

Lineární algebra v programu Mathematica

Linear Algebra in Mathematica

Přemysl Kníž

Bakalářská práce
2011



Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky
akademický rok: 2010/2011

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: Přemysl KNÍŽ
Osobní číslo: A07051
Studijní program: B 3902 Inženýrská informatika
Studijní obor: Informační a řídicí technologie

Téma práce: Lineární algebra v programu Mathematica

Zásady pro vypracování:

1. Krátce uveďte základní pojmy lineární algebry a vztahy mezi nimi.
2. Uveďte a popište potřebné příkazy programu Mathematica.
3. Vytvořte interaktivní příklady k jednotlivým tématům.
4. Vyhledejte na internetu aplety týkající se lineární algebry. Porovnejte je s Vámi vytvořenými příklady.

Rozsah bakalářské práce:

Rozsah příloh:

Forma zpracování bakalářské práce: tištěná/elektronická

Seznam odborné literatury:

1. ZEDNÍK, Josef. Lineární algebra zaměřená na geometrii a ekonomii. Zlín: UTB FT, 2003. 130 s. ISBN 80-7318-085-5
2. NOVÁK, Ludvík. Algebra a geometrie. Zlín: UTB FT, 2005. 126 s. ISBN 80-7318-366-8
3. OLŠÁK, Petr. Úvod do algebry, zejména lineární. Praha: ČVUT FEL, 2007, ISBN 978-80-01-03775-1
4. CHRAMCOV, Bronislav. Základy práce v prostředí Mathematica. Zlín: UTB FAI, 2006. 122 s. ISBN 80-7318-510-5
5. MATEMATIKA online ? Matematika I (kap. Matice a determinanty, inverzní matice; Hodnost matic; Soustavy lineárních rovnic; Vektorový počet) [online]. VUT Brno, [cit. 2011-1-27].
[<http://math.fme.vutbr.cz/Matematika-I/sc-5-sr-1-a-4/default.aspx>]
6. WOLFRAM, Stephen. The mathematica book. 5th ed. Champaign, IL : Wolfram Media, 2003. 1464 s. ISBN 1579550223.
7. Wolfram Mathematica documentation center [online]. 2011 [cit. 2011-02-01].
Dostupné z WWW:
[<http://reference.wolfram.com/mathematica/guide/Mathematica.html>].

Vedoucí bakalářské práce:

RNDr. Martin Fajkus, Ph.D.

Ústav matematiky

Datum zadání bakalářské práce:

25. února 2011

Termín odevzdání bakalářské práce:

7. června 2011

Ve Zlíně dne 25. února 2011

prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.
děkan



prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.
ředitel ústavu

ABSTRAKT

Cílem bakalářské práce bylo vypracovat interaktivní programy v softwaru Mathematica z lineární algebry, které by měly sloužit jako pomůcka k výuce matematiky pro studenty UTB a porovnat je s aplety na internetu. Dále uvést základní pojmy z lineární algebry a jejich vztahy.

Klíčová slova: lineární algebra, Mathematica, vektor, matice, skalární součin, vektorový součin, smíšený součin, eukleidovský vektorový prostor, maticové rovnice, soustava lineárních rovnic, determinant.

ABSTRACT

The aim of this thesis was to develop interactive programs in the Mathematica software from linear algebra, which should serve as an aid to the course of mathematics for UTB students and compare them with the applets on the Internet. Next, outline the basic terms used in linear algebra and their relationships.

Keywords: Linear Algebra, Mathematica, vectors, matrices, scalar product, vector product, mixed product, Euclidean vector space, matrix equations, linear equations, determinants.

Tímto bych chtěl poděkovat panu RNDr. Martinu Fajkusovi, Ph.D. za jeho odbornou pomoc a čas, který mi věnoval při pomoci na bakalářské práci.

Prohlašuji, že

- beru na vědomí, že odevzdáním bakalářské práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb. o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších právních předpisů, bez ohledu na výsledek obhajoby;
- beru na vědomí, že bakalářská práce bude uložena v elektronické podobě v univerzitním informačním systému dostupná k prezenčnímu nahlédnutí, že jeden výtisk bakalářské práce bude uložen v příruční knihovně Fakulty aplikované informatiky Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně a jeden výtisk bude uložen u vedoucího práce;
- byl/a jsem seznámen/a s tím, že na moji bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších právních předpisů, zejm. § 35 odst. 3;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 1 autorského zákona má UTB ve Zlíně právo na uzavření licenční smlouvy o užití školního díla v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 2 a 3 autorského zákona mohu užít své dílo – bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití jen s předchozím písemným souhlasem Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše);
- beru na vědomí, že pokud bylo k vypracování bakalářské práce využito softwaru poskytnutého Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně nebo jinými subjekty pouze ke studijním a výzkumným účelům (tedy pouze k nekomerčnímu využití), nelze výsledky bakalářské práce využít ke komerčním účelům;
- beru na vědomí, že pokud je výstupem bakalářské práce jakýkoliv softwarový produkt, považují se za součást práce rovněž i zdrojové kódy, popř. soubory, ze kterých se projekt skládá. Neodevzdání této součásti může být důvodem k neobhájení práce.

Prohlašuji,

- že jsem na bakalářské práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval. V případě publikace výsledků budu uveden jako spoluautor.
- že odevzdaná verze bakalářské práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG jsou totožné.

Ve Zlíně

.....

podpis diplomanta

OBSAH

ÚVOD.....	9
I TEORETICKÁ ČÁST.....	10
1 VEKTORY A MATICE	11
1.1 VEKTORY	11
1.1.1 Operace s vektory.....	11
1.2 MATICE	12
1.2.1 Operace s maticemi	12
2 LINEÁRNÍ VEKTOROVÝ PROSTOR	14
2.1 LINEÁRNÍ KOMBINACE VEKTORŮ.....	14
2.2 LINEÁRNĚ (NE)ZÁVISLÉ VEKTORY	14
3 SOUSTAVA LINEÁRNÍCH ROVNIC	15
3.1 GAUSSOVA ELIMINAČNÍ METODA	15
3.2 CRAMEROVO PRAVIDLO	15
4 DETERMINANT.....	16
4.1 RŮZNÉ ZPŮSOBY VÝPOČTU DETERMINANTU	16
4.1.1 Sarrusovo pravidlo	16
4.1.2 Laplaceův rozvoj.....	16
5 INVERZNÍ MATICE.....	17
5.1 RŮZNÉ ZPŮSOBY VÝPOČTU INVERZNÍ MATICE	17
5.1.1 Výpočet inverzní matice pomocí determinantů	17
5.1.2 Výpočet inverzní matice pomocí Gauss - Jordanovy eliminační metody.....	17
6 MATICOVÉ ROVNICE.....	18
7 EUKLEIDOVSKÝ VEKTOROVÝ PROSTOR.....	19
7.1 ÚHEL MEZI VEKTORY	19
7.2 NORMA VEKTORU.....	19
7.3 ORTOGONÁLNOST	20
II PRAKTICKÁ ČÁST	21
8 PŘÍKAZY PRO ŘEŠENÍ PŘÍKLADŮ Z LINEÁRNÍ ALGEBRY V PROGRAMU MATHEMATICA	22
9 ŘEŠENÉ PŘÍKLADY POMOCÍ PROGRAMU MATHEMATICA	23
9.1 OBECNÉ VLASTNOSTI PROGRAMŮ.....	23
9.2 VEKTORY A MATICE	24
9.2.1 Operace s vektory.....	24
9.2.2 Operace s maticemi	25
9.3 LINEÁRNÍ VEKTOROVÝ PROSTOR.....	26
9.3.1 Lineární kombinace vektorů	26
9.3.2 Lineárně (ne) závislé vektory.....	27
9.4 SOUSTAVA LINEÁRNÍCH ROVNIC	27
9.4.1 Gaussova eliminační metoda.....	27

9.4.2	Cramerovo pravidlo	28
9.5	DETERMINANT	29
9.5.1	Sarrusovo pravidlo	29
9.5.2	Laplaceův rozvoj	30
9.6	INVERZNÍ MATICE	30
9.7	MATICOVÉ ROVNICE	31
9.8	EUKLEIDOVSKÝ VEKTOROVÝ PROSTOR	32
9.8.1	Norma vektoru a matice	32
9.8.2	Úhel mezi vektory	33
9.8.3	Ortogonalnost	34
10	POROVNÁNÍ APLETŮ LINEÁRNÍ ALGEBRY	35
10.1	QUICKMATH	35
10.2	EASYCALCULATION	35
10.3	MATH4ALL.IN	36
10.4	MATH.DREXEL	37
ZÁVĚR		38
ZÁVĚR V ANGLIČTINĚ		39
SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY		40
SEZNAM OBRÁZKŮ		41
SEZNAM TABULEK		42
SEZNAM PŘÍLOH		43

ÚVOD

Cílem této bakalářské práce bylo vytvořit interaktivní programy v softwaru Mathematica, které budou znázorňovat vybrané úlohy z lineární algebry.

Mathematica umožňuje řešit matematické úlohy, ale uživatel musí znát potřebné příkazy a umět je správně použít. Proto jsem vytvořil všechny programy tak, že uživatel pouze spustí zadaný program, který zobrazuje výsledek spolu s postupem výpočtu předem definovaného příkladu. Případně si může příklad přizpůsobit pomocí ovládacích prvků dle své potřeby.

V teoretické části bakalářské práce jsou uvedeny definice a vzorce z lineární algebry, které pomáhají čtenáři se zorientovat a pochopit základní pojmy.

Praktická část je zaměřená na programy, které byly vytvořeny, jejich popis a srovnání s aplety lineární algebry dostupnými na internetu.

I. TEORETICKÁ ČÁST

1 VEKTORY A MATICE

1.1 Vektory

Definice: Necht' n je pevně zvolené přirozené číslo. Pak n -členným reálným vektorem $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ v algebře rozumíme uspořádanou n -tici reálných čísel a_1, a_2, \dots, a_n . [1]

1.1.1 Operace s vektory

Při operaci s vektory musí být vektory, s nimiž pracujeme ze stejného vektorového prostoru. V celé práci se budeme zabývat jen vektory z trojrozměrného eukleidovského prostoru.

Sčítání vektorů

Pokud máme dva vektory \vec{u} a \vec{v} a chceme určit jejich součet vektor \vec{w} , použijeme následující vzorec:

$$\vec{w} = (u_1 + v_1; u_2 + v_2; u_3 + v_3)$$

Odčítání vektorů

Podobně je to také u odčítání vektorů \vec{u} a \vec{v} kde jejich rozdíl vektor \vec{w} vypočítáme podle vztahu:

$$\vec{w} = (u_1 - v_1; u_2 - v_2; u_3 - v_3)$$

Součin vektorů

Skalární součin

Skalární součin vektorů \vec{u}, \vec{v} budeme značit jako $\vec{u} \cdot \vec{v}$. Výsledek skalárního součinu je číslo. Jestliže máme vektory $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$, $\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$, spočítá se skalární součin jako:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Vektorový součin

Vektorový součin \vec{u}, \vec{v} budeme značit jako $\vec{u} \times \vec{v}$. Výsledek vektorového součinu je vektor. Tento vektor je kolmý k oběma původním vektorům. Jestliže máme v trojrozměrném eukleidovském prostoru vektory $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$, $\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$ pak jejich vektorový součin se spočítá podle vztahu:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2; u_3 v_1 - u_1 v_3; u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

Smíšený součin

Smíšený součin je kombinací skalárního a vektorového součinu. Výsledek je číslo. Smíšený součin lze vyjádřit ve tvaru determinantu:

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) &= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \\ &= u_1 v_2 w_3 + v_1 w_2 u_3 + w_1 u_2 v_3 - w_1 v_2 u_3 - u_1 w_2 v_3 - v_1 u_2 w_3 \end{aligned}$$

1.2 Matice

Definice: Matice je čtvercová či obdélníková tabulka čísel, která jsou uspořádána do m řádků a n sloupců.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

1.2.1 Operace s maticemi

Rovnost matic

Matice A, B jsou si rovny tehdy, když mají stejný počet řádků m a sloupců n a každý prvek a_{ij} matice A je roven prvku b_{ij} matice B. Rovnost matic zapíšeme

$$A = B$$

Součet matic

Součet matic je možný pouze pokud matice A, B mají stejný počet řádků m a sloupců n . Prvky výsledné matice C jsou určeny vztahem $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Součet matic zapíšeme

$$C = A + B$$

Rozdíl matic

Rozdíl matic je také možný pouze pokud matice A , B mají stejný počet řádků m a sloupců n . Prvky výsledné matice C jsou určeny vztahem $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$. Rozdíl matic zapíšeme:

$$C = A - B$$

Součin matic

Pokud je A matice o rozměrech $m \times n$ a B je matice $n \times p$ jejich součin AB je matice s rozměry $m \times p$. Prvky výsledné matice jsou definovány vztahem:

$$(AB)_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$$

Slovy říkáme, že skalárně násobíme i -tý řádek matice A k -tým sloupcem matice B .

2 LINEÁRNÍ VEKTOROVÝ PROSTOR

2.1 Lineární kombinace vektorů

Definice: Necht' $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ jsou vektory (tj. prvky nějakého lineárního prostoru). *Lineární kombinací* vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ rozumíme vektor

$$\vec{v} = k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + \dots + k_n\vec{u}_n$$

kde k_1, k_2, \dots, k_n jsou nějaká reálná čísla. Těmto číslům říkáme *koeficienty* lineární kombinace.

Definice. *Triviální* lineární kombinace vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ je taková lineární kombinace, která má všechny koeficienty nulové tj. $0\vec{u}_1 + 0\vec{u}_2 + \dots + 0\vec{u}_n$. *Netriviální* lineární kombinace je takové lineární kombinace, která není triviální, tj. aspoň jeden její koeficient je nenulový.[2]

2.2 Lineárně (ne)závislé vektory

Definice: Skupinu vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ nazýváme lineárně závislou, pokud existuje netriviální lineární kombinace vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$, která je rovna nulovému vektoru, tedy:

$$k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + \dots + k_n\vec{u}_n = \vec{o}$$

Stručně pak říkáme, že vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ jsou lineárně závislé.[2]

3 SOUSTAVA LINEÁRNÍCH ROVNIC

Definice: Soustavu m lineárních rovnic o n neznámých zapisujeme ve tvaru

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & \dots & + & a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & \dots & + & a_{2n}x_n & = b_2 \\ & & & \dots & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & \dots & + & a_{mn}x_n & = b_m \end{array}$$

Kde a_{mn} jsou reálná čísla a x_n jsou neznámé.

Řešit soustavu rovnic znamená najít řešení, tj. najít taková reálná čísla, která po dosazení za neznámé v rovnicích splňují všechny rovnosti současně. Takové řešení může existovat pro danou soustavu jediné, nebo je takových řešení nekonečně mnoho, nebo není žádné.

3.1 Gaussova eliminační metoda

Slouží k řešení soustavy lineárních rovnic, kdy postupujeme tak, že soustavu lineárních rovnic převedeme na rozšířenou matici:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Dále rozšířenou matici upravíme na trojúhelníkový tvar pomocí řádkových elementárních transformací. Poté převedeme rozšířenou matici zpět na soustavu lineárních rovnic, kterou vypočítáme.[3]

3.2 Cramerovo pravidlo

Další metoda pro řešení soustavy lineárních rovnic se nazývá Cramerovo pravidlo:

Věta: soustava n lineárních rovnic o n neznámých s determinantom soustavy $|A| \neq 0$ má jediné řešení o složkách

$$x_k = \frac{|A_k|}{|A|}, \text{ kde } k = 1, 2, \dots, n$$

a kde $|A_k|$ je determinant, který dostaneme z $|A|$ záměnou k -tého sloupce za sloupec pravých stran soustavy rovnic.[4]

4 DETERMINANT

Permutace

Definice: Necht' M je konečná množina o n prvcích. *Permutace prvků množiny M* je uspořádaná n -tice prvků množiny M taková, že žádný prvek z množiny M se v ní neopakuje. Permutaci prvků množiny $M = \{1, 2, \dots, n\}$ nazýváme stručně *permutací n prvků*. [2]

Determinant

Definice: Determinantem čtvercové matice řádu n nazýváme součet všech součinů n prvků této matice takových, že v žádném z uvedených součinů se nevyskytují dva prvky z téhož řádku ani z téhož sloupce. Každý součin přitom označíme znaménkem permutace.

4.1 Různé způsoby výpočtu determinantu

4.1.1 Sarrusovo pravidlo

Slouží k výpočtu determinantu matice třetího řádu. Graficky si můžeme Sarrusovo pravidlo představit tak, že k původní matici přidáme první dva sloupce a pak násobíme prvky ležící na úhlopříčkách. Prvky na úhlopříčkách, které vedou shora dolů, vynásobíme a součinu přiřadíme znaménko $+$. Prvky na úhlopříčkách, které vedou zdola nahoru, vynásobíme a součinu přiřadíme znaménko $-$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} \\ a_{21}a_{32}a_{13} \\ a_{31}a_{12}a_{23} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

4.1.2 Laplaceův rozvoj

Věta: Determinant stupně $n > 1$ se rovná součtu součinů prvků vybraných z jednoho řádku s jejich algebraickými doplňky.

Algebraický doplněk prvku a_{ij} čtvercové matice $A = (a_{ij})$, kde $i, j = 1, 2, \dots, n$, je číslo \bar{A}_{ij} , kde $\bar{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$, kde A_{ij} je matice stupně $n-1$, která vznikne z matice A vynecháním i -tého řádku a j -tého sloupce, tedy řádku a sloupce, které se protínají v prvku a_{ij} . Výraz $\det A_{ij}$ se též nazývá subdeterminant řádu $n-1$ (minor řádu $n-1$, první minor). [4]

5 INVERZNÍ MATICE

Definice: Inverzní matice k dané matici je taková matice (pokud existuje), která po vynásobení s původní maticí dá jednotkovou matici I . V některé literatuře se jednotková matice značí písmenem E . Inverzní matici k matici A značíme A^{-1} . Tedy:

$$A \cdot A^{-1} = I$$

5.1 Různé způsoby výpočtu inverzní matice

5.1.1 Výpočet inverzní matice pomocí determinantů

Čtvercovou matici nazveme regulární, má-li nenulový determinant, jinak je singulární.

Věta. Necht' A je čtvercová regulární matice řádu n . Potom k ní existuje inverzní matice A^{-1} a platí

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$$

kde $\operatorname{adj} A$ je adjungovaná matice k matici A .

5.1.2 Výpočet inverzní matice pomocí Gauss-Jordanovy eliminační metody

Sestavíme rozšířenou matici takovou, že vedle matice A , ke které chceme vypočítat inverzní matici, napíšeme jednotkovou matici I :

$$(A|I)$$

Poté pomocí řádkových úprav Gaussovy eliminační metody převedeme matici A na jednotkovou, přičemž zároveň každý krok provedený na upravované matici A se musí provést i na jednotkové matici. Na místě kde byla jednotková matice tak dostaneme inverzní matici [2]

$$(A|I) \sim (I|A^{-1})$$

6 MATICOVÉ ROVNICE

Rovnice, ve kterých je neznámou matice (označovaná např. jako X), nazýváme maticové rovnice.

Řešit maticovou rovnici znamená najít takovou matici, po jejímž dosazení do rovnice na místo neznámé dostaneme pravdivý výrok. Rovnice typu $A + X = B$ řešíme odečtením matice A od obou stran rovnice. U řešení rovnic typu $AX = B$ záleží na tom, je-li matice A regulární. V tom případě pak existuje inverzní matice A^{-1} . Pokud vynásobíme zleva obě strany rovnice touto inverzní maticí, převede tím rovnici do tvaru $A^{-1}AX = A^{-1}B$, tedy: $X = A^{-1}B$. V případě, kdy matice A není regulární, tj. je singulární nebo není čtvercová, inverzní matici A^{-1} neexistuje a musíme použít jiný postup. Např. rozepíšeme součin AX podle definice součinu matic. Porovnáním matic na levé a pravé straně rovnice dostaneme soustavu lineárních rovnic, jejímž řešením jsou prvky neznámé matice. Stejně tak záleží na regulérnosti matic A , B i u rovnic typu $AXB = C$. Jestliže jsou obě matice regulární, najdeme k nim inverzní matice A^{-1} ; B^{-1} . Vynásobíme-li pak obě strany rovnice zleva A^{-1} a zprava B^{-1} převedeme tím rovnici do tvaru $A^{-1}AXB B^{-1} = A^{-1}CB^{-1}$, tedy: $X = A^{-1}CB^{-1}$. [5]

7 EUKLEIDOVSKÝ VEKTOROVÝ PROSTOR

7.1 Úhel mezi vektory

Úhel svíraný dvěma vektory se pohybuje v rozmezí $0^\circ - 180^\circ$. Vzorec pro výpočet úhlu mezi vektory \vec{u} a \vec{v} je vzorec

$$\cos \varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

kde \cdot je skalární součin a $|\vec{u}|$ je (eukleidovská) norma vektoru. Po rozepsání dostaneme vzorec

v rovině:

$$\cos \varphi = \frac{u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

v prostoru:

$$\cos \varphi = \frac{u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

7.2 Norma vektoru

Nejčastěji se v lineární algebře používá tzv. eukleidovská norma. Lze ji snadno spočítat tak že každý prvek vektoru (případně matice) umocníme na druhou, poté prvky sečteme a výsledek odmocníme.

Např. pro vektor $\vec{q} = (a, b, c)$ je jeho norma:

$$|\vec{q}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

7.3 Ortogonálnost

Ortogonalní bázi vektorového prostoru V s definovaným skalárním součinem nazýváme takovou bázi, jejíž každé dva vektory jsou navzájem kolmé, tzn. jejich skalární součin je nulový.

Mají-li navíc všechny vektory báze jednotkovou velikost (neboli jsou normovány k 1), mluvíme o ortonormální bázi.

Gram-Schmidtova ortogonalizace

Je proces, při kterém z neortogonalní báze $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$ vytvoříme novou bázi, která je ortogonalní $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$. Vzorec pro výpočet je následující:

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= \vec{u}_1 \\ \vec{v}_2 &= \vec{u}_2 - \frac{\vec{u}_2 \cdot \vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_3 &= \vec{u}_3 - \frac{\vec{u}_3 \cdot \vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2} \vec{v}_1 - \frac{\vec{u}_3 \cdot \vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|^2} \vec{v}_2 \\ \vec{v}_n &= \vec{u}_n - \frac{\vec{u}_n \cdot \vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2} \vec{v}_1 - \dots - \frac{\vec{u}_n \cdot \vec{v}_{n-1}}{\|\vec{v}_{n-1}\|^2} \vec{v}_{n-1}\end{aligned}$$

II. PRAKTICKÁ ČÁST

8 PŘÍKAZY PRO ŘEŠENÍ PŘÍKLADŮ Z LINEÁRNÍ ALGEBRY V PROGRAMU MATHEMATICA

Manipulate

Příkaz *Manipulate* umožňuje vytvořit interaktivní aplikace. Vstupy již nejsou jen statické, naopak, můžeme s nimi manipulovat. Například pomocí příkazu *Manipulate*[*n*, {*n*, 1, 20}] lze vytvořit jednoduchý interaktivní posuvník.[6]



Obr.1: Ukázka vytvoření posuvníku pomocí příkazu Manipulate

Ovládacím prvkem ale nemusí být pouze posuvník, může to být celá škála jiných objektů např. zaškrtačací políčko (checkbox), vstupní pole (inputfield) a další. Dále lze pomocí různých nastavení přizpůsobit výsledný program přesně, jak potřebujeme.

Základní příkazy pro řešení příkladů z lineární algebry:

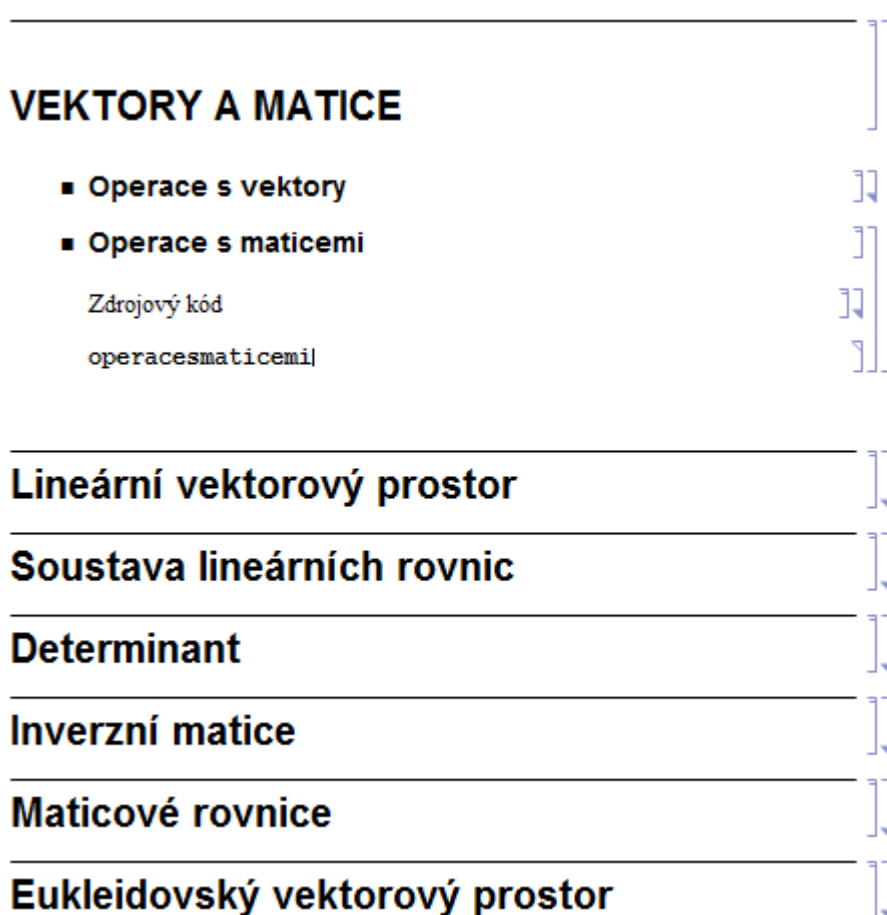
Název příkazu	Popis
Det	spočítá determinant zadané matice
Inverse	spočítá inverzní matici
Transpose	převéde matici na transponovanou
Normalize	vrátí normalizovaný vektor
RowReduce	provede Gauss-Jordanovu eliminaci
LinearSolve	vyřeší lin.rovnici
Orthogonalize	najde ortonormální bázi vektorů
Dot(.)	skalární součin
Cross(x)	vektorový součin

Tab.1: Příkazy pro řešení příkladů z lineární algebry

9 ŘEŠENÉ PŘÍKLADY POMOCÍ PROGRAMU MATHEMATICA

9.1 Obecné vlastnosti programů

Všechny programy mají nastavené určité hodnoty, aby uživatel nemusel zbytečně u každého programu zadávat hodnoty, ale mohl rovnou vidět způsob výpočtu. Zadávání proměnných je řešeno pomocí vstupních polí. Každé pole reprezentuje určitý prvek v příkladu. Zadání hodnoty do pole se potvrzuje enterem. Programy jsou uloženy v notepadu. Po jeho spuštění jsou viditelné pouze názvy kapitol a ke konkrétním programům se dostaneme až otevřením buněk. Otevření buňky se provádí dvojklikem na konkrétní buňku, která je reprezentována modrou „půlšipkou“ směřující dolů v levé části notepadu. Programy jsou vždy obsaženy v podkapitolách, ty obsahují zdrojový kód a spouštěcí proměnnou samotného programu. Ve výchozím nastavení jsou obě tyto buňky zavřené. Zdrojový kód se zobrazí po rozklepnutí buňky „Zdrojový kód“. Pro uživatele je podstatné, že program se spustí stisknutím enteru na numerické klávesnici (nebo shift + enter) u konkrétního názvu např. „operacesmaticemi“.

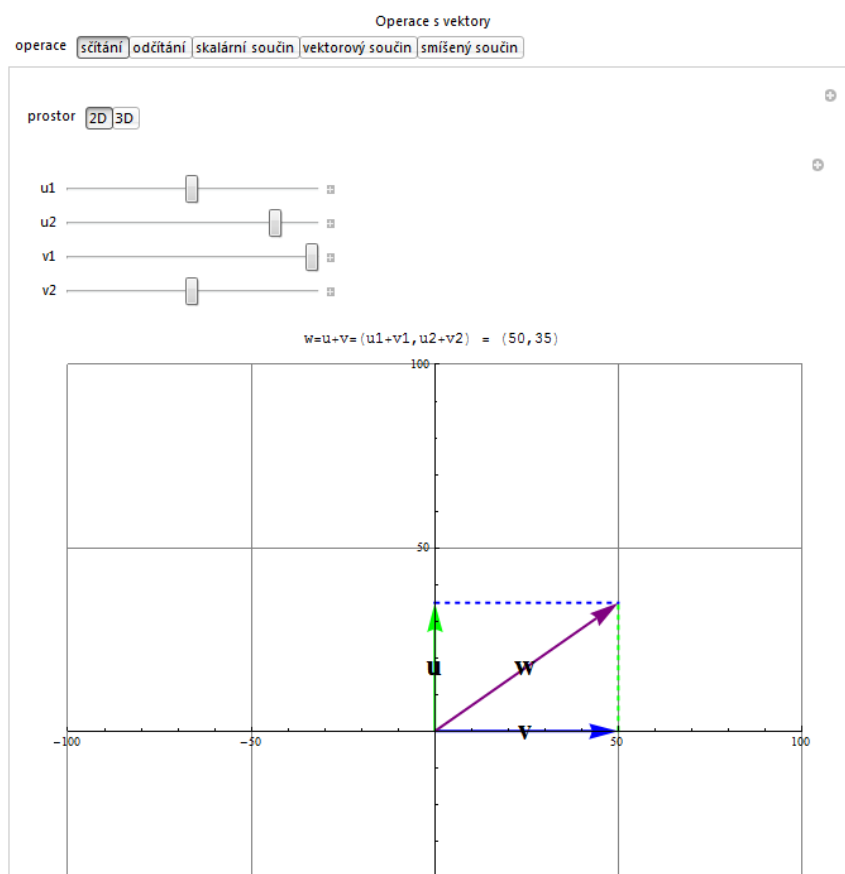


Obr.2: Vzhled notebooku

9.2 Vektory a matice

9.2.1 Operace s vektory

V horní části programu si uživatel pomocí tlačítek přepíná jednotlivé operace (sčítání, odčítání, skalární součin, vektorový součin, smíšený součin). Výchozí nastavení je operace sčítání. Většina operací může být prováděna, buď v dvoj- nebo třírozměrném prostoru. Pokud je přepnutí možné, zobrazí se pod tlačítky operace tlačítka 2D, 3D, kterými je umožněno přepnutí. Po vybrání požadované operace a prostoru se zobrazí příslušný počet posuvníků, jimiž se zadávají hodnoty jednotlivých vektorů. U každého vektoru jsou již přednastaveny určité hodnoty. Posuvníky lze rozkliknout pomocí tlačítka, které se nachází vpravo od konkrétního posuvníku a zadat hodnotu ručně. Pod posuvníky se nachází vzorec pro výpočet konkrétní operaci a vypočtená hodnota. V dolní části programu se nachází grafické ztvárnění dané operace.



Obr. 3: Operace s vektory

9.2.2 Operace s maticemi

Program umožňuje provádět maticové operace sčítání, odčítání, násobení konstantou a násobení dvou matic. Konkrétní operace se vybírá horními tlačítky, výchozí nastavení je operace sčítání. Po vybrání operace si uživatel pomocí horních dvou posuvníků zvolí velikost požadovaných matic a může zadat jiné hodnoty prvků těchto matic (do zelených nebo fialových polí). V pravé části programu je pak zobrazen konkrétní výpočet. Na prvním řádku jsou vypsány matice. Na druhém řádku je výsledek a v políčku pod nimi je výpočet konkrétního prvku matice, ten si můžeme volit pomocí posuvníků „řádky“ a „sloupce“ v levé části programu. Maximální velikost matice je 5x5.

Operace s maticemi

operace

A řádky: A sloupce:
 B řádky: B řádky:
 řádky: sloupce:

Matice A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Matice B:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 12 & 13 \\ 15 & 18 & 24 & 27 \\ 22 & 26 & 34 & 38 \\ 15 & 16 & 18 & 19 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & (3)(2) + (3)(2) + (3)(2) \\ & = 6 + 6 + 6 \\ & = 18 \end{aligned}$$

Přemysl Kníž 2011

Obr. 4: Operace s maticemi

9.3 LINEÁRNÍ VEKTOROVÝ PROSTOR

9.3.1 Lineární kombinace vektorů

Program pro výpočet lineárních kombinací umožňuje vybírat dva typy příkladů:

- 1) výpočet vektoru \vec{v} , který má být lineární kombinací zadaných vektorů $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ s předem zadanými konstantami k_1, \dots, k_n
- 2) výpočet neznámých konstant, při zadaných vektorech \vec{v} a \vec{u}

Při první možnosti se zobrazí posuvníky pro nastavení počtu složek vektoru a počtu vektorů. Další posuvník slouží k zobrazení výpočtu daného prvku ve výsledné lineární kombinaci.

V programu je zobrazena rovnice pro daný počet složek vektoru. Pod ní se nachází pravá strana rovnice s dosazenými složkami vektorů $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ a konstantami k_1, \dots, k_n . Dále je vypsána hledaná kombinace. Na posledním řádku je zobrazen postup výpočtu příslušné složky vektoru, který je ovládán posuvníkem.

Při zvolení druhého typu příkladů je zobrazen posuvník na nastavení počtu vektorů, pod kterým jsou vstupní pole pro nastavení hodnot prvků vektorů \vec{u} a \vec{v} . V horní části programu je zobrazena lineární kombinace jak symbolicky tak s dosazenými prvky vektorů \vec{u} a \vec{v} . Z té dostaneme x rovnic o x neznámých. Pod rovnicemi jsou zobrazeny vypočítané konstanty k . Na spodní části programu je zobrazena výsledná lineární kombinace.

Obr. 5: Lineární kombinace vektorů

9.3.2 Lineárně (ne)závislé vektory

Program určuje zda-li jsou zadané vektory lineárně (ne)závislé. Nastavování počtu prvků a počtu vektorů je děláno pomocí posuvníků, pod kterými je možnost nastavit konkrétní hodnoty prvků vektorů. V levé části programu je zobrazena transponovaná matice, na které provedeme Gauss-Jordanovou eliminaci a pokud se nějaký řádek vynuluje, jsou vektory lineárně závislé.

Obr. 6: Lineárně (ne)závislé vektory

9.4 Soustava lineárních rovnic

9.4.1 Gaussova eliminační metoda

Program znázorňuje řešení soustavy lineárních rovnic o čtyřech neznámých pomocí Gaussovy eliminační metody. Aby bylo možné řešit soustavu pomocí Gaussovy eliminační metody, musí být prvek rozšířené matice a_{11} nenulový. Pokud uživatel zadá nulové číslo a v prvním sloupci se nachází nenulové číslo, tak dojde k upravení matice, kde bude nulový prvek dán na poslední řádek. Během výpočtu se může stát, že ve sloupci se kterým se bude pracovat, se nachází nula. Takový řádek je výhodně přesunut do spodní části matice. Za maticemi se nachází postup výpočtu, kde $R_{ij}(k)$ znamená výměnu i -té a j -té rovnice, vynásobení i -té rovnice číslem k , resp. přičtení k -násobku j -té rovnice k rovnici i -té.

Např. $R_{21}(\frac{2}{3})$ znamená, že ke druhému řádku přičítám první řádek, který je násoben $\frac{2}{3}$.

K řešení se lze dostat po upravení na horní trojúhelníkovou matici dvěma různými způsoby

a to pomocí dalších úprav matice nebo trojúhelníkovou matici převedeme na čtyři rovnice o čtyřech neznámých a spočítáme.

Gaussova eliminační metoda

Zadejte soustavu

$$\begin{cases} 3x_1 + -2x_2 + -5x_3 + 1x_4 = 3 \\ 2x_1 + -3x_2 + 1x_3 + 5x_4 = -3 \\ 1x_1 + 2x_2 + 0x_3 + -4x_4 = -3 \\ 1x_1 + -1x_2 + -4x_3 + 9x_4 = 22 \end{cases}$$

Řešení pomocí rovníc:

$$\begin{cases} x_1 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{5}{3}x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 - \frac{13}{5}x_3 - \frac{13}{5}x_4 = 3 \\ x_3 + \frac{13}{43}x_4 = -\frac{60}{43} \\ x_4 = 2 \end{cases}$$

Výsledek:

$$\{(x_1 \rightarrow -1, x_2 \rightarrow 3, x_3 \rightarrow -2, x_4 \rightarrow 2)\}$$

Řešení pomocí dalších úprav:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Přemysl Kníž 2011

Obr. 7:Gaussova eliminační metoda

9.4.2 Cramerovo pravidlo

V levé části programu se nachází vstupní pole pro zadávání soustavy tří rovnic o třech neznámých. V pravé části programu jsou napsané zadané rovnice. Pod nimi je vypsán determinant levé části soustavy a jeho výsledek. Pokud je determinant roven nule napíše se singulární matice nelze řešit pomocí Cramerova pravidla a dál se nepokračuje, dokud nejsou zadány jiné hodnoty. V další části programu jsou vypsány determinanty A1,A2,A3, kde příslušné číslo znamená, který sloupec byl prohozen s pravou částí soustavy. Vedle nich jsou dále napsány jednotlivé neznámé s postupem výpočtu a jejich výsledky.

Cramerovo pravidlo

Zadejte soustavu

$$\begin{cases} -1x + 2y + 3z = 3 \\ 1x + 0y + -6z = -3 \\ 2x + 4y + 0z = 0 \end{cases}$$

Zadáno

$$\begin{cases} -x + 2y + 3z = 3 \\ x + 0y - 6z = -3 \\ 2x + 4y + 0z = 0 \end{cases}$$

Det Matice=

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -6 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -36$$

A1=

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -6 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 36 \quad x = \frac{\text{Det A1}}{\text{Det}} = -1$$

A2=

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & -6 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -18 \quad y = \frac{\text{Det A2}}{\text{Det}} = \frac{1}{2}$$

A3=

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -12 \quad z = \frac{\text{Det A3}}{\text{Det}} = \frac{1}{3}$$

x = -1 y = $\frac{1}{2}$ z = $\frac{1}{3}$

Přemysl Kníž 2011

Obr. 8: Cramerovo pravidlo

9.5 Determinant

9.5.1 Sarrusovo pravidlo

Program znázorňuje Sarrusovo pravidlo, které se používá pro výpočet determinantu matice typu 3×3 . V horní části programu jsou vstupní pole, do kterých můžeme zadat konkrétní hodnoty. Zbýlá část pak zobrazuje samotné řešení úlohy. V prvním řádku je graficky znázorněn výpočet jednotlivých součinů (podle šipek) s přidáním dvou prvních sloupců. Na druhém je pak samotný výpočet determinantu podle Sarrusova pravidla s barevně označenými hodnotami z předešlého řádku.

SARRUSOVO PRAVIDLO

MATICE

1	-3	1
2	4	-5
5	3	3

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & -5 \\ 5 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 12 + 6 + 75 - (20 + -15 + -18) = 106$$

Přemysl Kníž 2011

Obr. 9: Sarrusovo pravidlo

9.5.2 Laplaceův rozvoj

Druhou metodou výpočtu determinantu je tzv. Laplaceův rozvoj. Program znázorňuje rozvinutí determinantu podle příslušného řádku či sloupce, který vybírá uživatel pomocí tlačítek, vždy může být vybrán pouze jeden sloupec nebo řádek. Uživatel také může zadat konkrétní hodnoty prvků matice, která má velikost 4x4. Při samotném výpočtu je uživatelem vybraný řádek či sloupec označen. Pokud se ve vybraném řádku či sloupci nachází nula, není příslušný člen ani subdeterminant zobrazen.

Podle:
řádku
sloupce

Zadejte matici:

1	5	2	8
1	6	4	8
9	-2	2	7
6	1	15	0

Laplaceův rozvoj

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 & 8 \\ 1 & 6 & 4 & 8 \\ 9 & -2 & 2 & 7 \\ 6 & 1 & 15 & 0 \end{vmatrix} = 9 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 5 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 8 \\ 1 & 15 & 0 \end{vmatrix} + -2 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 1 & 4 & 8 \\ 6 & 15 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 1 & 6 & 8 \\ 6 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 7 \cdot (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \\ 6 & 1 & 15 \end{vmatrix}$$

= 221

Přemysl Kníž 2011

Obr. 10: Laplaceův rozvoj

9.6 Inverzní matice

Program demonstruje výpočet inverzní matice pomocí determinantů. V levé části má uživatel možnost zadat hodnoty do matice. Ta je velikosti 3x3. Napravo je již zobrazen samotný výpočet. Nejprve je zadaná matice zobrazena, pak je vypsána její adjungovaná matice a následuje samotný výpočet matice. Pokud uživatel zadá matici, ke které neexistuje inverzní matice, zobrazí se varování „neexistuje inverzní matice“.

Zadejte matici A:

1	5	1
8	4	1
1	2	3

Inverzní matice pomocí determinantů

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 8 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & A_{21} = -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & A_{31} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} \\ A_{13} = \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{\det A} = -\frac{1}{93} \begin{pmatrix} 10 & -13 & 1 \\ -23 & 2 & 7 \\ 12 & 3 & -36 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{10}{93} & \frac{13}{93} & -\frac{1}{93} \\ \frac{23}{93} & -\frac{2}{93} & \frac{7}{93} \\ \frac{4}{31} & -\frac{1}{31} & \frac{12}{31} \end{pmatrix}$$

Přemysl Kníž 2011

Obr. 11: Inverzní matice pomocí determinantů

9.7 Maticové rovnice

V pravém horním rohu si uživatel zvolí typ rovnice. Poté pomocí posuvníků nastaví požadované velikosti matic A a B. V pravé části programu se vypíše rovnice $A \cdot X = B$ příp. $X \cdot A = B$ s již dosazenými hodnotami, pod nimi jsou vypsány maticové úpravy rovnic a jejich vypočítané inverzní matice spolu s maticemi A a B. Nakonec je zobrazena výsledná matice X.

The screenshot shows a software application titled "Maticové rovnice". At the top, there are two buttons for selecting the equation type: "A·X=B" (selected) and "X·A=B". Below these are two sliders for setting matrix dimensions: "A velikost" (set to 3 rows) and "B řádky" (set to 3 rows), and "B sloupce" (set to 3 columns). The interface is divided into three main sections:

- Matrice A:** A 3x3 matrix with values:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
- Matrice B:** A 3x2 matrix with values:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$
- Equation and Solution:** The equation $A \cdot X = B$ is displayed with the matrices substituted. Below it, the inverse of matrix A is calculated:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$
 The inverse matrix A^{-1} is shown as:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}$$
 This is multiplied by matrix B to yield the final solution matrix X:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{9} & -\frac{7}{9} \end{pmatrix}$$

At the bottom of the application window, the text "Přemysl Kníž 2011" is visible.

Obr. 12: Maticové rovnice

9.8 Eukleidovský vektorový prostor

9.8.1 Norma vektoru a matice

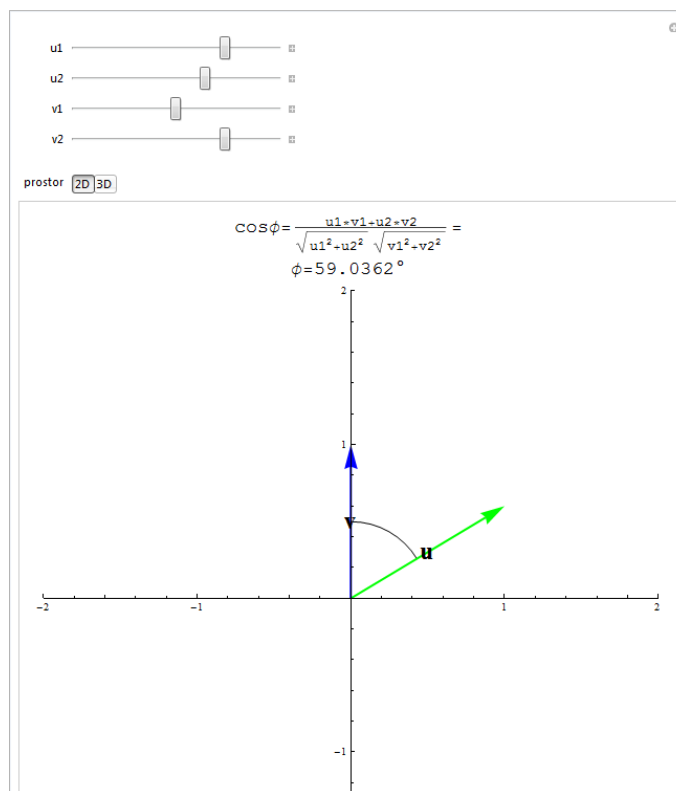
Program znázorňuje výpočet euklidovské normy matic. Velikost matice se nastavuje pomocí posuvníku, pod kterými jsou vstupní pole pro nastavení konkrétních prvků. V pravé části programu jsou zobrazeny matice, pod nimi je jejich transponovaný součin. Dále je zobrazen postup výpočtu normy pro každou matici. Na posledním řádku se nachází podmínka $\|Ay\| \leq \|A\| \cdot \|y\|$, kterou musí norma splňovat.

The screenshot shows a software application titled "Frobeniova(Euklidovská) norma". It features three sliders for setting matrix dimensions: "A řádky" (set to 4), "A sloupce" (set to 2), and "y řádky" (set to 2). Below these are input fields for matrix elements. Matrix **A** is shown as a 4x2 matrix with elements 1, 2, 3, 3, 4, 5. Matrix **y** is shown as a 2x1 vector with elements 1, 2. To the right, the matrices are displayed in mathematical notation: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ and $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Below this, the product is shown: $Ay = (5 \ 9 \ 14)^T$. A box contains the calculation steps for the Frobenius norm: $\|A\| = \sqrt{|1|^2 + |2|^2 + 2|3|^2 + |4|^2 + |5|^2} = 8$, $\|y\| = \sqrt{|1|^2 + |2|^2} = \sqrt{5}$, $\|Ay\| = \sqrt{|5|^2 + |9|^2 + |14|^2} = \sqrt{302}$, and the final inequality $\{\sqrt{302}, \leq, 8\sqrt{5}\}$. The footer reads "Přemysl Kníž 2011".

Obr. 13: Norma matic

9.8.2 Úhel mezi vektory

Zadáání složek vektorů \vec{u} a \vec{v} se provádí v levé horní části programu. Pod zadáváním hodnot je možnost přepnutí zobrazení úhlu vektorů v 2D, resp. 3D prostoru, při změně prostoru na jiný jsou přidány další vektory. V horní části programu je zobrazen vzorec pro výpočet úhlu v konkrétním prostoru spolu s výsledkem, pod ním je zobrazena jeho grafická interpretace.



Obr. 14: Úhel mezi vektory

9.8.3 Ortogonálnost

Program znázorňuje Gram-Schmidtovu ortogonalizaci. V levé části si uživatel pomocí posuvníků vybere počet a počet složek vektorů, případně nastaví jejich konkrétní hodnoty. V pravé části jsou zobrazeny jednotlivé kroky ortogonalizace a výsledky v nenormalizovaném a normalizovaném tvaru.

Gram-Schmidtova ortogonalizace

Počet vektorů

Počet složek vektorů

Zadejte vektory:

$\vec{u}_1 =$

$\vec{u}_2 =$

$$\vec{v}_1 = \vec{u}_1 = \{1, 1, 1\}$$

$$\vec{v}_2 = \vec{u}_2 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{u}_2}{|\vec{v}_1|^2} \vec{v}_1 =$$

$$\{1, 0, 1\} - \frac{1}{3} \{1, 1, 1\} \cdot \{1, 0, 1\} \{1, 1, 1\} =$$

$$\left\{ \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right\}$$

Nenormalizovaný tvar:

$$\{1, 1, 1\}, \left\{ \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right\},$$

Normalizovaný tvar:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}, \left\{ \frac{1}{\sqrt{6}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right\},$$

Přemysl Kníž 2011

Obr. 15: Gram-Schmidtova ortogonalizace

10 POROVNÁNÍ APLETŮ LINEÁRNÍ ALGEBRY

10.1 QuickMath

Aplety ze stránky QuickMath.com umožňují provádět operace s maticemi jako např. sčítání matic, odčítání, násobení, násobení konstantou dále počítají inverzní matice a determinant. Uživatel má možnost si jako výsledek zvolit obraz nebo text. Bohužel aplety neumí zobrazit postup dané operace. Zadávání matic je řešeno pomocí čárky, která odděluje jednotlivé prvky matice.

The screenshot shows the QuickMath.com interface. At the top, there is a yellow box labeled "Matrix" containing the input values: 5, 3, 7; 2, 4, 9; 3, 6, 4. Below this box is a "Determinant" button. Below the yellow box is a white box labeled "Command" which shows the command "Matrix determinant". Below the "Command" box is a "Matrix" label followed by the matrix representation $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 9 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$. Below the matrix is a "Result" label followed by the value -133 .

Obr.16: Ukázka apletu z www.QuickMath.com

10.2 Easycalculation

Aplety na internetové adrese <http://easycalculation.com/matrix/index.php> umožňují řešit sčítání, odčítání a násobení matic. Dále vypočítat adjungovanou a inverzní matici, determinant, Gaussovu eliminační metodu a soustavu lineárních rovnic. Matice mají pro většinu operací pevně danou velikost a to 3x3. Jedinou výjimkou je násobení kde se dá velikost matic snížit. U sčítání, odčítání a násobení matic je postup výpočtu zobrazen v matici. Aplet soustavy lineárních rovnic, který využívá metodu řešení pomocí inverzní

matice, má zobrazenou danou inverzní matici. Aplet soustavy lineárních rovnic řeší soustavu tří rovnic o třech neznámých.

Solve Algebra Equations - Matrix

To Calculate Algebra, Linear Equation using Matrix :
Enter proper values of linear equations in the form below and click calculate

+	1	x	+	2	y	-	1	z	=	9
+	1	x	+	1	y	+	1	z	=	3
+	2	x	-	1	y	-	1	z	=	6

calculate

X = A⁻¹ B

x	=	0/9	3/9	3/9	9	=	3
y	=	3/9	1/9	-2/9	3	=	2
z	=	-3/9	5/9	-1/9	6	=	-2

Result : X=3 Y=2 Z=-2

Obr.17: Ukázka apletu z <http://easycalculation.com>

10.3 Math4all.in

Na adrese http://www.math4all.in/public_html/linear%20algebra/applets1a.html se nacházejí užitečné aplety z oblasti lineární algebry, které jsou vytvořeny pomocí programového jazyku Java. Aplety matic, které mají maximální velikost 5x5, zobrazují i kroky jednotlivých úprav. Bohužel některé příklady jsou udělané pouze jako obrázky s vysvětlením, které můžeme pomocí tlačítek přepínat.

5	3	5	4
3	4	4	1

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$3 * 5 + 4 * 4 = 31$$

$$\begin{bmatrix} 37 & 23 \\ 31 & 16 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

p = 2

q = 2

r = 2

OK

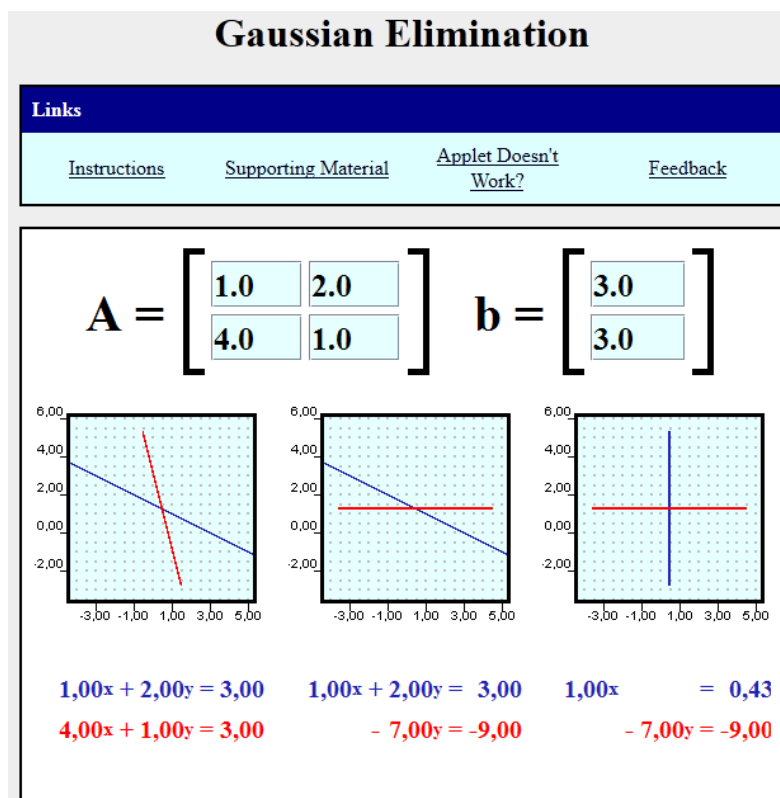
© Dr. Inder K. Rana

Back
Next

Obr.18: Ukázka apletu z www.math4all.in

10.4 Math.drexel

Na stránce http://www.math.drexel.edu/~pg/java/la_applets/index.html se nacházejí aplety jako např. Gaussova eliminace, determinant, Gram-Schmidtova ortogonalizace. Mezi nevýhody patří nemožnost zvětšení matic, které jsou pevně dané na velikost 2x2.



Obr. 19: Ukázka apletu z www.math.drexel.edu

ZÁVĚR

Hlavním cílem této práce bylo vytvořit interaktivní programy z lineární algebry v softwaru Mathematica, které by sloužily jako pomůcka studentům k pochopení lineární algebry. Programy jsou snadno ovladatelné, tudíž jsou vhodné i pro studenty, kteří se se softwarem Mathematica nesetkali. V programech jsou předdefinované příklady, takže uživatel vidí okamžitě výsledek a pokud potřebuje, tak si příklad upraví podle potřeby. Programy zobrazují postupy jednotlivých výpočtů pro lepší pochopení.

Teoretická část seznamuje se základními pojmy lineární algebry.

Praktická část je zaměřená na vypracované programy, jejich popis a srovnání s aplety lineární algebry dostupnými na internetu.

Dále byly uvedeny příkazy pro počítání příkladů v lineární algebře a jejich stručný popis.

ZÁVĚR V ANGLIČTINĚ

Main aim of this work was to create interactive programs for solving examples in linear algebra in Mathematica software, which would serve to assist students to understand linear algebra. The programs are easy to operate, making them suitable for students who did not meet with the software Mathematica. Programs include predefined examples, so the user sees immediately results and can edit the examples as necessary if needed. All programs show also steps of calculations for better understanding.

The theoretical part introduces basic concepts of linear algebra. The practical part focuses on programmed programs their description and comparison with the linear algebra applets available on the Internet. Further, commands were listed for solving examples in linear algebra, and their brief description.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] VISKOTOVÁ, Lenka. *Mendelova univerzita v Brně : Vektory v algebře* [online]. Brno : 2009 [cit. 2011-05-10]. Dostupné z WWW: <<http://user.mendelu.cz/pospisi2/vektor.pdf>>
- [2] PETR, Olšák. *Petr Olšák: Lineární algebra* [online]. Druhé vydání. Praha : 2010 [cit. 2011-05-10]. Dostupné z WWW: <<ftp://math.feld.cvut.cz/pub/olsak/linal/linal2.pdf>>.
- [3] *Gaussova eliminační metoda* [online]. 2011 [cit. 2011-05-10]. Wikipedia: The Free Encyclopedia. Dostupné z WWW: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Gaussova_elimina%C4%8Dn%C3%AD_metoda>.
- [4] ZEDNÍK, Josef. *Lineární algebra zaměřená na geometrii a ekonomii*. Vyd. 5. nezměn. Zlín : UTB - Academia Centrum Zlín, 2006. 129 s. ISBN 80-7318-348-X.
- [5] *Vš materiály*. [online] [cit. 2011-05-10.] Dostupné z WWW: <<http://www.vsmaterialy.cz/documents/2/matice.pdf>>.
- [6] *Wolfram Mathematica - Wolfram Mathematica 8 Documentation* [online]. 2011 [cit. 2011-05-10]. Dostupné z WWW: <<http://reference.wolfram.com/mathematica/guide/Mathematica.html>>.
- [7] WOLFRAM, Stephen. *The mathematica book*. 5th ed. Champaign, IL : Wolfram Media, 2003. 1464 s. ISBN 1579550223.

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr. 1: Ukázka vytvoření posuvníku pomocí příkazu Manipulate.....	22
Obr. 2: Vzhled notebooku.....	23
Obr. 3: Operace s vektory	24
Obr. 4: Operace s maticemi	25
Obr. 5: Lineární kombinace vektorů.....	26
Obr. 6: Lineárně (ne)závislé vektory	27
Obr. 7:Gaussova eliminační metoda.....	28
Obr. 8: Cramerovo pravidlo.....	28
Obr. 9: Sarrusovo pravidlo.....	29
Obr. 10: Laplaceův rozvoj	30
Obr. 11: Inverzní matice pomocí determinantů	30
Obr. 12: Maticové rovnice	31
Obr. 13: Norma matic	32
Obr. 14: Úhel mezi vektory	33
Obr. 15: Gram-Schmidtova ortogonalizace	34
Obr. 16: Ukázka apletu z www.QuickMath.com	35
Obr. 17: Ukázka apletu z http://easycalculation.com	36
Obr. 18: Ukázka apletu z www.math4all.in	36
Obr. 19: Ukázka apletu z www.math.drexel.edu	37

SEZNAM TABULEK

Tab.1: Příkazy pro řešení příkladů z lineární algebry

SEZNAM PŘÍLOH

Příloha P I: Vytvořený notebook se nachází na přiloženém CD.