

# **Vliv podélného promíchávání na statické a dynamické vlastnosti trubkového výměníku tepla**

Effect of axial dispersion on the static and dynamic characteristics of a tubular heat exchanger

Bc. Přemysl Baroň

---

Diplomová práce  
2010



Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně  
Fakulta aplikované informatiky

---

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

Fakulta aplikované informatiky

akademický rok: 2009/2010

## ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Bc. Přemysl BAROŇ**

Osobní číslo: **A08421**

Studijní program: **N 3902 Inženýrská informatika**

Studijní obor: **Automatické řízení a informatika**

Téma práce: **Vliv podélného promíchávání na statické  
a dynamické vlastnosti trubkového výměníku tepla**

Zásady pro vypracování:

1. Sestavte matematický model dvoukapacitního trubkového výměníku tepla bez uvažování a s uvažováním podélného promíchávání v chlazené kapalině.
2. Popište diferenční metodu pro řešení ustáleného stavu i dynamiky procesu spolu s řešením okrajových podmínek.
3. Simulujte statické charakteristiky výměníku, porovnejte výsledky získané z modelu bez uvažování a s uvažováním podélného promíchávání.
4. Zjistěte vliv koeficientu podélného promíchávání na statické charakteristiky výměníku.
5. Řešte dynamické charakteristiky výměníku bez a s uvažováním podélného promíchávání.



prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.  
ředitel ústavu

prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.  
děkan

Rozsah diplomové práce: **tištěná/elektronická**  
Rozsah příloh:  
Forma zpracování diplomové práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:


1. Dostál, P., Gazdoš, F.: Elektronické podklady k předmětu Analýza a simulace systémů. UTB ve Zlíně, FAI, 2009.
2. Ogunnaike, B.A., Ray, W.H.: Process dynamics, modeling, and control. Oxford University Press, New York, 1994, ISBN 0-19-509119-1.
3. Severance, F.L.: System modelling and simulation. Wiley, Chichester, 2001, ISBN 0-471-49694-4.
4. Ingham, J., Dunn, I.J., Heinzle, E., Přenosil, J.E.: Chemical engineering Dynamics. An introduction to modelling and computer simulation. WILEY- VCH Verlag, Weinheim, 2000, ISBN 3-527-28511-3.
5. Varma, A., Morbidelli, M.: Mathematical methods in chemical engineering. Oxford University Press, New York, 1997, ISBN 0-19-509821-8.
6. Saleri, F., Quarteroni, A.: Scientific computing with MATLAB. Springer, Heidelberg, 2001, ISBN 1611-0994.
7. Ilavský, J., Valtýni, J., Brunovská, A., Surový, J.: Aplikovaná chemická kinetika a teória reaktorov. ALFA, Bratislava, 1990, ISBN 80-05-00599-7.
8. Babu, B. V.: Proces plant simulation. Oxford University Press, New Delhi, 2004, ISBN 0-19-566805-7.

Vedoucí diplomové práce: **prof. Ing. Petr Dostál, CSc.**  
Ústav řízení procesů

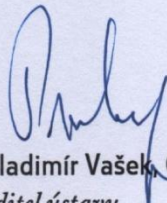
Datum zadání diplomové práce: **19. února 2010**

Termín odevzdání diplomové práce: **8. června 2010**

Ve Zlíně dne 19. února 2010

  
prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.  
děkan



  
prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.  
ředitel ústavu

## **ABSTRAKT**

Trubkový výměník tepla patří do třídy systémů se spojitě rozloženými parametry popsanými parciálními diferenciálními rovnicemi (PDR). V případě, že je uvažováno s podélným promícháváním proudícího média, obsahuje příslušná PDR i druhou parciální derivaci teploty podle prostorové proměnné. Úlohou této diplomové práce je vyšetřit, jaký je vliv koeficientu promíchávání na statické a dynamické vlastnosti výměníku. Diplomová práce obsahuje matematické modely výměníku tepla s protiproudým chlazením, metody pro řešení ustáleného stavu i dynamiky, odpovídající simulační modely, použité zdrojové kódy pro MATLAB a simulace statických a dynamických charakteristik.

**Klíčová slova:** Trubkový výměník, podélné promíchávání, axiální disperze, teplo, chlazení, parciální diferenciální rovnice, okrajové podmínky, počáteční podmínky, model, ustálený stav, dynamika, statická charakteristika, přechodová charakteristika.

## **ABSTRACT**

Tubular heat exchangers belong to a class of continuously distributed parameter systems described by partial differential equations (PDEs). Under consideration of an axial dispersion in the flowing medium, the relevant PDEs include in addition to the first order also the second order temperature derivatives with respect to the space variable. The objective of this thesis is to investigate an effect of the axial dispersion factor on the heat exchanger static and dynamic characteristics. The thesis contains mathematical models of the heat exchanger with the countercurrent cooling, methods for solution of the steady state and dynamics, correspondent simulation models, MATLAB simulation programmes, and, simulated static and dynamic characteristics.

**Keywords:** Tubular heat exchanger, axial dispersion, heat, cooling, partial differential equations, boundary conditions, initial conditions, model, steady state, dynamics, static characteristic, transient characteristic.

Poděkování, motto

*Rád bych na tomto místě poděkoval prof. Ing. Petru Dostálovi, CSc. za podněty, vydatnou pomoc, trpělivost a přátelský přístup při vedení diplomové práce, dále mému bratru Ing. Mojmiru Baroňovi Ph.D. za jeho nekonečnou podporu v průběhu celých studií. Mé poděkování patří také mé manželce Janě Baroňové DiS., za její toleranci a obrovskou obětavost.*

Prohlašuji, že

- beru na vědomí, že odevzdáním diplomové/bakalářské práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb. o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších právních předpisů, bez ohledu na výsledek obhajoby;
- beru na vědomí, že diplomová/bakalářská práce bude uložena v elektronické podobě v univerzitním informačním systému dostupná k prezenčnímu nahlédnutí, že jeden výtisk diplomové/bakalářské práce bude uložen v příruční knihovně Fakulty aplikované informatiky Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně a jeden výtisk bude uložen u vedoucího práce;
- byl/a jsem seznámen/a s tím, že na moji diplomovou/bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších právních předpisů, zejm. § 35 odst. 3;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 1 autorského zákona má UTB ve Zlíně právo na uzavření licenční smlouvy o užití školního díla v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 2 a 3 autorského zákona mohu užít své dílo – diplomovou/bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití jen s předchozím písemným souhlasem Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše);
- beru na vědomí, že pokud bylo k vypracování diplomové/bakalářské práce využito softwaru poskytnutého Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně nebo jinými subjekty pouze ke studijním a výzkumným účelům (tedy pouze k nekomerčnímu využití), nelze výsledky diplomové/bakalářské práce využít ke komerčním účelům;
- beru na vědomí, že pokud je výstupem diplomové/bakalářské práce jakýkoliv softwarový produkt, považují se za součást práce rovněž i zdrojové kódy, popř. soubory, ze kterých se projekt skládá. Neodevzdání této součásti může být důvodem k neobhájení práce.

Prohlašuji,

že jsem na diplomové práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval.  
V případě publikace výsledků budu uveden jako spoluautor.

Ve Zlíně

.....  
Podpis diplomanta

**OBSAH**

<b>ÚVOD .....</b>	<b>9</b>
<b>I. TEORETICKÁ ČÁST .....</b>	<b>11</b>
<b>1 ZÁKLADNÍ POJMY .....</b>	<b>12</b>
1.1    PODÉLNÉ PROMÍCHÁVÁNÍ .....	12
1.2    SDÍLENÍ TEPLA VEDENÍM .....	14
1.3    TEPELNÝ VÝMĚNÍK.....	16
1.3.1    Některé typy výměníků.....	18
1.3.2    Souproudý a protiproudý výměník .....	19
1.4    DIFUZE .....	20
1.5    ZÁKLADY MATEMATICKÉHO MODELOVÁNÍ.....	22
1.5.1    Co je modelování.....	22
1.5.2    Stručná klasifikace modelů .....	22
1.6    VYTVÁŘENÍ MODELŮ NA ZÁKLADĚ BILANCÍ .....	25
<b>2 SESTAVENÍ MATEMATICKÉHO MODELU VÝMĚNÍKU BEZ AXIÁLNÍHO A S AXIÁLNÍM PROMÍCHÁVÁNÍM.....</b>	<b>27</b>
2.1    DVOUKAPACITNÍ PROTIPROUDÝ TRUBKOVÝ VÝMĚNÍK TEPLA BEZ PODÉLNÉHO PROMÍCHÁVÁNÍ.....	27
2.2    DVOUKAPACITNÍ PROTIPROUDÝ TRUBKOVÝ VÝMĚNÍK TEPLA S PODÉLNÝM PROMÍCHÁVÁNÍM OCHLAZOVANÉ SMĚSI.....	31
<b>3 TYPY PDR .....</b>	<b>34</b>
<b>4 METODY ŘEŠENÍ PDR .....</b>	<b>35</b>
4.1    METODA KONEČNÝCH DIFERENCÍ.....	35
4.2    OBECNÉ ŘEŠENÍ PDR DRUHÉHO ŘÁDU DIFERENČNÍ METODOU .....	37
4.3    PRINCIPY DIFERENČNÍ METODY .....	38
4.4    DALŠÍ MOŽNOSTI ŘEŠENÍ PDR .....	41
<b>5 ŘEŠENÍ STATICKÝCH CHARAKTERISTIK.....</b>	<b>43</b>
5.1    USTÁLENÝ STAV PRO VÝMĚNÍK BEZ PODÉLNÉHO PROMÍCHÁVÁNÍ .....	43
5.1.1    Řešení rovnice chlazené kapaliny .....	43
5.1.2    Řešení rovnice chladicí kapaliny.....	44
5.2    USTÁLENÝ STAV PRO VÝMĚNÍK S PODÉLNÝM PROMÍCHÁVÁNÍM V CHLAZENÉ KAPALINĚ.....	46
5.2.1    Řešení rovnice chlazené kapaliny .....	46
5.2.2    Řešení rovnice pro chladicí kapalinu.....	48
<b>6 ŘEŠENÍ DYNAMICKÝCH CHARAKTERISTIK .....</b>	<b>51</b>
6.1    VÝPOČET DYNAMICKÉ CHARAKTERISTIKY BEZ UVAŽOVÁNÍ PODÉLNÉHO PROMÍCHÁVÁNÍ.....	51
6.2    DYNAMICKÝ MODEL VÝMĚNÍKU S PODÉLNÝM PROMÍCHÁVÁNÍM.....	54
<b>II. PRAKTICKÁ ČÁST .....</b>	<b>58</b>
<b>7 ZADANÉ TECHNOLOGICKÉ PARAMETRY VÝMĚNÍKU.....</b>	<b>59</b>
<b>8 POROVNÁNÍ VÝSLEDKŮ STATICKÝCH CHARAKTERISTIK VÝMĚNÍKŮ S PODÉLNÝM A BEZ PODÉLNÉHO MÍCHÁNÍ</b>	

---

V OCHLAZOVANÉ FÁZI .....	60
<b>9 POROVNÁNÍ VYPOČÍTANÝCH PŘECHODOVÝCH CHARAKTERISTIK .....</b>	<b>63</b>
<b>ZÁVĚR .....</b>	<b>71</b>
<b>ZÁVĚR V ANGLIČTINĚ .....</b>	<b>72</b>
<b>SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY .....</b>	<b>73</b>
<b>SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK.....</b>	<b>75</b>
<b>SEZNAM OBRÁZKŮ.....</b>	<b>78</b>
<b>SEZNAM PŘÍLOH .....</b>	<b>80</b>



## ÚVOD

S tepelnými výměníky se prakticky setkáváme dnes a denně na každém kroku. Při jízdě autem nám musí zajišťovat chlazení motoru. Jindy zase během zimního období jsou to právě výměníky (radiátory), co tvoří letní teploty nejen uvnitř našich domovů. Použití je masivní, ať už jde o domácnosti či průmysl (vytápění, chlazení, klimatizace, elektrárny, chemické provozy, petrochemické závody, ropné rafinerie, zpracování zemního plynu, čištění odpadních vod).

Za tepelný výměník lze považovat zařízení, které je zkonstruováno pro efektivní přenos tepla z jednoho média do druhého. Přitom tyto látky bývají většinou odděleny přepážkou (teplosměnnou plochou), takže nedochází k jejich smíchání, ale mohou být i v přímém kontaktu.

Podle druhů zúčastněných skupenství lze výměníky dělit na čistě kapalinové, kde obě použité látky jsou kapalné, další možností je zařazení kapaliny a plynu nebo čistě plynová varianta. Následně lze zohlednit i konstrukční řešení, kterých je celá řada. Dá se ale s jistotou říci, že nejpoužívanějšími zástupci jsou výměníky kotlíkové s promícháváním, deskové a trubkové. Právě konstrukce zařízení nám určí další možnost škálovatelnosti podle rozložení sledovaného parametru. Pokud je tento parametr stejný v celém prostoru výměníku, považujeme ho za systém se soustředěnými parametry, typicky výměník kotlíkový s promícháváním. Mění-li se sledovaný parametr podle polohy, můžeme ho považovat za soustavu s rozloženými parametry, kde je klasickým zástupcem výměník trubkový.

Na základě výše uvedeného dělení pak vznikají matematické popisy jednotlivých druhů tepelných výměníků. U každého se při vzniku modelu, který znázorňuje pochody uvnitř, stanovují jisté zjednodušující předpoklady. U míchaných variant se v drtivé většině počítá s formou ideálního promíchávání, trubkové typy pak zjednoduší model díky zahrnutí ideálního pístového toku.

Zde nám ale vzniká otázka, do jaké míry se simulované výsledky liší od svých reálných vzorů. Účelem každého modelování je vytvořit přesný popis daného zařízení, ale i když dnes máme k dispozici velice výkonné a přesné nástroje výpočetní techniky, je třeba se vždy potýkat s mírou kompromisu mezi přesností a složitostí, protože i procesy známé jsou popsány jen přibližně, neboť matematické reprezentace přírodních zákonů jsou pouze aproximací reality. Úplná shoda mezi chováním modelovaného objektu a jeho modelu tedy

nemůže být dosažena. Modely sestavované za účelem návrhu nebo ověřování algoritmů řízení nemusí být zpravidla vysoce přesné, z hlediska absolutních hodnot veličin. Musí však v každém případě vystihovat trendy statických i dynamických charakteristik procesu. Naopak modely, používané ve stadiu projektování technologických procesů a inženýrské analýze jsou většinou podstatně přesnější a složitější.

Cílem této diplomové práce tedy bude, na matematickém modelu trubkového výměníku zjistit, jaký je vliv fyzikálního úkazu, tzv. podélného promíchávání, na statické i dynamické vlastnosti výměníku, a zda je přípustné případné zanedbání tohoto jevu při sestavení modelu, který bude později použit v návrhu řízení. Vzhledem k podobnostem matematické reprezentace uvedeného problému se zákonem difuze a vedení tepla lze očekávat, že závěry dosažené v práci bude možno aplikovat i na procesy difúzní, trubkové chemické reaktory a další podobné procesy.

## **I. TEORETICKÁ ČÁST**

## 1 ZÁKLADNÍ POJMY

Nejdříve si trochu připomeneme některé teoretické poznatky, které budou později využity při sestavování matematických modelů konkrétního výměníku tepla. Jedná se o vysvětlení jevu nazvaného podélné promíchávání, pochodu týkajících se transportu tepla ve výměníku, popisy samotných druhů výměníků, stručné seznámení s teorií modelování, difuze a nebo tvoření bilancí, ze kterých získáme konečné soustavy diferenciálních rovnic popisujících naše typy výměníků.

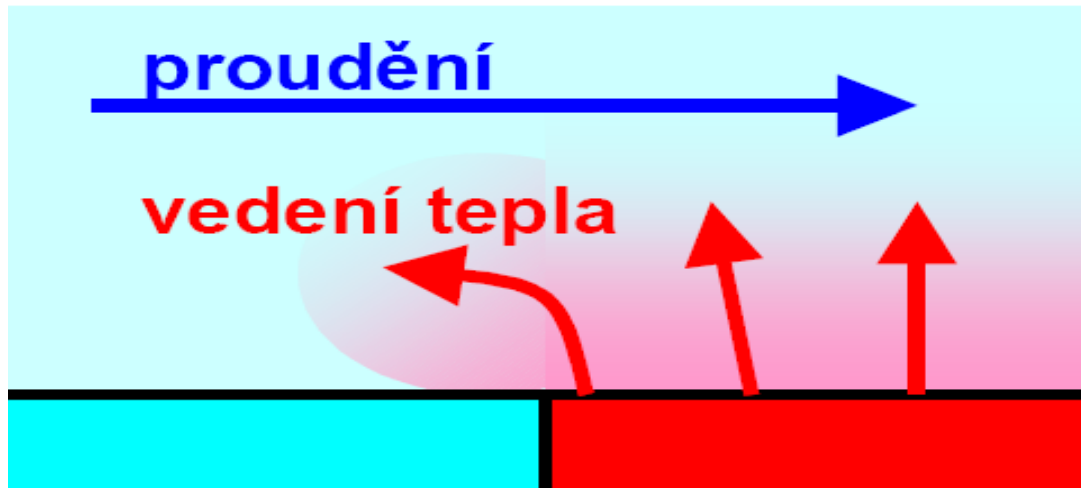
### 1.1 Podélné promíchávání

V drtivé většině modelových případů výměníků nebo jiných průmyslových zařízení, uvedených např. v [12], která souvisí s kinetikou tekutin, se předpokládá model ideálního promíchávání či pístového toku kapaliny. Ve skutečnosti se vytváří v soustavě rozdíly (gradienty) teploty. Uvedené gradienty teploty jsou hnacími silami pro sdílení tepla při proudění média výměníkem. Při podrobnějším popisu je proto třeba vzít tyto skutečnosti v úvahu. Vzhledem ke složitosti situace, při popisu proudění tekutiny reálným zařízením je používán přístup, který pracuje s modelem konvektivního toku s přidaným dispersním členem, zahrnujícím příspěvky difuzního sdílení hmoty nebo tepla (vedení) a umožňuje tak modelovat soustavu s podélným promícháváním.

Jiný přístup k tomuto problému je uveden v [21], kde stojí, že podobně jako se může teplota měnit s časem, může se měnit i s místem. Vtéká-li kapalina do tepelného zařízení, setkává se na stěně s náhlou změnou teploty. V tomto místě bude pravděpodobně docházet k přestupu tepla nejen vedením kolmo ke stěně přes film, ale poněkud i podélným vedením tepla proti směru proudění, jak to můžeme vidět na obrázku (Obr. 1). Významnost tohoto jevu charakterizuje Pécletovo číslo:

$$Pe \equiv Re Pr \equiv \frac{d u \rho c_p}{\lambda} \quad (1)$$

Jde o součin bezrozměrných veličin  $Re$  (Reynolds) a  $Pr$  (Prandtl), kde  $d$  je průměr potrubí, jako  $\nu$  je značena viskozita tekutiny, dále  $\rho$  je samozřejmě hustota,  $c_p$  měrné teplo a  $\lambda$  tepelná vodivost.



Obrázek 1: Příklad podélného vedení tepla proti směru proudění.[21].

Je-li  $Pe$  velké, což je obvyklé, nemusíme k podélnému vedení tepla přihlížet. Ve většině běžných situací jsou jak doba přeměny mezní vrstvy, tak podélné vedení tepla zcela zanedbatelně malé a můžeme předpokládat, že rychlost přestupu tepla se řídí výhradně okamžitým místním rozdílem teplot bez ohledu na to, že se teploty s místem a časem poněkud mění. Tuto zásadu použijeme při řešení běžných úloh sdílení tepla. Předpoklad o zanedbatelnosti podélného vedení tepla bude nesprávný tam, kde je proudění pomalé (třeba při zpracování tavenin polymerů) nebo tam kde se proces odehrává v tak složitém prostoru, že nelze některý směr označit za ryze podélný (třeba uvnitř plamene). Pak je k dokonalému porozumění procesu zpravidla nutno řešit, pro individuální situaci, diferenciální rovnice sdílení tepla a získat tak podrobné poznatky o teplotním poli.

Další vztah, který se používá pro Pécletovo číslo např. v [7] lze odvodit z rychlosti toku  $v$  [ $m/s$ ], délky výměníku  $L$  [ $m$ ] a hodnoty koeficientu podélného promíchávání  $D_p$ .

$$Pe = \frac{vL}{D_p} \quad (2)$$

Současně toto číslo souvisí s počtem  $n$  dělení intervalu  $\langle 0, L \rangle$  vztahem

$$Pe = 2n. \quad (3)$$

Porovnáním těchto dvou vztahů dostaneme pro výpočet  $Dp$  následující rovnici.

$$D_p = \frac{vL}{2n} \quad (4)$$

Takovéto určení hodnoty  $D_p$  lze ovšem považovat za pouze přibližné. Nicméně pro určení ovlivnění průběhů sledovaných veličin zde bude použito. Jde vlastně o stanovení, jestli výměník, u kterého známe jeho konstrukční parametry, co se týká délky v metrech, rychlosti proudění uvnitř a hodnotu diskretizace průběhů na intervalu  $\langle 0, L \rangle$ , dosahuje zanedbatelných či počitatelných čísel v podobě koeficientu  $Dp$  pro podélné míchání.

## 1.2 Sdílení tepla vedením

Sdílení tepla vedením, též sdílení tepla kondukcí, podle [17], je způsob přechodu tepla z teplejších míst pevné látky nebo klidné tekutiny k chladnějším místům předáváním energie z částice (molekuly, iontu, atomu apod.) na jinou částici, aniž jsou v pohybu makroskopické části látky. Pro sdílení tepla vedením v homogenním prostředí platí *Fourierův zákon*, podle něhož hustota tepelného toku  $\vec{q}$  je úměrná teplotnímu gradientu

$$\vec{q} = -\lambda \text{grad} T, \quad (5)$$

kde  $\text{grad} T$  je *gradient termodynamické teploty*  $T$  v témže místě látky a  $\lambda$  je *součinitel tepelné vodivosti*. Záporné znaménko ve vztahu vyjadřuje, že tepelný tok má opačný směr než růst teploty (teplotní gradient). Při jednorozměrném sdílení tepla vedením ve směru osy  $x$  je

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx}. \quad (6)$$

Podíl  $dT/dx$  je *teplotní gradient* ve směru osy  $x$ , značka  $\text{grad} T$ . Konstanta úměrnosti  $\lambda$  je *součinitel tepelné vodivosti*. Součinitel tepelné vodivosti  $\lambda$  je roven podílu hustoty *tepelného toku*  $q$  a teplotního gradientu  $\text{grad} T$

$$\lambda = \frac{q}{\text{grad}T}. \quad (7)$$

Charakterizuje schopnost dané látky sdílet teplo vedením. Jednotkou SI součinitele tepelné vodivosti  $\lambda$  je  $\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ . Obecně součinitel tepelné vodivosti závisí na termodynamické teplotě, tlaku, složení látky a určuje se zpravidla měřením hustoty tepelného toku, gradientu teploty a výpočtem z Fourierova zákona. Je-li v daném místě termodynamická teplota  $T$  v čase konstantní, ale v jiných místech je rozdílná (teplota je funkcí polohy, ale ne funkcí času), je sdílení tepla vedením **ustálené (stacionární)**. Mění-li se teplota  $T$  při vyrovnávání teplotních rozdílů v tělese, je sdílení tepla vedením **neustálené (nestacionární)**. Jedná se o změny teploty v daném místě s časem, tj. termodynamická teplota  $T$  daného místa homogenního prostředí je v tomto případě funkcí souřadnic a času

$$T = T(x, y, z; t). \quad (8)$$

Nejsou-li v daném místě zdroje tepla, potom neustálené sdílení tepla vedením v homogenním prostředí v trojrozměrném případě popisuje **Fourierova rovnice vedení tepla**

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \quad (9)$$

kde  $t$  je čas,  $x, y, z$  kartézské souřadnice,  $a$  součinitel teplotní vodivosti látky.

Součinitel teplotní vodivosti je definován vztahem

$$a = \frac{\lambda}{\rho c_p}, \quad (10)$$

kde  $\lambda$  je **součinitel tepelné vodivosti**,  $\rho$  **hustota** a  $c_p$  **měrná tepelná kapacita** při stálém tlaku. Jednotkou SI součinitele teplotní vodivosti je čtverečný metr za sekundu, značka  $\text{m}^2/\text{s}$ . Je-li v daném místě zdroj tepla charakterizován tepelným výkonem, pak **Fourierova rovnice**, tzv. **obecná rovnice vedení tepla** v homogenním prostředí, má tvar

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{c_p \rho} q_0, \quad (11)$$

kde  $q_0$  je výkon, s jakým je teplo generováno v látce o jednotkovém objemu (za 1 s).

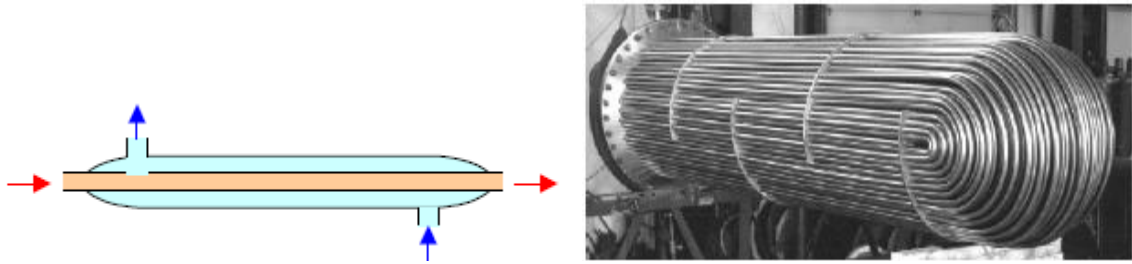
### 1.3 Tepelný výměník

Dále si připomeneme základní vlastnosti tepelných výměníků i s některými příklady praxe, jak jsou uvedeny v [21]. V energetické bilanci většiny procesních technologií se objevují současně proudy dodávání tepla a odvodu tepla. Chemické procesy často provádíme při vyšších teplotách (např. syntéza amoniaku, oxidace amoniaku, výroba kyseliny sírové, konverze zemního plynu, elektrotermické postupy), vysoké teploty potřebujeme třeba i při výrobě železa a oceli, vápna, cementu, skla, pálení cihel, apod., rovněž potravinářské výroby se mnohdy bez ohřevu neobejdou (např. pečení chleba, masa, vaření vajec, brambor atd.). Přičemž produkt obvykle je zajímavý až při teplotě nižší. Chladit musíme také mnoho chemických reaktorů, aby v nich nedošlo k samovolnému nekontrolovanému nárůstu teploty a k nežádoucím vedlejším reakcím. Jako teplonosné medium pro ohřev do 100°C se používá v nejjednodušším případě ohřátá voda (třeba v ústředním topení), pro vyšší teploty se používají méně těkavé látky (oleje, parafín, silikonový olej). Méně vhodné (menší tepelná kapacita) je užití horkých plynů, pokud to nemá jiné technologické důvody (sušení).



Obrázek 2: Vlevo – výměník pro nízkoteplotní procesy (ohřev volnou konvekcí vzduchu kolem trubek). Vpravo - baterie trubkových výměníků v mlékárně.[21]





Obrázek 3: Vlevo - výměník trubka v trubce a vpravo je ukázka svazku trubek jednoho typu provozního trubkového výměníku. Tekutina A proudí uvnitř trubek, svazek je zasunut do kotle, kterým protéká tekutina B.[21]

Z hlediska tepelných vlastností by bylo zajímavé použít tekutých kovů, což ale přináší mimořádná rizika a používá se proto jen v některých jaderných reaktorech k přenosu tepla roztavenou směsí Na-K. Pro ohřev parou se hodí pára vodní (do 180°C aby nebyl tlak přes 1 MPa, což by komplikovalo konstrukci potrubí) a ještě o něco výše páry stabilních uhlovodíků (např. dekalinu). Beztlaková vodní pára (např. z odparek) má pouze 100°C, při jakýchkoliv tepelných ztrátách do okolí okamžitě začne kondenzovat a proto se nedá dobře dopravovat potrubím na delší vzdálenosti. Takovéto páře říkáme pára brýdová. Pro chlazení je nejobvyklejší voda, pro teploty mírně pod 0°C roztok soli (solanka). Chladicí voda pro průmysl se bere často po jednoduché filtraci z řek, při větší spotřebě je nutno mít v podniku vnitřní okruh chladicí vody s jejím dochlazováním. Tato voda v letní sezóně mívá i nad 30°C, takže chlazení na nižší teploty vyžaduje zvláštní technologie. Při kontinuálním vedení procesů je možno provázat proudy tak, že teplem odváděným při chlazení se přehřívá jiný proud. Důmyslným propojením celé technologie je možno ušetřit značné náklady na ohřev a chlazení, což jsou často klíčové položky, rozhodující o konkurenceschopnosti výroby. Zařízení, ve kterém se předává teplo jednoho proudu tekutiny přes pevnou stěnu do druhého proudu se nazývá tepelný výměník. Nejjednodušším typem tepelného výměníku je výměník trubka v trubce, ve skleněném laboratorním provedení nazývaný Liebigův chladič. Pro ohřev a chlazení větších objemů se hodí nádoby s míchadlem, opatřené teplosměnnou plochou např. ve formě dvojitého pláště (duplikátoru), nebo s trubkou např. stočenou do šroubovicového hadu, případně kombinací obou. Výměník často nemá výhradní úkol přenést teplo; někdy se v něm uskutečňují složitější procesy nebo dokonce chemické reakce.

### 1.3.1 Některé typy výměníků

Obvykle máme zájem přenést co nejvíce tepla za jednotku času.  $Q' = kS\Delta T$ . Proto se snažíme mít:

- **co největší součinitel prostupu tepla**

Obvykle nemůžeme ovlivnit látkové vlastnosti chlazené a ohříváné látky. Jen někdy se dá využít zásadně jiného teponosného media, např. při odvodu tepla z některých jaderných reaktorů roztavenou slitinou sodíku a draslíku místo vody. Můžeme zlepšit vedení tepla stěnou užitím tenčí stěny z dobře vodivého materiálu a zamezením její koroze a znečištění úsadami (Např. použití mědi nebo hliníku místo oceli, periodické odstraňování z teplosměnných ploch v kotlech ústředního topení, rozpouštění úsad na topných tělesech v pračce) - můžeme zlepšit součinitele přestupu tepla na jedné či obou stranách – náhradou volné konvekce za nucenou, dále pak zvýšením rychlosti proudění a vyvoláváním turbulence.

- **co největší plochu**

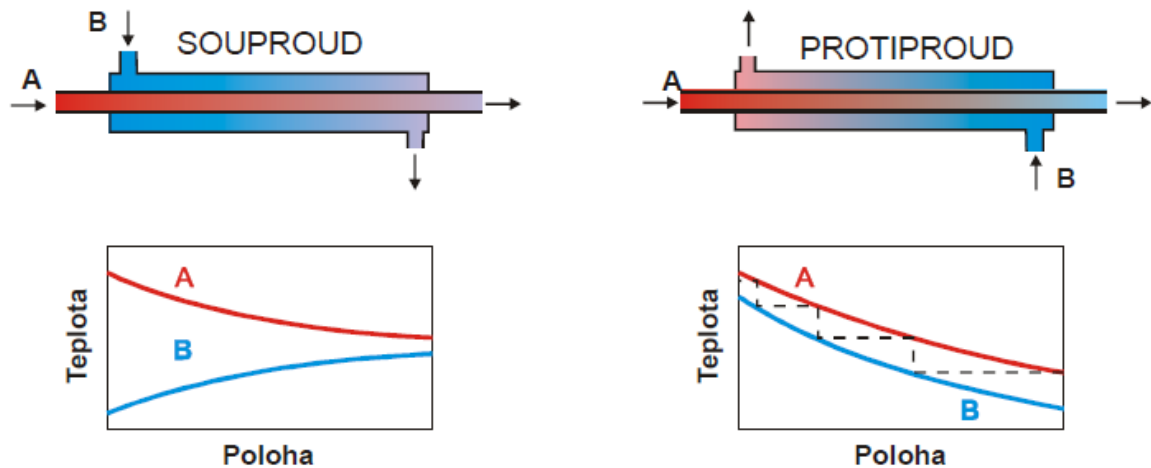
Zvětšováním rozměru zařízení: u trubkového výměníku zvětšováním průměru trubky  $d$  zhoršujeme poněkud  $\alpha$ , prodlužováním délky trubek  $L$  zvyšujeme tlakovou ztrátu a nároky na čerpadlo, proto zpravidla raději volíme svazek užších trubek. U promíchávané nádoby je typickou teplosměnnou plochou výměňkový plášť. Všimněme si skutečnosti, že při zvětšování všech rozměrů zařízení roste plocha stěn s dvojnásobkem délkového rozměru a objem se třetí mocninou. Proto se daří v malé nádobce měnit teplotu vsádky velmi rychle. Pro velké nádoby často zvyšujeme plochu kombinací s výměňkovými hady, případně dalšími vestavbami, mezi jejichž dvojitými stěnami protéká druhá látka. Deskové výměníky, které sestávají z řady desek, mezi nimiž střídavě proudí tekutiny A a B, umožňují zvětšovat plochu přidáváním dalších desek. V poslední době se, díky vývoji kvalitních těsnících materiálů, stávají nejvýznamnějším typem výměníků pro práci při běžných tlacích. Plocha i součinitele přestupu se zde navyšují i použitím zvlněných desek. Plochy rozebíratelného deskového výměníku se dají snadno čistit a stávají se proto oblíbenými v čistých potravinářských a farmaceutických technologiích. Zvětšováním plochy použitím složitěji tvarovaných teplosměnných ploch (zejména pro přenos tepla do plynů, příkladem jsou tělesa ústředního topení, žebrované plochy na straně horšího přestupu tepla známe také z chladičů motorů, kompresorů, lednic, elektronických součástek apod.).

- **co největší teplotní rozdíl**

To bohužel často nemůžeme ovlivnit. Použití chladiwa o velmi nízké teplotě nebo ohřevu vysokou teplotou bývá nákladnější, a rovněž některé zpracovávané tekutiny nemusejí snášet příslušné teploty a teplotní rozdíly. Promyslete si z hlediska použité teploty, rychlosti ohřevu (trvání procesu) a výsledku rozdíly mezi vařením, smažením, pečením, fritováním a grilováním. Pokud máme možnost volby, hledáme zpravidla kompromis mezi velikostí teplosměnné plochy a mezi potřebným teplotním rozdílem.

### 1.3.2 Souproudý a protiproudý výměník

Zejména u trubkového výměníku je jednoduše vidět, že proudy tekutin A a B můžeme vést buďto ve stejném směru – pak výměník označujeme jako **souproudý**, nebo v obráceném směru – pak jde o výměník **protiproudý**. V souproudém výměníku se teploty proudů od místa vstupu k místu výstupu v obou prouděch vzájemně přibližují; kdyby byl výměník dokonalý, došlo by nakonec k vyrovnání teplot na hodnotě dané kalorimetrickou rovnicí. Ideální zařízení, z něhož vystupují proudy v rovnováze, tedy i výměník, který opouští tekutiny se stejnou teplotou, nazýváme převodová jednotka. Souproudý výměník má vždy horší funkci než 1 převodová jednotka. Protiproudý výměník může mít i funkci několika převodových jednotek, je v něm však obecně menší teplotní rozdíl mezi proudem A a B a tudíž při stejném součiniteli průchodu tepla za to musíme zaplatit větším rozměrem zařízení. Úvaha o to, zda zapojit výměník protiproudě nebo souproudě je významná jen tehdy, když množství zpracovávaných tekutin je blízké ve smyslu vztahu  $m_B c_{PB} \approx m_A c_{PA}$  a obě teploty se zásadně mění. Jinak je zapojení celkem lhostejné a používá se často i příčný křížový tok.



Obrázek 4: Rozložení teplot v souproutém a protiproutém výměníku tepla[21]

V protiproutém výměníku je v celém rozsahu poměrně malý teplotní spád mezi proudy A a B; zato výstupní teplota chladnějšího proudu B může být větší než výstupní teplota teplejšího proudu A – teploty se „vymění“. Počet schůdků, zakreslených čárkovanou čarou (Obr. 4) znamená, že daný protiproutý výměník se chová jako 3 až 4 převodové jednotky. V souproutém výměníku je na počátku velký tlakový spád a teploty se rychleji vyrovnávají; na konci však se rozdíl zmenšuje jen exponenciálně.

## 1.4 Difuze

Dalším jevem zapojujícím se do přenosových pochodů tepla je difuze. Podobně jako v [3] ji můžeme popsat jako přenos hmoty směrem od vyšší koncentrace k nižší. Hnací silou difuze je gradient koncentrace, nebo také koncentrační spád,  $-\frac{dc}{dl}$ , který představuje změnu koncentrace na jednotku dráhy difundující látky. Rychlost difuze je dána množstvím látky, které projde jednotkovou plochou za jednotku doby  $-\frac{m}{A \cdot d\tau}$ . K difúzi dochází nejčastěji mezi dvěma fázemi, které jsou v bezprostředním kontaktu. Difuze ovšem může probíhat i mezi fázemi, které jsou odděleny membránou, například osmóza, nebo uvnitř jedné fáze, například termodifuze. Rychlost difuze je tím větší, čím větší je gradient koncentrace, což lze vyjádřit rovnicí

$$\frac{m}{Ad\tau} = -D \frac{dc}{dl}, \quad (12)$$

kde  $m$  je množství látky [kg],  $A$  je difúzní povrch [ $m^2$ ],  $\tau$  je čas [s],  $D$  je difúzní koeficient [ $m^2/s$ ],  $c$  je koncentrace [ $kg/m^3$ ] a  $l$  je vzdálenost [m]. Záporné znaménko před pravou částí rovnice znamená, že s rostoucí vzdáleností  $l$  klesá koncentrace  $c$ . Vyjádřením difúzního koeficientu z rovnice (9) a provedením rozměrové analýzy můžeme určit rozměr difúzního koeficientu.

$$D = -\frac{m \cdot dl}{A \cdot dc \cdot d\tau} \quad (13)$$

$$[D] = \left[ \frac{kg \cdot m}{m^2 \cdot \frac{kg}{m^3} \cdot s} \right] = \left[ \frac{m^2}{s} \right]. \quad (14)$$

**Difúzní koeficient** je fyzikální charakteristika dané látky, která vyjadřuje její schopnost pronikat do vnějšího prostředí. Je číselně rovna množství látky, které by přešlo za jednotku doby jednotkovou plochou při jednotkovém poklesu koncentrace plynu na jednotku vzdálenosti ve směru difuze. Existuje několik druhů difuze odvozených z základních fyzikálních principů a mechanismů, na kterých jsou založeny. Jsou to:

- koncentrační difuze
- termická difuze
- tlaková difuze
- difuze účinkem vnějšího silového pole (kromě gravitačního)
- konvekce
- turbulentní přenos hmoty

Difuze, sama o sobě, je velmi složitá a rozsáhlá na to abychom ji zde nějak podrobně vysvětlovali, ale ještě si jen uvedeme podobnost, která je základem analogie mezi přenosem tepla a hmoty vycházející z hmotových bilancí.

$$\frac{\partial c_i}{\partial \tau} + v \cdot \nabla \cdot c_i = D_{ij} \cdot \nabla^2 \cdot c_i + r_i, \quad (15)$$

kde  $c_i$  je objemová koncentrace složky  $i$ ,  $r_i$  je rychlost vzniku složky  $i$ ,  $v$  je rychlost toku a konečně  $D_{ij}$  bude koncentrační gradient složky  $i$  ve složce  $j$ . Je patrné, že rovnice má podobný tvar jako Fourier–Kirchhoffova rovnice pro přenos energie (je-li ve Fourier–Kirchhoffově rovnici zanedbán člen vyjadřující disipaci mechanické energie).

## 1.5 Základy matematického modelování

### 1.5.1 Co je modelování

Jak je uváděno v [2], předpokladem efektivního řízení daného objektu, je znalost jeho vlastností. Je zřejmé, že má-li být optimální, musíme dokonale a přesně znát vlastnosti našeho objektu. Proto je velký zájem věnován tvorbě matematických modelů, neboť tyto modely jsou základem pro tvorbu řídicích systémů, při výběru algoritmů řízení apod. Poznamenejme, že matematické modely, tak jako modelování vůbec, nemají základní význam jen v oblasti řízení, kybernetiky, systémového inženýrství nebo v jiných technických vědách, ale dnes již ve většině vědních disciplín, protože představují nejen vhodnou formu na vyjádření poznatků o zkoumaných objektech a jevech, ale spolu s prostředky výpočetní techniky představují velmi efektivní nástroj k jejich dalšímu a hlubšímu zkoumání.

Proces tvorby modelů budeme nazývat modelování, což je popis vyšetřovaných objektů z kvantitativní a z kvalitativní stránky. Při sestavování modelu se reálný objekt zjednodušuje, schematizuje a získané schéma se popisuje v závislosti na složitosti objektu pomocí nějakého matematického formálního aparátu. Model musí uvažovat všechny charakteristické vlastnosti zkoumaného procesu a musíme z něj vyloučit vlastnosti nepodstatné druhořadého významu, které by dělaly model složitým a analýzu modelu těžkopádnou.

### 1.5.2 Stručná klasifikace modelů

Existují různá hlediska klasifikace modelů, respektující specifické stránky odrazu reálné skutečnosti. S klasifikací matematických modelů podle různých hledisek se můžeme

seznámit např. v [5] Z hlediska vazby mezi poznáním teoretickým a experimentálním je můžeme dělit na:

- **interní**, existující v mysli člověka jako abstraktní pojem (konceptuální modely),
- **externí**, které jsou konkretizací konceptuálních modelů, a to s ohledem na vztah modelu k subjektu, který jej vytváří.

Z hlediska zorného úhlu použitých výrazových prostředků třídíme modely na:

- **materiální**,
- **abstraktní**, přičemž do první skupiny patří modely s fyzikální podstatou, zatímco modely druhé skupiny jsou vytvořené opisem obsahu nebo formy. Dále je možné modely rozdělit na:

- **morfologické**,
- **kybernetické**,

přičemž do první skupiny patří modely vytvořené z originálu takovou projekcí, při které se zachovává forma, tedy geometrická stránka a sleduje se adekvátnost vnějších dimenzí, zatímco v případě kybernetických modelů dominuje při zobrazení shoda nebo podobnost chování struktury. Jestliže fyzikální modely, vytvořené na vhodné hmotné substanci zvýrazňují formální stránku originálu, hovoříme o maketách, zatímco při zdůraznění obsahové stránky jde o analogy. Z hlediska modelů pro účel řízení nás nejvíce zajímá logický průnik abstraktních a kybernetických modelů, což jsou modely matematické. U nich je vyjádřena struktura i chování formálními vývojovými prostředky – matematickými a logickými výrazy, rovnicemi a algoritmy. Matematické modely systémů pro účely řízení dělíme podle jejich charakteru na dvě velké skupiny:

- **statické**, při kterých vazbu mezi vstupními a výstupními veličinami reprezentují algebraické rovnice, ve kterých nevystupuje čas jako nezávisle proměnná, takže jde o relaci mezi ustálenými hodnotami vstupů a výstupů,
- **dynamické**, v případě kterých vazbu mezi vstupy a výstupy vyjadřují diferenciální resp. diferenční rovnice; modely statické obdržíme obecně z modelu dynamického pro limitu  $t \rightarrow \infty$ . Podle toho, zda koeficienty těchto rovnic (obecně jsou to parametry dynamických modelů) jsou závislé na čase, třídíme tyto modely na :

- **časově nezávislé** ( $t$  – invariantní),

- **časově závislé** (t – variantní).

Z hlediska linearity (tzn. platnosti principu superpozice) můžeme provést dělení modelů na:

- **lineární,**
- **nelineární,**

přičemž operace s první skupinou při analýze i syntéze jsou neporovnatelně jednodušší jako se skupinou druhou, a proto podle možnosti přistupujeme k linearizaci nelineárních systémů. V případě uvažování pouze spojitých změn veličin, mezi nimiž popisujeme vzájemnou vazbu, půjde o model:

- **spojitý**, zatímco model
- **diskrétní** se používá pro popis relace mezi veličinami, u nichž se uvažují jen změny v diskrétních časových okamžicích.

Další kritériem, z hlediska kterého se modely dělí, se vztahuje na charakter vazby mezi vstupy a výstupy, přičemž při bezprostřední závislosti jde o model:

- **vnější**, který popisuje relace „vstup – výstup“, zatímco
- **vnitřní** je reprezentovaný relací „vstup – stav – výstup“ a jedná se tedy o závislost zprostředkovanou přes stavové proměnné. Předností vnitřního (stavového) modelu je, že je vhodnější na aplikaci moderních matematických metod i na využití modelování prostředky nejnovější výpočetní techniky. Jestliže vezmeme v úvahu rozložení sledovaného parametru ve vyšetřovaném objektu, potom dělíme modely na:

- se **soustředěnými parametry**,
- s **rozloženými parametry**.

Modely, které mají stejné hodnoty sledovaných parametrů v celém prostoru objektu, jsou se soustředěnými parametry. Modely, které mají různé hodnoty sledovaných parametrů podle polohy v objektu, jsou s rozloženými parametry. První skupinu modelů popisujeme soustavou obyčejných diferenciálních rovnic, druhou soustavou parciálních diferenciálních rovnic. S ohledem na chování procesu, který probíhá ve vyšetřovaném objektu, můžeme experimentální modely rozdělit na :

- **deterministické,**



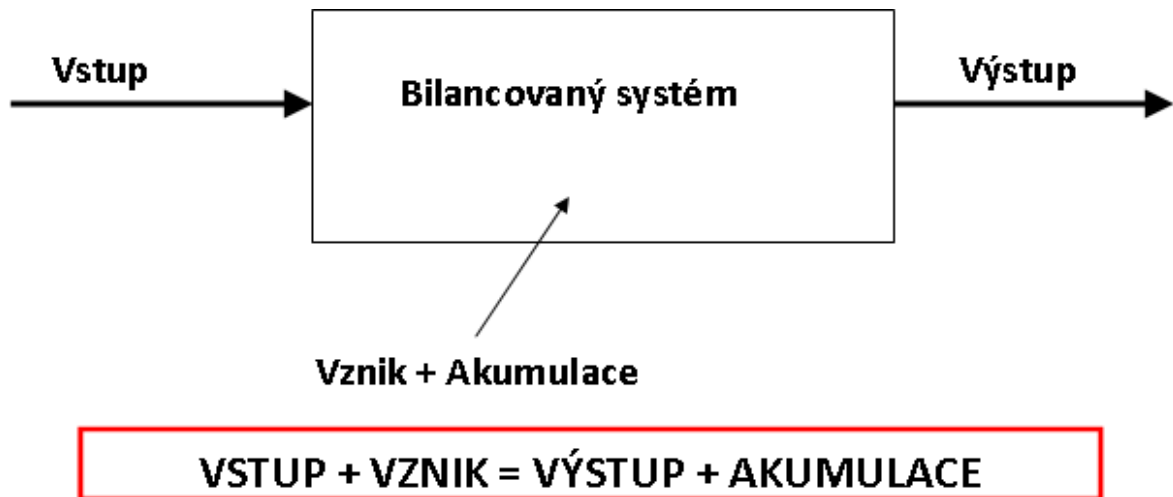
- **stochastické** (náhodné).

Deterministický model je možno získat, když na vstup vyšetřovaného objektu přivádíme přesně definované (časově determinované) testovací signály. Převážná většina objektů, s kterými se v průmyslové praxi setkáváme, má stochastický charakter. Pozorovaný výstup soustavy není zpravidla určován jen vstupními signály a jejich minulou historií, ale projevují se na něm náhodné vlivy, jejichž zdroj často ani neznáme. Mohou to být náhodné děje, které probíhají uvnitř vlastního objektu, nebo těžko kontrolované a určitelné náhodné vlivy působícího vnějšího okolí. Z hlediska vnějšího okolí lze proces probíhající ve stochastickém objektu chápat jako náhodnou transformaci signálů, která každému možnému vstupu přiřadí nějaký výstup, a přitom stejným vstupům může obecně přiřadit různé výstupy. Při matematickém popisu takovéto náhodné transformace nevystačíme s klasickými deterministickými modely, ale je třeba aplikovat obecnější pravděpodobnostní přístup – sestavit stochastický model. V takovém pojetí jsou deterministické modely speciálním limitním případem modelů stochastických, kdy stochastická složka je zanedbatelná.

## 1.6 Vytváření modelů na základě bilancí

Podle [21] existují takové veličiny, zavedené pro popis přírodních dějů, pro které platí za vymezených okolností zákon zachování a má tedy smysl je sčítat a odčítat – provádět jejich bilanci. Bilancovatelné veličiny patří k veličinám extenzivním. V soustavě údajů o vstupech, výstupech, vzniku, zániku a akumulaci (hromadění) můžeme výpočtem určit kteroukoliv položku tehdy, známe-li dostatečný počet položek ostatních. To je důležité, protože v praxi jen některé položky můžeme nastavit, některé se daří alespoň změřit a o řadě ostatních se můžeme něco dozvědět jen bilančním výpočtem. Bilanční výpočet často je velmi jednoduchý (sčítání, odečítání) avšak někdy může vyžadovat až řešení soustav diferenciálních rovnic. Ve většině případů dává bilanční výpočet výsledek přesnější, spolehlivější a dosažený levnějším způsobem než může zajistit přímé měření. Pomocí bilance také ověřujeme kvalitu měření (kalibrace přístrojů). Bilancovat můžeme veličiny skalární (např. hmotnosti, objemy, kusy, látková množství, peníze, energie různého druhu). Při dodržení příslušných matematických pravidel můžeme bilancovat i vektorové veličiny (např. síly, rychlosti, hybnosti) nebo i složitější objekty. Při bilanci vymezuje vždy bilancovanou veličinu, bilancovaný systém a bilanční období. Je účelné vyjadřovat

bilancovanou veličinu v jedné jednotkách. Níže uvedené velmi jednoduché schéma na obrázku (Obr. 5) nám přiblíží základní myšlenku bilancování jednotlivých systémů spolu s popisem všech kroků vysvětlených v [11].



Obrázek 5: Jednoduché schéma bilancovaného systému

**VSTUP** (přítok) = Množství bilancované veličiny, které za bilanční časový interval vstoupí z okolí přes rozhraní do bilancovaného systému.

**VZNIK** = Množství bilancované veličiny, které za bilanční časový interval přeměnou uvnitř bilancovaného systému vznikne (znaménko +) nebo zanikne (znaménko -).

**VÝSTUP** (odtok) = Množství bilancované veličiny, které za bilanční časový interval vystoupí z bilancovaného systému přes rozhraní do okolí.

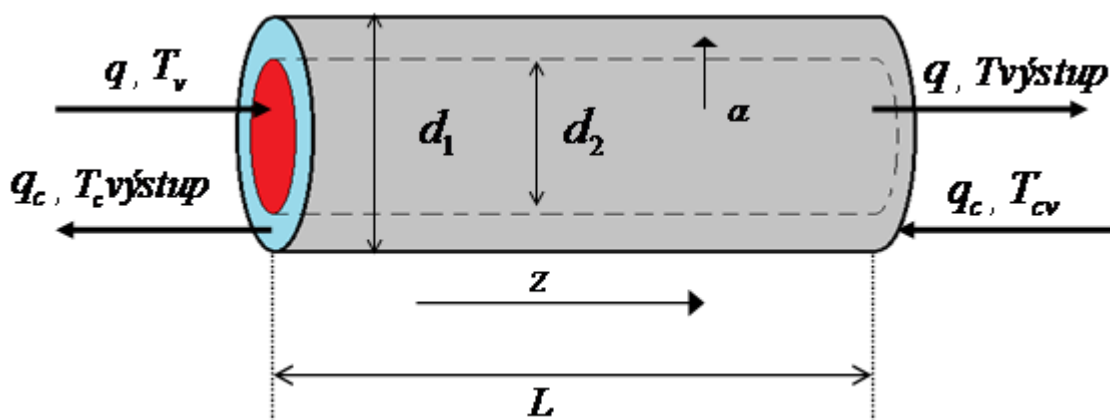
**AKUMULACE** = Změna množství (zádrže) bilancované veličiny uvnitř bilancovaného systému za bilanční časový interval.

## 2 SESTAVENÍ MATEMATICKÉHO MODELU VÝMĚNÍKU BEZ AXIÁLNÍHO A S AXIÁLNÍM PROMÍCHÁVÁNÍM

Následující kapitola se bude zabývat již konkrétními typy výměníků, kde se v prvním případě nezohlední podélné (axiální) promíchávání, ale v druhém případě se už tento jev pokusíme začlenit do našeho matematického modelu.

### 2.1 Dvoukapacitní protiproudý trubkový výměník tepla bez podélného promíchávání

Matematický model výměníku tepla typu trubka v trubce je odvozen např. v [4], [8], [14]. Uvažujeme výměník tepla typu trubka v trubce podle obrázku (Obr. 6). Vnitřní trubkou protéká chlazená kapalina, k jejímu ochlazení dochází přestupem tepla do chladicí kapaliny, která proudí ve vnější trubce v protiproudu. V tomto případě tedy vycházíme z předpokladu ideálního pístového toku obou kapalin, hustoty a měrná tepla obou kapalin jakož i koeficient přechodu tepla pokládáme za konstantní. Tepelnou kapacitu stěny trubky opět zanedbáme. Průtoky obou kapalin budeme v tomto případě považovat za proměnné.

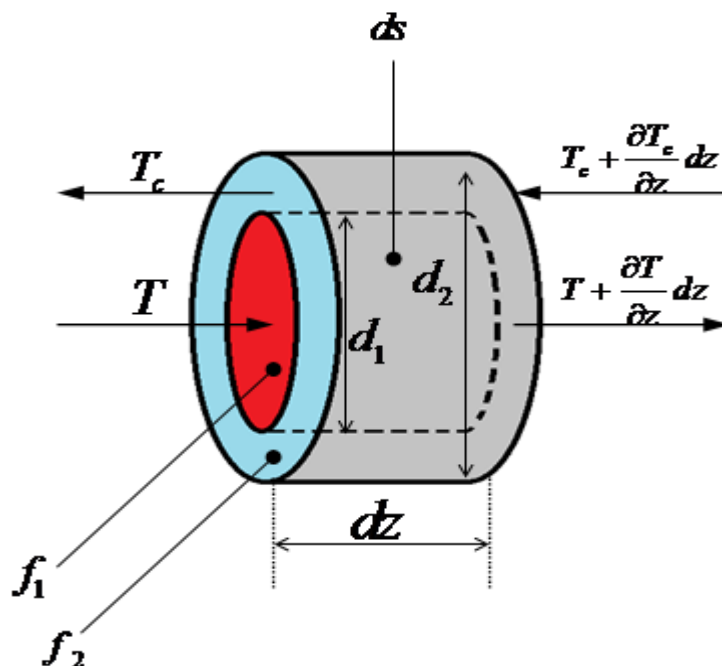


Obrázek 6: Schéma dvoukapacitního trubkového výměníku.

Na obrázku (Obr. 6) jsou  $d_1$  a  $d_2$  průměry vnější a vnitřní trubky v metrech,  $\alpha$  koeficient přechodu tepla v  $\text{kJ m}^{-2}\text{K}^{-1}\text{min}^{-1}$ ,  $q$  i  $q_c$  jsou objemové průtoky v  $\text{m}^3\text{min}^{-1}$ , index  $(\square)_c$  značí chladicí kapalinu a bez indexu je značení kapaliny chlazené.  $T$  je označení teplot

jednotlivých toků  $(\square)_v$  znamená teplotu na vstupu  $(\square)_c$  pak opět rozlišuje jednotlivé kapaliny. Písmeno  $L$  je délka trubek,  $z \in \langle 0, L \rangle$  a jde o nezávislou prostorovou proměnnou. Jak je patrné z obrázku (Obr. 7), jde o systém se spojitě rozloženými parametry, což znamená že, vstupní i stavová veličina se mění nejenom v čase, ale také v prostoru a to během pohybu toků trubkami.

Stavovými veličinami jsou nyní teploty chlazené i chladicí kapaliny  $T(z,t)$  a  $T_c(z,t)$ , vstupními veličinami teploty obou kapalin na vstupech  $T_v(t)$ ,  $T_{cv}(t)$  a oba průtoky  $q(t)$ ,  $q_c(t)$ . Při sestavení matematického modelu výměníku vycházíme z bilancí obou kapalin na objemovém elementu výměníku, který je na obrázku (Obr. 7).



Obrázek 7: Element  $dz$  (řez).

**Bilanční rovnice pro obě kapaliny můžeme slovně vyjádřit následovně:**

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Teplo vstupující do elementu } dV \\ \text{s proudem chlazené kapaliny} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Teplo přestupující na elementu} \\ \text{plochy } ds \text{ do chladicí kapaliny} \end{array} \right\} + \\
 + \left\{ \begin{array}{l} \text{Teplo odcházející z elementu } dV \\ \text{s proudem chlazené kapaliny} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Teplo v elementu } dV \\ \text{akumulované} \end{array} \right\}$$

pro chlazenou kapalinu

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Tepl o vstupující do elementu } dVc \\ \text{s proudem chladicí kapaliny} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Tepl o přestupující na elementu} \\ \text{plochy } ds \text{ do chladicí kapaliny} \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Tepl o odcházející z elementu } dVc \\ \text{s proudem chladicí kapaliny} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Tepl o v elementu } dVc \\ \text{akumulované} \end{array} \right\}$$

pak pro kapalinu chladící

Bilanční rovnice jsou pak v následujícím tvaru:

$$q\rho c_p T = q\rho c_p \left( T + \frac{\partial T}{\partial z} dz \right) + ds\alpha(T - T_c) + dV\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (16)$$

$$q_c\rho_c c_{pc} \left( T_c + \frac{\partial T_c}{\partial z} dz \right) + ds\alpha(T - T_c) = q_c\rho_c c_{pc} T_c + dV_c\rho_c c_{pc} \frac{\partial T_c}{\partial t}, \quad (17)$$

kde  $ds = \pi d_1 dz$ ,  $dV = f_1 dz = \pi \frac{d_1^2}{4} dz$ ,  $dV_c = f_2 dz = \pi \frac{d_2^2 - d_1^2}{4} dz$ .

Po dosazení předchozích výrazů do (16) a (17), vykrácení  $dz$  a vydělení rovnic výrazy před derivacemi teplot podle času, dostaneme obě rovnice nejprve ve tvaru

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{q}{f_1} \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{4\alpha}{d_1\rho c_p} (T_c - T) \quad (18)$$

$$\frac{\partial T_c}{\partial t} - \frac{q_c}{f_2} \frac{\partial T_c}{\partial z} = \frac{4d_1\alpha}{(d_2^2 - d_1^2)\rho_c c_{pc}} (T - T_c). \quad (19)$$

Vzhledem k tomu, že  $\frac{q}{f_1} = v$ ,  $\frac{q_c}{f_2} = v_c$  představují rychlosti proudění kapalin, dostaneme po

označení  $\frac{4\alpha}{d_1\rho c_p} = a_1$ ,  $\frac{4d_1\alpha}{(d_2^2 - d_1^2)\rho_c c_{pc}} = a_2$  obě rovnice v konečném tvaru.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial z} = a_1 (T_c - T) \quad (20)$$

$$\frac{\partial T_c}{\partial t} - v_c \frac{\partial T_c}{\partial z} = a_2 (T - T_c) \quad (21)$$

Počátečními a okrajovými podmínkami zde jsou:

$$T(z, 0) = T^s(z), \quad T_c(z, 0) = T_c^s(z) \quad (22)$$

$$T(0, t) = T_v(t), \quad T_c(L, t) = T_{cv}(t) \quad (23)$$

Počáteční podmínky (22) jsou řešením modelu ustáleného stavu

$$v^s \frac{dT^s}{dz} = a_1 (T_c^s - T^s) \quad (24)$$

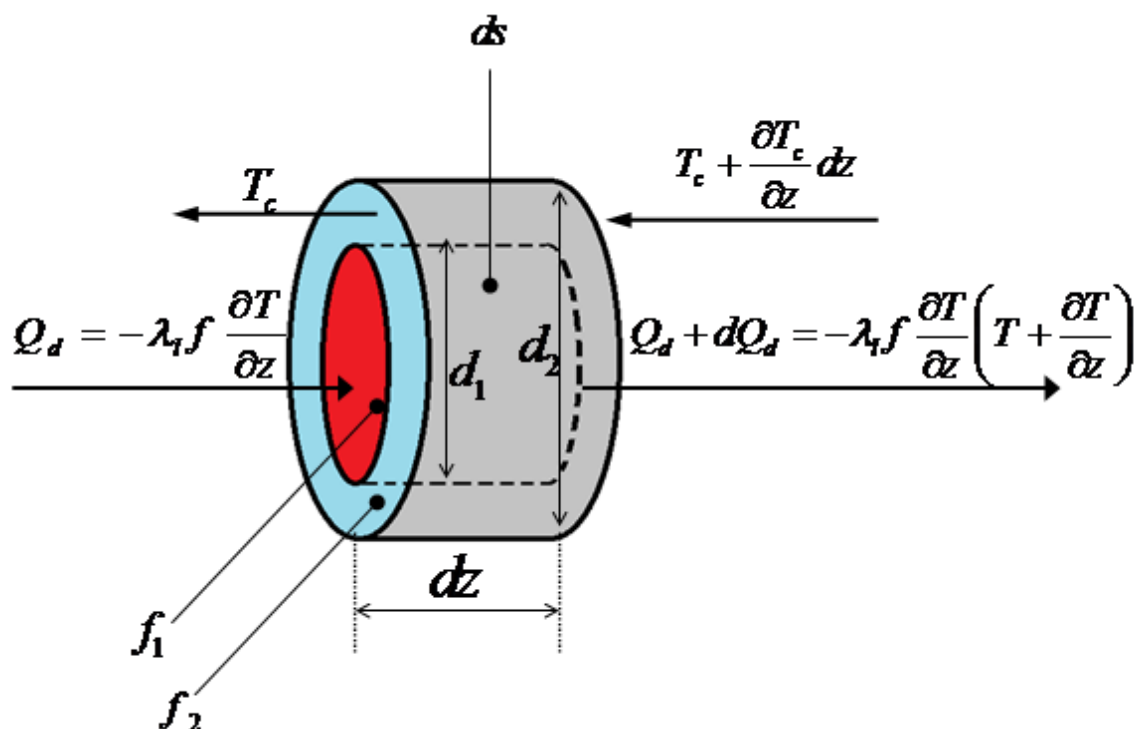
$$v_c^s \frac{dT_c^s}{dz} = a_2 (T^s - T_c^s), \quad (25)$$

kde okrajové podmínky  $T^s(0) = T_v^s$ ,  $T_c^s(L) = T_{cv}^s$  i rychlosti proudění  $v^s$ ,  $v_c^s$  (respektive průtoky  $q^s$ ,  $q_c^s$ ) obou kapalin v základním ustáleném stavu musí být zadány. Index  $()^s$  označuje ustálený stav, tzn. že stavová ani vstupní veličina nejsou v čase proměnné, ale jsou pouze funkcemi prostorové proměnné  $z$ ,  $u_0^s$  je konstanta. Existuje řada metod pro řešení PDR. Vzhledem k programovému vybavení, které máme k dispozici a které umožňuje numerické řešení soustav obecných diferenciálních rovnic (dále jen ODR) použijeme pro řešení statických i dynamických vlastností metodu konečných diferencí - MKD (FDM – Finite Difference Method).

## 2.2 Dvoukapacitní protiproudý trubkový výměník tepla s podélným promícháváním ochlazované směsi

Tento poněkud složitější případ je řešen např. v [1], [7], [18]. Opět uvažujeme výměník tepla typu trubka v trubce, kde ve vnitřní části proudí ochlazovaná kapalina, která je na rozdíl od předešlého případu navíc ještě podélně promíchávána, k jejímu ochlazení dochází přestupem tepla do chladicí kapaliny, proudící ve vnější trubce v protiproudu. Jako minule vycházíme z předpokladu ideálního pístového toku, ale už jen chladicí kapaliny, hustoty a měrná tepla obou kapalin jakož i koeficient přechodu tepla pokládáme za konstantní. Tepelnou kapacitu stěny trubky opět zanedbáme. Průtoky obou kapalin budeme i v tomto případě považovat za proměnné.

Kvůli totožnosti si popíšeme jen obrázek objemového elementu, ve kterém musíme nově počítat i s podélným promícháváním ochlazované vnitřní části.



Obrázek 8: Element  $dz$  s uvažováním axiálního promíchávání vnitřní fáze.

Jak je vidět na obrázku (Obr. 8), změny na popisu objemového elementu jsou opravdu jen na vnitřní části, kde jsme započítali pochody spojené s podélným promícháváním.

Z obrázku (Obr. 8) si pak můžeme odvodit následující rovnice.

$$q\rho c_p T + Q_d = q\rho c_p \left( T + \frac{\partial T}{\partial z} \right) + ds\alpha(T - T_c) + (Q_d + dQ_d) + dV\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (26)$$

$$q_c \rho_c c_{pc} \left( T_c + \frac{\partial T_c}{\partial z} dz \right) + ds\alpha(T - T_c) = q_c \rho_c c_{pc} T_c + dV_c \rho_c c_{pc} \frac{\partial T_c}{\partial t}, \quad (27)$$

kde  $ds = \pi d_1 dz$ ,  $dV = f_1 dz = \pi \frac{d_1^2}{4} dz$ ,  $dV_c = f_2 dz = \pi \frac{d_2^2 - d_1^2}{4} dz$ .

Opět dosadíme tyto výrazy do obou rovnic (26), (27), vykrácením  $dz$  a vydělením rovnic výrazy před derivacemi teplot podle času dostaneme obě rovnice nejprve ve tvaru

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q}{f_1} \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{4\alpha}{d_1 \rho c_p} (T_c - T) \quad (28)$$

$$\frac{\partial T_c}{\partial t} - \frac{q_c}{f_2} \frac{\partial T_c}{\partial z} = \frac{4d_1\alpha}{(d_2^2 - d_1^2) \rho_c c_{pc}} (T - T_c), \quad (29)$$

kde opět nahradíme  $\frac{q}{f_1} = v$ ,  $\frac{q_c}{f_2} = v_c$ ,  $\frac{4\alpha}{d_1 \rho c_p} = a_1$ ,  $\frac{4d_1\alpha}{(d_2^2 - d_1^2) \rho_c c_{pc}} = a_2$  pak dostaneme

rovnice:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + v \frac{\partial T}{\partial z} = a_1 (T_c - T) \quad (30)$$

$$\frac{\partial T_c}{\partial t} - v_c \frac{\partial T_c}{\partial z} = a_2 (T - T_c), \quad (31)$$

rovnice (31) je již v konečném stavu a dále se budeme věnovat jen rovnici (30), kde

$a = \frac{\lambda}{\rho c_p}$ ,  $a \approx D_p$  po této úpravě dostaneme konečnou soustavu rovnic.



$$\frac{\partial T}{\partial t} - D_p \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + v \frac{\partial T}{\partial z} = a_1 (T_c - T) \quad (32)$$

$$\frac{\partial T_c}{\partial t} - v_c \frac{\partial T_c}{\partial z} = a_2 (T - T_c) \quad (33)$$

Počátečními a okrajovými podmínkami zde jsou:

$$T(z, 0) = T^s(z), \quad T_c(z, 0) = T_c^s(z) \quad (34)$$

$$T(0, t) = T_v(t), \quad T_c(L, t) = T_{cv}(t) \quad (35)$$

Počáteční podmínky (34) jsou řešením modelu ustáleného stavu

$$-D_p \frac{\partial^2 T^s}{\partial z^2} + v^s \frac{\partial T^s}{\partial z} = a_1 (T_c^s - T^s) \quad (36)$$

$$v_c^s \frac{dT_c^s}{dz} = a_2 (T_c^s - T^s), \quad (37)$$

kde okrajové podmínky  $T^s(0) = T_v^s$ ,  $T_c^s(L) = T_{cv}^s$  i rychlosti proudění  $v^s$ ,  $v_c^s$  (respektive průtoky  $q^s$ ,  $q_c^s$ ) obou kapalin v základním ustáleném stavu musí být stejně jako u předchozího případu zadány.

### 3 TYPY PDR

Tato krátká kapitola pouze stanoví rozdělení rovnic podle hodnoty jejího diskriminantu, podobně jako je uvedeno v [15].

**Lineární parciální diferenciální rovnice (LPDR) druhého řádu:**

$$\begin{aligned} a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\ + d(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + e(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + g(x, y)u = f(x, y), \end{aligned} \quad (38)$$

kde diskriminant  $D(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y) \cdot c(x, y)$

pro  $D(x, y) < 0$  jde o rovnici **eliptickou**

pro  $D(x, y) = 0$  jde o rovnici **parabolickou**

pro  $D(x, y) > 0$  jde o rovnici **hyperbolickou**

Pro úspěšné vyřešení PDR je třeba stanovit a vyšetřit takzvané počáteční a okrajové podmínky. Nejde o nic jiného než matematické ohraničení řešeného problému. Většinou musí být počáteční podmínky a částečně i podmínky okrajové zadány.

## 4 METODY ŘEŠENÍ PDR

V této kapitole se zaměříme na zatím jen teoretické řešení parciálních diferenciálních rovnic, které jsme si odvodili z našich modelů v předchozí části práce.

Je dobře známo, že téměř všechny jevy v přírodě zahrnující reaktivní toky, spalování, dynamiku plynů, a mnoho dalších procesů, lze popsat pomocí fyzikálních zákonů v oblasti algebraické, diferenciální, integrální rovnice, nebo jejich kombinace. Vyšetření uvedených rovnic přesným způsobem, ve většině případů není možné. Bylo tedy nutné najít metody pro přijatelná řešení těchto rovnic.

Typické pro vedení tepla nebo i difuzi je dopracování se k soustavě PDR, u složitějších případů jede o rovnice s výskytem parciálních derivací vyšších řádů. Pro řešení těchto PDR bylo v historii vyvinuto několik metod. Každá metoda je jinak vhodná pro konkrétní příklad. Záleží samozřejmě i na typu PDR, na kterou chceme danou metodu uplatnit.

### 4.1 Metoda konečných diferencí

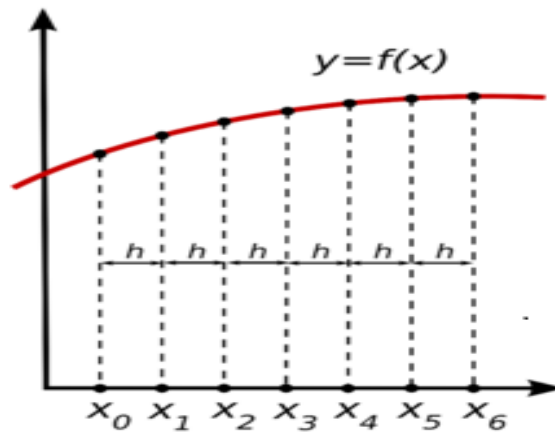
Stejně jako je tomu v [6], [9] bude náš popis této metody podrobnější, vzhledem k jejímu pozdějšímu využití ve výpočtech.

**Metoda konečných diferencí [MKD]** (Finite Difference Method - FDM)

Někdy také nazývána zkráceně diferenční nebo se můžeme setkat s českým označením „metoda sítí“. Metodu konečných diferencí vyvinul A. Thom v roce 1920 pod názvem "metoda náměstí" k řešení nelineárních hydrodynamických rovnic.

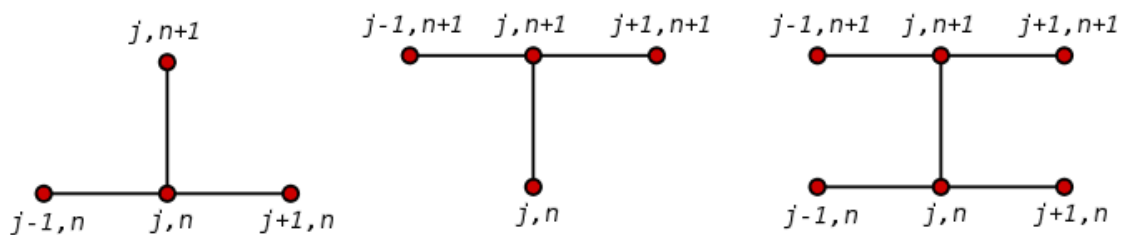
#### **Základní myšlenka:**

V oblasti, ve které hledáme řešení diferenciální rovnice, zvolíme konečnou množinu bodů, kterou nazveme síť a příslušné body jejími uzly, jak je to na obrázku (Obr. 9).



Obrázek 9: MKD - rozdělení oblasti [9]

Derivace hledané funkce, které se vyskytují v dané diferenciální rovnici a v okrajových podmínkách nahradíme diferenčními podíly v těchto uzlech. Toto se provede implicitní, explicitní nebo Crank – Nicolsonovou metodou, v češtině spíše dopředná, zpětná nebo centrální diference viz obrázek. (Obr. 10).



Obrázek 10: MKD – metody nahrazení derivací diferencemi [9]

Diferenčním podílem rozumíme lineární kombinaci funkčních hodnot v daném bodě a v několika okolních bodech. Příslušnou funkci aproximujeme a tak vznikne, hodnota hledané funkce v několika uzlech. Položíme interpolační polynom a vypočteme jeho derivaci. Provedeme-li záměnu derivací diferencemi, dostaneme místo původního problému soustavu algebraických rovnic o  $n$  neznámých k určení přibližných hodnot neznámé funkce v  $n$  různých uzlech sítě. V praxi se nejčastěji používá této metody pro lineární diferenciální rovnice, protože pak vzniklá soustava je lineární.

**Výhody** – tato metoda je velmi efektivní a rychlá pro lineární problémy na jednoduchých oblastech.

**Nevýhody** – přesnost je omezena velikostí časového kroku, pro složité problémy se příliš nepoužívá.

## 4.2 Obecné řešení PDR druhého řádu diferenční metodou

Typická PDR parabolického typu s druhou derivací podle prostorové proměnné popsána například v [16], [18] nebo i [20] je použita při vedení tepla nebo difúzi v pohyblivém prostředí.

$$\frac{\partial y}{\partial z} - a \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + b \frac{\partial y}{\partial z} + c(y - u) = f(y), \quad (39)$$

kde  $z \in \langle 0, L \rangle, t \in \langle 0, \infty \rangle$ .

Počáteční podmínka:  $y(z, 0) = y^s(z)$  jsou průběhy  $y$  v ustáleném stavu,  $u$  je vstupní veličina, která může být pouze  $u(t)$  jako soustředěná vstupní veličina nebo  $u(z, t)$  jako rozložená vstupní veličina.

**Okrajové podmínky:**

$$\text{I.} \quad y(0, t) = u^o(t), \quad y(L, t) = u^L(t) \quad \text{podmínka 1. druhu}$$

$$\text{II.} \quad \left. \frac{\partial y}{\partial z} \right|_{z=0} = u^o(t) \quad ; \quad \left. \frac{\partial y}{\partial z} \right|_{z=L} = u^L(t) \quad \text{podmínka 2. druhu}$$

$$\text{III.} \quad \alpha_1 \left. \frac{\partial y}{\partial z} + \beta_1 [u^o(t) - y] \right|_{z=0} = 0$$

$$\alpha_2 \left. \frac{\partial y}{\partial z} + \beta_2 [u^L(t) - y] \right|_{z=L} = 0 \quad \text{kde } (\alpha, \beta > 0) \quad \text{podmínka 3. druhu}$$

Kde  $u^o(t), u^L(t)$  jsou okrajové vstupní veličiny. Jestliže jsou nulové, nazýváme okrajové podmínky jako homogenní. Naopak nehomogenní v případě nenulových. Smíšené okrajové podmínky jsou, vyskytují-li se nalevo nulové a napravo nenulové či naopak.

### 4.3 Principy diferenční metody

Jak jsme již uváděli výše, podrobněji se touto metodou zabývá např. [16], [18], [20]. Diferenční metoda spočívá v náhradě derivací podle prostorové proměnné diferencemi. Použijeme nejjednodušší formulaci a to první derivaci, kterou nahradíme první zpětnou diferencí, druhou pak středovou třibodovou formulí. Nejprve rozdělíme interval  $\langle 0, L \rangle$  na  $n$  dílů (ekvidistantně) a spojitý interval  $z \in \langle 0, L \rangle$  nahradíme množinou  $N = \{0, z_1, z_2, \dots, z_n = L\}$ , kde  $z_j = z_{j-1} + h = jh$ ;  $j = 1, \dots, n$  ( $z_0 = 0$ ).

Pak

$$\left. \frac{\partial y}{\partial z} \right|_{z=z_j} \approx \frac{y(z_j, t) - y(z_{j-1}, t)}{h} \approx \frac{y_j(t) - y_{j-1}(t)}{h}, \quad (40)$$

kde  $j = 1, \dots, n-1$ .

$$\left. \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \right|_{z=z_j} \approx \frac{y(z_{j+1}, t) - 2y(z_j, t) + y(z_{j-1}, t))}{h^2} \approx \frac{y_{j+1}(t) - 2y_j(t) + y_{j-1}(t)}{h^2} \quad (41)$$

Jestliže budeme uvažovat s rozloženou vstupní veličinou, pak označíme  $u(z_j, t) \approx u_j(t)$  a po dosazení do rovnice (40) dostaneme soustavu ***n-1*** ODR:

$$\frac{dy_j}{dt} - a \frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} + b \frac{y_j - y_{j-1}}{h} - c(u_j - y_j) = f(y_j), \quad (42)$$

kde  $j = 1, \dots, n-1$  zde jsou  $y_j(t)$ ;  $u_j(t)$  s počátečními podmínkami  $y_j(0) = y_j^s$ .

#### Náhrada okrajových podmínek:

Použijeme okrajové podmínky 3. druhu. V levé okrajové podmínce ( $z = 0$ ) budeme používat první dopřednou diferenci, pro  $z = L$  pak zpětnou diferenci.

$$\alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} + \beta_1 (u^0 - y_0) = 0 \quad (43)$$

$$\alpha_2 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} - \beta_2 (u^L - y_n) = 0 \quad (44)$$

Další úprava nastane až po vyřešení ustáleného stavu. Pro ustálený stav jsou derivace v soustavě (41) nulové. Proto ustálený stav musíme počítat pro stejné rovnice, se stejným  $h$ , odpovídající soustavě (41). Index  $(\cdot)^s$  pro označení ustáleného stavu vynecháme.

$$-a \frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} + b \frac{y_j - y_{j-1}}{h} + c(y_j - u_j) = f(y_j, u_j) \quad (45)$$

Ze soustavy (45) vyjádříme  $y_j$  a dostaneme:

$$\left( \frac{2a}{h^2} + \frac{b}{h} + c \right) y_j = \frac{a}{h^2} y_{j+1} + \left( \frac{a}{h^2} + \frac{b}{h} \right) y_{j-1} + cu_j + f(y_j), \quad (46)$$

kde  $j = 1, \dots, n-1$

a z okrajových podmínek

$$\left( \frac{\alpha_1}{h} + \beta_1 \right) y_0 = \frac{\alpha_1}{h} y_1 + \beta_1 u^0; \quad \left( \frac{\alpha_2}{h} + \beta_2 \right) y_n = \frac{\alpha_2}{h} y_{n-1} + \beta_2 u^L \quad (47)$$

Po úpravách řešíme postupně soustavu  $n+1$  rovnic,

$$y_0 = \frac{\frac{\alpha_1}{h}}{\frac{\alpha_1}{h} + \beta_1} y_1 + \frac{\beta_1}{\frac{\alpha_1}{h} + \beta_1} u^0 \quad (48)$$

$$y_j = \frac{1}{\left( \frac{2a}{h^2} + \frac{b}{h} + c \right)} \left[ \left( \frac{a}{h^2} + \frac{b}{h} \right) y_{j-1} + \frac{a}{h^2} y_{j+1} + cu_j + f(y_j) \right], \quad (49)$$

kde  $j = 1, \dots, n-1$

$$y_n = \frac{1}{\frac{\alpha_2}{h^2} + \beta_2} \left( \frac{\alpha_2}{h} y_{n-1} + \beta_2 u^L \right). \quad (50)$$

Soustavu pak řešíme iteračně. Řešením dostaneme počáteční podmínky pro soustavu DR (40), kterou následně upravíme. Nejprve opět počítáme  $y_0$ , nyní to však bude průběh v čase.

$$y_0 = \frac{1}{\frac{\alpha_1}{h} + \beta_1} \left[ \frac{\alpha_1}{h} y_1 + \beta_1 u^0 \right] \quad (51)$$

Dále pak soustavu:

$$\frac{dy_j}{dt} = \left( \frac{a}{h^2} + \frac{b}{h} \right) y_{j-1} - \left( \frac{2a}{h^2} + \frac{b}{h} + c \right) y_j + \frac{a}{h^2} y_{j+1} + cu_j + f(y_j), \quad (52)$$

kde  $j = 1, \dots, n-1$ .

A nakonec dostaneme:

$$y_n = \frac{1}{\frac{\alpha_2}{h^2} + \beta_2} \left[ \frac{\alpha_2}{h} y_{n-1} + \beta_2 u^L \right]. \quad (53)$$



#### 4.4 Další možnosti řešení PDR

Nebudu zde uvádět všechny dostupné metody, ale rád bych stručně zmínil pouze ty dle mého názoru nejznámější a tím také nejčastěji používané.

**Metoda konečných objemů [MKO]** (Finite Control Volume Method - FCVM).

Mnohem přesnější popis této metody nabízí [13], zde jen stručně.

**základní myšlenka:**

- MKO vychází s diferenční metody
- oblast rozdělíme na jednotlivé vrstvy (2D – plochy a 3D – objemy)
- v jedné vrstvě předpokládáme v daném časovém kroku konstantní teplotu, která je rovna teplotě ve vnitřním uzlu vrstvy
- popíšeme jednotlivé pozice uzlů ve vrstvě

**Výhody** – řeší zvláště transportní a bilanční rovnici (rovnice obsahují pouze první derivace), je velmi efektivní a rychlá pro lineární problémy na jednoduchých oblastech.

**Nevýhody** – v porovnání s metodou konečných prvků je méně rozvinutá, nehodí se na složité tvary (oblasti).

**Metoda konečných prvků [MKP]** (Finite Element Method).

Následující metoda pro řešení některých PDR je opět podrobněji zmíněna v [10], [19], pro názornost bude postačovat jen uvedené stručné vysvětlení.

**základní myšlenka:**

- MKP je založena na diskretizaci původní spojité konstrukce soustavou prvků (nebo obecněji na diskretizaci slabé formulace řídicích rovnic), kde je výsledkem přibližné řešení
- přesnost závisí na volbě typu konečných prvků, jejich velikosti, na průběhu slabého řešení a u časově závislých problémů na typu časové diskretizace a algoritmu řešení
- metoda je silně ovlivněna konstrukcí sítě konečných prvků

**Výhody** - Dovoluje lepší geometrický popis a vystižení okrajových podmínek při složitých tvarech integrační oblasti. Využívá místně zjemněné diskretizace ve významných částech řešené oblasti bez zvláštních úprav výpočtového programu. Umožňuje jednodušší použití vyšších typů aproximace hledané funkce s cílem zvýšení přesnosti řešení.

**Nevýhody** - V úlohách, kde se řeší rozložení teplot, je MKD citlivější na přesnost ve větších hloubkách pod povrchem.

## 5 ŘEŠENÍ STATICKÝCH CHARAKTERISTIK

Tato následující část se již věnuje řešení statických charakteristik našich již dříve odvozených modelů výměníků. Statická charakteristika nebo chcete-li ustálený stav je průběh, v našem případě teplot, ve výměníku ve chvíli, kdy přítok i odtok chladící i chlazené kapaliny je konstantní, stejně jako jejich teploty.

### 5.1 Ustálený stav pro výměník bez podélného promíchávání

Matematický model jsme si již odvodili (20), (21). Dále budeme už pracovat s ustálenými stavy (24) a (25), které získáme po vypuštění derivací podle času, podobně jako je tomu v [16], [18], [20].

#### 5.1.1 Řešení rovnice chlazené kapaliny

Nejdříve tedy pro chlazenou kapalinu. Symboly pro značení ustáleného stavu  $(\cdot)^s$  opět vynecháme.

$$v \frac{dT}{dz} = a_1(T_c - T) \quad (54)$$

Okrajové podmínky tohoto ustáleného stavu jsou:

$$T^s(0) = T_v^s. \quad (55)$$

Nyní již zavedeme podle MKD náhradu derivací první dopřednou diferencí

$$\left. \frac{dT}{dz} \right|_{z=z_i} \approx \frac{T_{z_{i+1}} - T_{z_i}}{h}. \quad (56)$$

Následně dosadíme do rovnice (54), zároveň položíme pro zjednodušení  $T_{z_i} = T_i$

$$v \frac{T_{i+1} - T_i}{h} = a_1(T_{ci} - T_i). \quad (57)$$

Po úpravě dostaneme rovnici v následujícím tvaru:

$$\left(\frac{v}{h} + a_1\right) T_i = \frac{v}{h} T_{i+1} + a_1 T_i. \quad (58)$$

Upravíme:

$$T_i = \frac{\frac{v}{h}}{\frac{v}{h} + a_i} T_{i+1} + \frac{a_i}{\frac{v}{h} + a_i} T_i, \quad (59)$$

kde  $i = 1, \dots, n - 1$

pro  $i = 1$  je  $T_{i-1} = T_0$ .

Určíme  $T_n$ :

$$T_n = \frac{\frac{v}{h}}{\frac{v}{h} + a_i} T_n + \frac{a_i}{\frac{v}{h} + a_i} T_n. \quad (60)$$

### 5.1.2 Řešení rovnice chladící kapaliny

$$v_c \frac{dT}{dz} = a_2 (T_c - T), \quad (61)$$

kde okrajové podmínky jsou:

$$T_c^s(L) = T_{cv}^s. \quad (62)$$

Opět použijeme první dopřednou diferenci namísto derivace

$$\left. \frac{dT_c}{dz} \right|_{z=z_j} \approx \frac{T_{c_{z_{j+1}}} - T_{c_{z_j}}}{h}. \quad (63)$$

Potom dosadíme do rovnice (61), přičemž znovu zjednodušíme  $T_{z_j} = T_j$  a dostaneme:

$$v_{c,j} \frac{T_{c_{j+1}} - T_{c_j}}{h} = a_2 (T_{c_j} - T_j), \quad (64)$$

pro  $j = 1$  je  $T_{j+1} = T_2$ .

Upravíme:

$$\left( \frac{v_c}{h} + a_2 \right) T_{c_j} = \frac{v_c}{h} T_{c_{j+1}} + a_2 T_j, \quad (65)$$

kde platí že  $j = n - i + 1$ ; pro  $i = 1$  je  $j = n$ ; pro  $i = n - 1$  je  $j = 2$ ,

dále upravíme:

$$Tc_j = \frac{\frac{v_c}{h}}{\frac{v_c}{h} + a_2} Tc_{j+1} + \frac{a_2}{\frac{v_c}{h} + a_2} T_j, \quad (66)$$

kde platí  $j = n - i + 1$ .

Opět určíme  $Tc_n$

$$Tc_n = \frac{\frac{v_c}{h}}{\frac{v_c}{h} + a_2} Tc_v + \frac{a_2}{\frac{v_c}{h} + a_2} T_n. \quad (67)$$

Nyní je čas na zavedení konstant pro zjednodušení zápisu a pozdější manipulaci se sestavenými rovnicemi. Konstanty  $a_1, a_2$  jsou nám již známi, proto jejich výpis už není nutný.

$$c_1 = \frac{v}{h}; c_2 = c_1 + a_1$$

$$c_3 = \frac{v_c}{h}; c_4 = c_3 + a_2$$

Tyto pak dosadíme do rovnic pro chlazenou kapalinu (59), (60) a chladící kap. (66), (67).

$$T_i = \frac{c_1 T_{i-1} + a_1 T c_i}{c_2} \quad (68)$$

$$T_n = \frac{c_1 T_v + a_1 T c_n}{c_2} \quad (69)$$

$$Tc_j = \frac{c_3 Tc_{j+1} + a_2 T_j}{c_4} \quad (70)$$

$$Tc_n = \frac{c_3 Tc_v + a_2 T_n}{c_4} \quad (71)$$

## 5.2 Ustálený stav pro výměník s podélným promícháváním v chlazené kapalině

K výpočtům tohoto složitějšího problému (než tomu bylo v předcházející variantě výměníku) jsme použily závěry z [16] a [18], ale také [20].

### 5.2.1 Řešení rovnice chlazené kapaliny

Přepíšeme již dříve odvozenou rovnici ve tvaru odpovídajícím řešení ustáleného stavu (bez derivací podle času). Jako minule nebudeme uvádět indexy ustáleného stavu.

$$-D_p \frac{d^2 T}{dz^2} + v \frac{dT}{dz} = a_1(T_c - T), \quad (72)$$

okrajové podmínky:

$$D_p \frac{dT}{dz} + v(T_v - T)|_{z=0} = 0 \quad (73)$$

$$\frac{dT}{dz}|_{z=L} = 0 \quad (74)$$

Teď použijeme metodu konečných diferencí

$$\frac{d^2 T}{dz^2}|_{z=z_i} \approx \frac{T(z_{i+1}) - 2T(z_i) + T(z_{i-1}))}{h^2} = \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{h^2} \quad (75)$$

$$\frac{dT}{dz}|_{z=z_i} \approx \frac{T(z_i) - T(z_{i-1}))}{h} = \frac{T_i - T_{i-1}}{h} \quad (76)$$

a po dosazení (75) a (76) do rovnice (72) dostaneme:

$$-D_p \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{h^2} + v \frac{T_i - T_{i-1}}{h} + a_1(T_i - T_{ci}) = 0 \quad (77)$$

$$\left( \frac{2D_p}{h^2} + \frac{v}{h} + a_1 \right) T_i = \left( \frac{D_p}{h^2} + \frac{v}{h} \right) T_{i-1} + \frac{D_p}{h^2} T_{i+1} + a_1 T_{ci}, \quad (78)$$

následně pak zavedeme konstanty pro zjednodušení zápisu.

$$c_1 = \frac{D_p}{h^2}; \quad c_2 = \frac{v}{h}; \quad c_3 = 2c_1 + c_2 + a_1$$

Jak jsme naznačili v předchozích kapitolách o řešení PDR touto metodou bude použito iteračního přístupu.

Iterační cyklus:

$$T_i = \frac{(c_1 + c_2)T_{i-1} + c_1T_{i+1} + a_1T_{ci}}{c_3}, \quad (79)$$

kde  $i = 1, \dots, n-1$ .

### **Náhrada okrajových podmínek:**

Pro  $z = c$  použijeme pro náhradu derivace první dopřednou diferenci

$$\left. \frac{dT}{dz} \right|_{z=0} \approx \frac{T_1 - T_0}{h} \quad \text{a dostaneme:}$$

$$D_p \frac{T_1 - T_0}{h} + v(T_v - T_0) = 0 \Rightarrow \left( \frac{D_p}{h} + v \right) T_0 = \frac{D_p}{h} T_1 + vT_v \quad (80)$$

$$T_0 = \frac{\left( \frac{D_p}{h} T_1 + vT_v \right)}{\left( \frac{D_p}{h} + v \right)}. \quad (81)$$

Opět zjednodušíme zápis pomocí stanovení konstant.

$$c_4 = \frac{D_p}{h}; \quad c_5 = c_4 + v; \quad c_6 = \frac{v c}{h}.$$

$$\text{Cyklus } T_0 = \frac{c_4 T_1 + v T_v}{c_5}.$$

Pro  $z = L$  použijeme pro náhradu derivace první zpětnou diferenci a dostaneme:

$$\left. \frac{dT}{dz} \right|_{z=L} \approx \frac{T_n - T_{n-1}}{h} \Rightarrow T_n = T_{n-1}. \quad (82)$$

### 5.2.2 Řešení rovnice pro chladící kapalinu

Zde se neuvažuje s axiální disperzí. Opět přepíšeme již odvozenou rovnici pro chladící kapalinu už ve tvaru řešení ustáleného stavu to je bez derivace podle času a indexu pro ustálený stav.

$$v_c \frac{dT_c}{dz} = a_2(T_c - T) \quad (83)$$

V bodě  $z_j$  nahradíme derivaci první dopřednou diferencí.

$$v_c \frac{T_{c,j+1} - T_{c,j}}{h} = a_2(T_{c,j} - T_j) \quad (84)$$

$$\left(\frac{v_c}{h} + a_2\right) T_{c,j} = \frac{v_c}{h} T_{c,j+1} + a_2 T_j, \quad (85)$$

kde  $j = n - i + 1$

(pro  $i = 1$  je  $j = n$  a pro  $i = n - 1$  je  $j = 2$ )

$$T_{c,j} = \frac{\frac{v_c}{h}}{\frac{v_c}{h} + a_2} T_{c,j+1} + \frac{a_2}{\frac{v_c}{h} + a_2} T_j, \quad (86)$$

kde  $j = n - i + 1$ .

Určíme opět i  $T_{c,n}$

$$T_{c,n} = \frac{\frac{v_c}{h}}{\frac{v_c}{h} + a_2} T_{cv} + \frac{a_2}{\frac{v_c}{h} + a_2} T_n. \quad (87)$$

Předběžný výpočet konstant:

$$c_1 = \frac{D_p}{h^2} ; c_2 = \frac{v}{h} ; c_3 = 2c_1 + c_2 + a_1$$

$$c_4 = \frac{D_p}{h} ; c_5 = c_4 + v ; c_6 = \frac{v_c}{h} ; c_7 = c_6 + a_2$$



Načtení vstupní iterace:

Pro  $i = 1$  až  $n$   $T(i) = T_v$ ;  $T_c(i) = T_{cv}$ ;  $s_1 = T_v$ ;  $s_2 = T_{cv}$

Vnější iterační cyklus:

$p_1 = s_1$ ;  $p_2 = s_2$

$$T_0 = \frac{c_4 T(1) + v T_v}{c_5} \quad (88)$$

$$T_1 = \frac{(c_1 + c_2) T_0 + c_1 T(2) + a_1 T_c(1)}{c_3} \quad (89)$$

$$T_c(1) = \frac{c_6 T_c(2) + a_2 T(1)}{c_7}. \quad (90)$$

Potom zavedeme  $ss1 = T(1)$ ;  $ss2 = T_c(1)$

Vnitřní cyklus (po dílech)

pro  $i = 2$  až  $n - 1$

$$T(i) = \frac{(c_1 + c_2) T(i-1) + c_1 T(i+1) + a_1 T_c(i)}{c_3}, \quad (91)$$

kde  $j = n - i + 1$ .

$$T_c(j) = \frac{c_6 T_c(j+1) + a_2 T(j)}{c_7} \quad (92)$$

opět zavedeme  $ss1 = ss1 + T(i)$ ;  $ss2 = ss2 + T_c(i)$ .

Konec vnitřního cyklu.

$$T(n) = T(n-1) \quad (93)$$

$$T_c(n) = \frac{c_6 T_{cv} + a_2 T(n)}{c_7} \tag{94}$$

$$ss1 = ss1 + T(n) ; ss2 = ss2 + T_c(n)$$

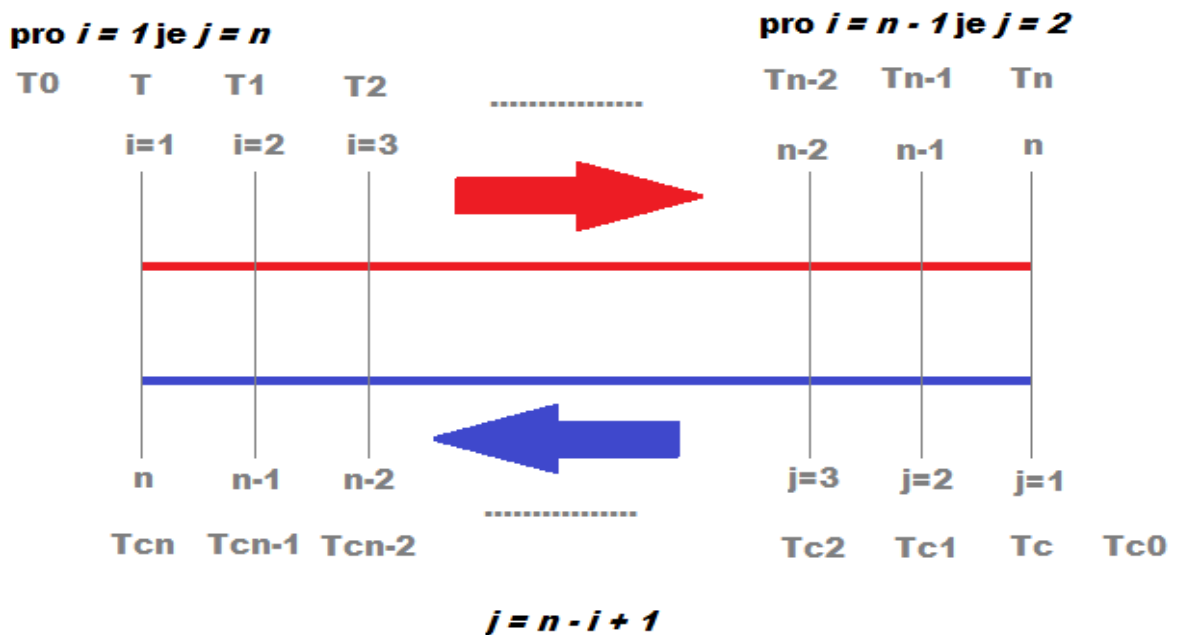
$$s_1 = ss1 / n ; s_2 = ss2 / n$$

Na tomto místě je vhodné vložit ukončovací podmínku, která zastaví iterační cyklus, pokud jí bude vyhověno. V našem případě je to v momentě, kdy odchylka mezi posunem teploty je menší než jedna tisícina.

$$eps = abs(s_1 - p_1) + abs(s_2 - p_2)$$

Ukončit vnější cyklus jestliže  $eps < 0.001$

Tisk výsledků  $T(i); T_c(i)$



Obrázek 11: Znázornění provázání toků na iteračních osách

Nyní jsme dostali rovnice použitelné pro naše další, již konkrétní výpočty statických charakteristik výměníku. Pro lepší pochopení iterací poslouží názorný obrázek (Obr. 11.). V praktické části budou tyto rovnice aplikovány pro naprogramování iterací reálného výměníku tepla se zadanými vlastnostmi a velikostí.

## 6 ŘEŠENÍ DYNAMICKÝCH CHARAKTERISTIK

Tato část práce se zabývá výpočtem dynamických charakteristik nebo chcete-li přechodovými charakteristikami výměníku tepla. Dynamika zařízení je vyšetření projevu (změny průběhu teplot) na změnu vstupních hodnot (teplot) výměníku, jak ve chlazené, tak i chladicí fázi. V praxi se vlastně změni vstupní teplota chlazené nebo chladicí kapaliny a měří se odezva soustavy na takovouto většinou skokovou změnu. Chceme vědět, za jak dlouho a kde se daná teplota opět ustálí. Pro diskretizaci funkcí znázorněných PDR v celé následující kapitole o dynamice výměníku, použijeme opět MKD podle postupu v [16] a [18] nebo [20].

### 6.1 Výpočet dynamické charakteristiky bez uvažování podélného promíchávání

Přepsání ustáleného modelu, vynecháváme indexování pro označení ustáleného stavu:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial z} = a_1 (T_c - T) \quad (95)$$

$$\frac{\partial T_c}{\partial t} - v_c \frac{\partial T_c}{\partial z} = a_2 (T - T_c). \quad (96)$$

Počátečními a okrajovými podmínkami tohoto modelu jsou

$$T(z, 0) = T^s(z), \quad T_c(z, 0) = T_c^s(z) \quad (97)$$

$$T(0, t) = T_v(t), \quad T_c(L, t) = T_{cv}(t). \quad (98)$$

Opět použijeme MKD a to nejprve na rovnici **chlazené kapaliny** (95).

Pro  $z = z_i$  použijeme zpětnou diferenci

$$\left. \frac{dT}{dz} \right|_{z=z_i} \approx \frac{T(z_i) - T(z_{i-1})}{h} = \frac{T_i - T_{i-1}}{h}, \quad (99)$$

kde  $i = 1, \dots, n$ .

Po dosazení do rovnice (95) dostaneme

$$\frac{dT_i}{dt} + v \frac{T_i - T_{i-1}}{h} = b_1 (T_{c,i} - T_i), \quad (100)$$

provedeme patřičné úpravy

$$\frac{dT_i}{dt} = \left(-\frac{v}{h} - b_1\right)T_i + \left(\frac{v}{h}\right)T_{i-1} + b_1T_{c,i}, \quad (101)$$

kde  $i = 2, \dots, n - 1$  a také jako u statické charakteristiky pro  $i = 1$  je  $T_{i-1} = T_0$ .

Zavedeme konstanty ve tvaru:

$$c_1 = \frac{v}{h}; c_2 = \frac{v}{h} + b_1$$

Určíme  $T(n)$

$$\frac{dT(n)}{dt} = -c_2T(n) + c_1T(0) + b_1T_c(n). \quad (102)$$

Nyní použijeme MKD konkrétně dopřednou diferenci na rovnici pro **chladičí kapalinu**

$$\left. \frac{dT_c}{dz} \right|_{z=z_j} \approx \frac{T_c(z_{j+1}) - T_c(z_j)}{h} = \frac{T_{c,j+1} - T_{c,j}}{h}. \quad (103)$$

Označíme  $T_c(z_i) = T_{c,i}$ .

Zpětně dosadíme do rovnice (96) a dostáváme:

$$\frac{dT_{c,j}}{dt} - v_c \frac{T_{c,j+1} - T_{c,j}}{h} = b_2(T_j - T_{c,j}), \quad (104)$$

po patřičných úpravách dostaneme rovnici ve tvaru:

$$\frac{dT_{c,j}}{dt} = \left(\frac{v_c}{h} + b_2\right)(-T_{c,j}) + \left(\frac{v_c}{h}\right)T_{c,j+1} + b_2T_j, \quad (105)$$

kde  $j = n - i + 1$  a cyklus je pro  $i = 2, \dots, n - 1$ ,

potom tam kde  $j = 1$  bude  $T_c(j + 1) = T_c(2)$ .

Ještě si určíme  $T_c(n)$

$$\frac{dT_c(n)}{dt} = c_4(-T_c(n)) + c_3T_{c,v} + b_2T(n). \quad (106)$$

Následně zavedeme konstanty:

$$c_1 = \frac{v}{h}; c_2 = \left(\frac{v}{h} + b_1\right); c_3 = \frac{v_c}{h}; c_4 = \left(\frac{v_c}{h} + b_2\right).$$

Výše uvedené konstanty použijeme v rovnicích (101), (102), (105), (106) a dostáváme všechny rovnice v tomto tvaru:

$$\frac{dT_i}{dt} = -c_2 T_i + c_1 T_{i-1} + b_1 T_{c,i} \quad (107)$$

$$\frac{dT_{c_j}}{dt} = c_4 (-T_{c_j}) + c_3 T_{c_{j+1}} + b_2 T_j. \quad (108)$$

Rovnice je potom třeba řešit iteračně, v následujícím pořadí, s indexováním pole v závorkách.

$$\frac{dT(1)}{dt} = -c_2 T(1) + c_1 T(0) + b_1 T_c(1), \quad (109)$$

$$\frac{dT(i)}{dt} = -c_2 T(i) + c_1 T(i-1) + b_1 T_c(i), \quad (110)$$

$$\frac{dT(n)}{dt} = -c_2 T(n) + c_1 T(0) + b_1 T_c(n), \quad (111)$$

$$\frac{dT_{c(n)}}{dt} = c_4 (-T_{c(n)}) + c_3 T_{cv} + b_2 T(n), \quad (112)$$

$$\frac{dT_{c(j)}}{dt} = c_4 (-T_{c(j)}) + c_3 T_{c(j+1)} + b_2 T(j), \quad (113)$$

$$\frac{dT_{c(1)}}{dt} = c_4 (-T_{c(1)}) + c_3 T_{c(2)} + b_2 T(1). \quad (114)$$

Počáteční podmínky jsou ve stejném tvaru, jako u modelu s podélným mícháním. Jde vlastně o výsledek řešení ustáleného stavu.

$$T(i, 0) = T^s(i), \quad i = 1, \dots, n-1$$

$$T_c(j, 0) = T_c^s(j), \quad j = 1, \dots, n$$

Abychom se vyhnuli přenosu nenulových počátečních podmínek do dynamického modelu, použijeme při řešení dynamiky odchylový model. Je známo, že pro lineární dynamické modely je přechod k odchylovému modelu velmi jednoduchý. Původní stavové vstupní veličiny v rovnicích dynamiky pouze nahradíme jejich odchylkami. V našem případě odchylové stavové veličiny definujeme jako:

$$x_0(t) = T_0(t) - T_0^s; \quad x_1(z, t) = T(z, t) - T^s(z); \quad x_2(z, t) = T_c(z, t) - T_c^s(z),$$

kde  $z = 1, \dots, n$

a podobně pak i odchylové vstupní veličiny definujeme jako:

$$u_1(t) = T_v(t) - T_v^s; \quad u_2(t) = T_{cv}(t) - T_{cv}^s.$$

Po dosazení dostáváme rovnice v konečném stavu vhodném pro naše výpočty dynamiky. Indexy v závorkách jsou jako minule podle požadavků na značení pole.

$$\frac{dx1(1)}{dt} = -c_2x1(1) + c_1x(0) + b_1x2(1), \quad (115)$$

iterační cyklus pro  $i = 2, \dots, n - 1$

$$\frac{dx1(i)}{dt} = -c_2x1(i) + c_1x1(i - 1) + b_1x2(i), \quad (116)$$

$$\frac{dx1(n)}{dt} = -c_2x1(n) + c_1u1 + b_1x2(n), \quad (117)$$

$$\frac{dx2(n)}{dt} = c_4(-x2(n)) + c_3u2 + b_2x1(n), \quad (118)$$

$j = n - i + 1$

$$\frac{dx2(j)}{dt} = c_4(-x2(j)) + c_3x2(j + 1) + b_2x1(j), \quad (119)$$

konec iteračního cyklu pro  $i$

$$\frac{dx2(1)}{dt} = c_4(-x2(1)) + c_3x2(2) + b_2x1(1). \quad (120)$$

## 6.2 Dynamický model výměníku s podélným promícháváním

### Rovnice chlazené kapaliny

$$\frac{\partial T}{\partial t} - Dp \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + v \frac{\partial T}{\partial z} = b_1(T_c - T). \quad (121)$$

Opět použijeme MKD:

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right|_{z=z_i} \approx \frac{T(z_{i+1}, t) - 2T(z_i, t) + T(z_{i-1}, t)}{h^2}, \quad (122)$$

kde  $i = 1, \dots, n - 1$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=z_i} \approx \frac{T(z_i, t) - T(z_{i-1}, t)}{h}, \quad (123)$$

kde  $i = 1, \dots, n - 1$ .

Označíme  $T(z_i, t) \approx T_i(t)$ ; kde  $i = 1, \dots, n$ .

Dosadíme rovnice (122) a (123) do rovnice (121) tak, že vynecháme časový argument, dostaneme soustavu obyčejných diferenciálních rovnic:

$$\frac{dT_i}{dt} - Dp \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{h^2} + v \frac{T_i - T_{i-1}}{h} = b_1(T_{c,i} - T_i) \quad (124)$$

a úpravami:

$$\frac{dT_i}{dt} = \left(\frac{Dp}{h^2} + \frac{v}{h}\right)T_{i-1} - \left(\frac{2Dp}{h^2} + \frac{v}{h} + b_1\right)T_i + \frac{Dp}{h^2}T_{i+1} + b_1T_{c,i}, \quad (125)$$

kde  $i = 1, \dots, n-1$

pro  $i = 1$  je  $T_{i-1} = T_0$ .

Soustavu (125) doplníme rovnicemi okrajových podmínek, které jsou stejné jako u modelu ustáleného stavu.

$$T_0 = \frac{\frac{Dp}{h}}{\frac{Dp}{h} + v} T_1 + \frac{v}{\frac{Dp}{h} + v} T_v \quad (126)$$

$$T_n = T_{n-1} \quad (127)$$

Rovnice (126) a (127) pro okrajové podmínky nejsou diferenciální!

### **Rovnice pro chladící kapalinu**

$$\frac{\partial T_c}{\partial t} - v_c \frac{\partial T_c}{\partial z} = b_2(T - T_c). \quad (128)$$

Pro náhradu derivace podle  $z$ , použijeme první dopřednou diferencii

$$\left. \frac{\partial T_c}{\partial z} \right|_{z=z_j} \approx \frac{T_c(z_{j+1,t}) - T_c(z_{j,t})}{h}. \quad (129)$$

Opět označíme  $T(z_{j,t}) \approx T_j(t)$ ; kde  $j = 1, \dots, n$

a po dosazení (129) do (128) dostaneme soustavu ODR

$$\frac{dT_{c,j}}{dt} = b_2 T_j - \left( \frac{v_c}{h} + b_2 \right) T_{c,j} + \frac{v_c}{h} T_{c,j+1}, \quad (130)$$

pro  $j = n - i + 1$  ( $i = 2, \dots, n - 1$ )

pro  $i = 2$  je  $j = n - 1$ ; pro  $i = n - 1$  je  $j = 2$ .

### Postup výpočtu:

Abychom se lépe orientovali zase stanovíme konstanty, které nám rovnice zpřehlední

$$b_1 = \frac{4 \alpha}{d_1 \rho C_p}; \quad b_2 = \frac{4 d_1 \alpha}{d_2^2 - d_1^2 \rho_c C_{pc}}; \quad a_3 = \frac{Dp}{h}; \quad a_4 = \frac{v}{h}; \quad a_1 = a_3 + a_4;$$

$$a_2 = 2a_3 + a_4 + b_1; \quad a_5 = \frac{\frac{Dp}{h}}{\frac{Dp}{h} + v}; \quad a_6 = \frac{v_c}{h}.$$

Rovnice musíme řešit v následujícím pořadí (indexy  $i, j$  budou v závorkách, jak to odpovídá indexování pole).

$$T_0 = a_5 T(1) + (1 - a_5) T_v \quad (131)$$

$$\frac{dT(1)}{dt} = a_1 T_0 - a_2 T(1) + a_3 T(2) + b_1 T_c(1), \quad (132)$$

pro  $i = 2, \dots, n - 1$

$$\frac{dT(i)}{dt} = a_1 T_{(i-1)} - a_2 T_{(i)} + a_3 T_{(i+1)} + b_1 T_{c(i)} \quad (133)$$

$$T_{(n)} = T_{(n-1)} \quad (134)$$

$$\frac{dT_{c(n)}}{dt} = b_2 T_{(n)} - (a_6 + b_2) T_{c(n)} + a_6 T_{c,v}, \quad (135)$$

pro  $j = n - i + 1$ ,

$$\frac{dT_{c(j)}}{dt} = b_2 T_{(j)} - (a_6 + b_2) T_{c(j)} + a_6 T_{c(j+1)} \quad (136)$$

$$\frac{dT_{c(1)}}{dt} = b_2 T_{(1)} - (a_6 + b_2) T_{c(1)} + a_6 T_{c,v}. \quad (137)$$



Pro diferenciální rovnice (132), (133), (135), (136), (137) musí být předepsány počáteční podmínky

$$T(i, 0) = T^s(i), \quad i = 1, \dots, n-1; \quad T_c(j, 0) = T_c^s(j), \quad j = 1, \dots, n.$$

Tyto počáteční podmínky jsou řešením modelu ustáleného stavu (36) a (37) se stejným diskretizačním krokem  $h$  (stejným počtem dělení  $n$ ). Přejít na odchylkový model je velmi jednoduchý, opět zavedeme odchylky místo stavových a vstupních veličin. V našem případě odchylkové stavové veličiny definujeme jako:

$$x_0(t) = T_0(t) - T_0^s; \quad x_1(h, t) = T(h, t) - T^s(h); \quad x_2(h, t) = T_c(h, t) - T_c^s(h),$$

kde  $h = 1, \dots, n$

a podobně pak i odchylkové vstupní veličiny definujeme jako:

$$u_1(t) = T_v(t) - T_v^s; \quad u_2(t) = T_{cv}(t) - T_{cv}^s.$$

Rovnice (131) – (137) nyní můžeme přepsat do tvaru:

$$x_0 = a_5 x_1(1) + (1 - a_5) u_1 \quad (138)$$

$$\frac{dx_1(i)}{dt} = a_1 x_0 - a_2 x_1(1) + a_3 x_1(2) + b_1 x_2(1), \quad (139)$$

iterační cyklus pro  $i = 2, \dots, n-1$

$$\frac{dx_1(i)}{dt} = a_1 x_1(i-1) - a_2 x_1(i) + a_3 x_1(i+1) + b_1 x_2(i), \quad (140)$$

$$x_1(n) = x_1(n-1), \quad (141)$$

$$\frac{dx_2(n)}{dt} = b_2 x_1(n) - (a_6 + b_2) x_2(n) + a_6 u_2, \quad (142)$$

kde  $j = n - i + 1$

$$\frac{dx_2(j)}{dt} = b_2 x_1(j) - (a_6 + b_2) x_2(j) + a_6 x_2(j+1), \quad (143)$$

konec iteračního cyklu pro  $i$ .

$$\frac{dx_2(1)}{dt} = b_2 x_1(1) - (a_6 + b_2) x_2(1) + a_6 x_2(2) \quad (144)$$

## **II. PRAKTICKÁ ČÁST**

## 7 ZADANÉ TECHNOLOGICKÉ PARAMETRY VÝMĚNÍKU

Abychom mohli vyšetřit konkrétní hodnoty a průběhy uvnitř výměníku, pokusíme si vytvořit zařízení podobající se v praxi používanému.

Uvažujme tedy následující dvoukapacitní trubkový výměník nejjednoduššího typu (trubka v trubce), určeného k ochlazení proudící vnitřní fáze. Jak jsme už dříve rozdělovali jednotlivé typy výměníků, půjde o systém s rozloženými parametry a verzi protiproudovou.

### Náš řešený výměník má následující parametry:

#### **Konstrukční:**

$l = 8 \text{ m}$	Délka výměníku v metrech.
$d1 = 0,05 \text{ m}$	Střední průměr vnitřní trubky v metrech.
$d2 = 0,1 \text{ m}$	Vnitřní průměr vnější trubky v metrech.

#### **Technologické:**

$\rho = 995 \text{ kg/m}^3$	Hustota chlazené kapaliny.
$c_p = 4,16 \text{ J/kgK}$	Měrné teplo chlazené kapaliny.
$\rho_c = 998 \text{ kg/m}^3$	Hustota chladící kapaliny.
$c_{p,c} = 4,18 \text{ J/kgK}$	Měrné teplo chladící kapaliny.
$\alpha = 2,27 \text{ kJ/m}^2\text{K min}$	Koeficient prostupu tepla z chlazené kapaliny.

#### **Vstupy v ustálených stavech:**

$T_v = 368 \text{ K}$	Vstupní teplota chlazené kapaliny v Kelvinech.
$Tc_v = 293 \text{ K}$	Vstupní teplo chladící kapaliny v Kelvinech.
$q = 0,000196 \text{ m}^3/\text{s}$	Průtok chlazené kapaliny.
$q_c = 0,000471 \text{ m}^3/\text{s}$	Průtok chladící kapaliny.

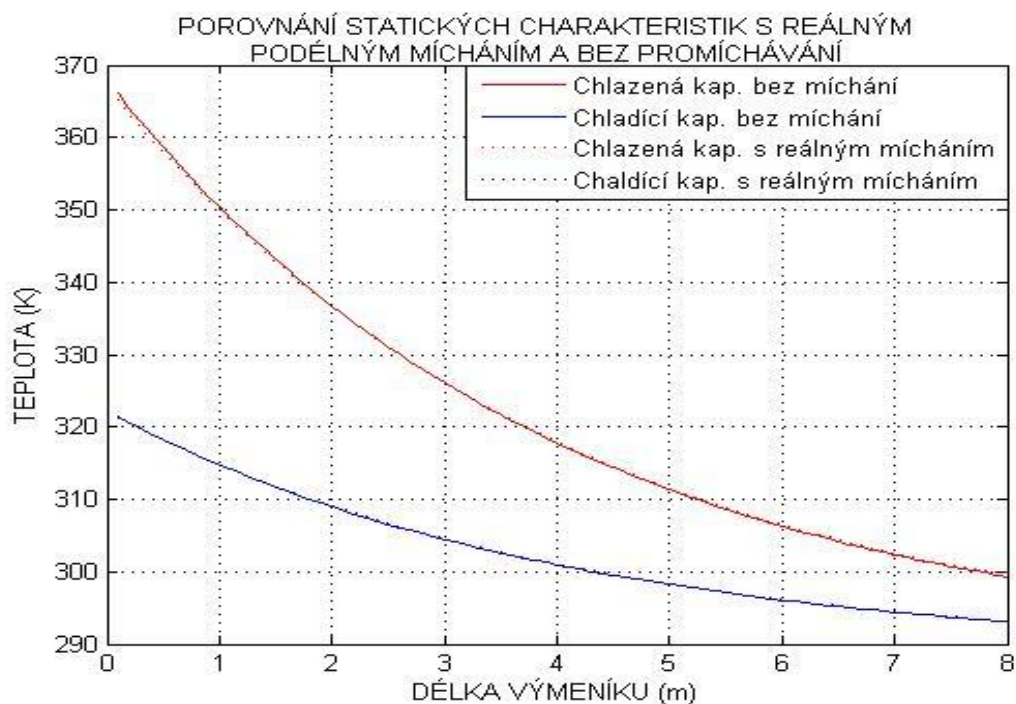
## 8 POROVNÁNÍ VÝSLEDKŮ STATICKÝCH CHARAKTERISTIK VÝMĚNÍKŮ S PODÉLNÝM A BEZ PODÉLNÉHO MÍCHÁNÍ V OCHLAZOVANÉ FÁZI

Tato kapitola se bude věnovat čistě statickým charakteristikám našeho nadefinovaného trubkového výměníku tepla. Dojde k porovnávání průběhů teplot vypočtených na základě různých vstupních hodnot koeficientu podélného promíchávání (dále jen  $Dp$ ).

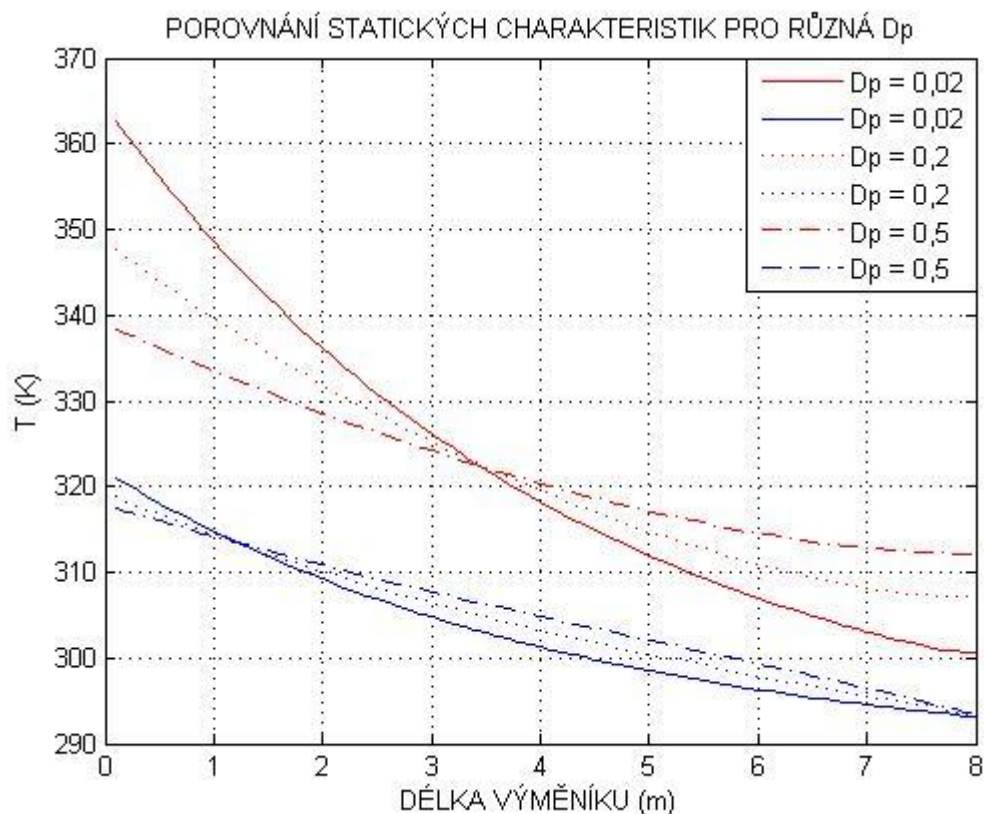
Následující obrázek (Obr. 12) tvoří statické charakteristiky míchané reálným koeficientem  $Dp = 0,005$ , který jsme odvodily v kapitole 1 přesněji rovnicí (4) pomocí Pécletova čísla.

$$Dp = \frac{vL}{2n} \quad (145)$$

Tento pomocný výpočet nám určí, k jakému podélnému míchání dochází reálně v našem výměníku,  $v$  znázorňuje rychlost proudění chlazené kapaliny,  $L$  délku výměníku a  $n$  je náš diskretizační krok rovný 80. Je patrné, že tečkovaný průběh míchaný reálným koeficientem  $Dp = 0,005$  je zcela překryt křivkou ustáleného stavu nemíchaného.



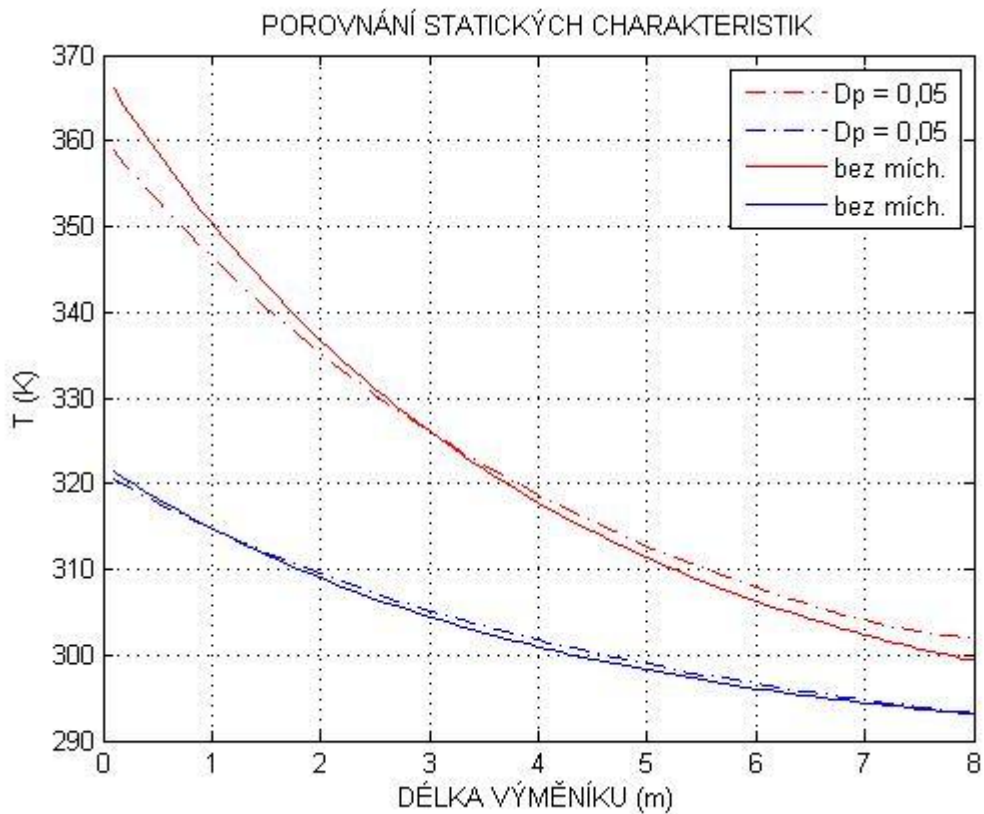
Obrázek 12: Porovnání průběhů statických charakteristik pro vypočtenou reálnou hodnotu podélného promíchávání ( $Dp = 0,005$ ) znázorněnou tečkovaně a bez podélného promíchávání vykresleného plnou čarou.



Obrázek 13: Porovnání statických charakteristik s různými koeficienty podélného míchání ve vnitřní ochlazované fázi.

Na uvedeném obrázku grafu (Obr. 13) se jasně projevuje míra ovlivnění průběhů teplot, rozložených po celé délce výměníku, v závislosti na různých hodnotách  $Dp$ . Červeně jsou znázorněny hodnoty patřící chlazené kapalině, kde si také můžeme všimnout, že ovlivnění koeficientem  $Dp$  je mnohem viditelnější, než tomu je v případě modrých křivek patřících chladící směsi. Musíme zde připomenout fakt, že s  $Dp$  se počítalo pouze u vnitřní fáze a přesto dochází k jistému, i když nepatrnému ovlivnění nemíchané chladící směsi. Při výpočtech jsme použili diskretizaci našeho výměníku na 80 dílů, což vytvořilo desetimetrové elementy (řezy) výměníku. Je možno vidět masivní ovlivnění hned na vstupu chlazené fáze v případě počítání s koeficientem  $Dp = 0,5$ , takové hodnoty ale nejsou v praxi většinou reálné a lze jich většinou dosáhnout jen na speciálních laboratorních modelech. Pro koeficient  $Dp = 0,2$  se začínáme blížit modelu ustáleného stavu, ale i takové hodnoty jsou v praxi výjimečné. Určíme-li  $Dp = 0,02$  dostáváme průběhy jen nepatrně se lišící od ustálených průběhů.

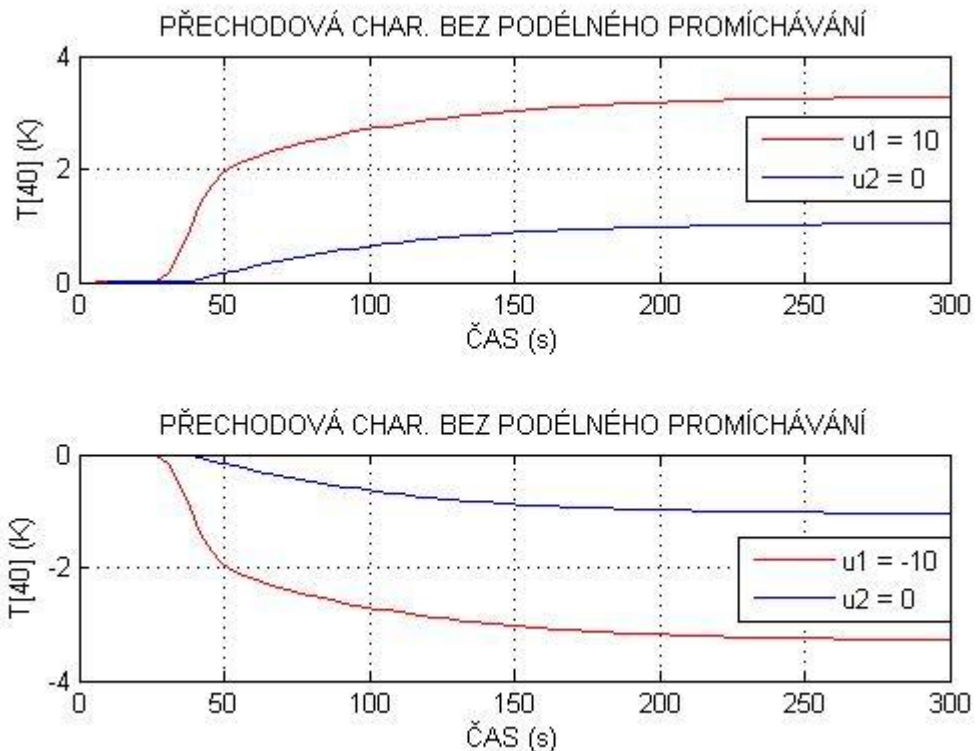
Na dalším obrázku (Obr. 14) jsme porovnávali statické charakteristiky bez podélného míchání a s podélným mícháním o hodnotě  $Dp = 0,05$ . Výsledkem je, že teploty u chladicí kapaliny jsou téměř totožné a spočítanou odchylku můžeme zcela určitě zanedbat. Naproti tomu u kapaliny chlazené je pozorovatelná rozdílnost větší, ale uvědomíme-li si teploty v Kelvinech, tak i tyto hodnoty nejsou nějak různé od nemíchané statiky.



Obrázek 14: Porovnání statické charakteristiky výměníku bez míchání a s mícháním ve vnitřní chlazené fázi, určeným koeficientem  $Dp = 0,05$ .

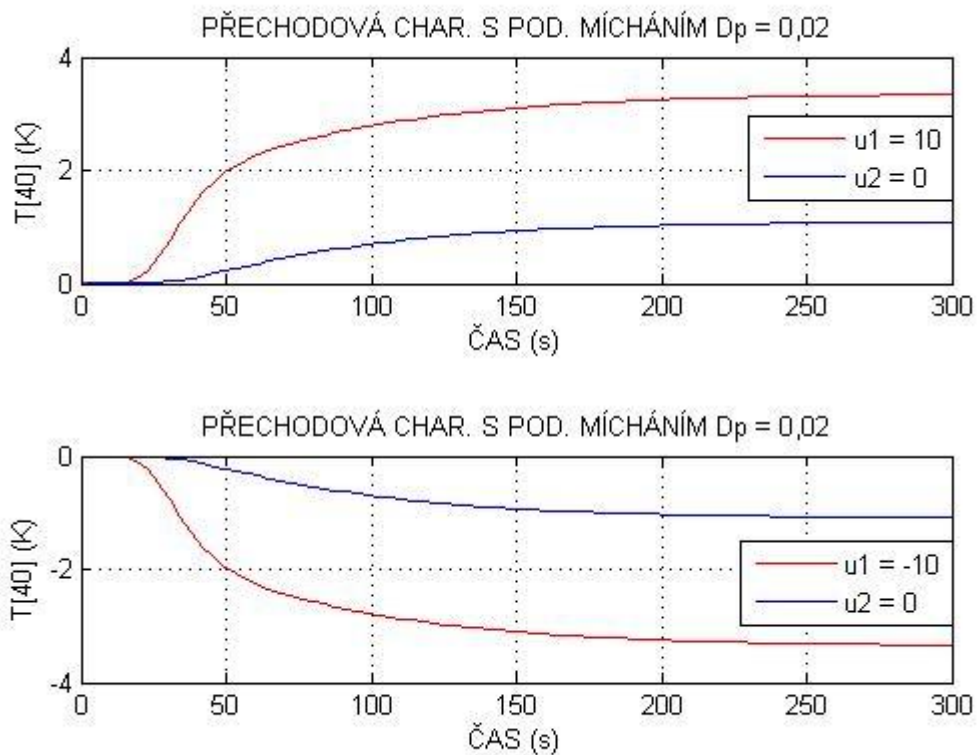
## 9 POROVNÁNÍ VYPOČÍTANÝCH PŘECHODOVÝCH CHARAKTERISTIK

Tato kapitola bude porovnávat přechodové charakteristiky, počítané při různých hodnotách podélného míchání (dále jen  $Dp$ ). Budeme na vstupy jednotlivých toků přivádět skokové změny vždy o +10 a záhy -10 Kelvinů, abychom sledovali odezvu naší soustavy.



Obrázek 15: Přechodové charakteristiky bez podélného míchání se skokovou změnou na vstupu chlazené fáze.

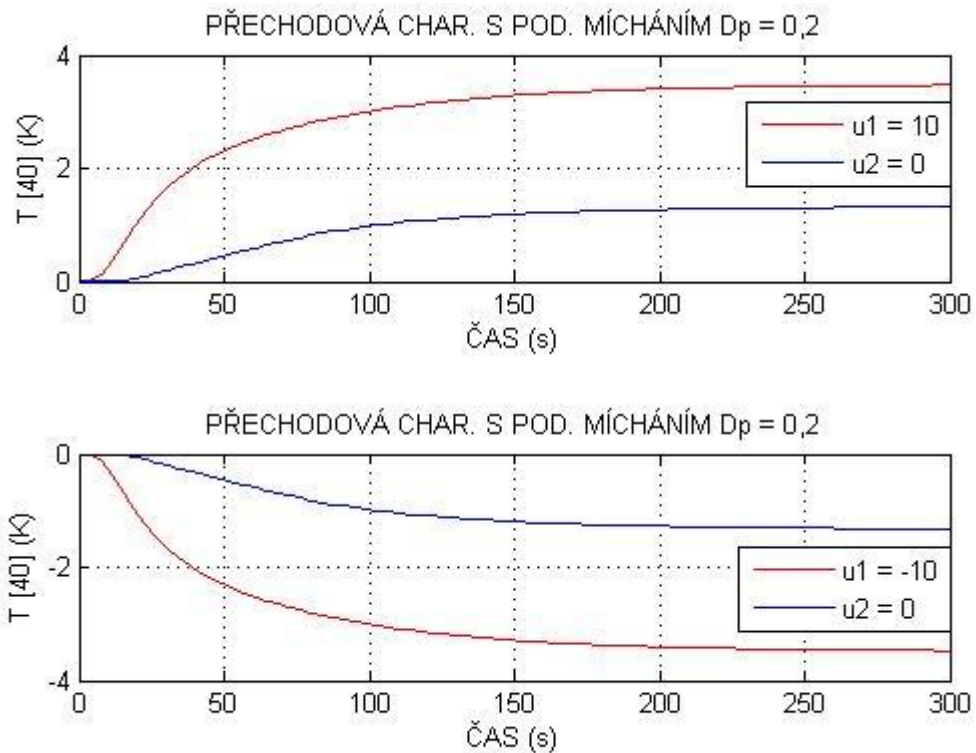
Na obrázku přechodových charakteristik (Obr. 15) se nepočítá s  $Dp$ . Vidíme v případě kladné, ale i záporné odchylky pomalý náběh způsobený faktem, že výpočty byly uskutečněny uprostřed výměníku na čtyřicátém elementu, tudíž ono dopravní zpoždění není nic jiného než čas nutný k tomu, aby změna na vstupu doproudila do námi počítaného středového elementu. Tento obrázek (Obr. 15) se věnuje zavedení odchylky pouze na vstupu chlazené kapaliny a to v horním případě o +10 K a ve spodním o -10 K, přičemž vstup chladicí kapaliny zůstává neměnný. Doba potřebná k ustálení změny teplot se pohybuje okolo pěti minut.



Obrázek 16: Přejchodové charakteristiky s podélným mícháním v chlazené kapalině ( $D_p = 0,02$ ) se skokovou změnou na vstupu chlazené fáze.

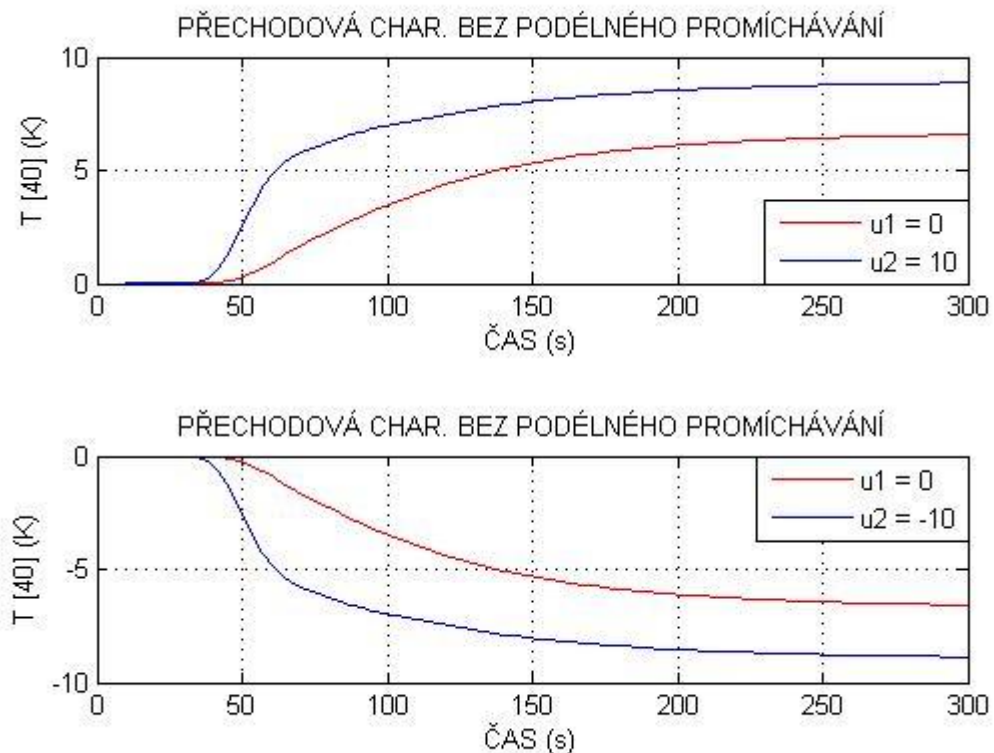
Uvedený obrázek (Obr. 16) znázorňuje přidání  $D_p$  s hodnotou  $0,02$ . Čas ustálení je stejný jako u předešlého obrázku (Obr. 15) jen je možno zpozorovat včasnejší náběh změny u chlazené kapaliny, který je ale pozvolnějši než tomu bylo právě na předchozím obrázku (Obr. 15). Opět jsme měnili vstup pouze u chlazené fáze.





Obrázek 17: Přejchodové charakteristiky s podélným mícháním v chlazené kapalině  $D_p = 0,2$  se skokovou změnou na vstupu chlazené fáze.

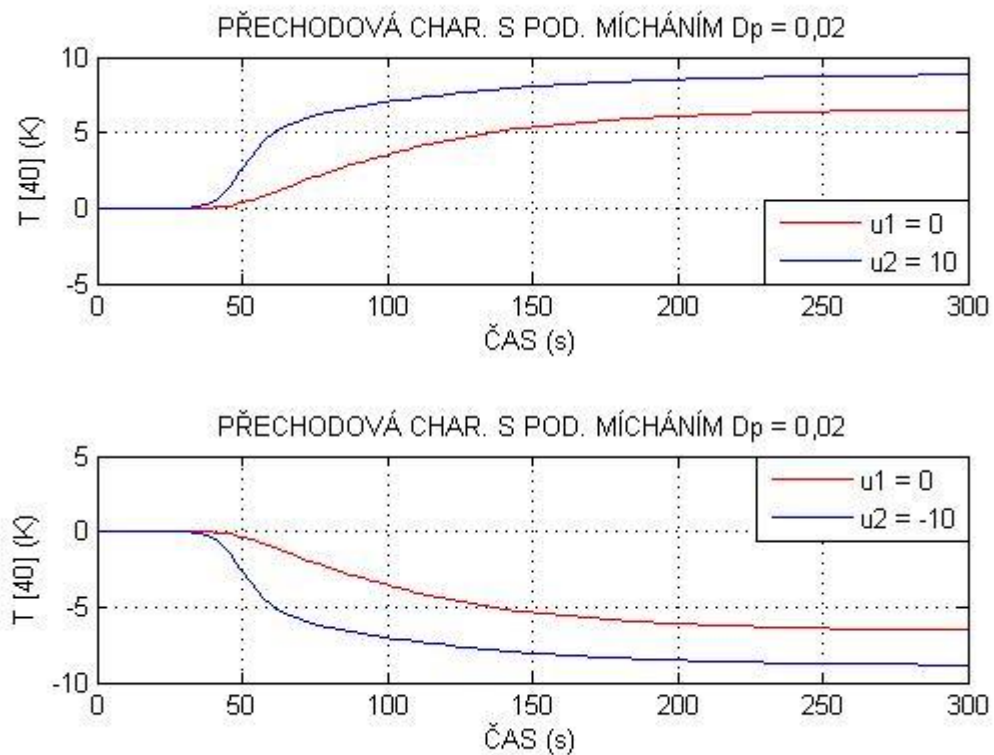
Zde (Obr. 17) už je počítáno s vysokým koeficientem  $D_p = 0,2$  v chlazené fázi, což má za hlavní následek velikou redukci dříve pozorovaného dopravního zpoždění a to jak u chlazené, tak i u chladící kapaliny. Hranice ustálení teplot i potřebný čas lze považovat za stejný jako u předešlých charakteristik.



Obrázek 18: Přechodové charakteristiky bez podélného míchání se skokovou změnou na vstupu chladicí fáze.

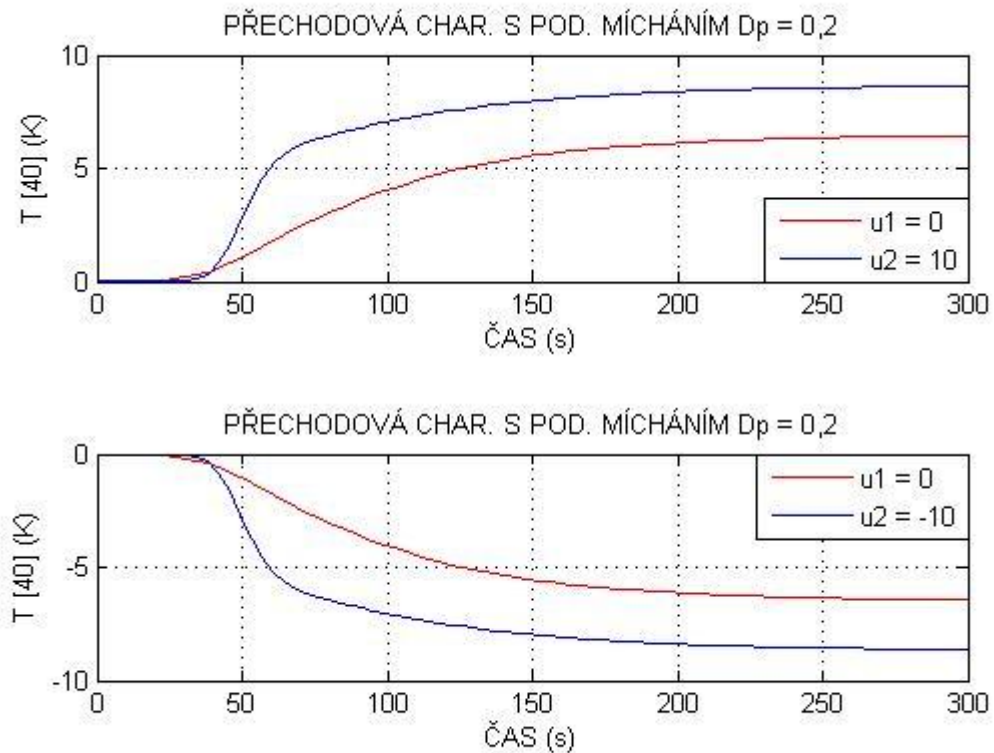
Do této chvíle jsme prováděli změny vstupu na chlazené kapalině. Nyní si popíšeme přechodové charakteristiky vytvořené se změnami v chladicí kapalině. Zase použijeme stejných skoků o +10 K a -10 K.

Na obrázku (Obr. 18) se zanedbá  $Dp$  chlazené kapalině. Jde vidět dopravní zpoždění, které jsme mohli pozorovat na obrázku (Obr. 15), podobně je to i s strmostí náběhu jen tentokrát vše probíhá u měněné chladicí kapalině. Jelikož náš výměník je stanoven pro chlazení vnitřního průměru, logicky ovlivnění teplot chlazené kapalině, změnou vstupu chladicí kapalině, je mnohem výraznější, než tomu bylo obráceně. Čas ustálení je podobný okolo 5 minut.



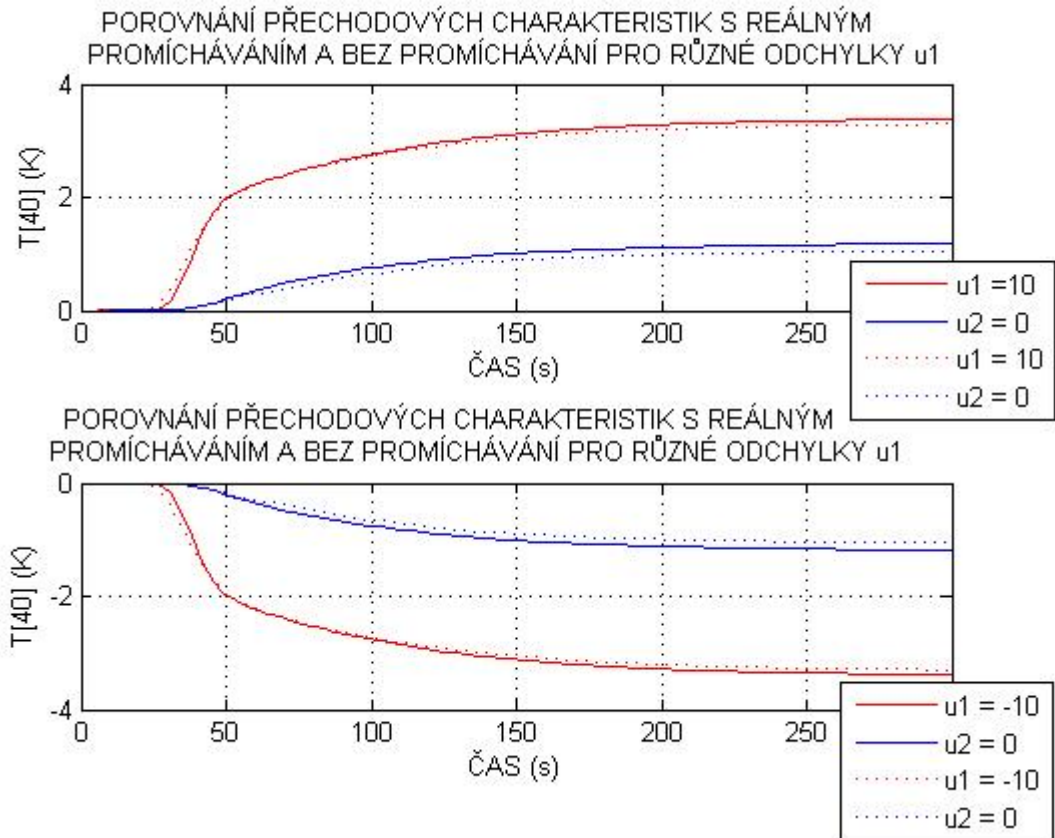
Obrázek 19: Přejchodové charakteristiky s podélným mícháním v chlazené kapalině  $D_p = 0,02$  se skokovou změnou na vstupu chladicí fáze.

Na tomto obrázku (Obr. 19) se počítá s  $D_p = 0,02$  v chlazené kapalině. Pro nízké hodnoty promíchávání je tato charakteristika velmi podobná s tou na obrázku (Obr. 18), kde šlo o nemíchaný průběh. Shodnost se dá sledovat na náběžích obou fází a i konečném ustálení, jen tentokrát z hlediska odchylky v chladicí fázi.



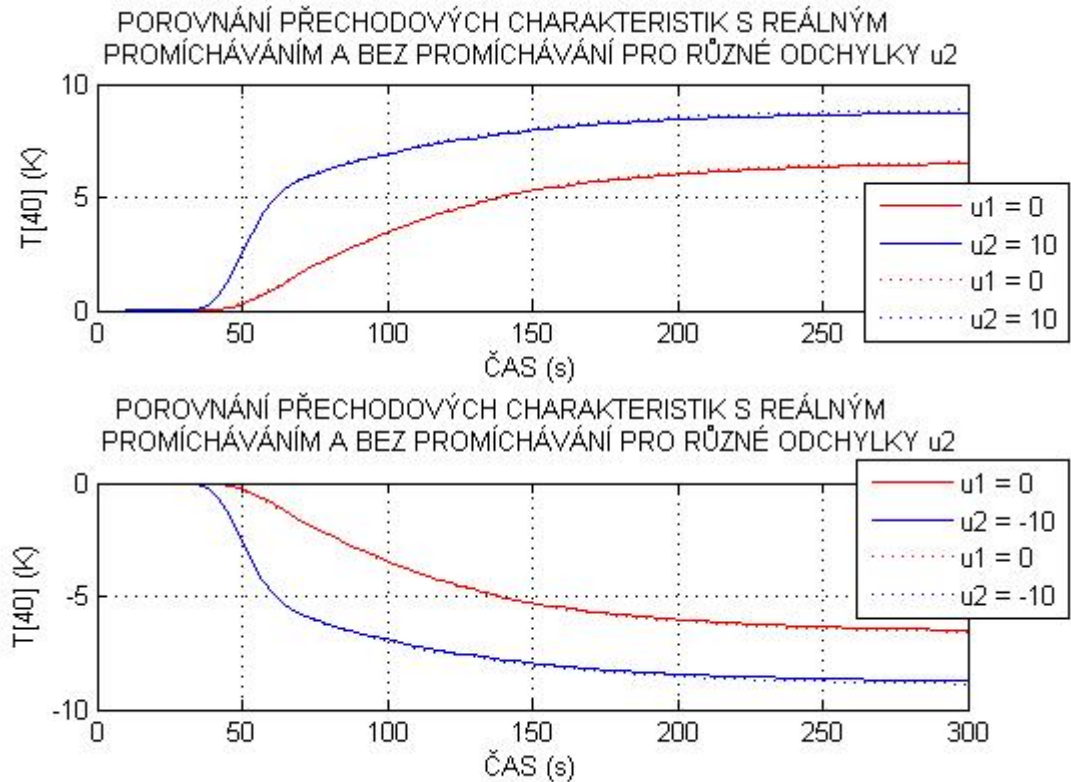
Obrázek 20: Přejchodové charakteristiky s podélným mícháním v chlazené kapalině  $D_p = 0,2$  se skokovou změnou na vstupu chladicí fáze.

Zde (Obr. 20) stejně jako na předešlém obrázku (Obr. 17) se počítá s vysokým  $D_p = 0,2$ , také změny průběhů mají podobný charakter. Míchání chlazené fáze, takřka nemá dopad na vývoj teplot v přechodových charakteristikách chladicí kapaliny. Dá se vyčíst plochý, ale mnohem včasější náběh chlazené kapaliny. Doba i místo ustálení se může ztotožnit s ostatními výsledky.



Obrázek 21: Porovnání statických charakteristik pro různé odchylky  $u_1$  a nulové odchylky  $u_2$ , kde plná čára platí pro hodnoty bez podélného míchání a tečkovaně jsou hodnoty s vypočteným reálným koeficientem  $Dp = 0,005$ .

Tento obrázek grafu (obr. 21) odhaluje rozdílnost průběhů přechodových charakteristik s uvažováním reálného promíchávání v chlazené kapalině a bez promíchávání. Odchylky byly vždy přivedeny na vstup chlazené směsi. Je jasně patrné, že takto vypočítané charakteristiky se téměř překrývají a rozdílnost v průběhu ustálení se dá považovat za nepodstatnou.



Obrázek 22: Porovnání statických charakteristik pro různé odchylky  $u_2$  a nulové odchylky  $u_1$ , kde plná čára platí pro hodnoty bez podélného míchání a tečkovaně jsou hodnoty s vypočteným reálným koeficientem  $D_p = 0,005$ .

Tady (Obr. 22) je podobně jako na předešlém obrázku (Obr. 21), srovnání reálného míchání v chlazené kapalině a nulového promíchávání v téže směsi. Jen tentokrát z hlediska odchylek přivedených na vstup chladicí části výměníku. Vidíme prakticky shodný průběh v obou případech, takže takováto míra promíchávání neovlivňuje rozložení ustálení dynamické části soustavy.

## ZÁVĚR

V diplomové práci byl zkoumán vliv členu zohledňujícího podélné promíchávání v chlazené kapalině na statické a dynamické vlastnosti tepelného výměníku. Pro analýzu byl zvolen dvoukapacitní trubkový výměník typu trubka v trubce. Byly sestaveny matematické a počítačové modely výměníku, pomocí kterých byly simulovány statické a dynamické charakteristiky s uvažováním a bez uvažování podélného promíchávání. Simulace byly realizovány pro různé hodnoty koeficientu podélného promíchávání, tj. koeficientu, který přiřazuje váhu druhé parciální derivaci teploty chlazené kapaliny podle prostorové nezávisle proměnné. Jako základní a současně nejnižší byla vzata hodnota koeficientu určená z literatury jako  $D_p = 0,005$ . Všechny další hodnoty byly uvažovány jako řádově vyšší. Výsledky simulací s modelem podélného promíchávání pak byly porovnány s výsledky získanými z modelu výměníku, ve kterém podélné promíchávání nebylo uvažováno.

Dosažené výsledky ukazují, že pro základní hodnotu koeficientu jsou statické i dynamické charakteristiky výměníku prakticky totožné s charakteristikami získanými z modelu bez uvažování podélného promíchávání. Malé viditelné rozdíly se objevují až při hodnotách  $D_p \approx 0.02$  a výraznější rozdíly při hodnotách  $D_p \approx 0.05$  (tedy desetinásobku základní hodnoty) a vyšších. Lze ovšem těžko očekávat, že by v praktických případech  $D_p$  dosahoval řádově vyšších hodnot než hodnota základní a tudíž lze vliv podélného promíchávání na statické i dynamické vlastnosti výměníku považovat za prakticky zanedbatelný. To platí zejména v případě sestavení matematického modelu výměníku za účelem návrhu jeho řízení.

## ZÁVĚR V ANGLIČTINĚ

In this thesis was investigate the effect of the term taking into account axial dispersion in the cooled liquid for static and dynamic characteristics of the heat exchanger. For analysis was chosen two-value tubular heat exchanger tube in tube type. Mathematical and computer models of the heat exchanger were compiled, through this models was simulated the static and dynamic characteristics with and without axial dispersion. The simulations were carried out for different values of the coefficient of axial dispersion, which assigns weight to the second order temperature derivatives of cooled liquid with respect to the space variable. As a base and the lowest was taken the value of coefficient determined from the literature as  $Dp = 0.005$ . All other values were considered as higher-order data. The results of simulations with the model includes axial dispersion were compared with results obtained from the heat exchanger model without axial dispersion.

The achieved results show that the baseline value of coefficient make virtually identical static and dynamic characteristics with results derived from the model by ignoring the axial dispersion. Little visible differences appear only at values of  $Dp \approx 0.02$  and significant differences in the values of  $Dp \approx 0.05$  (thus tenfold of the basic values) and higher. So it can be hardly expected, that in practical cases  $Dp$  reaching higher-order values, then basic data and therefore can be the effect of axial dispersion for static and dynamic characteristics of the heat exchanger considered practically negligible. This is particularly true in the case of compilation a mathematical model of heat exchanger for purpose of its control.



**SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY**

- [1] Babu, B.V.: Process plant simulation. Oxford University Press, New Delhi, 2004, ISBN 0-19-566805-7.
- [2] Bobál, V., Identifikace systémů, 1. vyd., Ediční středisko VUT v Brně v Čs. redakci VNMON, 1990, ISBN 80-214-0125-7.
- [3] Difuze. Dostupné z WWW:  
[https://www.stag.utb.cz/apps/stag/dipfile/index.php?download\\_this\\_unauthorized=1397](https://www.stag.utb.cz/apps/stag/dipfile/index.php?download_this_unauthorized=1397)
- [4] Dostál, P., Gazdoš, F.: Elektronické podklady k předmětu Analýza a simulace systémů. UTB ve Zlíně, FAI, 2009.
- [5] Dostál, P., Gazdoš, F.: Řízení technologických procesů. Skriptum, ES UTB ve Zlíně, 2006, ISBN 80-7318-465-6
- [6] Finite Difference Methods. Dostupná z WWW:  
[http://tl.iam.sinica.edu.tw/document/training\\_lectures/2006/SH\\_Chen/Finite\\_Difference\\_Methods.pdf](http://tl.iam.sinica.edu.tw/document/training_lectures/2006/SH_Chen/Finite_Difference_Methods.pdf)
- [7] Ilavský, J., Valtýni, J., Brunovská, A., Surový, J.: Aplikovaná chemická kinetika a teória reaktorov. ALFA, Bratislava, 1990, ISBN 80-05-00599-7.
- [8] Ingham, J., Dunn, I.J., Heinzle, E., Přenosil, J.E.: Chemical engineering Dynamics. An introduction to modelling and computer simulation. WILEY- VCH Verlag, Weinheim, 2000, ISBN 3-527-28511-3.
- [9] Metoda konečných diferencí. Dostupná z WWW:  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Finite\\_difference\\_method](http://en.wikipedia.org/wiki/Finite_difference_method)
- [10] Metoda konečných prvků. Dostupná z WWW:  
[http://mech.fsv.cvut.cz/~krejci/vyuka/NTP2/Prednasky/Prednaska\\_08.pdf](http://mech.fsv.cvut.cz/~krejci/vyuka/NTP2/Prednasky/Prednaska_08.pdf)
- [11] Míka, V., Základy chemického inženýrství, 2. vyd., SNTL – nakladatelství technické literatury, Praha, 1981.
- [12] Neideální reaktory. Dostupné z WWW:  
<http://www.bernauer.cz/vyuka/k1-5.pdf>
- [13] Numerická analýza transportních procesů. Dostupná z WWW:  
[http://mech.fsv.cvut.cz/~krejci/vyuka/NTP2/Prednasky/Prednaska\\_09.pdf](http://mech.fsv.cvut.cz/~krejci/vyuka/NTP2/Prednasky/Prednaska_09.pdf)

- [14] Ogunnaike, B.A., Ray, W.H.: Process dynamics, modeling, and control. Oxford University Press, New York, 1994, ISBN 0-19-509119-1.
- [15] Parciální diferenciální rovnice. Dostupná z WWW:  
<http://geometrie.kma.zcu.cz/index.php/www/content/download/964/2721/file/NGM-P5-ODRpoc.pdf?PHPSESSID=e778797dbc00646ab5cf98974bdde31a>
- [16] Saleri, F., Quarteroni, A.: Scientific computing with MATLAB. Springer, Heidelberg, 2001, ISBN 1611-0994.
- [17] Sdílení tepla vedením. Dostupné z WWW:  
[http://artemis.osu.cz:8080/artemis/uploaded/199\\_5%20Nevratne%20procesy.pdf](http://artemis.osu.cz:8080/artemis/uploaded/199_5%20Nevratne%20procesy.pdf)
- [18] Severance, F.L.: System modelling and simulation. Wiley, Chichester, 2001, ISBN 0-471-49694-4.
- [19] Srovnání metod na výpočet PDR. Dostupná z WWW:  
<http://www.mmspektrum.com/clanek/slevarenske-simulacni-programy>
- [20] Varma, A., Morbidelli, M.: Mathematical methods in chemical engineering. Oxford University Press, New York, 1997, ISBN 0-19-509821-8.
- [21] Základy procesního inženýrství. Dostupné z WWW:  
<http://homen.vsb.cz/~wih15/ProcIng/>

**SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK**

$(\cdot)_{ij}$	Indexování pole.
$(\cdot)_c$	Indexování chladicí kapaliny.
$(\cdot)^s$	Označení veličiny v ustáleném stavu.
$\rightarrow$ $q$	Tepelný tok (vektorově).
$\alpha$	Koeficient přechodu tepla.
$^{\circ}\text{C}$	Stupně Celsia.
$\infty$	Nekonečno.
<b>A</b>	Označení druhu sledované látky.
<b>A</b>	Difuzní povrch.
<b>a</b>	Označení konstanty (souboru konstant).
<b>a</b>	Součinitel teplotní vodivosti.
<b>B</b>	Označení druhu sledované látky.
<b>c</b>	Koncentrace.
<b><math>c_p</math></b>	Měrné teplo.
<b>d</b>	Průměr trubky.
<b>D</b>	Difuzní koeficient.
<b><math>D(x, y)</math></b>	Diskriminant.
<b><math>D_p</math></b>	Koeficient podélného promíchávání.
<b>DR</b>	Diferenciální rovnice.
<b>ds</b>	Označení pro teplosměnnou plochu.
<b>dz</b>	Část výměníku (element, řez).
<b>f</b>	Plocha průřezu.
<b>FCVM</b>	Finite Control Volume Method. (angl.)
<b>FDM</b>	Finite Difference Method. (angl.)

<b>FEM</b>	Finite Element Method. (angl.)
<b>grad</b>	Gradient.
<b>h</b>	Diskretizační krok.
<b>i</b>	Označení složky i.
<b>j</b>	Označení složky j.
<b>K</b>	Kelvin.
<b>K</b>	Draslík.
<b>kg</b>	Kilogram.
<b>L</b>	Délka trubky.
<b>l</b>	Označení vzdálenosti.
<b>LPDR</b>	Lineární parciální diferenciální rovnice.
<b>m</b>	Metr.
<b>m<sup>2</sup></b>	Metr čtvereční.
<b>m<sub>A</sub></b>	Hmotnostní množství látky A.
<b>m<sub>B</sub></b>	Hmotnostní množství látky B.
<b>MKD</b>	Metoda konečných diferencí.
<b>MKO</b>	Metoda konečných objemů.
<b>MKP</b>	Metoda konečných prvků.
<b>MPa</b>	Megapascal.
<b>n</b>	Krok dělení funkce. (výměníku)
<b>Na</b>	Sodík.
<b>ODR</b>	Obyčejná diferenciální rovnice.
<b>PDR</b>	Parciální diferenciální rovnice.
<b>Pe</b>	Pécletovo číslo.
<b>Pr</b>	Prandtlovo číslo.
<b>q</b>	Objemový průtok.

---

$q_0$	Výkon generování tepla v látce.
$Re$	Reynoldsovo číslo.
$r_i$	Rychlost vzniku složky $i$ .
$s$	Sekunda.
$T$	Teplota.
$t$	Čas.
$u$	Viskozita.
$u$	Označení pro vstupní veličinu.
$v$	Rychlost.
$W$	Watt.
$z$	Nezávislá prostorová proměnná.
$\lambda$	Součinitel tepelné vodivosti.
$\rho$	Hustota.
$\tau$	Označení času.
$\partial$	Parciální diference.

## SEZNAM OBRÁZKŮ

Obrázek 1: Příklad podélného vedení tepla proti směru proudění.[21].	13
Obrázek 2: Vlevo – výměník pro nízkoteplotní procesy (ohřev volnou konvekcí vzduchu kolem trubek). Vpravo - baterie trubkových výměníků v mlékárně.[21]	16
Obrázek 3:Vlevo - výměník trubka v trubce a vpravo je ukázka svazku trubek jednoho typu provozního trubkového výměníku. Tekutina A proudí uvnitř trubek, svazek je zasunut do kotle, kterým protéká tekutina B.[21]	17
Obrázek 4: Rozložení teplot v souproudém a protiproudém výměníku tepla[21]	20
Obrázek 5: Jednoduché schéma bilancovaného systému	26
Obrázek 6: Schéma dvoukapacitního trubkového výměníku.	27
Obrázek 7: Element $dz$ (řez).	28
Obrázek 8: Element $dz$ s uvažováním axiálního promíchávání vnitřní fáze.	31
Obrázek 9: MKD - rozdělení oblasti [9]	36
Obrázek 10: MKD – metody nahrazení derivací diferencemi [9]	36
Obrázek 11: Znázornění provázání toků na iteračních osách	50
Obrázek 12: Porovnání průběhů statických charakteristik pro vypočtenou reálnou hodnotu podélného promíchávání ( $Dp = 0,005$ ) znázorněnou tečkovaně a bez podélného promíchávání vykresleného plnou čarou.	60
Obrázek 13: Porovnání statických charakteristik s různými koeficienty podélného míchání ve vnitřní ochlazené fázi.	61
Obrázek 14: Porovnání statické charakteristiky výměníku bez míchání a s mícháním ve vnitřní chlazené fázi, určeným koeficientem $Dp = 0,05$ .	62
Obrázek 15: Přechodové charakteristiky bez podélného míchání se skokovou změnou na vstupu chlazené fáze.	63
Obrázek 16: Přechodové charakteristiky s podélným mícháním v chlazené kapalině ( $Dp = 0,02$ ) se skokovou změnou na vstupu chlazené fáze.	64
Obrázek 17: Přechodové charakteristiky s podélným mícháním v chlazené kapalině $Dp = 0,2$ se skokovou změnou na vstupu chlazené fáze.	65
Obrázek 18: Přechodové charakteristiky bez podélného míchání se skokovou změnou na vstupu chladicí fáze.	66
Obrázek 19: Přechodové charakteristiky s podélným mícháním v chlazené kapalině $Dp = 0,02$ se skokovou změnou na vstupu chladicí fáze.	67

- Obrázek 20: Přechodové charakteristiky s podélným mícháním v chlazené kapalině  
 $Dp = 0,2$  se skokovou změnou na vstupu chladící fáze. .... 68
- Obrázek 21: Porovnání statických charakteristik pro různé odchylky  $u_1$  a nulové odchylky  $u_2$ , kde plná čára platí pro hodnoty bez podélného míchání a tečkovaně jsou hodnoty s vypočteným reálným koeficientem  $Dp = 0,005$ . .... 69
- Obrázek 22: Porovnání statických charakteristik pro různé odchylky  $u_2$  a nulové odchylky  $u_1$ , kde plná čára platí pro hodnoty bez podélného míchání a tečkovaně jsou hodnoty s vypočteným reálným koeficientem  $Dp = 0,005$ . .... 70

## SEZNAM PŘÍLOH

- P I Zdrojový kód pro výpočet statické charakteristiky výměníku bez uvažování podélného míchání. (MATLAB)
- P II Zdrojový kód pro výpočet statické charakteristiky výměníku se zahrnutím podélného míchání v chlazené části. (MATLAB)
- P III Zdrojový kód pro přípravu řešení přechodové charakteristiky výměníku bez uvažování podélného míchání. (MATLAB)
- P IV Zdrojový kód pro řešení přechodové charakteristiky výměníku bez podélného promíchávání. (MATLAB)
- P V Zdrojový kód pro přípravu řešení přechodové charakteristiky výměníku s uvažováním podélného promíchávání v chlazené části. (MATLAB)
- P VI Zdrojový kód pro řešení přechodové charakteristiky výměníku s uvažováním podélného promíchávání v chlazené části. (MATLAB)



# PŘÍLOHA P I: ZDROJOVÝ KÓD PRO VÝPOČET STATICKÉ CHARAKTERISTIKY VÝMĚNÍKU BEZ UVAŽOVÁNÍ PODÉLNÉHO MÍCHÁNÍ. (MATLAB)

```
% Ustálený stav protiproudového dvoukapacitního výměníku  
% tepla s axiální disperzí v chlazené kapalině
```

```
n = 80;  
z = zeros(1, n);  
t = zeros(1, n);  
tc = zeros(1, n);  
% Dělení trubky a vymezení polí
```

```
l = 8;  
d1 = 0.05;  
d2 = 0.1;  
% Konstrukční parametry:  
% Délka výměníku  
% Střední průměr vnitřní trubky  
% Vnitřní průměr vnější trubky
```

```
ro = 995;  
cp = 4.16;  
roc = 998;  
cpc = 4.18;  
alf = 2.27;  
% Technologické parametry:  
% hustota chlazené kapaliny  
% měrné teplo chlazené kapaliny  
% hustota chladicí vody  
% měrné teplo chladicí vody  
% koef. prostupu tepla z chlazené kapaliny
```

```
tv = 368;  
tcv = 293;  
q = 0.000196;  
qc = 0.000471;  
% Vstupy v ustáleném stavu  
% Vstupní teplota chlazené kapaliny  
% Vstupní teplota chladicí kapaliny  
% Průtok chlazené kapaliny  
% Průtok chladicí kapaliny
```

```
f = 3.141*d1^2/4;  
fc = 3.141*(d2^2-d1^2)/4;  
dh = l/n;  
v = q/f;  
vc = qc/fc;  
sprintf ('vnitřni prurez trubky\n f=%f', f)  
sprintf ('prurez pro proudeni chladiva\n fc=%f', fc)  
% Předběžné výpočty ploch řezů trubek  
% Rozdělení výměníku na jednotlivé elementy  
% Výpočet rychlostí toků  
% Tisk vypočtených ploch
```

```
b1 = 4*alf/(d1*ro*cp);  
b2 = 4*d1*alf/((d2^2-d1^2)*roc*cpc);
```

```

c1 = v/dh;
c2 = c1+b1;
c3 = vc/dh;
c4 = c3+b2;
% Výpočet konstant:

kk=0;
% Vstup do vnějšího iteračního cyklu:
for i = 1:n
    t(i) = tv;
    tc(i) = tcv;
end
s1 = tv;
s2 = tcv;

% Iterační cyklus:
% Pro ukončení cyklu až na konci, vytvoříme proměnnou podmínka která
vnese
% info do cyklu while hned na začátku

bod_tn = [, ];

podminka=1;
while podminka
    p1=s1;
    p2=s2;

% Vstup do vnitřního cyklu
    t0 = tv;
    tc(1) = (c3*tc(2) + b2*t(1))/c4;
    t(1) = (c1*t0 + b1*tc(1))/c2;

    ss1 = t(1);
    ss2 = tc(1);

% Vnitřní cyklus:
    for i = 2:n - 1

        t(i) = (c1*t(i-1) + b1*tc(i))/c2;
        j = n - i + 1;
        tc(j) = (c3*tc(j+1) + b2*t(j))/ c4;
        ss1 = ss1 + t(i);
        ss2 = ss2 + tc(i);
    end
    t(n) = (c1*t(n-1) + b1*tc(n))/c2;
    tc(n) = (c3*tcv + b2*t(n))/ c4;
    ss1 = ss1 + t(n);
    ss2 = ss2 + tc(n);
    s1 = ss1 / n;
    s2 = ss2 / n;
    eps = abs(s1 - p1) + abs(s2 - p2);
    kk=kk+1;
    sprintf('Iterace: %d\t\teps: %f\n', kk, eps)
    if (eps > 0.001)
        podminka=1;
    else
        podminka=0;
    end
end

```

```

        bod_tn = [bod_tn; t(n-1), t(n)];
end
% Vypis výsledků:
sprintf('vzdálenost\t\tchlazená\t\tchladicí\n')
for i = 1:n
    z(i) = i*dh;
    fprintf ('%f\t\t%f\t\t%f\t\t\n', z(i), t(i), tc(i));
end
sprintf('Počet operací kk: %d\nOdchylka eps: %f\n', kk, eps);
sprintf ('Vstupní teplota chazené kapaliny: %f\nVýstupní teplota
chlazené kapaliny: %f\n',tv, t(max(size(t))))
sprintf('Vstupní teplota chladicí kapaliny: %f\nVýstupní teplota
chladicí kapaliny: %f\n', tcv,tc(min(size(tc))))
plot (z,t,'r',z,tc,'b')
title ('STAICKÁ CHARAKTERISTIKA BEZ MÍCHÁNÍ')
xlabel ('DÉLKA VÝMĚNÍKU (m)')
ylabel ('TEPLOTA (K)')
legend ('Chlazená kapalina','Chladicí kapalina')
grid on

```

## PŘÍLOHA P II: ZDROJOVÝ KÓD PRO VÝPOČET STATICKÉ CHARAKTERISTIKY VÝMĚNÍKU SE ZAHRNUTÍM PODÉLNÉHO MÍCHÁNÍ V CHLAZENÉ ČÁSTI. (MATLAB)

```
% Ustálený stav protiproudového dvoukapacitního výměníku
% tepla s axiální disperzí v chlazené kapalině

n = 80;
z = zeros(1, n);
t = zeros(1, n);
tc = zeros(1, n);
% dělení trubky:

l = 8;
d1 = 0.05;
d2 = 0.1;
% Konstrukční parametry:
% délka výměníku
% střední průměr vnitřní trubky
% vnitřní průměr vnější trubky

ro = 995;
cp = 4.16;
roc = 998;
cpc = 4.18;
alf = 2.27;
dp=input ('koeficient michani=');
% Technologické parametry:
% hustota chlazené kapaliny
% měrné teplo chlazené kapaliny
% hustota chladicí vody
% měrné teplo chladicí vody
% koef. prostupu tepla z chlazené kapaliny
% koef. axiální disperse

tv = 368;
tcv = 293;
q = 0.000196;
qc = 0.000471;
% Vstupy v ustáleném stavu:
% vstupní teplota chlazené kapaliny
% vstupní teplota chladicí kapalin
% průtok chlazené kapaliny
% průtok chladicí kapaliny

f = 3.141*d1^2/4;
fc = 3.141*(d2^2-d1^2)/4;
dh = l/n;
v = q/f;
vc = qc/fc;
sprintf ('vnitřni prurez trubky\n f=%f',f)
sprintf ('prurez pro proudeni chladiva\n fc=%f',fc)
% Předběžné výpočty ploch řezů trubek a rychlosti proudění
% Tisk vypočtených výsledků

b1 = 4*alf/(d1*ro*cp);
b2 = 4*d1*alf/((d2^2-d1^2)*roc*cpc);
```

```

c1 = dp/dh^2;
c2 = v/dh;
c3 = 2*c1+c2+b1;
c4 = dp/dh;
c5 = c4+v;
c6 = vc/dh;
c7 = c6+b2;
% Výpočet konstant:

kk=0;
% Vstup do vnějšího iteračního cyklu:
for i = 1:n
    t(i) = tv;
    tc(i) = tcv;
end
s1 = tv;
s2 = tcv;

% Iterační cyklus:
% Pro ukončení cyklu až na konci vytvoříme proměnnou podmínka, která
% vnese info do cyklu while hned na začátku

podminka=1;
while podminka
    p1=s1;
    p2=s2;

    % Vstup do vnějšího cyklu

    t0 = (c4*t(1) + v*tv)/c5;
    t(1) = ((c1 + c2)*t0 + c1*t(2) + b1*tc(1))/c3;
    tc(1) = (c6*tc(2) + b2*t(1))/c7;
    ss1 = t(1);
    ss2 = tc(1);

    % vnitřní cyklus:

    for i = 2:(n - 1)

        t(i) = ((c1 + c2)*t(i - 1) + c1*t(i+1) + b1*tc(i))/c3;
        j = n - i + 1 ;
        tc(j) = (c6*tc(j + 1) + b2*t(j))/ c7;
        ss1 = ss1 + t(i);
        ss2 = ss2 + tc(i);
    end
    t(n) = t(n - 1);
    tc(n) = (c6*tcv + b2*t(n))/ c7;
    ss1 = ss1 + t(n);
    ss2 = ss2 + tc(n);
    s1 = ss1 / n;
    s2 = ss2 / n;
    eps = abs(s1 - p1) + abs(s2 - p2);
    kk=kk+1;
    sprintf('Iterace: %d\t\teps: %f\n', kk, eps)
    if (eps > 0.001)
        podminka=1;
    else
        podminka=0;
    end
end

```

```

end

% Vypis výsledků:
for i = 1:n
    z(i) = i*dh;
end
sprintf('Počet operací kk: %d\nOdchylka eps: %f\n', kk, eps)
sprintf ('Vstupní teplota chalzené kapaliny: %f\nVýstupní teplota
chlazené kapaliny: %f\n',t0, t(max(size(t))))
sprintf('Vstupní teplota chladící kapaliny: %f\nVýstupní teplota
chladící kapaliny: %f\n', tcv,tc(min(size(tc))))
plot (z,t,'r' ,z,tc,'b')
title ('STATICKÁ CHARAKTERISTIKA S PODÉLNÝM MÍCHÁNÍM')
xlabel ('DÉLKA VÝMENÍKU (m)')
ylabel ('TEPLOTA (K)')
legend ('Chlazená kap.','Chladící kap.')
grid on

```

# PŘÍLOHA P III: ZDROJOVÝ KÓD PRO PŘÍPRAVU ŘEŠENÍ PŘECHODOVÉ CHARAKTERISTIKY VÝMĚNÍKU BEZ UVAŽOVÁNÍ PODÉLNÉHO MÍCHÁNÍ. (MATLAB)

```
function dy=dynamika_bez(t,y)
% Funkce pro přípravu řešení dynamiky bez míchání

n = 80;
% dělení trubky

u1 = -10;
u2 = 0;
% u1 = odchylka vstupní teploty chlazené kapaliny.
% u2 = odchylka vstupní teploty chladicí kapaliny.

l = 8;
d1 = 0.05;
d2 = 0.1;
% délka výměníku
% střední průměr vnitřní trubky
% vnitřní průměr vnější trubky

ro = 995;
cp = 4.16;
roc = 998;
cpc = 4.18;
alf = 2.27;
% Technologické parametry:
% hustota chlazené kapaliny
% měrné teplo chlazené kapaliny
% hustota chladicí vody
% měrné teplo chladicí vody
% koef. prostupu tepla z chlazené kapaliny

q = 0.000196;
qc = 0.000471;
% Vstupy v ustáleném stavu:
% průtok chlazené kapaliny
% průtok chladicí kapaliny

f = 3.141*d1^2/4;
fc = 3.141*(d2^2-d1^2)/4;
dh = l/n;
v = q/f;
vc = qc/fc;
% Předběžné výpočty ploch průřezů a rychlostí proudění
% Rozdělení na elementy

b1 = 4*alf/(d1*ro*cp);
b2 = 4*d1*alf/((d2^2-d1^2)*roc*cpc);
c1 = v / dh;
c2 = c1 + b1;
c3 = vc / dh;
c4 = c3 + b2;
% Výpočet konstant
```

```

dy=zeros(n * 2, 1);
% 1 ÷ 80 - chlazená
% 81 ÷ 160 - chladící

x0 = u1;
% vstupní načtení teploty
dy(1) = b1 * y(n + 1) - c2 * y(1) + c1 * x0;
% výpočet prvního elementu
% cyklus rovnic uvnitř trubek
for i = 2 : (n - 1)
    dy(i) = b1 * y(n + i) - c2 * y(i) + c1 * y(i - 1);
    dy(n) = b1 * y(n * 2) - c2 * y(n) + c1 * u1;
    dy(n * 2) = b2 * y(n) - c4 * y(n * 2) + c3 * u2;
    j = n - i + 1;
    dy(n + j) = b2 * y(j) - c4 * y(n + j) + c3 * y(n + j + 1);
end
dy(n + 1) = b2 * y(1) - c4 * y(n + 1) + c3 * y(n + 2);
% poslední hodnota chladící kapaliny

end

```



# PŘÍLOHA P IV: ZDROJOVÝ KÓD PRO ŘEŠENÍ PŘECHODOVÉ CHARAKTERISTIKY VÝMĚNÍKU BEZ PODÉLNÉHO PROMÍCHÁVÁNÍ. (MATLAB)

```
% řešení dynamiky bez podélného míchání
% výpočet difference

n = 80;
% dělení trubky

[t, y] = ode45(@dynamika_bez, linspace(0, 300, 80), [zeros(2 * n, 1)]);
% Volání funkce "dynamika_bez" a vymezení počátečních podmínek, délky
% trvání, počet dělení, určení pokračování za elementem 80 pro chladicí
% kapalinu

subplot(2,1,2);
% příprava pro dva grafy v jednom okně
plot(t, y(:, 40), 'r');
% tisk výsledků uprostřed výměníku (40)
hold on;
% přidržení vykreslených výsledků pro dokreslení
plot(t, y(:, 80 + 40), 'b');
% tisk výsledků uprostřed výměníku (40)
hold off;
% zrušení přidržení grafu
grid on;
% zapnutí mřížkování na grafu

legend('Chlazená kapalina', 'Chladicí kapalina');
xlabel('ČAS (s)');
ylabel('ODCHYLKA TEPLŮT (K)');
title ('PŘECHODOVÁ CHARAKTERISTIKA BEZ PODÉLNÉHO MÍCHÁNÍ');
% popis os grafu a názvů legend a titulu
```

# PŘÍLOHA P V: ZDROJOVÝ KÓD PRO PŘÍPRAVU ŘEŠENÍ PŘECHODOVÉ CHARAKTERISTIKY VÝMĚNÍKU S UVAŽOVÁNÍM PODÉLNÉHO PROMÍCHÁVÁNÍ V CHLAZENÉ ČÁSTI. (MATLAB)

```
function dy=dynamika_s(t,y)
% tvorba funkce pro přípravu řešení dynamiky výměníku s pod. mícháním

n = 80;
% dělení trubky

u1 = 10;
u2 = 0;
% u1 = odchylka vstupní teploty chlazené kapaliny.
% u2 = odchylka vstupní teploty chladicí kapaliny.

l = 8;
d1 = 0.05;
d2 = 0.1;
% délka výměníku
% střední průměr vnitřní trubky
% vnitřní průměr vnější trubky

ro = 995;
cp = 4.16;
roc = 998;
cpc = 4.18;
alf = 2.27;
% Technologické parametry:
% hustota chlazené kapaliny
% měrné teplo chlazené kapaliny
% hustota chladicí vody
% měrné teplo chladicí vody
% koef. prostupu tepla z chlazené kapaliny

dp = 0.2;
% zadání koeficientu pro míchání

q = 0.000196;
qc = 0.000471;
% Vstupy v ustáleném stavu:
% průtok chlazené kapaliny
% průtok chladicí kapaliny

f = 3.141*d1^2/4;
fc = 3.141*(d2^2-d1^2)/4;
dh = l/n;
v = q/f;
vc = qc/fc;
% Předběžné výpočty: ploch řezů trubek, rychlostí proudění
% Rozdělení výměníku

b1 = 4*alf/(d1*ro*cp);
b2 = 4*d1*alf/((d2^2-d1^2)*roc*cpc);
a3 = dp/dh^2;
a4 = v/dh;
a1 = a3 + a4;
```

```

a2 = 2*a3 + a4 + b1;
a5 = (dp/dh)/(dp/dh + v);
a6 = vc/dh;
% Výpočet konstant:

dy=zeros(n * 2, 1);
% 1 ÷ 80 - chlazená
% 81 ÷ 160 - chladící

x0 = a5 * y(1) + (1 - a5) * u1;
% výpočet x0 jako vstupu

dy(1) = a1 * x0 - a2 * y(1) + a3 * y(2) + b1 * y(n + 1);
% výpočet prvního elementu

% cyklus rovnic uvnitř trubek
for i = 2 : (n - 1)
    dy(i) = a1 * y(i - 1) - a2 * y(i) + a3 * y(i + 1) + b1 * y(n +
i);
    y(n) = y(n - 1);
    dy(n * 2) = b2 * y(n) - (a6 + b2) * y(n * 2) + a6 * u2;
    j = n - i + 1;
    dy(n + j) = b2 * y(j) - (a6 + b2) * y(n + j) + a6 * y(n + j + 1);
end
% vložení našich vymodelovaných rovnic do iteračního cyklu

dy(n + 1) = b2 * y(1) - (a6 + b2) * y(n + 1) + a6 * y(n + 2);
% poslední hodnota chladící kapaliny

end

```

## PŘÍLOHA P VI: ZDROJOVÝ KÓD PRO ŘEŠENÍ PŘECHODOVÉ CHARAKTERISTIKY VÝMĚNÍKU S UVAŽOVÁNÍM PODÉLNÉHO PROMÍCHÁVÁNÍ V CHLAZENÉ ČÁSTI. (MATLAB)

```
%řešení přechodové fce pro výměník s podélným promícháváním
```

```
n = 80;
% dělení výměníku
[t, y] = ode45(@dynamika_s, linspace(0, 300, 80), [zeros(2 * n, 1)]);
% Volání funkce "dynamika_s" a vymezení počátečních podmínek, délky
% trvání, počet dělení, určení pokračování za elementem 80 pro chladicí
% kapalinu

subplot(2,1,1);
% příprava pro dva grafy v jednom okně
plot(t, y(:, 40), 'r');
% tisk výsledků uprostřed výměníku (40)
hold on;
% přidržení vykreslených výsledků pro dokreslení
plot(t, y(:, 80 + 40), 'b');
% tisk výsledků uprostřed výměníku (40)
hold off;
% zrušení přidržení grafu
grid on;
% zapnutí mřížkování na grafu

legend('u1 = 10', 'u2 = 0');
xlabel('ČAS (s)');
ylabel('T (K)');
title ('POROVNÁNÍ PŘECHODOVÝCH CHARAKTERISTIK');
% popis os grafu a názvů legend a titulu
```