení tohoto modelu. To znamená že neurčitosti systému bereme v potaz již v průběhu návrhu řízení.

Robustní stabilita tedy je, když bude nejen nominální systém stabilní, ale i celá soustava systémů tvořená nějakým jeho okolím stabilní.

Pokud použijeme Nyquistovo kritérium stability, tak systém je stabilní pokud neobklopí kritický bod na reálné ose $[-1, 0j]$. Tento systém bude robustně stabilní, pokud kolem každého bodu na křivce znázorníme nějaké okolí a v těchto okolích se nesmí nacházet kritický bod $[-1, 0j]$. [3]



Obrázek 21: Robustní stabilita

6 MÍRA STABILITY

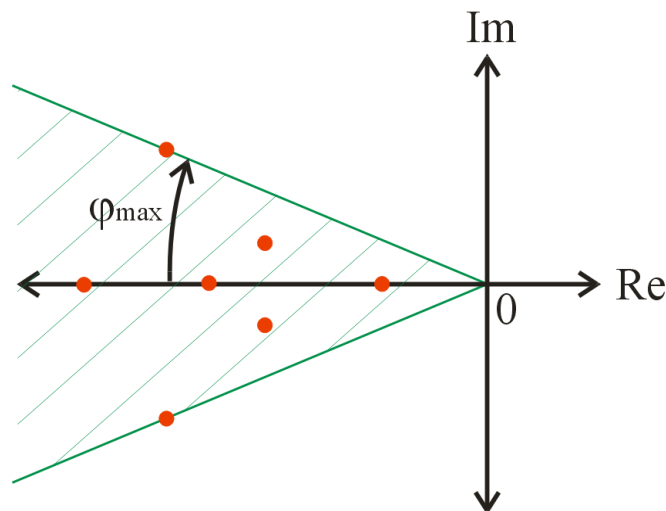
Stabilitu LTI systému určujeme podle polohy kořenů charakteristického polynomu, ale už nezjistíme jak daleko je systém od případné nestability. K tomu nám slouží takzvaná míra stability, která tuto vzdálenost vypočítá. Pro určení míry stability používáme relativní tlumení, stupeň stability, amplitudovou a fázovou bezpečnost.

6.1 Relativní tlumení

Pro definici relativního tlumení používáme komplexně sdružené póly. Hledá se maximální úhel φ_{\max} , který je mezi reálnou osou a přímkou procházející počátkem komplexní roviny a komplexně sdruženým pólem. Relativní tlumení se následně vypočítá pomocí vzorce:

$$\xi_{\min} = \cos \varphi_{\max} \quad (4.32)$$

Dané relativní tlumení bude mít systém pouze tehdy, když všechny póly charakteristického polynomu budou v oblasti znázorněné v následujícím obrázku (Obr. 22).



Obrázek 22: Relativní tlumení

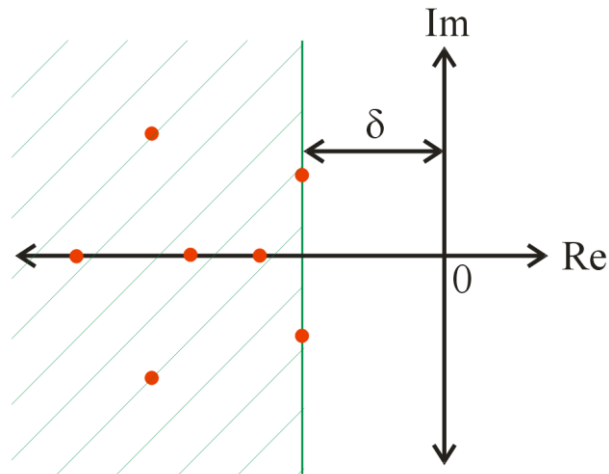
Popis uvedeného relativního odpovídá spojitému systému.

6.2 Stupeň stability

Zde zjišťujeme, jak daleko jsou nejbližší póly charakteristického polynomu od imaginární osy. Potřebujeme tedy znát pouze reálnou část pólů. Samozřejmostí je, že systém musí být stabilní. Vzorec pro výpočet stupně stability je následující:

$$\delta = \min |\operatorname{Re}(s_i)| \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.33)$$

Ve vzorci s_i je pól stabilního systému a $\operatorname{Re}(s_i)$ znamená reálnou část tohoto pólu. Systém bude mít stupeň stability δ , pokud všechny póly charakteristického polynomu budou v oblasti znázorněné na následujícím obrázku (Obr. 23).



Obrázek 23: Stupeň stability

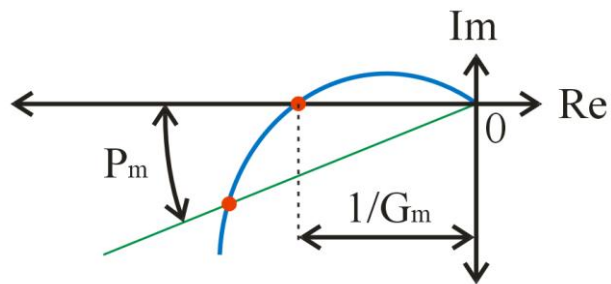
6.3 Amplitudová a fázová bezpečnost

Vychází z Nyquistova kritéria stability. Nyquistovu křivku otevřeného regulačního obvodu označíme jako $G(j\omega)$. Amplitudová bezpečnost G_m je konstanta, kterou lze vynásobit zesílení (čitatel) otevřeného systému tak, aby byl uzavřený systém na hranici stability. Vzorec pro výpočet amplitudové bezpečnosti vypadá:

$$G_m = \frac{1}{|G(j\omega_c)|} \quad (4.34)$$

Ve vzorci ω_c je kritická frekvence otevřené smyčky.

Fázová bezpečnost P_m je úhel, o který je možné natočit frekvenční charakteristiku otevřeného systému tak, aby byl uzavřený systém na hranici stability.



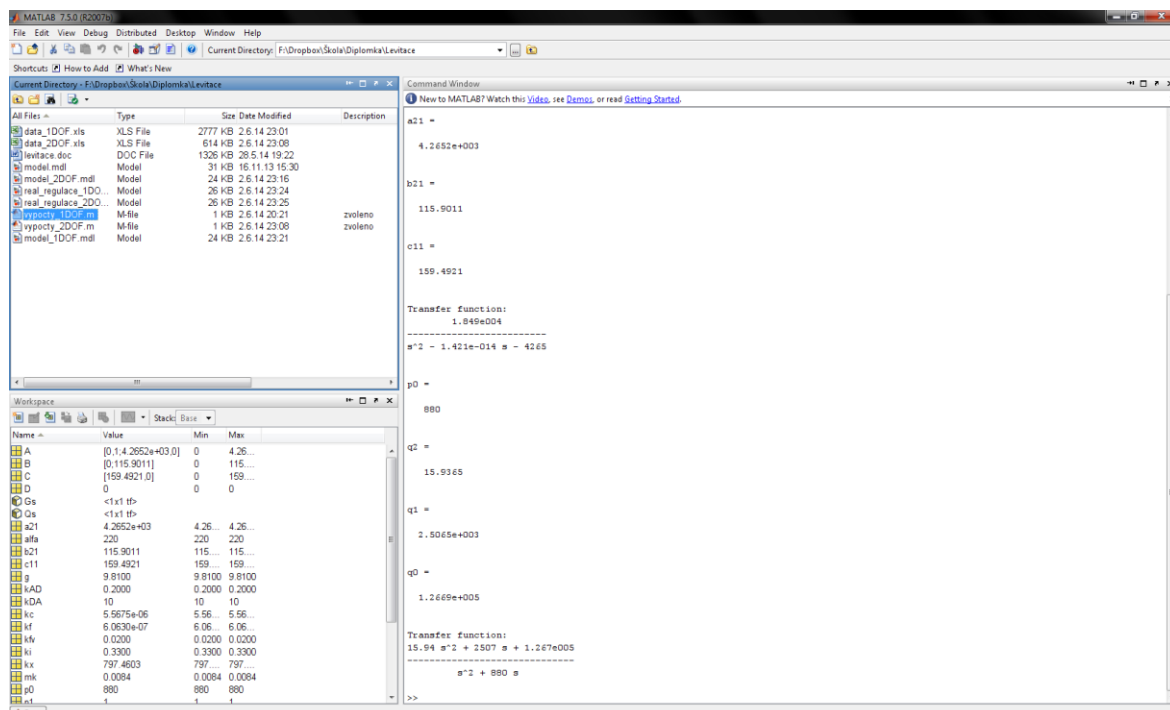
Obrázek 24: Amplitudová a fázová bezpečnost

Na obrázku (Obr. 24) je znázorněn úhel natočení P_m , který zvětšujeme nebo zmenšujeme tak, aby křivka procházela na reálné ose bodem $[-1, 0j]$. Když bude procházet tímto bodem, je systém na hranici stability. Podobně je to i u amplitudové bezpečnosti G_m . Zde opět zvětšujeme nebo zmenšujeme zesílení otevřeného systému tak, aby křivka procházela bodem $[-1, 0j]$. [3]

II. PRAKTICKÁ ČÁST

7 PROSTŘEDÍ MATLAB

MATLAB je programové prostředí, které zvládá matematické výpočty, vykreslování grafů, vytváření aplikací i s uživatelským rozhraním a mnoho dalšího. Proto je také v dnešní době nejpoužívanější program tohoto typu na univerzitách technického zaměření. Po spuštění se nám otevře okno s pracovní plochou, která se skládá z hlavní lišty, příkazového okna, aktuálního adresáře a pracovní plochy (workspace). Jednotlivé části vidíme na obrázku (Obr. 25).



Obrázek 25: Prostředí MATLAB

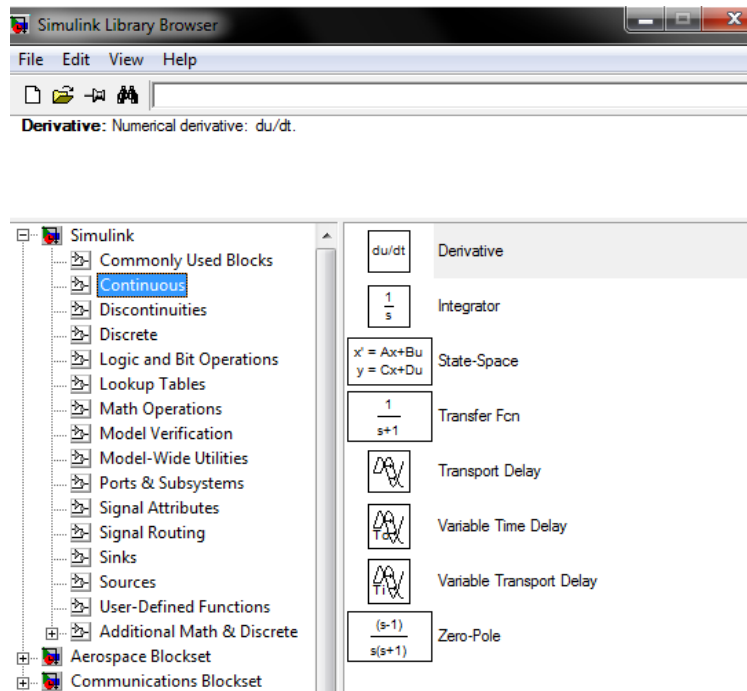
V pracovní ploše najdeme veškeré proměnné které se používají. Jsou zde názvy proměnných, hodnoty a u matic, polí nebo struktur jsou zde také minimální a maximální hodnoty. Velkou výhodou je, že proměnné nemají napevno určený datový typ. V průběhu vykonávání příkazů nebo programu do proměnné můžeme vkládat různé datové typy. Proměnná bude mít vždy datový typ podle poslední vložené hodnoty nebo textu.

Pokud potřebujeme zadat více příkazů nebo jen chceme tyto příkazy uložit, můžeme použít takzvaný M-File. Tímto způsobem se také dají programovat funkce, které se dají přidat do knihoven MATLABu. Do M-File se také píší programy u kterých si lze psát komentáře.

MATLAB nabízí mnoho doplňků a rozšíření (takzvané toolboxy). Například Control System Toolbox, Simulink nebo Guide.

7.1 Simulink

Slouží pro simulace a modelování dynamických systémů. Po otevření máme k dispozici knihovnu, která je na obrázku (Obr. 26).



Obrázek 26: Knihovna Simulinku

Z této knihovny kopírujeme bloky na pracovní plochu modelu, kde je následně spojujeme. Tím vytvoříme funkční model systému, a můžeme ověřit jeho chování. S pomocí Simulinku můžeme také ovládat reálné systémy. Simulink byl například využit pro řízení reálného modelu magnetické levitace.

Více ohledně programu MATLAB se dozvíte v publikaci:

HONC, D. - DUŠEK, F. Využití Matlabu při návrhu a ověření řízení. In Dopravní systémy 2005. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2005. s. 270-276. ISBN 80-7194-805-5.

HONC, D. - DUŠEK, F. Řízení vícerozměrové soustavy prediktivním regulátorem v Simulinku. In 13th Annual Conference Proceedings, Technical Computing Prague 2005. Praha: Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, 2005. s. 44 1-3. ISBN 80-7080-577-3.

8 STABILIZACE NESTABILNÍCH SYSTÉMŮ

8.1 Model magnetické levitace CE152



Obrázek 27: Model magnetické levitace CE152

Laboratorní model magnetické levitace CE152 (Obr. 27) je nelineární a nestabilní systém. Tento model se skládá z indukční cívky (elektromagnetu), ocelové kuličky a indukčního snímače připojeného k A/D převodníku. Cílem je nechat kuličku levitovat ve vzduchu. Toho docílíme tím, že gravitační sílu vyrovnáme magnetickou silou elektromagnetu. Musíme tedy přivést do cívky takové množství proudu, aby vytvořil magnetickou sílu rovnou gravitační síle. Snímání polohy kuličky zajišťuje indukční snímač připojený na A/D převodník. Proud procházející cívkou je regulován napětím pomocí regulátoru.

Vertikální pohyb kuličky je popsán nelineární diferenciální rovnicí:

$$m_k \cdot \ddot{x} - k_{fv} \cdot \dot{x} = \frac{i^2 \cdot k_c}{x^2} - m_k \cdot g \quad (8.1)$$

kde je hmotnost kuličky m_k , proud i , konstanta cívky k_c a tíhové zrychlení g .

Veškeré hodnoty parametrů systému jsou napsány v tabulce (Tab. 1).

Tabulka 1: Parametry modelu magnetické levitace

Značka	Popis	Hodnota a jednotka
g	Tíhové zrychlení	9,81 m/s ²
k_{AD}	A/D převodník	0,2 MU/V
k_{DA}	D/A převodník	20 V/MU
k_c	Konstanta cívky	1,769 Nm ² /A ²
k_i	Zesílení zesilovače u cívky	0,3 A/V
k_{fv}	Tlumení kuličky	0,02 Ns/m
k_x	Zesílení snímače polohy	821,36 V/m
m_k	Hmotnost kuličky	0,00827 kg
x_0	Offset cívky	0,0076 m
y_0	Offset snímače polohy	0,0183 V

Matematický model nelineárního systému magnetické levitace vypadá následovně:

$$\frac{m_k}{k_{AD} \cdot k_x} \cdot \ddot{y}_{MU} - \frac{k_{fv}}{k_{AD} \cdot k_x} \cdot \dot{y}_{MU} = \frac{(k_i \cdot k_{DA} \cdot u_{MU})^2 \cdot k_c}{\left(\frac{y_{MU} - k_{AD} \cdot y_0}{k_{AD} \cdot k_x} - x_0\right)^2} - m_k \cdot g \quad (8.2)$$

Aby jsme mohli použít regulátory navržené polynomiální metodou 1DOF a 2DOF, musíme systém linearizovat v okolí pracovního bodu.

8.1.1 Linearizace systému

Nejprve musíme zvolit vhodnou substituci:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_{MU} & \dot{x}_1 &= f_1(x, u) \\ x_2 &= \dot{y}_{MU} & \dot{x}_2 &= f_2(x, u) \end{aligned}$$

x_1 nyní bude zastupovat polohu a x_2 rychlost kuličky.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} \cdot [u] \\ y &= [c_{11} \quad c_{12}] \cdot \begin{bmatrix} x \\ x_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$f_1(x) = \dot{x}_1 = x_2$$

$$f_2(x) = \frac{k_{fv}}{k_{AD}} x_2 + \frac{(k_{DA} \cdot k_i \cdot u_{MU})^2 \cdot k_c \cdot k_x \cdot k_{AD}}{m_k \cdot \left(\frac{x_1 - k_{AD} \cdot y_0}{k_x \cdot k_{AD}} - x_0 \right)^2} - k_x \cdot k_{AD} \cdot g$$

Hodnotu u_{MU} v rovnovážném stavu spočítáme:

$$u_{MU} = - \frac{x_1 - k_{AD} \cdot y_0 - k_x \cdot k_{AD} \cdot x_0}{\sqrt{\frac{k_c}{m_k \cdot g} \cdot k_x \cdot k_{AD} \cdot k_{DA} \cdot k_i}}$$

Výpočet matic linearizovaného systému:

$$\frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} \Rightarrow a_{11} = 0 \qquad \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} \Rightarrow a_{21} = \frac{-2 \cdot (k_{DA} \cdot k_i \cdot u_{MU})^2 \cdot k_c \cdot k_x \cdot k_{AD}}{m_k \cdot \left(\frac{x_1 - k_{AD} \cdot y_0}{k_x \cdot k_{AD}} - x_0 \right)^3} \cdot k_x \cdot k_{AD}$$

$$\frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} \Rightarrow a_{12} = 1 \qquad \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} \Rightarrow a_{22} = \frac{k_{fv}}{k_{AD}}$$

$$\frac{\partial f_1(x)}{\partial u} \Rightarrow b_{11} = 0 \qquad \frac{\partial f_2(x)}{\partial u} \Rightarrow b_{21} = \frac{(k_{DA} \cdot k_i)^2 \cdot 2 \cdot u_{MU} \cdot k_c \cdot k_x \cdot k_{AD}}{m_k \cdot \left(\frac{x_1 - k_{AD} \cdot y_0}{k_x \cdot k_{AD}} - x_0 \right)^2}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-2 \cdot (k_{DA} \cdot k_i \cdot u_{MU})^2 \cdot k_c \cdot k_x \cdot k_{AD}}{m_k \cdot \left(\frac{x_1 - k_{AD} \cdot y_0}{k_x \cdot k_{AD}} - x_0 \right)^3} \cdot k_x \cdot k_{AD} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{k_{fv}}{k_{AD}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{(k_{DA} \cdot k_i)^2 \cdot 2 \cdot u_{MU} \cdot k_c \cdot k_x \cdot k_{AD}}{m_k \cdot \left(\frac{x_1 - k_{AD} \cdot y_0}{k_x \cdot k_{AD}} - x_0 \right)^2} \end{bmatrix} [u]$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

x_1 a x_2 v rovnovážném stavu budou vypadat následovně:

$$x_1^S = - \sqrt{\frac{k_c}{m_k \cdot g}} \cdot k_i \cdot k_x \cdot k_{AD} \cdot k_{DA} \cdot u_{MU}^S + k_x \cdot k_{AD} \cdot x_0 + k_{AD} \cdot y_0$$

$$x_2^S = 0$$

Po dosazení budou vypadat matice následovně:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2 \cdot g}{k_i \cdot k_{DA} \cdot u_{MU}^S \cdot \sqrt{\frac{k_c}{m_k \cdot g}}} & \frac{k_{fv}}{m_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2 \cdot k_x \cdot k_{AD} \cdot g}{u_{MU}^S} \end{bmatrix} [u] \\ y &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Zvolíme **pracovní bod** $x_I = 0,003$ m.

Následně dostaneme přenos:

$$G(s) = \frac{8792}{s^2 - 2,418s + 3465} \quad [8]$$

8.1.2 Návrh regulátoru polynomiální metodou 1DOF

Jelikož máme nyní lineární přenos systému, můžeme aplikovat postup návrhu regulátoru pomocí polynomiální metody 1DOF. Tento postup byl popsán v kapitole 4.1.1.

$$G(s) = \frac{8792}{s^2 - 2,418s + 3465} = \frac{b(s)}{a(s)}$$

Vstupy uvažujeme jako skokovou (konstantní) funkci:

$$w(s) = \frac{w_0}{s} \quad v(s) = \frac{v_0}{s} \quad \Rightarrow \quad f(s) = s$$

Vypočítáme stupně jednotlivých polynomů:

$$\begin{aligned} \rho q &= \rho a + \rho f - 1 = 2 + 1 - 1 = 2 & q(s) &= q_2 \cdot s^2 + q_1 \cdot s + q_0 \\ \rho \tilde{p} &= \rho a - 1 = 2 - 1 = 1 & \tilde{p}(s) &= \tilde{p}_1 \cdot s + \tilde{p}_0 \\ \rho d &= 2 \cdot \rho a + \rho f - 1 = 4 + 1 - 1 = 4 & d(s) &= d_4 \cdot s^4 + d_3 \cdot s^3 + d_2 \cdot s^2 + d_1 \cdot s + d_0 \end{aligned}$$

Jakmile známe stupně polynomů, můžeme sestavit strukturu regulátoru:

$$Q(s) = \frac{q_2 \cdot s^2 + q_1 \cdot s + q_0}{(\tilde{p}_1 \cdot s + \tilde{p}_0) \cdot s}$$

Aby byl regulační obvod stabilní, budeme dosazovat do polynomiální rovnice (4.9).

Polynom $d(s)$ musí být stabilní, zvolíme ho v nejjednodušší podobě $(s+\alpha)^4$ kde $\alpha > 0$ a kořeny pak budou $p_{1,2,3,4} = -\alpha$.

$$\begin{aligned} a \cdot \tilde{p} \cdot f + b \cdot q &= d \\ (s^2 - 2,418s + 3465) \cdot (\tilde{p}_1 \cdot s + \tilde{p}_0) \cdot s + 8792 \cdot (q_2 \cdot s^2 + q_1 \cdot s + q_0) &= (s + \alpha)^4 \\ \tilde{p}_1 \cdot s^4 + \tilde{p}_0 \cdot s^3 - 2,418\tilde{p}_1 \cdot s^3 - 2,418\tilde{p}_0 \cdot s^2 + 3465\tilde{p}_1 \cdot s^2 + 3465\tilde{p}_0 \cdot s + \\ + 8792q_2 \cdot s^2 + 8792q_1 \cdot s + 8792q_0 &= s^4 + 4s^3\alpha + 6s^2\alpha^2 + 4s\alpha^3 + \alpha^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s^4 : \quad \tilde{p}_1 &= 1 \\ s^3 : \quad \tilde{p}_0 - 2,418\tilde{p}_1 &= 4\alpha & \tilde{p}_0 &= 4\alpha + 2,418 \\ s^2 : \quad -2,418\tilde{p}_0 + 3465\tilde{p}_1 + 8792q_2 &= 6\alpha^2 & q_2 &= \frac{6\alpha^2 + 2,418\tilde{p}_0 - 3465}{8792} \\ s^1 : \quad 3465\tilde{p}_0 + 8792q_1 &= 4\alpha^3 & q_1 &= \frac{4\alpha^3 - 3465\tilde{p}_0}{8792} \\ s^0 : \quad 8792q_0 &= \alpha^4 & q_0 &= \frac{\alpha^4}{8792} \end{aligned}$$

Aby byl regulátor stabilní, musí platit podmínka:

$$\begin{aligned} (\tilde{p}_1 \cdot s + \tilde{p}_0) &= (1 \cdot s + \tilde{p}_0) \quad \Rightarrow \quad \tilde{p}_0 > 0 \\ p_0 > 0 \quad \Rightarrow \quad 4\alpha + 2,418 &> 0 \\ & \alpha > -\frac{2,418}{4} \\ & \alpha > -0,6045 \end{aligned}$$

Výsledný zpětnovazební regulátor pro $\alpha = 125$ bude:

$$Q(s) = \frac{10,41s^2 + 690,6s + 27768}{s^2 + 502,4s}$$

8.1.3 Návrh regulátoru polynomiální metodou 2DOF

Použijeme postup, který byl popsán v kapitole 4.1.2.

$$G(s) = \frac{8792}{s^2 - 2,418s + 3465} = \frac{b(s)}{a(s)}$$

Vstupy uvažujeme jako skokovou (konstantní) funkci:

$$w(s) = \frac{w_0}{s} \quad \Rightarrow \quad f_w(s) = s \quad v(s) = \frac{v_0}{s} \quad \Rightarrow \quad f_v(s) = s$$

Vypočítáme stupně jednotlivých polynomů:

$$\begin{aligned}
 k &= \rho f_w - \rho f_v - \rho a = 1 - 1 - 2 = -2 & k &= 0 \\
 \rho q &= \rho a + \rho f_v - 1 = 2 + 1 - 1 = 2 & q(s) &= q_2 \cdot s^2 + q_1 \cdot s + q_0 \\
 \rho \tilde{p} &= \rho a - 1 + k = 2 - 1 = 1 & \tilde{p}(s) &= \tilde{p}_1 \cdot s + \tilde{p}_0 \\
 \rho d &= 2 \cdot \rho a + \rho f_v - 1 + k = 4 + 1 - 1 = 4 & d(s) &= d_4 \cdot s^4 + d_3 \cdot s^3 + d_2 \cdot s^2 + d_1 \cdot s + d_0 \\
 \rho r &= \rho f_w - 1 = 1 - 1 = 0 & r(s) &= r_0 \\
 \rho t &= 2 \cdot \rho a + \rho f_v - \rho f_v - 1 + k = 4 + 1 - 2 = 3 & t(s) &= t_3 \cdot s^3 + t_2 \cdot s^2 + t_1 \cdot s + t_0
 \end{aligned}$$

Jakmile známe stupně polynomů, můžeme sestavit strukturu zpětnovazebního a přímého regulátoru:

$$Q(s) = \frac{q_2 \cdot s^2 + q_1 \cdot s + q_0}{(\tilde{p}_1 \cdot s + \tilde{p}_0) \cdot s} \qquad R(s) = \frac{r_0}{(\tilde{p}_1 \cdot s + \tilde{p}_0) \cdot s}$$

Aby byl regulační obvod stabilní, dosadíme do uvedené polynomiální rovnice:

$$\begin{aligned}
 a \cdot \tilde{p} \cdot f_v + b \cdot q &= d \\
 (s^2 - 2,418s + 3465) \cdot (\tilde{p}_1 \cdot s + \tilde{p}_0) \cdot s + 8792 \cdot (q_2 \cdot s^2 + q_1 \cdot s + q_0) &= (s + \alpha)^4 \\
 \tilde{p}_1 \cdot s^4 + \tilde{p}_0 \cdot s^3 - 2,418\tilde{p}_1 \cdot s^3 - 2,418\tilde{p}_0 \cdot s^2 + 3465\tilde{p}_1 \cdot s^2 + 3465\tilde{p}_0 \cdot s + & \\
 + 8792q_2 \cdot s^2 + 8792q_1 \cdot s + 8792q_0 &= s^4 + 4s^3\alpha + 6s^2\alpha^2 + 4s\alpha^3 + \alpha^4
 \end{aligned}$$

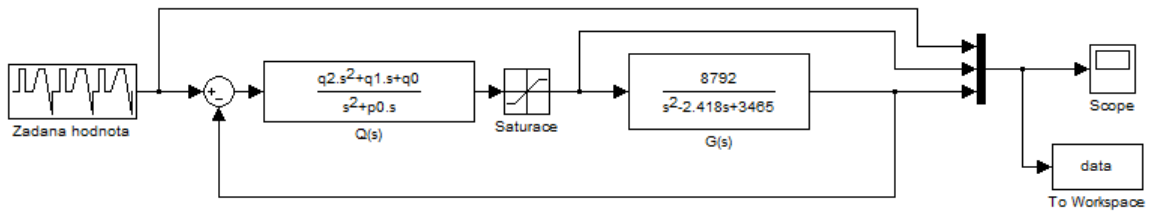
$$\begin{aligned}
 s^4 : \quad \tilde{p}_1 &= 1 \\
 s^3 : \quad \tilde{p}_0 - 2,418\tilde{p}_1 &= 4\alpha & \tilde{p}_0 &= 4\alpha + 2,418 \\
 s^2 : \quad -2,418\tilde{p}_0 + 3465\tilde{p}_1 + 8792q_2 &= 6\alpha^2 & q_2 &= \frac{6\alpha^2 + 2,418\tilde{p}_0 - 3465}{8792} \\
 s^1 : \quad 3465\tilde{p}_0 + 8792q_1 &= 4\alpha^3 & q_1 &= \frac{4\alpha^3 - 3465\tilde{p}_0}{8792} \\
 s^0 : \quad 8792q_0 &= \alpha^4 & q_0 &= \frac{\alpha^4}{8792}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b \cdot \tilde{p} + t \cdot f_w &= d \\
 8792 \cdot r_0 + (t_3 \cdot s^3 + t_2 \cdot s^2 + t_1 \cdot s + t_0) \cdot s &= (s + \alpha)^4 \\
 t_3 \cdot s^4 + t_2 \cdot s^3 + t_1 \cdot s^2 + t_0 \cdot s + 8792 \cdot r_0 &= s^4 + 4s^3\alpha + 6s^2\alpha^2 + 4s\alpha^3 + \alpha^4 \\
 s^0 : \quad 8792 \cdot r_0 &= \alpha^4 & r_0 &= \frac{\alpha^4}{8792}
 \end{aligned}$$

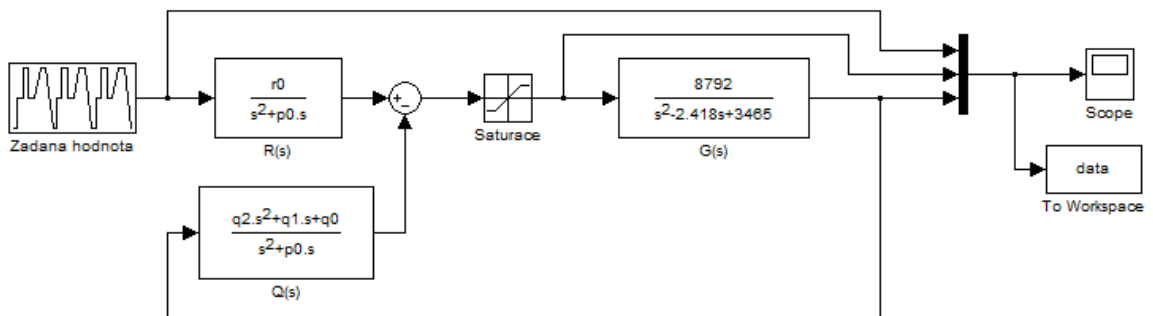
Výsledný zpětnovazební a přímý regulátor pro $\alpha = 150$ bude:

$$Q(s) = \frac{15,13 \cdot s^2 + 1298 \cdot s + 57580}{s^2 + 602,4 \cdot s} \qquad R(s) = \frac{57580}{s^2 + 960s}$$

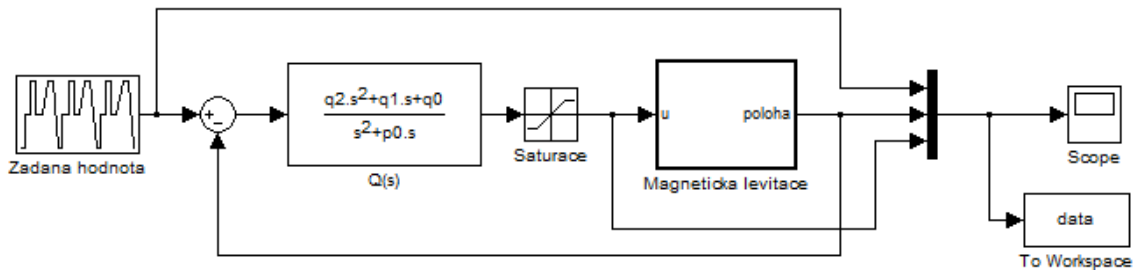
8.1.4 Návrh schémat regulátorů 1DOF a 2DOF pro matematický a reálný model



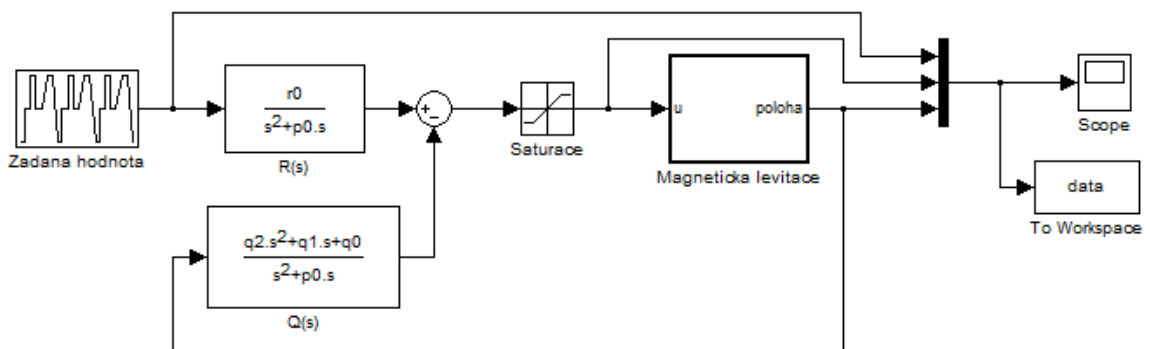
Obrázek 28: Schéma matematického modelu levitace s 1DOF regulátorem



Obrázek 29: Schéma matematického modelu levitace s 2DOF regulátorem



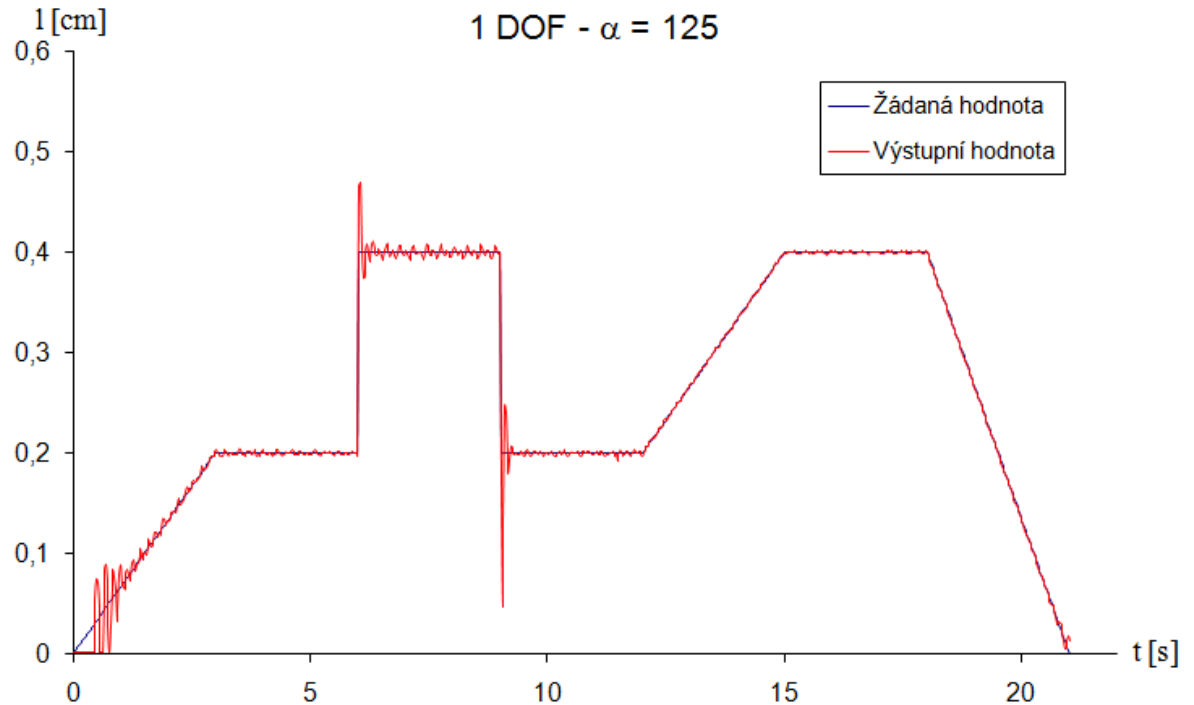
Obrázek 30: Schéma reálného modelu levitace s 1DOF regulátorem



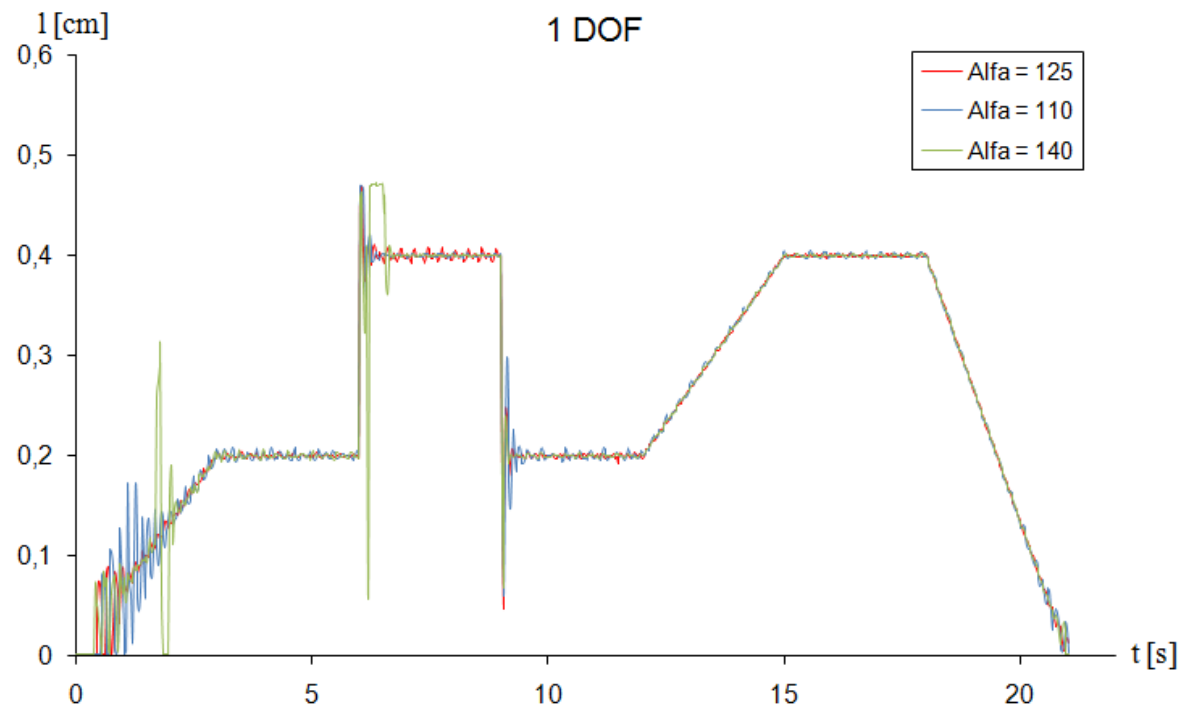
Obrázek 31: Schéma reálného modelu levitace s 2DOF regulátorem

8.1.5 Výsledné grafické průběhy

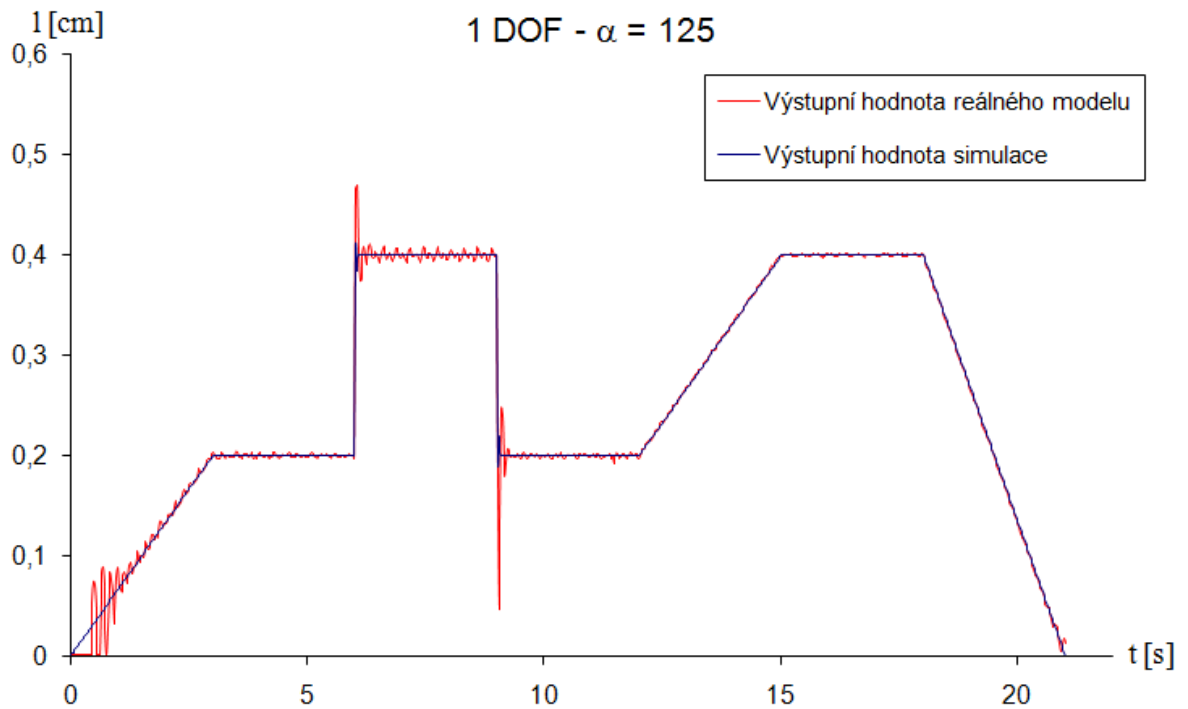
8.1.5.1 Grafický průběh při použití 1DOF regulátoru



Obrázek 32: Průběh regulace polohy $\alpha = 125$ - 1DOF regulátor



Obrázek 33: Průběh regulace polohy pro různé α - 1DOF regulátor

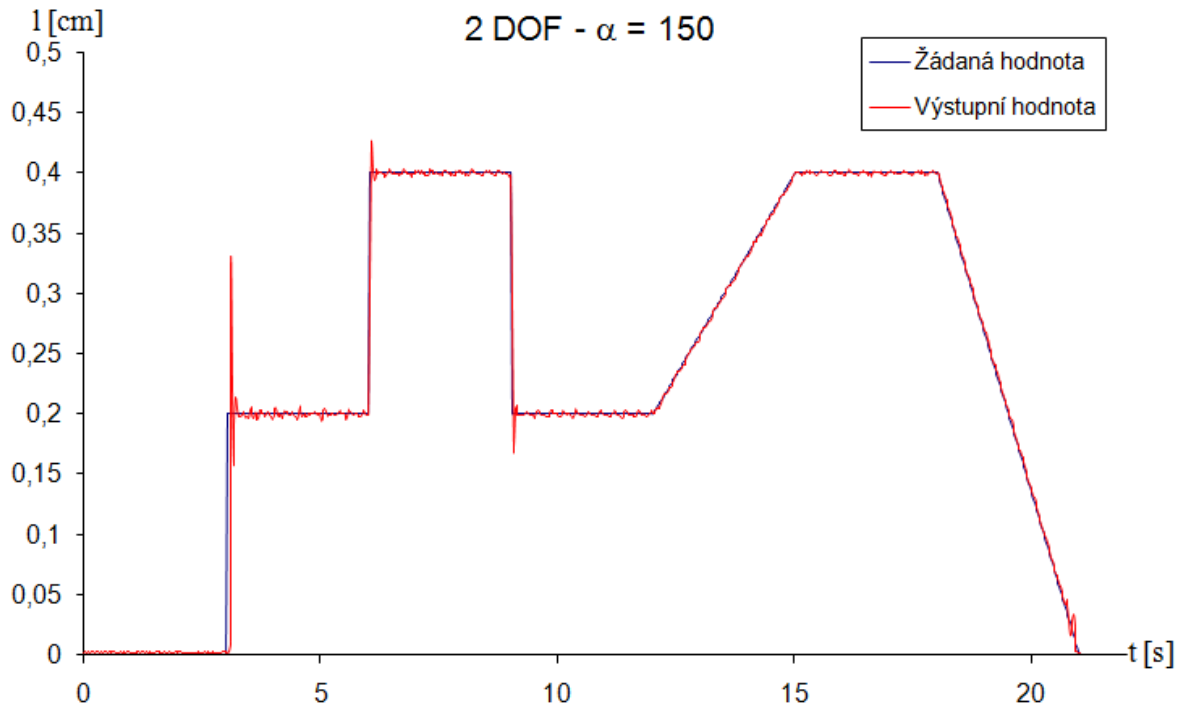
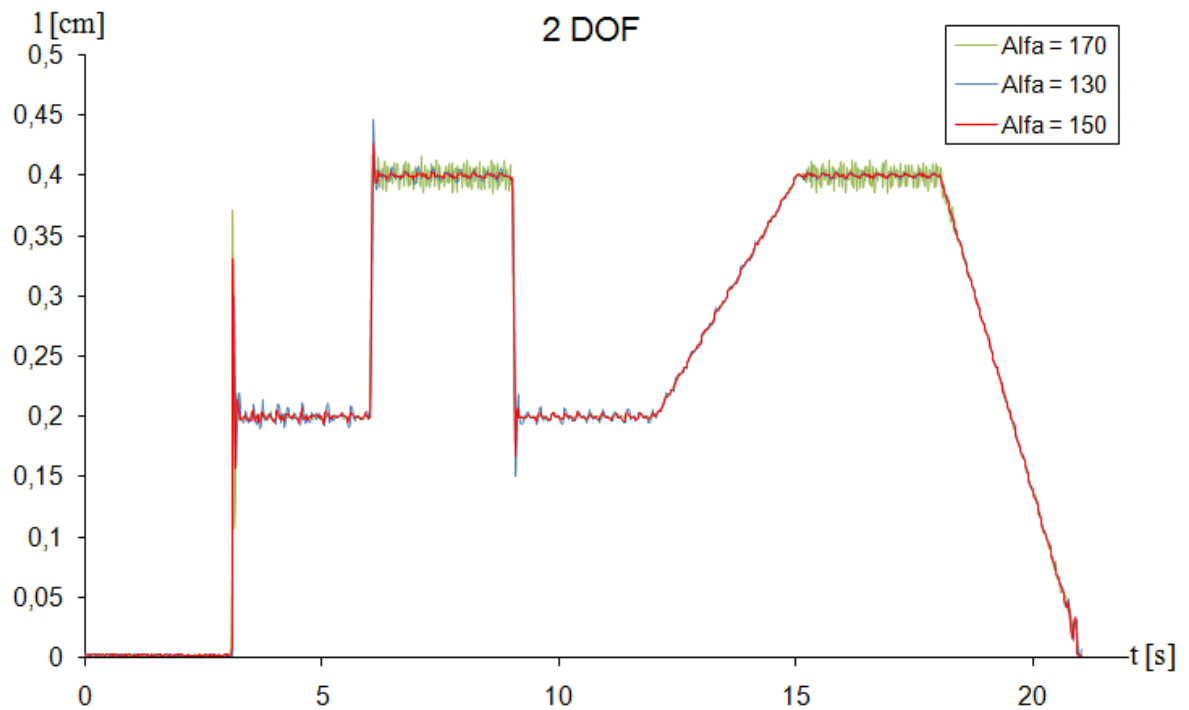


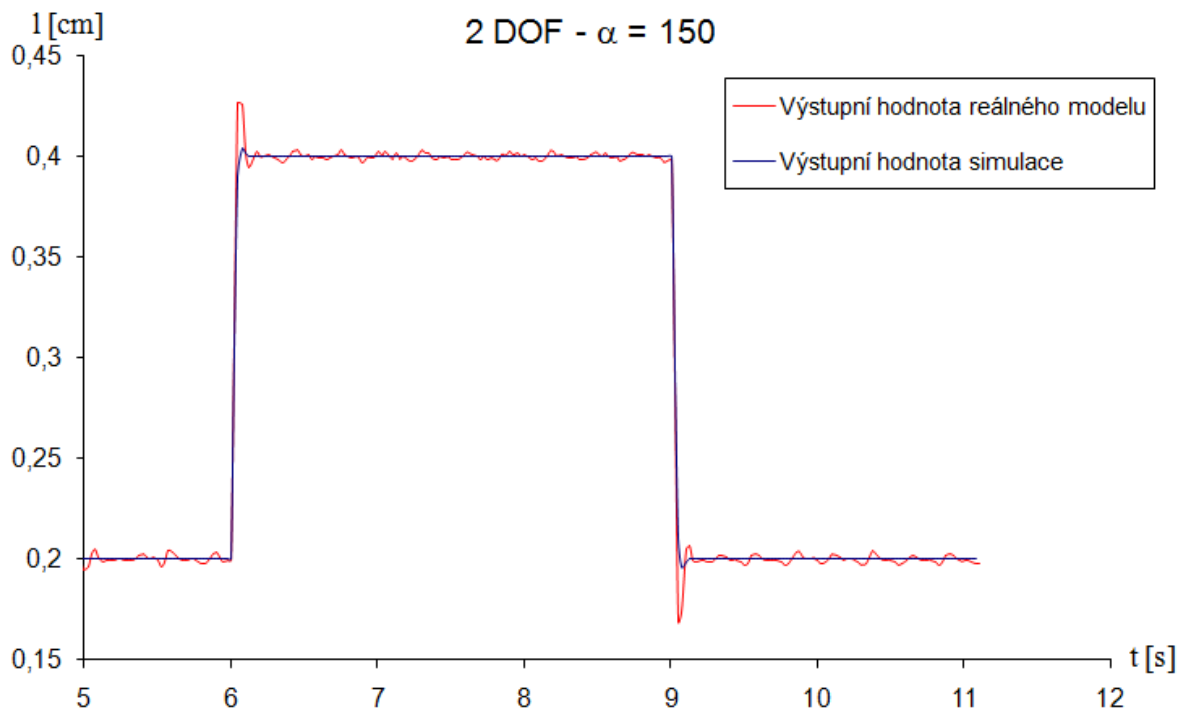
Obrázek 34: Průběh regulace polohy reálného modelu a simulace - 1DOF regulátor

Jak lze vidět z obrázku (Obr. 33), nejlepší průběh regulace je při $\alpha = 125$. Při vyšším α trvá poměrně dlouho, než se kulička ustálí. Při menším α jsou větší překmity u skokové změny žádané hodnoty.

V obrázku (Obr. 34) je porovnání simulace a reálného měření. U reálného měření dochází k větším kmitům při skokové změně žádané hodnoty. Tyto rozdíly jsou způsobeny jednak linearizací systému a také se reálný systém většinou nechová úplně stejně jako simulace.

8.1.5.2 Grafický průběh při použití 2DOF regulátoru

Obrázek 35: Průběh regulace polohy $\alpha = 150$ - 2DOF regulátorObrázek 36: Průběh regulace polohy pro různé α - 2DOF regulátor



Obrázek 37: Průběh regulace polohy reálného modelu a simulace - 2DOF regulátor

Opět na obrázku (Obr. 36) je vidět, že nejlepší průběh je pro $\alpha = 150$. Při větším α dochází k výraznějšímu kmitání kolem žádané hodnoty a také jsou zde větší nároky na akční zásah. Při nižším α dochází k větším překmitům při skokové změně žádané hodnoty a také k nepatrně většímu kmitání při ustálení.

Na obrázku (Obr. 37) je porovnání průběhů reálného měření a simulace. U reálného měření dochází k větším překmitům při skokové změně žádané hodnoty, i zde je to způsobeno nepřesným matematickým modelem simulace.

8.2 Simulace stabilizace ve stavovém prostoru

Použijeme výpočty z kapitoly 4.1, kde máme stavový popis nestabilního systému a stabilizujeme ho pomocí zpětné stavové vazby a stavového regulátoru R .

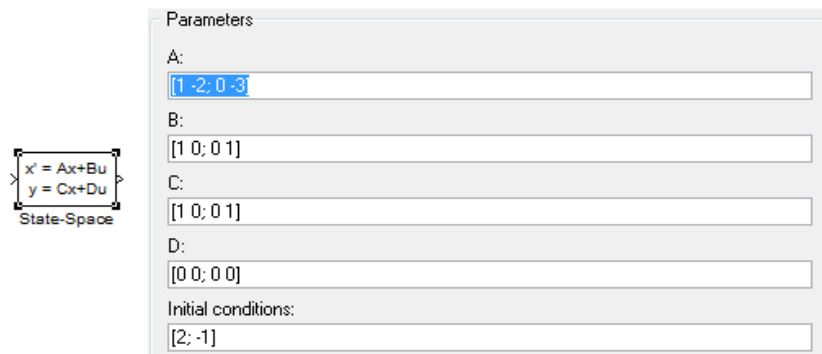
$$x_1' = x_1 - 2x_2 + u_1$$

$$x_2' = -3x_2 + u_2$$

$$y_1 = x_1; y_2 = x_2$$

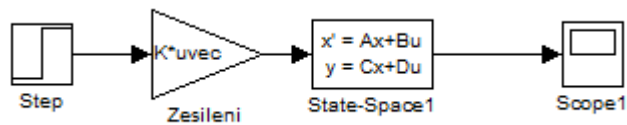
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

V Simulinku použijeme blok "State-Space", do kterého zadáme matice popisující systém. Nastavení je na obrázku (Obr. 38).

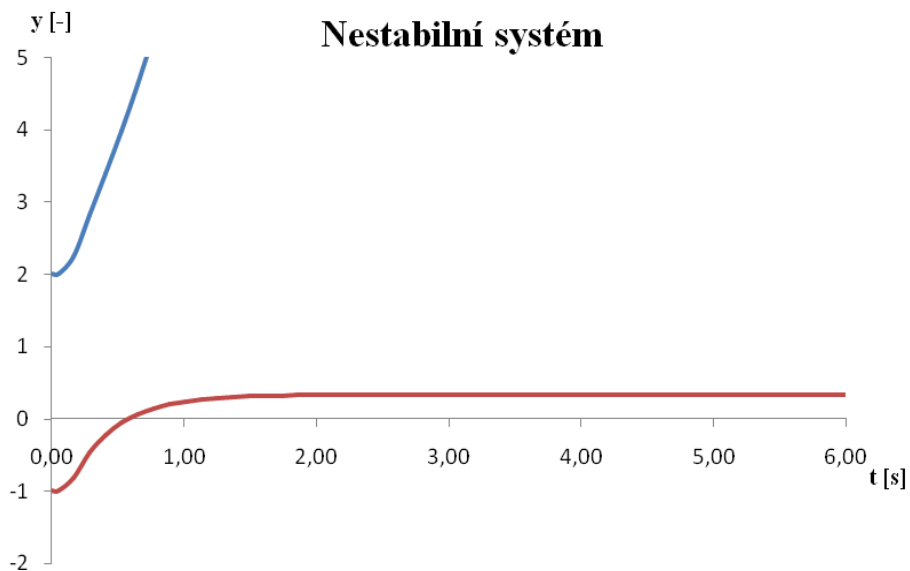


Obrázek 38: Nastavení stavového popisu v Simulinku

Zadali jsme počáteční hodnoty $[2; -1]$. Nejdříve otestujeme, jestli je daný systém opravdu nestabilní. Schéma pro tento pokus je na obrázku (Obr. 39) a výsledné průběhy na obrázku (Obr. 40).



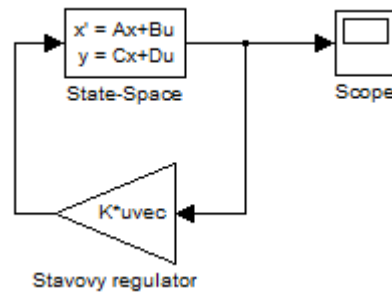
Obrázek 39: Nestabilní systém



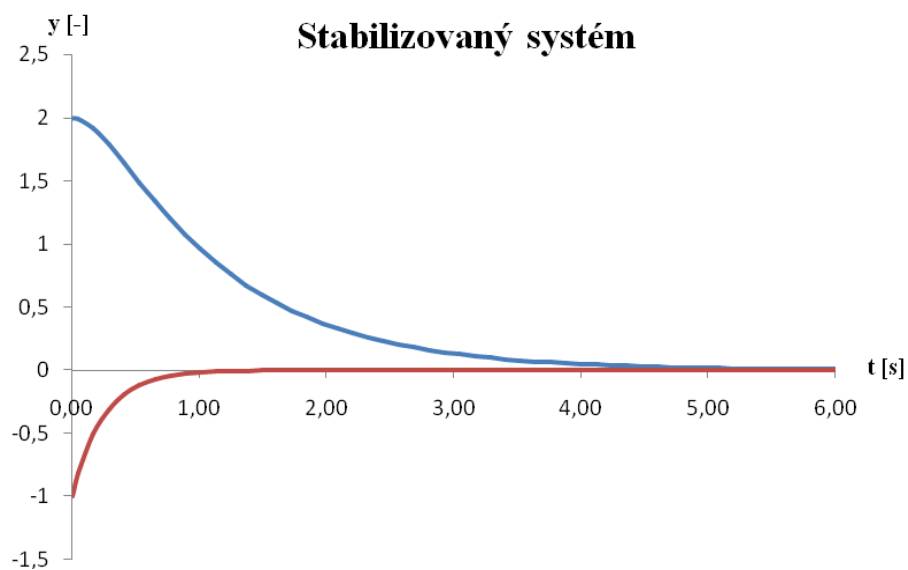
Obrázek 40: Průběh nestabilního systému

Na obrázku (Obr. 40) vidíme, že jeden výstup jde do nekonečna, místo toho aby se ustálil na určité hodnotě. Systém je tedy nestabilní.

Nyní vložíme do zpětné vazby stavový regulátor R, který jsme spočítali v kapitole 4.1. Schéma je na obrázku (Obr. 41) a výsledné průběhy na obrázku (Obr. 42).



Obrázek 41: Stabilizovaný systém



Obrázek 42: Průběh stabilizovaného systému

Jak lze vidět z obrázku (Obr. 42), systém se podařilo stabilizovat. Výstup který předtím šel do nekonečna se vrátí na ustálenou hodnotu. U druhého výstupu lze pozorovat rychlejší ustálení. Stabilizace systému byla tedy úspěšná.

8.3 Simulace stabilizace pomocí Ljapunovy metody

Řízení systému vychází z rovnice:

$$\dot{y} = -a \cdot y + b \cdot u \quad (8.3)$$

kde řízení je podle rovnice:

$$u = r_0 \cdot w + q_0 \cdot y \quad (8.4)$$

Pokud dosadíme rovnici (8.4) do rovnice (8.3) dostaneme:

$$\dot{y} = -a \cdot y + b \cdot r_0 \cdot w - b \cdot q_0 \cdot y \quad (8.5)$$

Pro Ljapunovu metodu musíme rozšířit rovnici (8.3) následovně:

$$\dot{y} = -a \cdot y + b \cdot q_0^* \cdot y - b \cdot q_0^* \cdot y - b \cdot q_0 \cdot y + b \cdot r_0 \cdot w \quad (8.6)$$

Referenční model je popsán rovnicí:

$$\dot{y}_m = -a_m \cdot y_m + b_m \cdot w \quad (8.7)$$

Derivace referenční odchylka má tvar:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{y} - \dot{y}_m \quad (8.8)$$

Po úpravách a dosazení dostaneme:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{y} - \dot{y}_m = -a_m \cdot \varepsilon - b \cdot (q_0 - q_0^*)y + b \cdot (r_0 - r_0^*) \cdot w \quad (8.9)$$

Zavedeme substituci:

$$\vartheta = q_0 - q_0^* \quad (8.10)$$

$$\rho = r_0 - r_0^* \quad (8.11)$$

Po dosazení rovnic (8.10) a (8.11) bude mít derivace referenční odchylky tvar:

$$\dot{\varepsilon} = -a_m \varepsilon - b \vartheta y + b \rho w \quad (8.12)$$

Nyní musíme určit rovnice pro adaptaci:

$$\dot{\mathcal{G}} = \dot{q}_0 = f(y, \varepsilon) \quad (8.13)$$

$$\dot{\rho} = \dot{r}_0 = f(w, \varepsilon) \quad (8.14)$$

Definujeme si Ljapunovu funkci:

$$V(\varepsilon, \mathcal{G}, \rho) = \frac{1}{2} \left(\varepsilon^2 + \frac{b}{\gamma} \cdot \mathcal{G}^2 + \frac{b}{\gamma} \cdot \rho^2 \right) \quad (8.15)$$

kde je γ kladná váhová konstanta, ε referenční odchylka mezi y a y_m , substituce $\mathcal{G} = q_0 - q_0^*$ a substituce $\rho = r_0 - r_0^*$. Tato funkce je pro $\varepsilon = \mathcal{G} = \rho = 0$ v rovnovážném stavu. Pro ostatní je pozitivně definitní. Systém bude stabilní, pokud derivace $\partial V / \partial t < 0$.

Do rovnice (8.15) dosadíme rovnice (8.12) a dostaneme:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \dot{V} = \varepsilon \cdot (-a_m \varepsilon - b \mathcal{G} y + b \rho w) + \frac{b}{\gamma} \cdot \mathcal{G} \cdot \dot{\mathcal{G}} + \frac{b}{\gamma} \cdot \rho \cdot \dot{\rho} \quad (8.16)$$

upravíme a dosadíme do $\partial V / \partial t < 0$:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \dot{V} = -a_m \varepsilon^2 - b \varepsilon \mathcal{G} y + b \varepsilon \rho w + \frac{b}{\gamma} \mathcal{G} \dot{\mathcal{G}} + \frac{b}{\gamma} \rho \dot{\rho} < 0 \quad (8.17)$$

Z této nerovnice plynou následující podmínky pro stabilitu:

$$\frac{b}{\gamma} \mathcal{G} \dot{\mathcal{G}} - b \varepsilon \mathcal{G} y = 0 \quad (8.18)$$

$$\frac{b}{\gamma} \rho \dot{\rho} + b \varepsilon \rho w = 0 \quad (8.19)$$

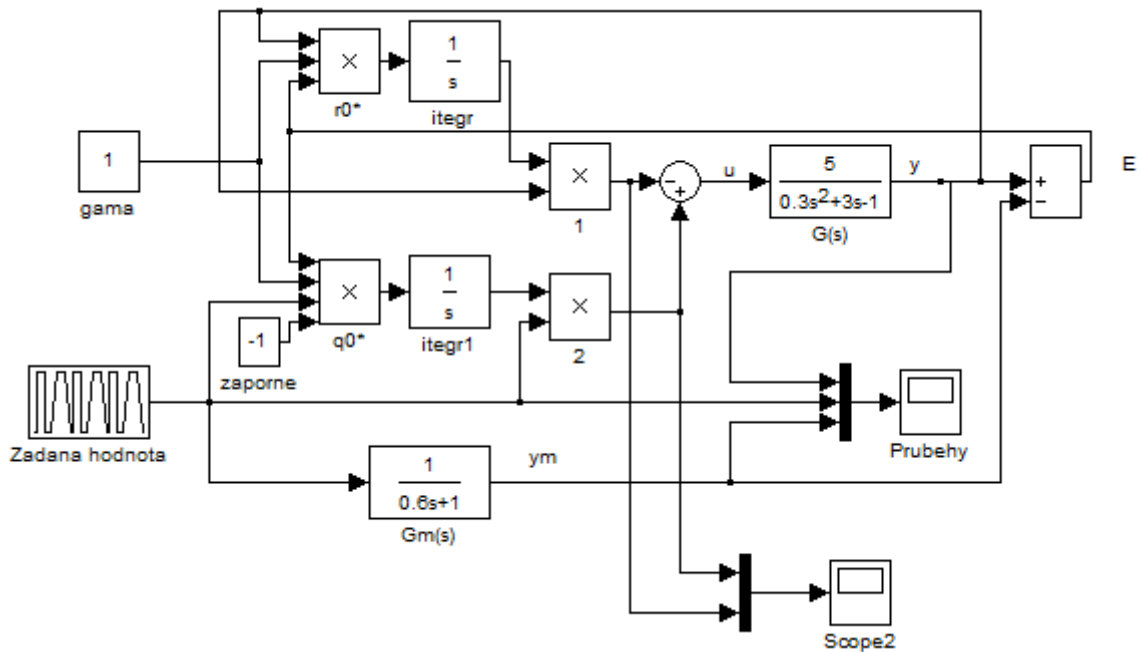
Po úpravě dostaneme:

$$\dot{q}_0 = \gamma \varepsilon y \quad (8.20)$$

$$\dot{r}_0 = -\gamma \varepsilon w \quad (8.21)$$

[9]

Nyní už můžeme navrhnout schéma pomocí Simulinku. Sestavené schéma regulačního obvodu pomocí Ljapunovy metody je na obrázku (Obr. 41).

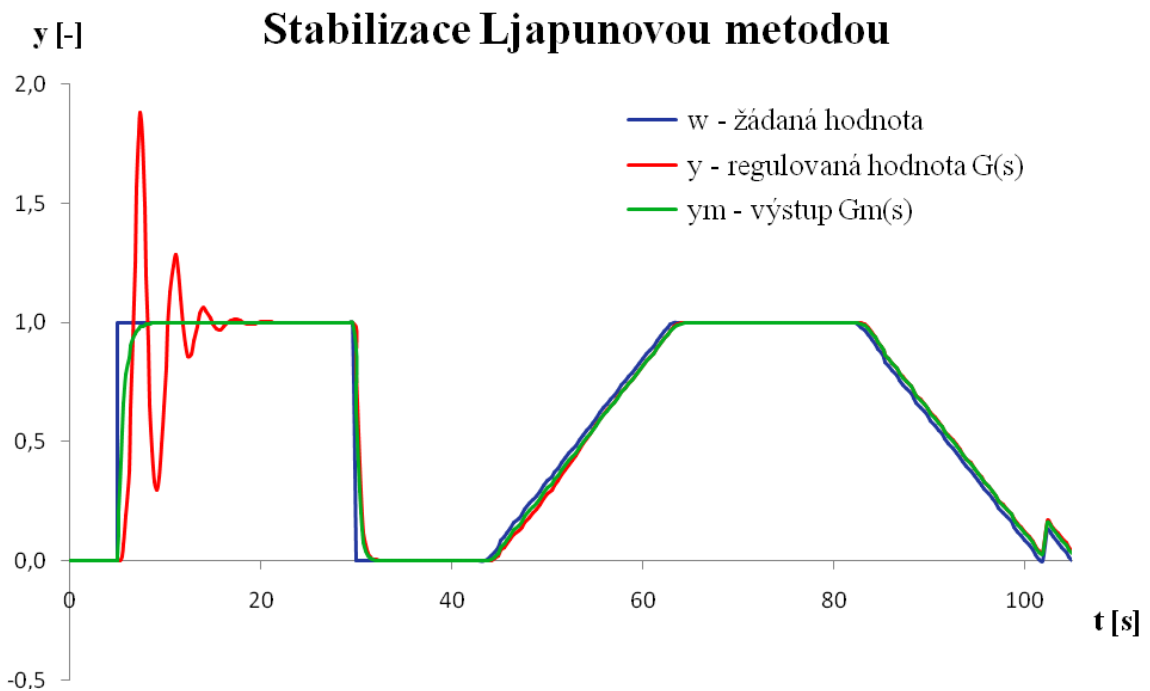


Obrázek 43: Schéma regulace pomocí Ljapunovy metody

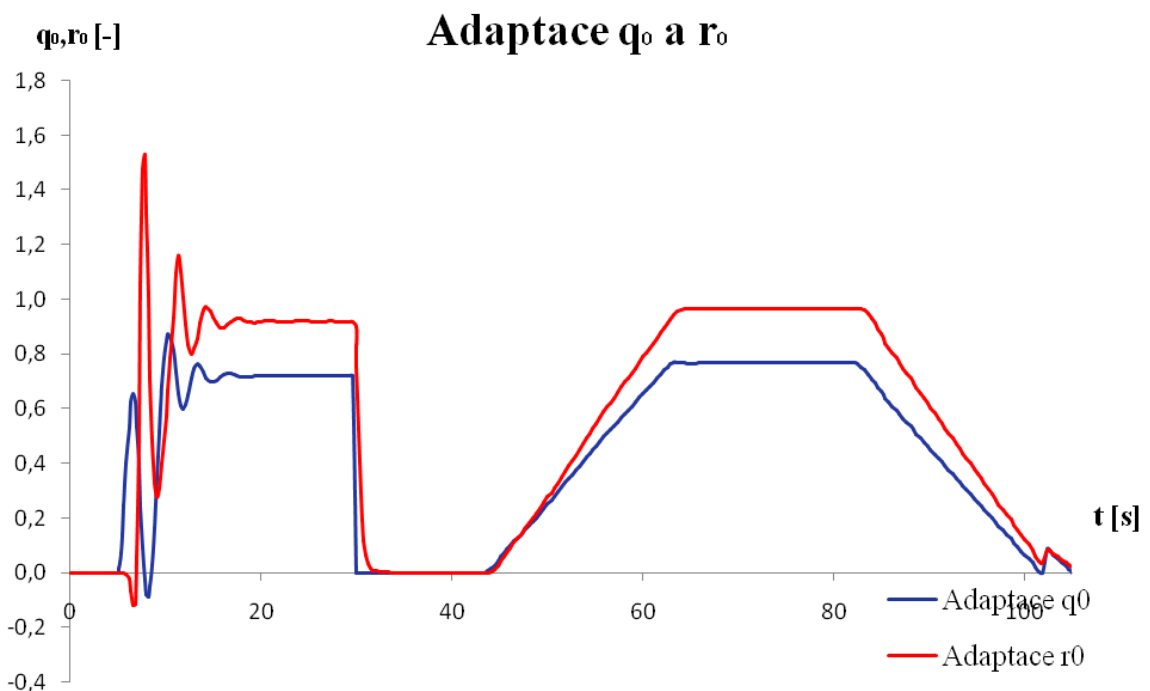
Byl zvolen nestabilní přenos $G(s)$ a referenční přenos $G_m(s)$:

$$G(s) = \frac{5}{0,3s^2 + 3s - 1} \quad G_m(s) = \frac{1}{0,6s + 1}$$

Po odečtení výstupu referenčního přenosu od výstupu regulovaného přenosu získáme referenční odchylku. Tato odchylka je součástí rovnic pro výpočet adaptivních členů \dot{q}_0 a \dot{r}_0 . Průběh odezvy na jednotkový skok a rampu je na obrázku (Obr. 38) a adaptující se parametry q_0 a r_0 na obrázku (Obr. 39).



Obrázek 44: Průběh regulace pomocí Ljapunovy metody



Obrázek 45: Adaptace parametrů q_0 a r_0

Z obrázku (Obr. 38) jde vidět, že díky referenčnímu přenosu a adaptivním parametrům q_0 a r_0 se nestabilní přenos stabilizoval.

ZÁVĚR

Cílem práce bylo zpracovat literární rešerši na téma stabilita systémů, uvést druhy testování stability a vypracovat k nim výpočetní příklady. Dalším cílem bylo zpracovat téma stabilizace systémů a vytvořit simulační modely a jeden model otestovat na reálném nelineárním nestabilním modelu magnetické levitace.

Teoretická část se v první kapitole zabývá definicí Ljapunovy stability a BIBO stability. Je zde názorný příklad chování míčku v gravitačním poli, podle kterého je vysvětlený pojem stabilita. Dále jsou zde uvedeny odezvy různých druhů systémů na jednotkový skok z hlediska stability. Druhá kapitola pojednává o testování stability. Testování se provádí pomocí kritérií stability. Pro spojité systémy u algebraických kritérií byly vybrány Routh-Shurovo kritérium a Hurwitzovo kritérium. U geometrických kritérií byly vybrány Michailovo-Leonhardovo kritérium a Nyquistovo kritérium. Pro diskrétní systémy lze použít výše popsané kritéria, ale musí se pomocí bilineární transformace převést stabilní jednotková kružnice na stabilní zápornou polorovinu. Navíc jsou popsány kritérium postupné redukce a Nekolného kritérium. Třetí kapitola se zabývá základními vlastnostmi systémů jako jsou dosažitelnost, říditelnost, pozorovatelnost a rekonstruovatelnost. Čtvrtá kapitola je o stabilizaci nestabilních systémů popsaných stavovým popisem a přenosem. Pátá a šestá kapitola se zabývá pojmy souvisejícími se stabilitou jako jsou míra stability a robustní stabilita.

Praktická část se zabývá stabilizací nestabilních systémů popsaných stavovým popisem nebo přenosem. Stabilizace vstupně-výstupního systému se provádí polynomiálním přístupem za použití konfigurace 1DOF a 2DOF. Také je zde řízení systému pomocí Ljapunovy metody. Pro všechny popsané typy stabilizací jsou vytvořeny simulační modely v programu MATLAB - Simulink. Metody 1DOF a 2DOF byly následně ověřeny na nelineárním nestabilním modelu magnetické levitace. Model se musel linearizovat a následně stabilizovat. Průběhy stabilizovaných systémů jsou ve grafech. Výsledné průběhy jsou okomentovány v jednotlivých kapitolách.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] DOSTÁL, Petr a František GAZDOŠ. Řízení technologických procesů. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně. Fakulta aplikované informatiky. 2006. ISBN 80-7318-465-6.
- [2] BALÁTĚ, Jaroslav. Automatické řízení. Praha: BEN - technická literatura, 2004. ISBN 80-7300-148-9.
- [3] DOSTÁL, Petr; MATUŠŮ, Radek. Stavová a algebraická teorie řízení. Zlín: UTB ve Zlíně, Fakulta aplikované informatiky, 2010. ISBN 978-80-7318-991-4.
- [4] ŠTECHA, Jan; HAVLENA, Vladimír. Teorie dynamických systémů. Praha: ČVUT, FEL, 2002. ISBN 80-01-01971-3.
- [5] HAVLENA, Vladimír a Jan ŠTECHA. Moderní teorie řízení. Praha: ČVUT, 1996. ISBN 8001010767.
- [6] PADMA SREE, R.; CHIDAMBARAM, M. Control of unstable systems. Oxford: Alpha Science, 2006. ISBN 1-84265-287-7.
- [7] NAVRÁTIL, Pavel. AUTOMATIZACE: Vybrané statě. Zlín, 2011. ISBN 978-80-7318-935-8. Skripta.
- [8] PELIKÁN, Radek. Magnetická levitace - modelování, simulace a řízení. Zlín, 2006. Diplomová práce. Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně. Vedoucí práce Ing. František Gazdoš Ph.D.
- [9] PELIKÁN, Radek. Ljapunova stabilita systémů. Zlín, 2007. Ph.D. práce. Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně. Vedoucí práce Prof. Ing. Petr Dostál, CSc.

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

BIBO Bounded input bounded output.

1DOF One degree of freedom.

2DOF Two degrees of freedom.

LTI Lineární časově invariantní

G(s) Přenos systému

SEZNAM OBRÁZKŮ

<i>Obrázek 1: Ukázka stability na chování míčku v gravitačním poli</i>	11
<i>Obrázek 2: Odezva stabilních systémů na jednotkový skok.....</i>	11
<i>Obrázek 3: Odezva nestabilního systému na jednotkový skok.....</i>	12
<i>Obrázek 4: Odezva systému na hranici stability na jednotkový skok</i>	12
<i>Obrázek 5: Ljapunovská stabilita</i>	13
<i>Obrázek 6: BIBO stabilní systémy s vnitřní nestabilitou</i>	14
<i>Obrázek 7: Rozdíl mezi spojitým a diskrétním průběhem.....</i>	16
<i>Obrázek 8: Oblast stability spojitých (s) a diskrétních (z) systémů.....</i>	17
<i>Obrázek 9: Různé případy Michailovových charakteristik.....</i>	22
<i>Obrázek 10: Michailovova křivka polynomu</i>	23
<i>Obrázek 11: Michailovova křivka polynomu</i>	24
<i>Obrázek 12: Otevřený a uzavřený regulační obvod.....</i>	25
<i>Obrázek 13: Možné průběhy Nyquistovy křivky</i>	25
<i>Obrázek 14: Dosažitelnost stavu</i>	32
<i>Obrázek 15: Řiditelnost stavu.....</i>	33
<i>Obrázek 16: Řiditelnost výstupu</i>	34
<i>Obrázek 17: Pozorovatelnost stavu</i>	35
<i>Obrázek 18: Rekonstruovatelnost stavu.....</i>	36
<i>Obrázek 19: Schéma 1DOF systému</i>	39
<i>Obrázek 20: Schéma 2DOF systému</i>	41
<i>Obrázek 21: Robustní stabilita</i>	44
<i>Obrázek 22: Relativní tlumení</i>	45
<i>Obrázek 23: Stupeň stability.....</i>	46
<i>Obrázek 24: Amplitudová a fázová bezpečnost</i>	47
<i>Obrázek 25: Prostředí MATLAB</i>	49
<i>Obrázek 26: Knihovna Simulinku</i>	50
<i>Obrázek 27: Model magnetické levitace CE152.....</i>	51
<i>Obrázek 28: Schéma matematického modelu levitace s 1DOF regulátorem</i>	57
<i>Obrázek 29: Schéma matematického modelu levitace s 2DOF regulátorem</i>	57
<i>Obrázek 30: Schéma reálného modelu levitace s 1DOF regulátorem</i>	57
<i>Obrázek 31: Schéma reálného modelu levitace s 2DOF regulátorem</i>	57

<i>Obrázek 32: Průběh regulace polohy $\alpha = 125$ - 1DOF regulátor</i>	<i>58</i>
<i>Obrázek 33: Průběh regulace polohy pro různé α - 1DOF regulátor</i>	<i>58</i>
<i>Obrázek 34: Průběh regulace polohy reálného modelu a simulace - 1DOF regulátor</i>	<i>59</i>
<i>Obrázek 35: Průběh regulace polohy $\alpha = 150$ - 2DOF regulátor</i>	<i>60</i>
<i>Obrázek 36: Průběh regulace polohy pro různé α - 2DOF regulátor</i>	<i>60</i>
<i>Obrázek 37: Průběh regulace polohy reálného modelu a simulace - 2DOF regulátor</i>	<i>61</i>
<i>Obrázek 38: Nastavení stavového popisu v Simulinku</i>	<i>62</i>
<i>Obrázek 39: Nestabilní systém</i>	<i>62</i>
<i>Obrázek 40: Průběh nestabilního systému</i>	<i>62</i>
<i>Obrázek 41: Stabilizovaný systém</i>	<i>63</i>
<i>Obrázek 42: Průběh stabilizovaného systému</i>	<i>63</i>
<i>Obrázek 43: Schéma regulace pomocí Ljapunovy metody</i>	<i>66</i>
<i>Obrázek 44: Průběh regulace pomocí Ljapunovy metody.....</i>	<i>67</i>
<i>Obrázek 45: Adaptace parametrů q_0 a r_0</i>	<i>67</i>

SEZNAM TABULEK

<i>Tabulka 1: Parametry modelu magnetické levitace.....</i>	<i>52</i>
---	-----------

SEZNAM PŘÍLOH