

Matematický model protiproudého výměníku tepla

Mathematical Model of Counterflow Heat Exchanger

Bc. Renata Hříbová

Diplomová práce
2012



Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky
akademický rok: 2011/2012

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Bc. Renata HRIBOVÁ**
Osobní číslo: **A09685**
Studijní program: **N 3902 Inženýrská informatika**
Studijní obor: **Automatické řízení a informatika**

Téma práce: **Matematický model protiproudého výměníku tepla**

Zásady pro vypracování:

1. Seznamte se s problematikou entalpických bilancí výměníků tepla.
2. Odvodte zjednodušený matematický model, popisující výměnu tepla v protiproudém svazkovém výměníku.
3. Řešení provedte analyticky s pomocí Laplaceovy transformace.
4. V programovém prostředí COMSOL MULTIPHYSICS úlohu simulujte.
5. Provedte kontrolní výpočet na vzorové úloze.
6. Výsledky kontrolního výpočtu a simulace porovnejte a zhodnoťte v závěru práce.

Rozsah diplomové práce:

Rozsah příloh:

Forma zpracování diplomové práce: tištěná/elektronická

Seznam odborné literatury:

1. HEJZLAR, Radko. Sdílení tepla. Vyd. 3. Praha: ČVUT, Jaderná a fyzikálně inženýrská fakulta, 1999, 186 s. ISBN 80-010-1982-9.
2. KOLOMAZNÍK, Karel, Jaroslav SEDLÁŘ a Alena MACHÁČKOVÁ. Teorie technologických procesů III. Vyd. 1. Brno: Rektorát Vysokého učení technického v Brně, 1978. ISBN 55-588-78.
3. MÍKA, Vladimír. Základy chemického inženýrství. Vyd. 1. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1977. ISBN 04-622-77.
4. PRYOR, Roger W. Multiphysics modeling using COMSOL: a first principles approach. Sudbury: Jones and Bartlett Publishers, c2011, 852 s. ISBN 978-076-3779-993.
5. ŠESTÁK, Jiří a Rudolf ŽITNÝ. Tepelné pochody II: výměníky tepla, odpařování, sušení, průmyslové pece a elektrický ohřev. Vyd. 2. Praha: Nakladatelství ČVUT, 2006, 165 s. ISBN 80-010-3475-5.
6. VÍT, Tomáš. Základy přenosu tepla a hmoty I: přenos hybnosti a tepla – výměníky tepla. Liberec, 1998.

Vedoucí diplomové práce:

doc. Ing. Dagmar Janáčková, CSc.

Ústav automatizace a řídicí techniky

Datum zadání diplomové práce:

24. února 2012

Termín odevzdání diplomové práce:

6. června 2012

Ve Zlíně dne 24. února 2012

prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.
děkan



prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.
ředitel ústavu

ABSTRAKT

Práce je zaměřena na vytvoření matematického modelu na základě entalpické bilance popisujícího průběh teploty ohřívané a ochlazované tekutiny v izolovaném a neizolovaném protiproudém svazkovém výměníku tepla. Teoretická část je zaměřena na prostup tepla, popis tepelných výměníků a také na analytické řešení navrženého matematického modelu. Praktická část obsahuje řešení vzorové úlohy standardním způsobem, ověření této úlohy na základě matematického modelu a ověření úlohy simulací v simulačním prostředí COMSOL Multiphysics. Výsledné hodnoty teplot ohřívané a ochlazované tekutiny v izolovaném a neizolovaném tepelném výměníku byly porovnány a zhodnoceny.

Klíčová slova: Matematický model, tepelné výměníky, prostup tepla, COMSOL Multiphysics

ABSTRACT

The thesis deals with the creation of mathematical model based on enthalpy balance describing the process of temperature of liquid which is being heated and cooled in isolated and non-isolated counter - current bound heat exchanger.

The theoretical part is focused on heat transfer, description of heat exchangers and also on analytical solution of proposed mathematical model. The practical parts includes tackling the model task in a standard way based on mathematical model and verification of the task by simulation in simulation ambient COMSOL Multiphysics. The resulted temperatures of heated and cooled liquid in isolated and non-isolated heat exchanger were compared and evaluated.

Keywords: Mathematical model, heat exchanger, heat transfer, COMSOL Multiphysics

Ráda bych poděkovala všem, kteří mě podpořili při psaní této diplomové práce. Především děkuji mé vedoucí doc. Ing. Dagmar Janáčové, CSc., která mi poskytla cenné rady a připomínky během mé práce a také Ing. Vojtěchu Grygarovi, který mi pomohl se základním seznámením se simulační aplikací COMSOL Multiphysics.

Prohlašuji, že

- beru na vědomí, že odevzdáním diplomové/bakalářské práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb. o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších právních předpisů, bez ohledu na výsledek obhajoby;
- beru na vědomí, že diplomová/bakalářská práce bude uložena v elektronické podobě v univerzitním informačním systému dostupná k prezenčnímu nahlédnutí, že jeden výtisk diplomové/bakalářské práce bude uložen v příruční knihovně Fakulty aplikované informatiky Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně a jeden výtisk bude uložen u vedoucího práce;
- byl/a jsem seznámen/a s tím, že na moji diplomovou/bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších právních předpisů, zejm. § 35 odst. 3;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 1 autorského zákona má UTB ve Zlíně právo na uzavření licenční smlouvy o užití školního díla v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 2 a 3 autorského zákona mohu užít své dílo – diplomovou/bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití jen s předchozím písemným souhlasem Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše);
- beru na vědomí, že pokud bylo k vypracování diplomové/bakalářské práce využito softwaru poskytnutého Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně nebo jinými subjekty pouze ke studijním a výzkumným účelům (tedy pouze k nekomerčnímu využití), nelze výsledky diplomové/bakalářské práce využít ke komerčním účelům;
- beru na vědomí, že pokud je výstupem diplomové/bakalářské práce jakýkoliv softwarový produkt, považují se za součást práce rovněž i zdrojové kódy, popř. soubory, ze kterých se projekt skládá. Neodevzdání této součásti může být důvodem k neobhájení práce.

Prohlašuji,

- že jsem na diplomové práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval. V případě publikace výsledků budu uveden jako spoluautor.
- že odevzdaná verze diplomové práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG jsou totožné.

Ve Zlíně

.....
podpis diplomanta

OBSAH

ÚVOD.....	8
I TEORETICKÁ ČÁST.....	10
1 TEPELNÉ VÝMĚNÍKY.....	11
2 SDÍLENÍ TEPLA A PROSTUP.....	14
3 MODEL PROTIPROUDÉHO VÝMĚNÍKU	17
3.1 IZOLOVANÝ PROTIPROUDÝ VÝMĚNÍK	17
3.2 NEIZOLOVANÝ PROTIPROUDÝ VÝMĚNÍK.....	22
4 PROGRAMOVÉ PROSTŘEDÍ COMSOL MULTIPHYSICS	30
II PRAKTICKÁ ČÁST	32
5 ŘEŠENÍ KONKRÉTNÍ ÚLOHY PROTIPROUDÉHO VÝMĚNÍKU	33
5.1 VÝPOČET VZOROVÉ ÚLOHY	35
5.2 OVĚŘENÍ ODVOZENÝCH ROVNIC PRO IZOLOVANÝ VÝMĚNÍK NA VZOROVÉ ÚLOZE.....	39
5.3 OVĚŘENÍ ODVOZENÝCH ROVNIC PRO NEIZOLOVANÝ VÝMĚNÍK NA VZOROVÉ ÚLOZE.....	41
6 SIMULACE ÚLOHY V PROSTŘEDÍ COMSOL MULTIPHYSICS.....	44
6.1 OVĚŘENÍ PROGRAMOVÉ APLIKACE COMSOL MULTIPHYSICS NA VZOROVÉ ÚLOZE PRO IZOLOVANÝ VÝMĚNÍK	50
6.2 OVĚŘENÍ PROGRAMOVÉ APLIKACE COMSOL MULTIPHYSICS NA VZOROVÉ ÚLOZE PRO NEIZOLOVANÝ VÝMĚNÍK	53
ZÁVĚR	57
CONCLUSION	59
SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY.....	61
SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK.....	63
SEZNAM OBRÁZKŮ	66
SEZNAM TABULEK.....	67

ÚVOD

Sdílení tepla nás provází v každodenním životě takřka na každém kroku, ať už se jedná například o problematiku vytápění, za účelem úspor nákladů za energii. Toto téma je v dnešní době hodně aktuální, protože cena nejen elektrické ale také tepelné energie neustále roste. Výroba energie je spojená hlavně u tepelných elektráren s produkcí emisí, které mají dopad na kvalitu životního prostředí. Každá větší společnost má státem dané emisní limity, které nesmí překročit, za jejich překročení se platí velké finanční pokuty. Cena dodávané energie je dána různými faktory. Jedním z nich je neustále se zvyšující poptávka po energii. Dalším faktorem je způsob její výroby, protože je kladen důraz na ekologickou výrobu, která je i náročnější z hlediska výrobního procesu, a tomu samozřejmě odpovídá i cena takto připravené energie. Jedinou možností, jak řešit úsporu výdajů na energie, které se promítají do konečné ceny výrobku, je omezit množství spotřebované energie. Jedním z možných řešení je optimalizovat výrobu, a tím dosáhnout snížení výrobních nákladů, které se promítají do konečné ceny výrobku. Aby bylo možné optimalizovat, je nutné děj nebo zkoumaný systém nejprve analyzovat a matematicky popsat. Matematický popis v případě výměníku vede na soustavu diferenciálních rovnic.

Zařízení, která jsou v technické praxi pro přenos tepla nejčastěji používána, se nazývají tepelné výměníky. Tyto tepelné výměníky pracují na principu předávání tepelné energie z teplejší tekutiny přes přepážku do chladnější tekutiny [4]. Jejich hlavním cílem je ochladit teplejší tekutinu nebo naopak ohřát chladnější tekutinu. Výměníků je mnoho typů a podle průmyslového odvětví, ve kterém jsou využívány, jsou různých konstrukcí a pro různé technologické tekutiny, ale jejich společnou a nejdůležitější vlastností je jejich součinitel přestupu tepla na obou stranách výměníku. Na principu výměníku pracují topná tělesa, klimatizační jednotky, výparníky, kondenzátory a jiné. Místa, kde se výměníky uplatňují, jsou elektrárny, teplárny, chemické závody apod. Moderní výměníky na vytápění jsou optimalizovány tak, aby jejich přenos energie byl co nejúčinnější s co nejnižšími náklady.

Cílem mé diplomové práce je navrhnout matematický popis izolovaného a neizolovaného protiproudého svazkového výměníku na základě entalpické bilance. Tento popis vede na soustavu diferenciálních rovnic. Výsledné řešení bude následně porovnáno se standardním řešením z technické praxe. Verifikace tohoto průběhu bude provedena jednak výpočtem na

vzorovém příkladu a také simulací tohoto výměníku v simulačním programu COMSOL MULTIPHYSICS.

I. TEORETICKÁ ČÁST

1 TEPELNÉ VÝMĚNÍKY

Jak již bylo v úvodu řečeno, výměníky tepla jsou zařízení určená k tomu, aby se v nich předávalo teplo z tekutiny o vyšší teplotě tekutině chladnější. Existuje velmi mnoho konstrukčních typů výměníků. Jsou vyráběny z kovů, především oceli, ale také ze skla, keramiky, grafitu nebo termoplastu [13]. Při volbě tohoto materiálu rozhodují korozní a teplotní podmínky provozu. Díky rozdílným konstrukcím lze výměníky použít v mnoha oblastech. Výměníky jsou velice důležité, jelikož mají v praxi velmi široké uplatnění. Nejčastěji se používají pro vytápění, chlazení, ohřev vody, tepelná čerpadla, ohřev bazénů, solární systémy, průmyslové aplikace, parní ohřev, chlazení olejů, výparníky, kondenzátory a další [1], [4], [12].

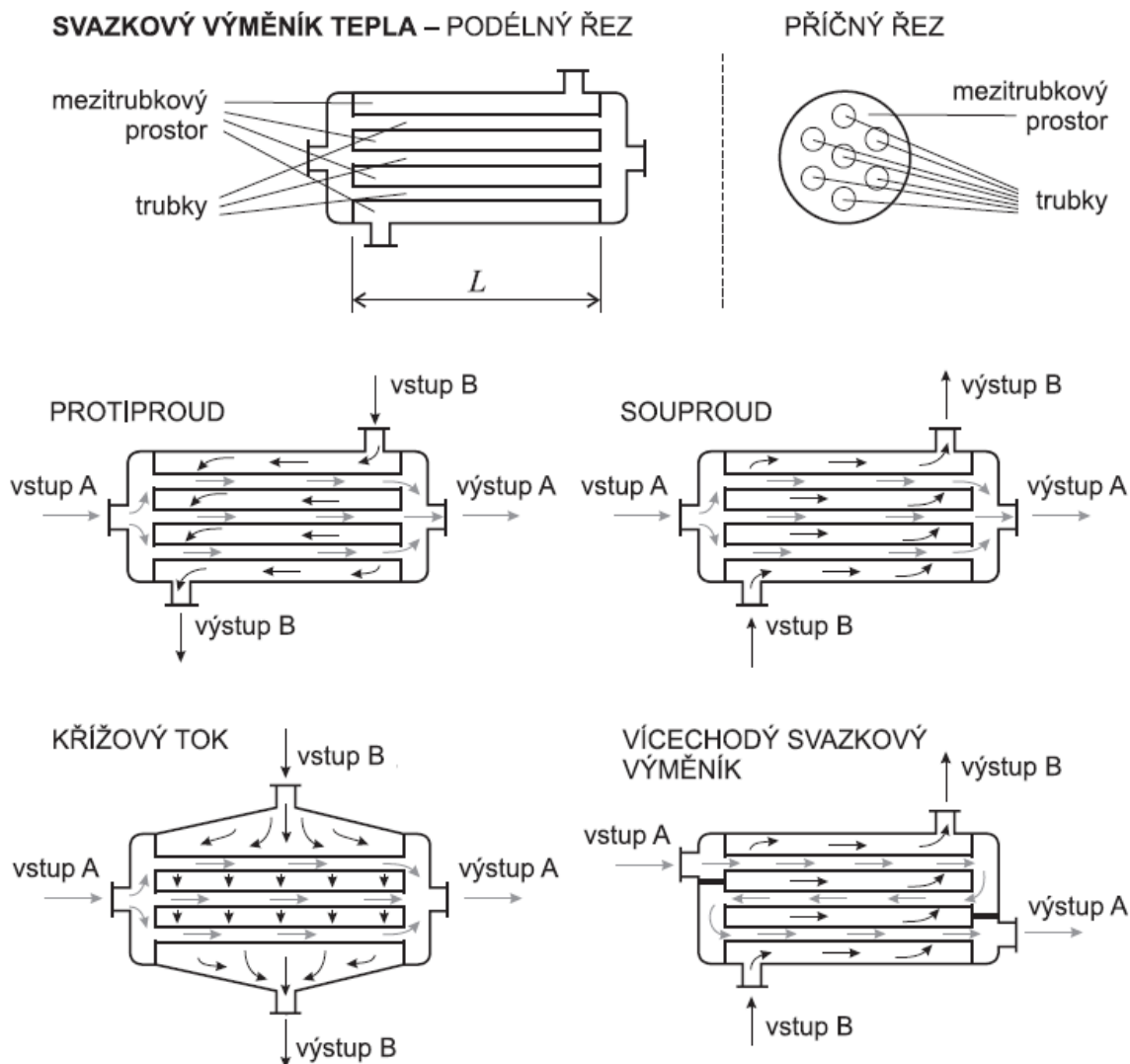
Výměnu tepla ovlivňuje mnoho různých faktorů. Mezi ty nejdůležitější patří teplosměnná plocha, rychlost proudění, vlastnosti tekutin, ale hlavně součinitele přestupu tepla na obou stranách výměníku. Teplosměnná plocha ovlivňuje rychlost výměny. Čím větší je plocha, tím rychleji dojde k výměně tepla. Mezi vlastnosti tekutin, které ovlivňují tepelnou výměnu, patří teplota, tlak, hustota, měrné teplo, tepelná vodivost a dynamická viskozita. Všechny tyto vyjmenované vlastnosti ovlivňují velikost součinitele přestupu tepla [1], [13].

Z hlediska funkce se výměníky dělí na rekuperační, regenerační a směšovací. V rekuperačních výměnících tepla probíhá plynulá výměna tepla mezi dvěma tekutinami oddělenými od sebe nepropustnou (pro hmotu) teplosměnnou (pro teplo propustnou) stěnou, která má vysokou tepelnou vodivost. V regeneračních výměnících tepla prochází obě látky střídavě týmž prostorem, ve kterém je uložena hmota se schopností akumulovat teplo (např. keramická vyzdívka). V první fázi protéká prostorem teplejší tekutina a předává teplo této hmotě, tím se ochlazuje. V druhé fázi protéká prostorem chladnější tekutina, která tuto hmotu ochlazuje a tím se ohřívá. Pracovní proces je zde přerušovaný, s neustáleným periodicky proměnným polem. Posledním typem jsou výměníky směšovací, kdy se smíšením jedné tekutiny s druhou dosáhne požadované teploty [11].

Zde budou řešeny pouze rekuperační výměníky. Rekuperátory jsou z hlediska konstrukce velmi různé, ale z hlediska sdílení tepla se liší hlavně uspořádáním vzájemného směru proudění obou tekutin. Hovoříme pak o výměnících s paralelním tokem, s křížovým tokem a se smíšeným tokem. Výměníky s paralelním tokem mohou být souproudé, jestliže tekutiny proudí podél výměnné plochy stejným směrem, a protiproudé, proudí-li navzájem opačnými směry. V jednom výměníku může být současně paralelní a křížové uspořádání

proudů tekutin, pak se mu obvykle říká výměník se smíšeným tokem. Volba jednotlivých uspořádání se řídí požadovanými podmínkami sdílení tepla a hospodárností procesu. Mezi čtyři nejčastější typy výměníků patří výměníky trubkové, svazkové, spirálové a deskové [3],[4].

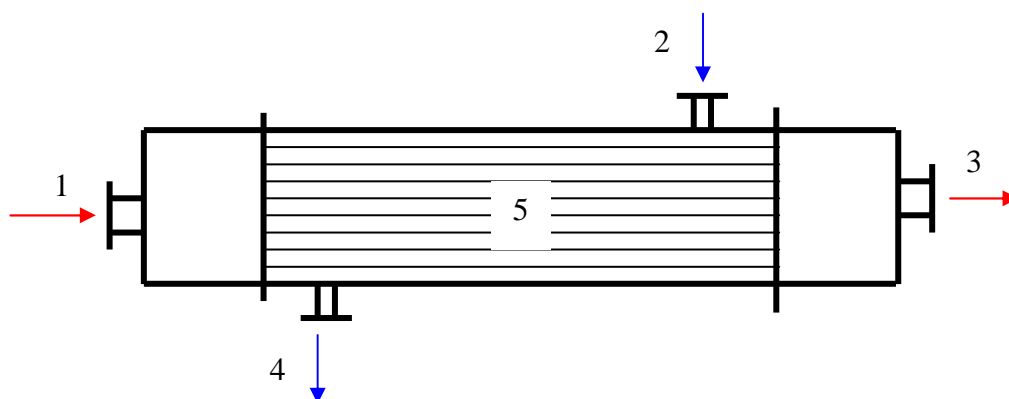
Z uvedených druhů zde bude pojednáváno pouze o protiproudém svazkovém výměníku. Základem konstrukce tohoto výměníku je válcová nádoba s hluboce klenutým dnem a víkem. Vevnitř je uložena trubkovnice s několika desítkami až stovkami přímých nebo U-trubek. Délkou výměníku a počtem trubek je měněna teplosměnná plocha, tj. jeho výkon. Ukázky protiproudého svazkového výměníku jsou znázorněny na obrázcích níže (Obr. 1 a Obr. 2) [13].



Obr. 1 Ukázka svazkového výměníku tepla a uspořádání toků [1].

Na obrázku 1 je ukázka svazkového výměníku tepla. Je zde znázorněn podélný i příčný řez tímto výměníkem. Dále jsou zde ukázány různé druhy toků v tomto výměníku – protiproud, souproud, křížový tok a vícechodý svazkový výměník. Vstupem tekutiny A je označen přívod ochlazované tekutiny, výstup tekutiny A je odvod ochlazované tekutiny, vstup tekutiny B je přívod ohřívané tekutiny a výstup tekutiny B je odvod ohřívané tekutiny.

Na obrázku 2 je znázorněn detail protiproudého svazkového výměníku.



Obr. 2 Detail svazkového výměníku tepla [13].

Kde: 1 – vstup ochlazované tekutiny, 2 - vstup ohřívané tekutiny, 3 – výstup ochlazované tekutiny, 4 - výstup ohřívané tekutiny, 5 – trubkovnice

2 SDÍLENÍ TEPLA A PROSTUP

Sdílením tepla se označuje přenos energie z oblasti o teplotě vyšší do oblasti s teplotou nižší. Jsou rozlišovány tři základní mechanismy sdílení tepla, a to vedením (kondukcí), prouděním (konvekcí) a sáláním [9].

Ve výměnících tepla se uplatňují tyto dva: vedení a proudění. Sdílení tepla vedením souvisí s tepelným pohybem a vzájemným energetickým působením molekul, atomů, iontů a elektronů. Teplo se přenáší vedením nejen v tuhých, ale i kapalných a plyných látkách, ovšem u tuhých neprůzračných látek je jediným mechanismem sdílení tepla. Sdílení tepla konvekcí je možné pouze v proudícím prostředí. Pohybující se tekutina přitom předává nebo odebírá teplo z povrchu okolních těles. Sledovaným povrchem je obvykle povrch tělesa tuhého, ale může jím být také plocha dotyku dvou kapalin, případně kapaliny a plynu [9].

Kombinace sdílení tepla vedením a prouděním se nazývá prostup tepla. Prostup tepla je sdílení tepla z jednoho pohybuujícího se prostředí (kapaliny nebo plynu) do druhého, přes rozdělující je jednoduchou nebo vrstvenou stěnu libovolného tvaru. Teplo přestupuje z teplejší tekutiny do pevné stěny prouděním, stěnou prochází vedením a ze stěny do chladnější tekutiny přestupuje prouděním. Rovnice pro tok tepla má tvar závislý na geometrickém tvaru stěny, kterou teplo prochází, proto se prostup tepla dělí na dva druhy: prostup tepla rovinnou stěnou a prostup tepla válcovou stěnou [3], [4].

- Prostup tepla rovinnou stěnou

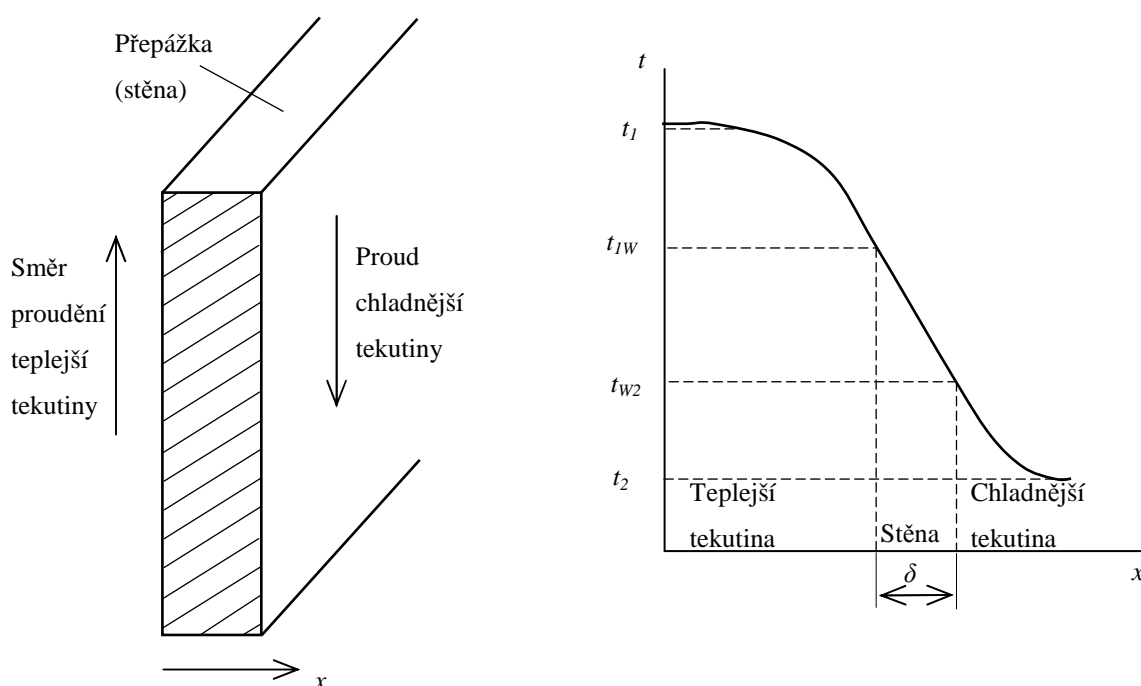
Tok tepla pro prostup tepla rovinnou stěnou z teplejší do chladnější tekutiny je vyjádřen jako přestup z teplejší tekutiny na stěnu, vedení tepla stěnou a přestup tepla ze stěny do chladnější tekutiny. Je zde předpoklad, že fyzikální veličiny, teploty obklopujícího prostředí a součinitele přestupu tepla jsou stálé a že se nemění podél povrchu stěny. Dále je pak zanedbáno sdílení tepla sáláním. Tyto předpoklady dovolují sledovat změny teplot tekutin a stěny pouze ve směru kolmém na povrch stěny. Celkový tepelný tok lze tedy vyjádřit jako součin součinitele prostupu tepla, teplosměnné plochy a hnací síly (celkového rozdílu teplot), tak jak je ukázáno v rovnici (2.1) [3], [4], [11].

$$\dot{Q} = k \cdot A \cdot \Delta t \quad (2.1)$$

Součinitel prostupu tepla k rovinnou stěnou je vyjádřen vztahem (2.2)

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}} \quad (2.2)$$

Kde: k - součinitel prostupu tepla mezi stěnou a teplejší tekutinou [$\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$]; Δt - celkový teplotní rozdíl tekutin [$^{\circ}\text{C}$]; A - teplosměnná plocha materiálu [m^2]; α_1 - součinitel přestupu tepla mezi stěnou a teplejší tekutinou [$\text{W.m}^2.\text{K}^{-1}$]; α_2 - součinitel přestupu tepla mezi stěnou a chladnější tekutinou [$\text{W.m}^2.\text{K}^{-1}$]; δ_i - tloušťka stěny [m]; λ_i - součinitel tepelné vodivosti materiálu [$\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$]



Obr. 3 Prostup tepla rovinnou přepážkou [4]

Na obrázku 3 je znázorněn průběh teploty v rovinné přepážce. Kde: t_1 - střední teplota teplejší tekutiny [$^{\circ}\text{C}$]; t_2 - střední teplota chladnější tekutiny [$^{\circ}\text{C}$]; t_{IW} - teplota stěny na rozhraní s teplejší tekutinou [$^{\circ}\text{C}$]; t_{W2} - teplota stěny na rozhraní s chladnější tekutinou [$^{\circ}\text{C}$]; δ - tloušťka stěny [m].

- Prostup tepla válcovou stěnou

Pro prostup tepla válcovou stěnou je dvěma rovinami kolnými na osu válce vymezen elementární objem, ve kterém nastává prostup tepla. Je vycházeno z předpokladu, že teplejší tekutina je uvnitř trubky a chladnější vně trubky. Teplo zde přestupuje z teplejší tekutiny na vnitřní stěnu trubky, trubkou prochází vedením, a odtud přestupuje do

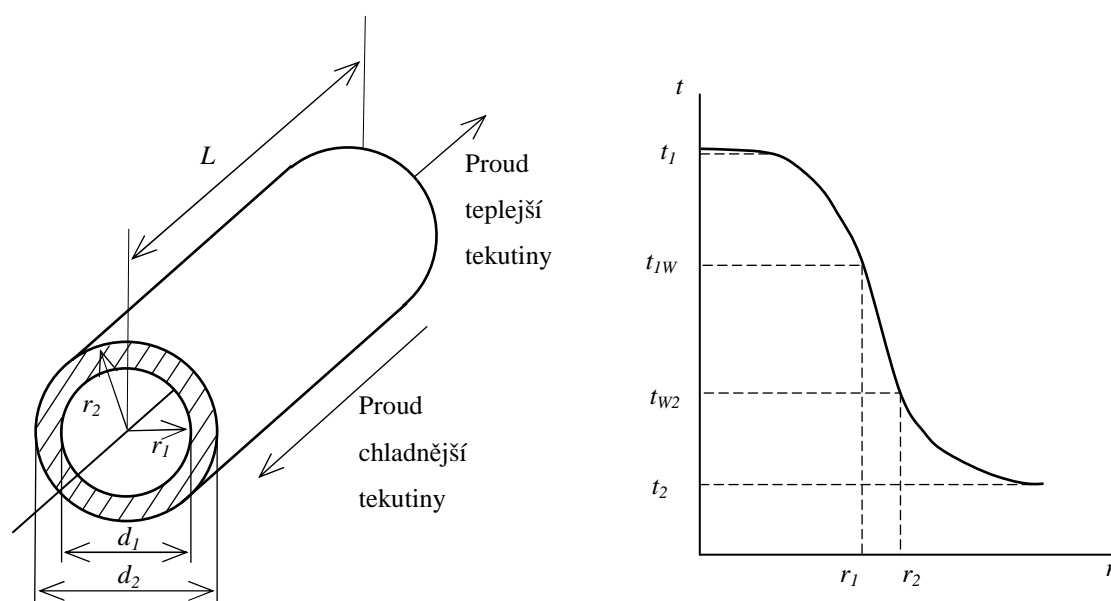
chladnější tekutiny. Je zde předpoklad konstantní tepelné vodivosti trubky a tepelné rovnováhy na fázovém rozhraní. Není uvažována akumulace ani zdroj tepla. Jak je ukázáno ve vztahu (2.1), celkový tepelný tok lze tedy vyjádřit jako součin délkového prostupu tepla, hnací síly (celkového rozdílu teplot) a teplosměnné délky [4], [11].

$$\dot{Q} = k_L \cdot L \cdot \Delta t \quad (2.3)$$

Délkový součinitel prostupu tepla k_L je vyjádřen vztahem (2.4).

$$k_L = \frac{\pi}{\frac{1}{\alpha_1 \cdot d_1} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \cdot \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} + \frac{1}{\alpha_2 \cdot d_{i+1}}} \quad (2.4)$$

Kde: k_L – délkový součinitel prostupu tepla mezi stěnou a teplejší tekutinou [$\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$]; L – délka výměníku [m]; d_i – vnitřní průměr trubky [m]; d_{i+1} – vnější průměr potrubí [m]

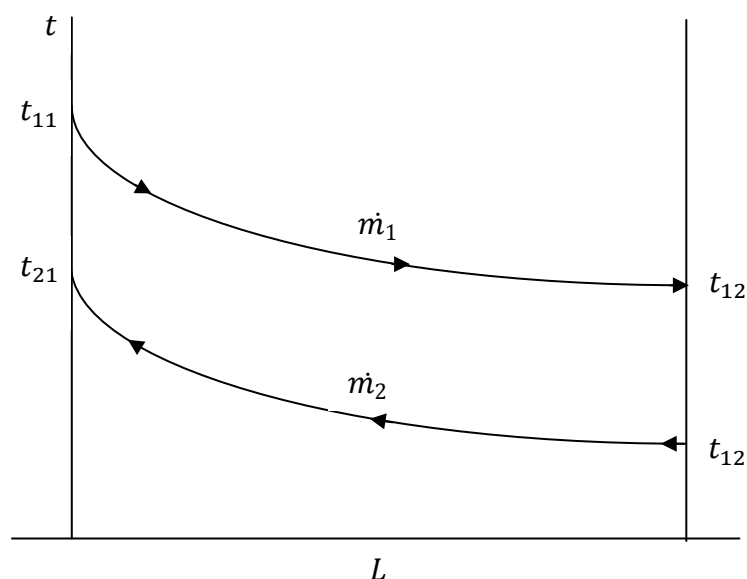


Obr. 4 Prostup tepla válcovou přepážkou [4]

Na obrázku 4 je znázorněn prostup tepla válcovou stěnou. Kde: r_1 – poloměr vnitřní trubky [m]; r_2 – poloměr vnější trubky [m]; d_1 – průměr vnitřní trubky [m]; d_2 – průměr vnější trubky [m]; L – délka potrubí [m].

3 MODEL PROTIPROUDÉHO VÝMĚNÍKU

Pomocí matematického modelu založeného na entalpické bilanci určím, kolik tepla je potřeba dodat, aby se daná tekutina ohřála na požadovanou teplotu. Tento model lze vyjádřit diferenciálními rovnicemi. Řešením tohoto modelu bude možno určit střední teplotu tekutiny v jakémkoliv místě tohoto výměníku.



Obr. 5 Schéma průběhu teplot v protiproudém výměníku

3.1 Izolovaný protiproudý výměník

Entalpická bilance popisující výměnu tepla v tomto protiproudém svazkovém výměníku bez ztrát do okolí je dána diferenciálními rovnicemi:

$$\dot{m}_1 \cdot c_{p1} \cdot \frac{dt_1(L)}{dL} = \dot{m}_2 \cdot c_{p2} \cdot \frac{dt_2(L)}{dL} \quad (3.1)$$

$$\dot{m}_2 \cdot c_{p2} \cdot \frac{dt_2(L)}{dL} = -n \cdot k_L \cdot L \cdot (t_1(L) - t_2(L)) \quad (3.2)$$

Ve vztahu (3.1) a (3.2) jsem zavedla substituci:

$$Z_1 = \dot{m}_1 \cdot c_{p1} \quad (3.3)$$

$$Z_2 = \dot{m}_2 \cdot c_{p2} \quad (3.4)$$

$$Z_3 = -n \cdot k_L \cdot L \quad (3.5)$$

Po dosazení substitucí (3.3) až (3.5) do rovnic (3.1) a (3.2) platí vztahy (3.6) a (3.7), které jsou potřebné pro další výpočet:

$$Z_1 \cdot \frac{dt_1(L)}{dL} = Z_2 \cdot \frac{dt_2(L)}{dL} \quad (3.6)$$

$$Z_2 \cdot \frac{dt_2(L)}{dL} = Z_3 \cdot (t_1(L) - t_2(L)) \quad (3.7)$$

Užitím Laplaceovy transformace [15] jsem získala vztahy (3.8) a (3.9):

$$Z_1 \cdot (s \cdot T_1(s) - t_{11}) = Z_2 \cdot (s \cdot T_2(s) - t_{22}) \quad (3.8)$$

$$Z_2 \cdot (s \cdot T_2(s) - t_{22}) = Z_3 \cdot (T_1(s) - T_2(s)) \quad (3.9)$$

Po roznásobení vztahů (3.8) a (3.9) jsem obdržela rovnice (3.10) a (3.11):

$$Z_1 \cdot s \cdot T_1(s) - Z_1 \cdot t_{11} = Z_2 \cdot s \cdot T_2(s) - Z_2 \cdot t_{22} \quad (3.10)$$

$$Z_2 \cdot s \cdot T_2(s) - Z_2 \cdot t_{22} = Z_3 \cdot T_1(s) - Z_3 \cdot T_2(s) \quad (3.11)$$

Úpravou vztahů (3.10) a (3.11) jsem dostala:

$$T_2(s) = \frac{Z_1 \cdot s \cdot T_1(s) - Z_1 \cdot t_{11} + Z_2 \cdot t_{22}}{Z_2 \cdot s} \quad (3.12)$$

$$T_1(s) = \frac{Z_2 \cdot s \cdot T_2(s) - Z_2 \cdot t_{22} + Z_3 \cdot T_2(s)}{Z_3} \quad (3.13)$$

Dosazením vztahu (3.13) do rovnice (3.10) jsem obdržela:

$$Z_1 \cdot Z_2 \cdot s^2 \cdot T_2(s) - Z_1 \cdot Z_2 \cdot s \cdot t_{22} + Z_1 \cdot Z_3 \cdot s \cdot T_2(s) - Z_1 \cdot Z_3 \cdot t_{11} = Z_2 \cdot Z_3 \cdot s \cdot T_2(s) - Z_2 \cdot Z_3 \cdot t_{22} \quad (3.14)$$

V níže uvedených rovnicích (3.15) až (3.18) jsou znázorněny úpravy rovnice (3.14):

$$T_2(s) \cdot (Z_1 \cdot Z_2 \cdot s^2 + Z_1 \cdot Z_3 \cdot s - Z_2 \cdot Z_3 \cdot s) = Z_1 \cdot Z_2 \cdot s \cdot t_{22} + Z_1 \cdot Z_3 \cdot t_{11} - Z_2 \cdot Z_3 \cdot t_{22} \quad (3.15)$$

$$T_2(s) = \frac{Z_1 \cdot Z_2 \cdot s \cdot t_{22} + Z_1 \cdot Z_3 \cdot t_{11} - Z_2 \cdot Z_3 \cdot t_{22}}{(Z_1 \cdot Z_2 \cdot s^2 + Z_1 \cdot Z_3 \cdot s - Z_2 \cdot Z_3 \cdot s)} \quad (3.16)$$

$$T_2(s) = \frac{s \cdot Z_1 \cdot Z_2 \cdot t_{22} + Z_1 \cdot Z_3 \cdot t_{11} - Z_2 \cdot Z_3 \cdot t_{22}}{s(Z_1 \cdot Z_2 \cdot s + Z_1 \cdot Z_3 - Z_2 \cdot Z_3)} \quad (3.17)$$

$$T_2(s) = \frac{s \cdot t_{22} + \frac{Z_3}{Z_2} \cdot t_{11} - \frac{Z_3}{Z_1} \cdot t_{22}}{s \left(s + \frac{Z_1 \cdot Z_3 - Z_2 \cdot Z_3}{Z_1 \cdot Z_2} \right)} \quad (3.18)$$

Dosazením vztahu (3.12) do rovnice (3.11) jsem obdržela:

$$\begin{aligned} Z_1 \cdot Z_2 \cdot s^2 \cdot T_1(s) - Z_1 \cdot Z_2 \cdot s \cdot t_{11} + Z_2^2 \cdot s \cdot t_{22} - Z_2^2 \cdot s \cdot t_{22} = \\ = Z_2 \cdot Z_3 \cdot s \cdot T_1(s) - Z_1 \cdot Z_3 \cdot s \cdot T_1(s) + Z_1 \cdot Z_3 \cdot t_{11} - Z_2 \cdot Z_3 \cdot t_{22} \end{aligned} \quad (3.19)$$

V níže uvedených rovnicích (3.20) až (3.24) jsou znázorněny úpravy rovnice (3.19):

$$T_1(s) \cdot (Z_1 \cdot Z_2 \cdot s^2 + Z_1 \cdot Z_3 \cdot s - Z_2 \cdot Z_3 \cdot s) = Z_1 \cdot Z_2 \cdot s \cdot t_{11} + Z_1 \cdot Z_3 \cdot t_{11} - Z_2 \cdot Z_3 \cdot t_{22} \quad (3.20)$$

$$T_1(s) = \frac{Z_1 \cdot Z_2 \cdot s \cdot t_{11} + Z_1 \cdot Z_3 \cdot t_{11} - Z_2 \cdot Z_3 \cdot t_{22}}{Z_1 \cdot Z_2 \cdot s^2 + Z_1 \cdot Z_3 \cdot s - Z_2 \cdot Z_3 \cdot s} \quad (3.21)$$

$$T_1(s) = \frac{s \cdot Z_1 \cdot Z_2 \cdot t_{11} + Z_1 \cdot Z_3 \cdot t_{11} - Z_2 \cdot Z_3 \cdot t_{22}}{s \cdot (s \cdot Z_1 \cdot Z_2 + Z_1 \cdot Z_3 - Z_2 \cdot Z_3)} \quad (3.22)$$

$$T_1(s) = \frac{s \cdot t_{11} + Z_1 \cdot \frac{Z_3}{Z_2} \cdot t_{11} - Z_2 \cdot \frac{Z_3}{Z_1} \cdot t_{22}}{s \cdot \left(s + \frac{Z_1 \cdot Z_3 - Z_2 \cdot Z_3}{Z_1 \cdot Z_2} \right)} \quad (3.23)$$

Užitím zpětné Laplaceovy transformace v rovnici (3.18) jsem získala výsledný vztah (3.40). Pro zpětnou Laplaceovu transformaci jsem provedla rozklad na parciální zlomky [15]. Úpravy těchto parciálních zlomků jsou zobrazeny v rovnicích (3.24) a (3.25).

$$T_2(s) = \frac{s \cdot t_{22} + \frac{Z_3}{Z_2} \cdot t_{11} - \frac{Z_3}{Z_1} \cdot t_{22}}{s \left(s + \frac{Z_1 \cdot Z_3 - Z_2 \cdot Z_3}{Z_1 \cdot Z_2} \right)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{Z_1 \cdot Z_3 - Z_2 \cdot Z_3}{Z_1 \cdot Z_2}} \quad (3.24)$$

$$s \cdot t_{22} + \frac{Z_3}{Z_2} \cdot t_{11} - \frac{Z_3}{Z_1} \cdot t_{22} = A \cdot s + A \cdot \frac{Z_1 \cdot Z_3 - Z_2 \cdot Z_3}{Z_1 \cdot Z_2} + B \cdot s \quad (3.25)$$

Vytknutí Laplaceova operátoru z rovnice (3.25):

$$s^1 : \quad t_{22} = A + B \quad (3.26)$$

$$s^0 : \quad \frac{Z_3}{Z_2} \cdot t_{11} - \frac{Z_3}{Z_1} \cdot t_{22} = A \cdot \frac{Z_1 \cdot Z_3 - Z_2 \cdot Z_3}{Z_1 \cdot Z_2} \quad (3.27)$$

Úpravou vztahu (3.27) jsem dostala čítele A rovnice (3.24):

$$A = \frac{t_{11} \cdot Z_1 \cdot Z_3 - t_{22} \cdot Z_2 \cdot Z_3}{Z_1 \cdot Z_3 - Z_2 \cdot Z_3} = \frac{t_{11} \cdot Z_1 - t_{22} \cdot Z_2}{Z_1 - Z_2} \quad (3.28)$$

Dosazením vztahu (3.28) do rovnice (3.26) jsem dostala čítele B rovnice (3.24):

$$B = \frac{t_{22} \cdot Z_1 - t_{22} \cdot Z_2 - t_{11} \cdot Z_1 + t_{22} \cdot Z_2}{Z_1 - Z_2} = \frac{t_{22} \cdot Z_1 - t_{11} \cdot Z_1}{Z_1 - Z_2} \quad (3.29)$$

Dosazením hodnot ze vztahů (3.28) a (3.29) jsem obdržela rovnici (3.30):

$$T_2(s) = \frac{s \cdot t_{22} + \frac{Z_3}{Z_2} \cdot t_{11} - \frac{Z_3}{Z_1} \cdot t_{22}}{s \left(s + \frac{Z_1 \cdot Z_3 - Z_2 \cdot Z_3}{Z_1 \cdot Z_2} \right)} = \frac{t_{11} \cdot Z_1 - t_{22} \cdot Z_2}{Z_1 - Z_2} \cdot \frac{1}{s} + \frac{t_{22} \cdot Z_1 - t_{11} \cdot Z_1}{Z_1 - Z_2} \cdot \frac{1}{s + \frac{Z_1 \cdot Z_3 - Z_2 \cdot Z_3}{Z_1 \cdot Z_2}} \quad (3.30)$$

Po užití zpětné Laplaceovy transformace jsem dostala rovnici (3.31):

$$t_2(L) = \frac{t_{11} \cdot Z_1 - t_{22} \cdot Z_2}{Z_1 - Z_2} + \frac{t_{22} \cdot Z_1 - t_{11} \cdot Z_1}{Z_1 - Z_2} \cdot e^{-\frac{Z_1 \cdot Z_3 - Z_2 \cdot Z_3}{Z_1 \cdot Z_2} \cdot L} \quad (3.31)$$

Užitím zpětné Laplaceovy transformace v rovnici (3.23) jsem získala výsledný vztah (3.41). Pro zpětnou Laplaceovu transformaci jsem provedla rozklad na parciální zlomky [15]. Úpravy těchto parciálních zlomků jsou zobrazeny v rovnicích (3.32) a (3.33).

$$T_1(s) = \frac{s \cdot t_{11} + \frac{Z_3}{Z_2} \cdot t_{11} - \frac{Z_3}{Z_1} \cdot t_{22}}{s \left(s + \frac{Z_1 \cdot Z_3 - Z_2 \cdot Z_3}{Z_1 \cdot Z_2} \right)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{Z_1 \cdot Z_3 - Z_2 \cdot Z_3}{Z_1 \cdot Z_2}} \quad (3.32)$$

$$s \cdot t_{11} + \frac{Z_3}{Z_2} \cdot t_{11} - \frac{Z_3}{Z_1} \cdot t_{22} = A \cdot s + A \cdot \frac{Z_1 \cdot Z_3 - Z_2 \cdot Z_3}{Z_1 \cdot Z_2} + B \cdot s \quad (3.33)$$

Vytknutí Laplaceova operátoru z rovnice (3.33):

$$s^1: \quad t_{11} = A + B \quad (3.34)$$

$$s^0: \quad \frac{Z_3}{Z_2} \cdot t_{11} - \frac{Z_3}{Z_1} \cdot t_{22} = A \cdot \frac{Z_1 \cdot Z_3 - Z_2 \cdot Z_3}{Z_1 \cdot Z_2} \quad (3.35)$$

Úpravou vztahu (3.35) jsem dostala čítele A rovnice (3.32):

$$A = \frac{t_{11} \cdot Z_1 \cdot Z_3 - t_{22} \cdot Z_2 \cdot Z_3}{Z_1 \cdot Z_3 - Z_2 \cdot Z_3} = \frac{t_{11} \cdot Z_1 - t_{22} \cdot Z_2}{Z_1 - Z_2} \quad (3.36)$$

Dosazením vztahu (3.36) do rovnice (3.34) jsem dostala čítele B rovnice (3.32):

$$B = \frac{t_{11} \cdot Z_1 - t_{11} \cdot Z_2 - t_{11} \cdot Z_1 + t_{22} \cdot Z_2}{Z_1 - Z_2} = \frac{t_{22} \cdot Z_2 - t_{11} \cdot Z_2}{Z_1 - Z_2} \quad (3.37)$$

Dosazením hodnot ze vztahů (3.36) a (3.37) jsem obdržela rovnici (3.38):

$$T_1(s) = \frac{s \cdot t_{11} + \frac{Z_3}{Z_2} \cdot t_{11} - \frac{Z_3}{Z_1} \cdot t_{22}}{s \left(s + \frac{Z_1 \cdot Z_3 - Z_2 \cdot Z_3}{Z_1 \cdot Z_2} \right)} = \frac{t_{11} \cdot Z_1 - t_{22} \cdot Z_2}{Z_1 - Z_2} \cdot \frac{1}{s} + \frac{t_{22} \cdot Z_2 - t_{11} \cdot Z_2}{Z_1 - Z_2} \cdot \frac{1}{s + \frac{Z_1 \cdot Z_3 - Z_2 \cdot Z_3}{Z_1 \cdot Z_2}} \quad (3.38)$$

Po užití zpětné Laplaceovy transformace jsem dostala rovnici (3.39):

$$t_1(L) = \frac{t_{11} \cdot Z_1 - t_{22} \cdot Z_2}{Z_1 - Z_2} + \frac{t_{22} \cdot Z_2 - t_{11} \cdot Z_2}{Z_1 - Z_2} \cdot e^{-\frac{Z_1 \cdot Z_3 - Z_2 \cdot Z_3}{Z_1 \cdot Z_2} L} \quad (3.39)$$

Úpravou vztahů (3.31) a (3.39) jsem dostala výsledné vztahy diferenciálních rovnic:

$$t_2 = \frac{Z_1 \cdot t_{11} - Z_2 \cdot t_{22} - Z_1 \cdot e^{\frac{(-Z_3 \cdot (Z_1 - Z_2) \cdot L)}{Z_1 \cdot Z_2}} \cdot t_{11} + Z_1 \cdot e^{\frac{(-Z_3 \cdot (Z_1 - Z_2) \cdot L)}{Z_1 \cdot Z_2}} \cdot t_{22}}{Z_1 - Z_2} \quad (3.40)$$

$$t_1 = \frac{Z_1 \cdot t_{11} - Z_2 \cdot t_{22} - Z_2 \cdot e^{\frac{(-Z_3 \cdot (Z_1 - Z_2) \cdot L)}{Z_1 \cdot Z_2}} \cdot t_{11} + Z_2 \cdot e^{\frac{(-Z_3 \cdot (Z_1 - Z_2) \cdot L)}{Z_1 \cdot Z_2}} \cdot t_{22}}{Z_1 - Z_2} \quad (3.41)$$

3.2 Neizolovaný protiproudý výměník

Entalpická bilance popisující výměnu tepla v protiproudém svazkovém výměníku se ztrátami do okolí a je dána diferenciálními rovnicemi:

$$\dot{m}_1 \cdot cp_1 \cdot \frac{dt_1(L)}{dL} = \dot{m}_2 \cdot cp_2 \cdot \frac{dt_2(L)}{dL} + k_{L0} \cdot L \cdot (t_2(L) - t_0) \quad (3.42)$$

$$\dot{m}_2 \cdot cp_2 \cdot \frac{dt_2(L)}{dL} + k_{L0} \cdot L \cdot (t_2(L) - t_0) = -n \cdot k_L \cdot L \cdot (t_1(L) - t_2(L)) \quad (3.43)$$

Ve vztahu (3.42) a (3.43) jsem zavedla substituci:

$$Z_1 = \dot{m}_1 \cdot cp_1 \quad (3.44)$$

$$Z_2 = \dot{m}_2 \cdot cp_2 \quad (3.45)$$

$$Z_3 = -n \cdot k_L \cdot L \quad (3.46)$$

$$Z_4 = k_{L0} \cdot L \quad (3.47)$$

Po dosazení substitucí (3.44) až (3.47) do rovnic (3.42) a (3.43) jsem získala vztahy (3.48) a (3.49), které jsou potřebné pro další výpočet:

$$Z_1 \cdot \frac{dt_1(L)}{dL} = Z_2 \cdot \frac{dt_2(L)}{dL} + Z_4 \cdot (t_2(L) - t_0) \quad (3.48)$$

$$Z_2 \cdot \frac{dt_2(L)}{dL} + Z_4 \cdot (t_2(L) - t_0) = Z_3 \cdot (t_1(L) - t_2(L)) \quad (3.49)$$

Užitím Laplaceovy transformace jsem získala vztahy (3.50) a (3.51):

$$Z_1 \cdot (s \cdot T_1(s) - t_{11}) = Z_2 \cdot (s \cdot T_2(s) - t_{22}) + Z_4 \cdot \left(T_2(s) - \frac{t_0}{s} \right) \quad (3.50)$$

$$Z_2 \cdot (s \cdot T_2(s) - t_{22}) + Z_4 \cdot \left(T_2(s) - \frac{t_0}{s} \right) = Z_3 \cdot (T_1(s) - T_2(s)) \quad (3.51)$$

Po roznásobení vztahů (3.50) a (3.51) jsem získala rovnice (3.52) a (3.53):

$$Z_1 \cdot s \cdot T_1(s) - Z_1 \cdot t_{11} = Z_2 \cdot s \cdot T_2(s) - Z_2 \cdot t_{22} + Z_4 \cdot T_2(s) - Z_4 \cdot \frac{t_0}{s} \quad (3.52)$$

$$Z_2 \cdot s \cdot T_2(s) - Z_2 \cdot t_{22} + Z_4 \cdot T_2(s) - Z_4 \cdot \frac{t_0}{s} = Z_3 \cdot T_1(s) - Z_3 \cdot T_2(s) \quad (3.53)$$

Úpravou vztahů (3.52) a (3.53) jsem dostala:

$$T_2(s) = \frac{Z_1 \cdot s \cdot T_1(s) - Z_1 \cdot t_{11} + Z_2 \cdot t_{22} + Z_4 \cdot \frac{t_0}{s}}{(Z_2 \cdot s + Z_4)} \quad (3.54)$$

$$T_2(s) = \frac{Z_2 \cdot s \cdot T_2(s) - Z_2 \cdot t_{22} + Z_4 \cdot T_2(s) - Z_4 \cdot \frac{t_0}{s} + Z_3 \cdot T_2(s)}{Z_3} \quad (3.55)$$

Dosazení vztahu (3.54) do rovnice (3.53):

$$\begin{aligned} & Z_1 \cdot Z_2 \cdot s^2 \cdot T_1(s) - Z_1 \cdot Z_2 \cdot s \cdot t_{11} + Z_2^2 \cdot t_{22} \cdot s + Z_2 \cdot Z_4 \cdot t_0 - Z_2^2 \cdot t_{22} \cdot s - Z_2 \cdot Z_4 \cdot t_{22} + \\ & + Z_1 \cdot Z_4 \cdot s \cdot T_1(s) - Z_1 \cdot Z_4 \cdot t_{11} + Z_2 \cdot Z_4 \cdot t_{22} + Z_4^2 \cdot \frac{t_0}{s} - Z_2 \cdot Z_4 \cdot t_0 - Z_4^2 \cdot \frac{t_0}{s} = \\ & = Z_2 \cdot Z_3 \cdot s \cdot T_1(s) + Z_3 \cdot Z_4 \cdot T_1(s) - Z_1 \cdot Z_3 \cdot s \cdot T_1(s) + Z_1 \cdot Z_3 \cdot t_{11} - Z_2 \cdot Z_3 \cdot t_{22} - Z_3 \cdot Z_4 \cdot \frac{t_0}{s} \end{aligned} \quad (3.56)$$

V níže uvedených rovnicích (3.57) až (3.59) jsou znázorněny úpravy rovnice (3.56).

$$T_1(s) \cdot (Z_1 \cdot Z_2 \cdot s^2 + Z_1 \cdot Z_4 \cdot s - Z_2 \cdot Z_3 \cdot s + Z_1 \cdot Z_3 \cdot s - Z_3 \cdot Z_4) = Z_1 \cdot Z_2 \cdot s \cdot t_{11} + Z_1 \cdot Z_4 \cdot t_{11} + Z_1 \cdot Z_3 \cdot t_{11} - Z_2 \cdot Z_3 \cdot t_{22} - Z_3 \cdot Z_4 \cdot \frac{t_0}{s} \quad (3.57)$$

$$T_1(s) = \frac{Z_1 \cdot Z_2 \cdot s \cdot t_{11} + Z_1 \cdot Z_4 \cdot t_{11} + Z_1 \cdot Z_3 \cdot t_{11} - Z_2 \cdot Z_3 \cdot t_{22} - Z_3 \cdot Z_4 \cdot \frac{t_0}{s}}{(Z_1 \cdot Z_2 \cdot s^2 + Z_1 \cdot Z_4 \cdot s - Z_2 \cdot Z_3 \cdot s + Z_1 \cdot Z_3 \cdot s - Z_3 \cdot Z_4)} \quad (3.58)$$

$$T_1(s) = \frac{s^2 \cdot t_{11} + s \cdot \frac{Z_4}{Z_2} \cdot t_{11} + s \cdot \frac{Z_3}{Z_2} \cdot t_{11} - s \cdot \frac{Z_3}{Z_1} \cdot t_{22} - \frac{Z_3 \cdot Z_4}{Z_1 \cdot Z_2} \cdot t_0}{s \cdot \left(s^2 + s \cdot \left(\frac{Z_4}{Z_2} - \frac{Z_3}{Z_1} + \frac{Z_3}{Z_2} \right) - \frac{Z_3 \cdot Z_4}{Z_1 \cdot Z_2} \right)} \quad (3.59)$$

Dosazení vztahu (3.55) do rovnice (3.52):

$$\begin{aligned} & Z_1 \cdot Z_2 \cdot s^2 \cdot T_2(s) - Z_1 \cdot Z_2 \cdot s \cdot t_{22} + Z_1 \cdot Z_4 \cdot s \cdot T_2(s) - Z_1 \cdot Z_4 \cdot t_0 + Z_1 \cdot Z_3 \cdot s \cdot T_2(s) - Z_1 \cdot Z_3 \cdot t_{11} = \\ & = Z_2 \cdot Z_3 \cdot s \cdot T_2(s) - Z_2 \cdot Z_3 \cdot t_{22} + Z_3 \cdot Z_4 \cdot T_2(s) - Z_3 \cdot Z_4 \cdot \frac{t_0}{s} \end{aligned} \quad (3.60)$$

V níže uvedených rovnicích (3.61) až (3.63) jsou znázorněny úpravy rovnice (3.60).

$$T_2(s) \cdot (Z_1 \cdot Z_2 \cdot s^2 + Z_1 \cdot Z_4 \cdot s - Z_2 \cdot Z_3 \cdot s + Z_1 \cdot Z_3 \cdot s - Z_3 \cdot Z_4) = Z_1 \cdot Z_2 \cdot s \cdot t_{22} + Z_1 \cdot Z_4 \cdot t_0 + Z_1 \cdot Z_3 \cdot t_{11} - Z_2 \cdot Z_3 \cdot t_{22} - Z_3 \cdot Z_4 \cdot \frac{t_0}{s} \quad (3.61)$$

$$T_2(s) = \frac{Z_1 \cdot Z_2 \cdot s \cdot t_{22} + Z_1 \cdot Z_4 \cdot t_0 + Z_1 \cdot Z_3 \cdot t_{11} - Z_2 \cdot Z_3 \cdot t_{22} - Z_3 \cdot Z_4 \cdot \frac{t_0}{s}}{Z_1 \cdot Z_2 \cdot s^2 + Z_1 \cdot Z_4 \cdot s - Z_2 \cdot Z_3 \cdot s + Z_1 \cdot Z_3 \cdot s - Z_3 \cdot Z_4} \quad (3.62)$$

$$T_2(s) = \frac{s^2 \cdot t_{22} + s \cdot \frac{Z_4}{Z_2} \cdot t_0 + s \cdot \frac{Z_3}{Z_2} \cdot t_{11} - s \cdot \frac{Z_3}{Z_1} \cdot t_{22} - \frac{Z_3 \cdot Z_4}{Z_1 \cdot Z_2} \cdot t_0}{s \cdot \left(s^2 + s \cdot \left(\frac{Z_4}{Z_2} - \frac{Z_3}{Z_1} + \frac{Z_3}{Z_2} \right) - \frac{Z_3 \cdot Z_4}{Z_1 \cdot Z_2} \right)} \quad (3.63)$$

Užitím zpětné Laplaceovy transformace v rovnici (3.59) jsem získala výsledný vztah (3.71). Pro zpětnou Laplaceovu transformaci jsem provedla rozklad na parciální zlomky [15]. Úpravy těchto parciálních zlomků jsou zobrazeny v rovnicích (3.64) a (3.65).

$$\begin{aligned}
 T_1(s) = & \frac{s^2 \cdot t_{11} + s \cdot \frac{Z_4}{Z_2} \cdot t_{11} + s \cdot \frac{Z_3}{Z_2} \cdot t_{11} - s \cdot \frac{Z_3}{Z_1} \cdot t_{22} - \frac{Z_3 \cdot Z_4}{Z_1 \cdot Z_2} \cdot t_0}{s \cdot \left(s^2 + s \cdot \frac{Z_1 \cdot Z_4 - Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3}{Z_1 \cdot Z_2} - \frac{Z_3 \cdot Z_4}{Z_1 \cdot Z_2} \right)} = \frac{A}{s} + \\
 & + \frac{C \cdot \left(s + \frac{Z_1 \cdot Z_4 - Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3}{2 \cdot Z_1 \cdot Z_2} \right)}{\left(s + \frac{Z_1 \cdot Z_4 - Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3}{2 \cdot Z_1 \cdot Z_2} \right)^2 - \left(\frac{4 \cdot Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \cdot Z_4 + (Z_1 \cdot Z_4 - Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3)^2}{2 \cdot Z_1 \cdot Z_2} \right)^{\frac{1}{2}}} - \\
 & - \frac{D \cdot \left(\frac{4 \cdot Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \cdot Z_4 + (Z_1 \cdot Z_4 - Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3)^2}{2 \cdot Z_1 \cdot Z_2} \right)^{\frac{1}{2}}}{\left(s + \frac{Z_1 \cdot Z_4 - Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3}{2 \cdot Z_1 \cdot Z_2} \right)^2 - \left(\frac{4 \cdot Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \cdot Z_4 + (Z_1 \cdot Z_4 - Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3)^2}{2 \cdot Z_1 \cdot Z_2} \right)^{\frac{1}{2}}}
 \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned}
 & s^2 \cdot t_{11} + s \cdot \frac{Z_4}{Z_2} \cdot t_{11} + s \cdot \frac{Z_3}{Z_2} \cdot t_{11} - s \cdot \frac{Z_3}{Z_1} \cdot t_{22} - \frac{Z_3 \cdot Z_4}{Z_1 \cdot Z_2} \cdot t_0 = \\
 & = A \cdot \left(s^2 + s \cdot \frac{Z_1 \cdot Z_4 - Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3}{Z_1 \cdot Z_2} - \frac{Z_3 \cdot Z_4}{Z_1 \cdot Z_2} \right) + C \cdot s \cdot \left(s + \frac{Z_1 \cdot Z_4 - Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3}{2 \cdot Z_1 \cdot Z_2} \right) - \\
 & - D \cdot s \cdot \frac{\left(4 \cdot Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \cdot Z_4 + (Z_1 \cdot Z_4 - Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3)^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{2 \cdot Z_1 \cdot Z_2}
 \end{aligned} \quad (3.65)$$

Vytknutí Laplaceova operátoru z rovnice (3.65):

$$s^0 : \quad -\frac{Z_3 \cdot Z_4}{Z_1 \cdot Z_2} \cdot t_0 = -\frac{Z_3 \cdot Z_4}{Z_1 \cdot Z_2} \cdot A \quad \Rightarrow \quad A = t_0 \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned}
 s^1 : \quad & \frac{Z_1 \cdot Z_4 \cdot t_{11} - Z_2 \cdot Z_3 \cdot t_{22} + Z_1 \cdot Z_3 \cdot t_{11}}{Z_1 \cdot Z_2} = A \cdot \frac{Z_1 \cdot Z_4 - Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3}{Z_1 \cdot Z_2} + \\
 & + C \cdot \frac{Z_1 \cdot Z_4 - Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3}{2 \cdot Z_1 \cdot Z_2} - D \cdot \frac{\left(4 \cdot Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \cdot Z_4 + (Z_1 \cdot Z_4 - Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3)^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{2 \cdot Z_1 \cdot Z_2}
 \end{aligned} \quad (3.67)$$

$$s^2: \quad t_{11} = A + C \quad \Rightarrow \quad C = t_{11} - t_0 \quad (3.68)$$

Dosazením vypočtených hodnot do rovnice (3.67) jsem dostala čísel D rovnice (3.32):

$$D = \frac{Z_1 \cdot Z_3 \cdot t_{11} + Z_1 \cdot Z_4 \cdot t_{11} - 2 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \cdot t_{22} - Z_1 \cdot Z_3 \cdot t_0 + Z_2 \cdot Z_3 \cdot t_{11} + Z_2 \cdot Z_3 \cdot t_0 - Z_1 \cdot Z_4 \cdot t_0}{\left(4 \cdot Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \cdot Z_4 + (Z_1 \cdot Z_4 - Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.69)$$

Dosazením hodnot ze vztahů (3.66), (3.68) a (3.69) jsem obdržela rovnici (3.70):

$$\begin{aligned} T_1(s) = & \frac{s^2 \cdot t_{11} + s \cdot \frac{Z_4}{Z_2} \cdot t_{11} + s \cdot \frac{Z_3}{Z_2} \cdot t_{11} - s \cdot \frac{Z_3}{Z_1} \cdot t_{22} - \frac{Z_3 \cdot Z_4}{Z_1 \cdot Z_2} \cdot t_0}{s \cdot \left(s^2 + s \cdot \frac{Z_1 \cdot Z_4 - Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3}{Z_1 \cdot Z_2} - \frac{Z_3 \cdot Z_4}{Z_1 \cdot Z_2} \right)} = \frac{t_0}{s} + \\ & + \frac{(t_{11} - t_0) \cdot \left(s + \frac{Z_1 \cdot Z_4 - Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3}{2 \cdot Z_1 \cdot Z_2} \right)}{\left(s + \frac{Z_1 \cdot Z_4 - Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3}{2 \cdot Z_1 \cdot Z_2} \right)^2 - \left(\frac{4 \cdot Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \cdot Z_4 + (Z_1 \cdot Z_4 - Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3)^2}{2 \cdot Z_1 \cdot Z_2} \right)^{\frac{1}{2}}} - \\ & - \frac{Z_1 \cdot Z_3 \cdot t_{11} + Z_1 \cdot Z_4 \cdot t_{11} - 2 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \cdot t_{22} - Z_1 \cdot Z_3 \cdot t_0 + Z_2 \cdot Z_3 \cdot t_{11} + Z_2 \cdot Z_3 \cdot t_0 - Z_1 \cdot Z_4 \cdot t_0}{\left(4 \cdot Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \cdot Z_4 + (Z_1 \cdot Z_4 - Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \\ & \cdot \frac{\left(4 \cdot Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \cdot Z_4 + (Z_1 \cdot Z_4 - Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3)^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2 \cdot Z_1 \cdot Z_2} - \\ & - \frac{\left(s + \frac{Z_1 \cdot Z_4 - Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3}{2 \cdot Z_1 \cdot Z_2} \right)^2 - \left(\frac{4 \cdot Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \cdot Z_4 + (Z_1 \cdot Z_4 - Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3)^2}{2 \cdot Z_1 \cdot Z_2} \right)^{\frac{1}{2}}}{\left(4 \cdot Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \cdot Z_4 + (Z_1 \cdot Z_4 - Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (3.70)$$

Po užití zpětné Laplaceovy transformace jsem získala výsledný vztah (3.71) pro $t_1(L)$:

$$\begin{aligned}
t_1(L) = & t_0 + \\
& + (t_{11} - t_0) \cdot e^{-L \frac{Z_1 \cdot Z_4 - Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3}{2 \cdot Z_1 \cdot Z_2}} \cdot \cos \left(- \frac{(4 \cdot Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \cdot Z_4 + (Z_1 \cdot Z_4 - Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3)^2)^{\frac{1}{2}}}{2 \cdot Z_1 \cdot Z_2} \cdot L \right) - \\
& - \frac{Z_1 \cdot Z_3 \cdot t_{11} + Z_1 \cdot Z_4 \cdot t_{11} - 2 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \cdot t_{22} - Z_1 \cdot Z_3 \cdot t_0 + Z_2 \cdot Z_3 \cdot t_{11} + Z_2 \cdot Z_3 \cdot t_0 - Z_1 \cdot Z_4 \cdot t_0}{(4 \cdot Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \cdot Z_4 + (Z_1 \cdot Z_4 - Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3)^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \\
& \cdot e^{-L \frac{Z_1 \cdot Z_4 - Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3}{2 \cdot Z_1 \cdot Z_2}} \cdot \sin \left(- \frac{(4 \cdot Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \cdot Z_4 + (Z_1 \cdot Z_4 - Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3)^2)^{\frac{1}{2}}}{2 \cdot Z_1 \cdot Z_2} \cdot L \right)
\end{aligned} \tag{3.71}$$

Užitím zpětné Laplaceovy transformace v rovnici (3.63) jsem získala výsledný vztah (3.79). Pro zpětnou Laplaceovu transformaci jsem provedla rozklad na parciální zlomky [15]. Úpravy těchto parciálních zlomků jsou zobrazeny v rovnicích (3.72) a (3.73).

$$\begin{aligned}
T_2(s) = & \frac{s^2 \cdot t_{22} + s \cdot \frac{Z_4}{Z_2} \cdot t_0 + s \cdot \frac{Z_3}{Z_2} \cdot t_{11} - s \cdot \frac{Z_3}{Z_1} \cdot t_{22} - \frac{Z_3 \cdot Z_4}{Z_1 \cdot Z_2} \cdot t_0}{s \cdot \left(s^2 + s \cdot \frac{Z_1 \cdot Z_4 - Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3}{Z_1 \cdot Z_2} - \frac{Z_3 \cdot Z_4}{Z_1 \cdot Z_2} \right)} = \frac{A}{s} + \\
& + \frac{C \cdot \left(s + \frac{Z_1 \cdot Z_4 - Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3}{2 \cdot Z_1 \cdot Z_2} \right)}{\left(s + \frac{Z_1 \cdot Z_4 - Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3}{2 \cdot Z_1 \cdot Z_2} \right)^2 - \left(\frac{(4 \cdot Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \cdot Z_4 + (Z_1 \cdot Z_4 - Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3)^2)^{\frac{1}{2}}}{2 \cdot Z_1 \cdot Z_2} \right)^2} - \\
& - \frac{D \cdot \frac{(4 \cdot Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \cdot Z_4 + (Z_1 \cdot Z_4 - Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3)^2)^{\frac{1}{2}}}{2 \cdot Z_1 \cdot Z_2}}{\left(s + \frac{Z_1 \cdot Z_4 - Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3}{2 \cdot Z_1 \cdot Z_2} \right)^2 - \left(\frac{(4 \cdot Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \cdot Z_4 + (Z_1 \cdot Z_4 - Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3)^2)^{\frac{1}{2}}}{2 \cdot Z_1 \cdot Z_2} \right)^2}
\end{aligned} \tag{3.72}$$

$$\begin{aligned}
& s^2 \cdot t_{22} + s \cdot \frac{Z_4}{Z_2} \cdot t_0 + s \cdot \frac{Z_3}{Z_2} \cdot t_{11} - s \cdot \frac{Z_3}{Z_1} \cdot t_{22} - \frac{Z_3 \cdot Z_4}{Z_1 \cdot Z_2} \cdot t_0 = \\
& = A \cdot \left(s^2 + s \cdot \frac{Z_1 \cdot Z_4 - Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3}{Z_1 \cdot Z_2} - \frac{Z_3 \cdot Z_4}{Z_1 \cdot Z_2} \right) + C \cdot s \cdot \left(s + \frac{Z_1 \cdot Z_4 - Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3}{2 \cdot Z_1 \cdot Z_2} \right) - \\
& - D \cdot s \cdot \frac{\left(4 \cdot Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \cdot Z_4 + (Z_1 \cdot Z_4 - Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3)^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{2 \cdot Z_1 \cdot Z_2}
\end{aligned} \tag{3.73}$$

Vytknutí Laplaceova operátoru z rovnice (3.73):

$$s^0: \quad -\frac{Z_3 \cdot Z_4}{Z_1 \cdot Z_2} \cdot t_0 = -\frac{Z_3 \cdot Z_4}{Z_1 \cdot Z_2} \cdot A \quad \Rightarrow \quad A = t_0 \tag{3.74}$$

$$\begin{aligned}
s^1: \quad & \frac{Z_1 \cdot Z_4 \cdot t_0 - Z_2 \cdot Z_3 \cdot t_{22} + Z_1 \cdot Z_3 \cdot t_{11}}{Z_1 \cdot Z_2} = A \cdot \frac{Z_1 \cdot Z_4 - Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3}{Z_1 \cdot Z_2} + \\
& + C \cdot \frac{Z_1 \cdot Z_4 - Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3}{2 \cdot Z_1 \cdot Z_2} - D \cdot \frac{\left(4 \cdot Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \cdot Z_4 + (Z_1 \cdot Z_4 - Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3)^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{2 \cdot Z_1 \cdot Z_2}
\end{aligned} \tag{3.75}$$

$$s^2: \quad t_{22} = A + C \quad \Rightarrow \quad C = t_{22} - t_0 \tag{3.76}$$

Dosazením vypočtených hodnot do rovnice (3.75) jsem dostala čísel D rovnice (3.72):

$$D = \frac{Z_1 \cdot Z_4 \cdot t_0 + Z_2 \cdot Z_3 \cdot t_0 + 2 \cdot Z_1 \cdot Z_3 \cdot t_{11} - Z_1 \cdot Z_3 \cdot t_0 - Z_1 \cdot Z_4 \cdot t_{22} - Z_2 \cdot Z_3 \cdot t_{22} - Z_1 \cdot Z_3 \cdot t_{11}}{\left(4 \cdot Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \cdot Z_4 + (Z_1 \cdot Z_4 - Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3)^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \tag{3.77}$$

Dosazením hodnot ze vztahů (3.74), (3.76) a (3.77) jsem obdržela rovnici (3.78):

$$\begin{aligned}
T_2(s) = & \frac{s^2 \cdot t_{22} + s \cdot \frac{Z_4}{Z_2} \cdot t_0 + s \cdot \frac{Z_3}{Z_2} \cdot t_{11} - s \cdot \frac{Z_3}{Z_1} \cdot t_{22} - \frac{Z_3 \cdot Z_4}{Z_1 \cdot Z_2} \cdot t_0}{s \cdot \left(s^2 + s \cdot \frac{Z_1 \cdot Z_4 - Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3}{Z_1 \cdot Z_2} - \frac{Z_3 \cdot Z_4}{Z_1 \cdot Z_2} \right)} = \frac{t_0}{s} + \\
& + \frac{(t_{22} - t_0) \cdot \left(s + \frac{Z_1 \cdot Z_4 - Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3}{2 \cdot Z_1 \cdot Z_2} \right)}{\left(s + \frac{Z_1 \cdot Z_4 - Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3}{2 \cdot Z_1 \cdot Z_2} \right)^2 - \left(\frac{4 \cdot Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \cdot Z_4 + (Z_1 \cdot Z_4 - Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3)^2}{2 \cdot Z_1 \cdot Z_2} \right)^{\frac{1}{2}}}^2 - \\
& - \frac{Z_1 \cdot Z_4 \cdot t_0 + Z_2 \cdot Z_3 \cdot t_0 + 2 \cdot Z_1 \cdot Z_3 \cdot t_{11} - Z_1 \cdot Z_3 \cdot t_0 - Z_1 \cdot Z_4 \cdot t_{22} - Z_2 \cdot Z_3 \cdot t_{22} - Z_1 \cdot Z_3 \cdot t_{11}}{(4 \cdot Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \cdot Z_4 + (Z_1 \cdot Z_4 - Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3)^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \\
& \cdot \frac{(4 \cdot Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \cdot Z_4 + (Z_1 \cdot Z_4 - Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3)^2)^{\frac{1}{2}}}{2 \cdot Z_1 \cdot Z_2} \cdot \\
& \cdot \frac{\left(s + \frac{Z_1 \cdot Z_4 - Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3}{2 \cdot Z_1 \cdot Z_2} \right)^2 - \left(\frac{4 \cdot Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \cdot Z_4 + (Z_1 \cdot Z_4 - Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3)^2}{2 \cdot Z_1 \cdot Z_2} \right)^{\frac{1}{2}}}{2}^2
\end{aligned} \tag{3.78}$$

Po užití zpětné Laplaceovy transformace jsem získala výsledný vztah pro $t_2(L)$:

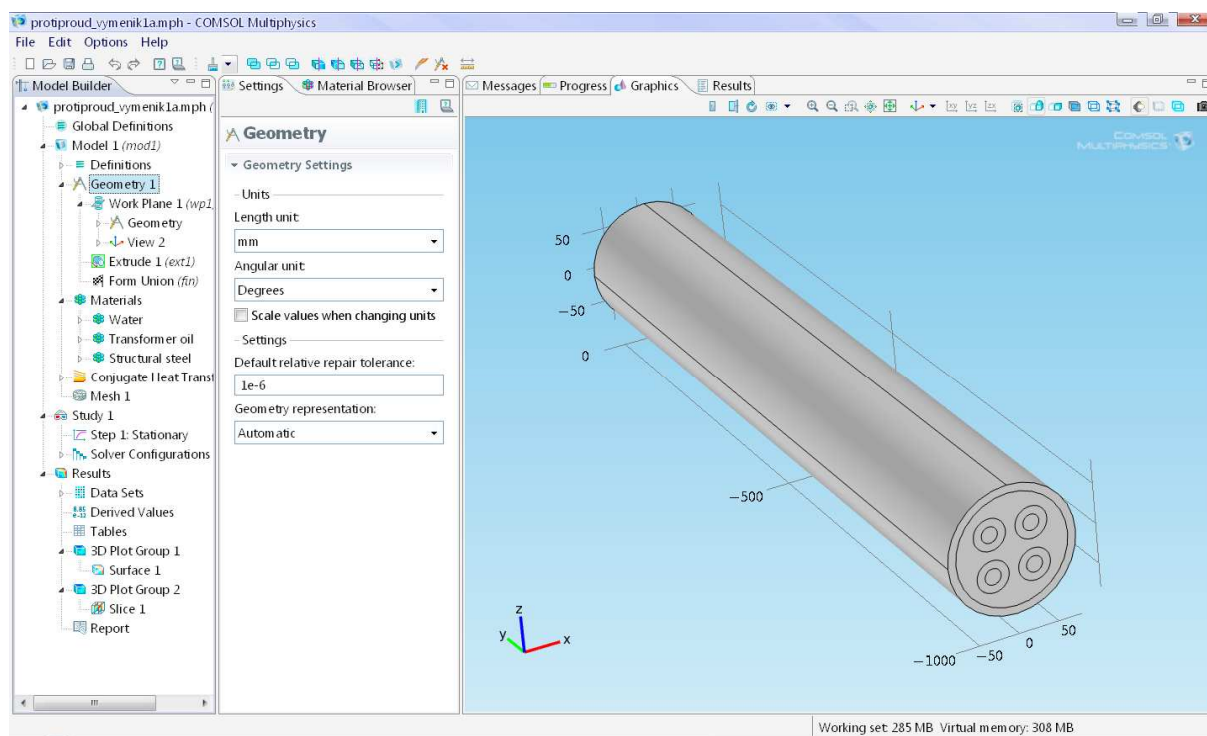
$$\begin{aligned}
t_2(L) = & t_0 + \\
& + (t_{22} - t_0) \cdot e^{-L \cdot \frac{Z_1 \cdot Z_4 - Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3}{2 \cdot Z_1 \cdot Z_2}} \cdot \cos \left(- \frac{(4 \cdot Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \cdot Z_4 + (Z_1 \cdot Z_4 - Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3)^2)^{\frac{1}{2}}}{2 \cdot Z_1 \cdot Z_2} \cdot L \right) - \\
& - \frac{Z_1 \cdot Z_4 \cdot t_0 + Z_2 \cdot Z_3 \cdot t_0 + 2 \cdot Z_1 \cdot Z_3 \cdot t_{11} - Z_1 \cdot Z_3 \cdot t_0 - Z_1 \cdot Z_4 \cdot t_{22} - Z_2 \cdot Z_3 \cdot t_{22} - Z_1 \cdot Z_3 \cdot t_{11}}{(4 \cdot Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \cdot Z_4 + (Z_1 \cdot Z_4 - Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3)^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \\
& \cdot e^{-L \cdot \frac{Z_1 \cdot Z_4 - Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3}{2 \cdot Z_1 \cdot Z_2}} \cdot \sin \left(- \frac{(4 \cdot Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \cdot Z_4 + (Z_1 \cdot Z_4 - Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3)^2)^{\frac{1}{2}}}{2 \cdot Z_1 \cdot Z_2} \cdot L \right)
\end{aligned} \tag{3.79}$$

4 PROGRAMOVÉ PROSTŘEDÍ COMSOL MULTIPHYSICS

Programové prostředí COMSOL Multiphysics je dynamicky se rozvíjející program pro modelování a simulaci fyzikálních procesů popsatelných pomocí parciálních diferenciálních rovnic, kdy základem řešení je knihovna parciálních diferenciálních rovnic popisujících vybrané úlohy. Uživatel však není omezován aplikačními režimy z této knihovny, ale má možnost díky otevřenosti systému volně definovat své vlastní úlohy. Většina úloh v programovém prostředí COMSOL Multiphysics je řešena metodou konečných prvků. Toto prostředí je určeno k modelování a k simulaci úloh z oblasti strojírenství, elektrotechniky, chemie a z různých oblastí fyziky, jako je přenos tepla, dynamika tekutin, akustika, vibrace, elektromagnetismus a šíření vln, fotonová fyzika, simulace jevů v polovodičích, strukturální mechanika, difúze a proudění porézními médii, chemické reakce, geofyzika, biologie, palivové články, polovodiče, vedení tepla, mikroelektromechanické systémy (MEMS), kvantová mechanika atd. COMSOL Multiphysics nám usnadňuje pochopení řady fyzikálních a chemických procesů díky názorné grafice, snadné změně vstupních parametrů a možnosti simulace dané úlohy. Při výpočtech dochází k automatickému přepínání mezi lineárními a nelineárními řešiči a automaticky se detekují symetrické matice systému, což výpočty podstatně urychluje. Na řešení je možné v krátké době pohledět z několika zorných úhlů a efektivně tak najít optimální variantu. Hlavními přednostmi tohoto programového prostředí jsou srozumitelnost, otevřenost, schopnost řešit více fyzikálních jevů současně (multifyzikální úlohy) a velké množství předzpracovaných příkladů. V tomto prostředí se dá celkem rychle zorientovat, nutností však je odborná znalost v oboru týkající se řešení dané problematiky [10], [20].

Pracovní prostředí se skládá ze tří částí. V levém jsou formou stromové struktury zobrazeny základní možnosti nastavení konkrétního problému. Jsou zde tyto položky: Global Definitions, Model 1, Study 1 a Results. Pomocí Global Definitions se dají přímo definovat globální proměnné a funkce. V bloku Model 1 lze definovat geometrii daného tělesa, materiál výplně pomocí knihovny materiálů, směr, rychlost proudění a teplotu v tomto tělese a síťování daného tělesa, které ovlivňuje přesnost výpočtu. V bloku Study 1 se provádí nastavení metody výpočtu, lze zde zvolit různé druhy řešení. Blok Results slouží pro nastavení různého zobrazení výsledků. Je si zde například možné zvolit přesně druh a místo řezu daným tělesem, zobrazení směru proudění, zobrazení os a další. V prostředním poli se podle volby bloku prvního pole zobrazují další možnosti těchto

bloků. Lze si zde tedy vybrat z knihovny modelů a materiálů, zadávat potřebné hodnoty nebo si vybírat další nastavení. V pravém poli se zobrazují výsledky - zprávy, průběh řešení a také vykreslení vytvořeného modelu a ostatních grafů. Nevýhodou tohoto prostředí je bohužel mnohdy vysoká náročnost na paměť a procesor kvůli složitým výpočetním operacím a vykreslování grafů. Na Obr. 6 je zobrazena ukázka tohoto prostředí.

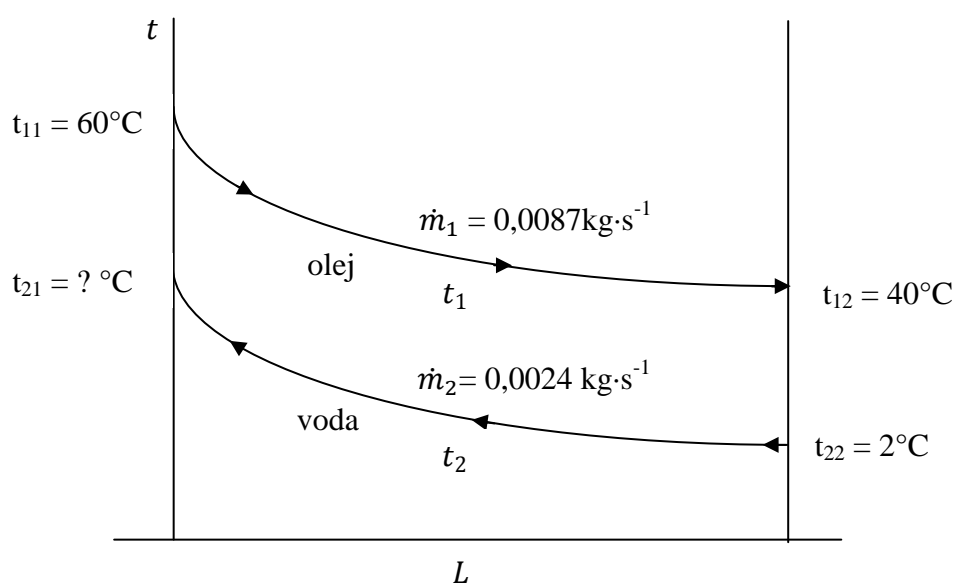


Obr. 6 Ukázka programového prostředí COMSOL Multiphysics

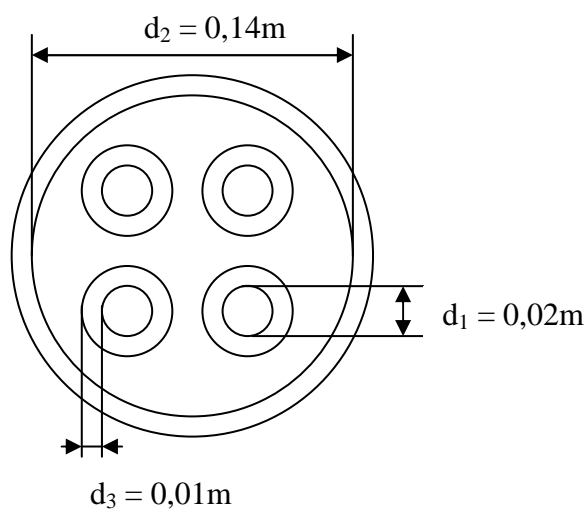
II. PRAKTICKÁ ČÁST

5 ŘEŠENÍ KONKRÉTNÍ ÚLOHY PROTIPROUDÉHO VÝMĚNÍKU

V protiproudém svazkovém výměníku tepla se ochladí 0,0087kg/s oleje z teploty 60°C na teplotu 40°C vodou o vstupní teplotě 2°C a průtoku 0,0024kg/s. Výměník se skládá ze čtyř trubek o vnitřním průměru 2cm a tloušťce stěny 1cm uzavřených v plášti o vnitřním průměru 14cm. Olej protéká vnitřními trubkami o tepelné vodivosti 0,15W/m·K. Voda proudí mezitrubkovým prostorem. Měrná tepelná kapacita oleje při střední teplotě je 1,89kJ/kg·K. Vypočítejte teplotu vody na výstupu a délku výměníku.



Obr. 7 Schéma průběhu teplot v protiproudém výměníku



Obr. 8 Pohled na zadaný svazkový výměník

Ze zadání je známo:

- Teplota oleje: na vstupu $t_{11} = 60^{\circ}\text{C}$
na výstupu $t_{12} = 40^{\circ}\text{C}$
- Teplota vody: na vstupu $t_{22} = 2^{\circ}\text{C}$
- Vnitřní průměr čtyř menších trubek uvnitř potrubí $d_1 = 0,02\text{m}$
- Tloušťka stěny trubek $d_3 = 0,01\text{m} \Rightarrow$ vnější průměr trubek $= 0,04\text{m}$
- Vnitřní průměr potrubí $d_2 = 0,14\text{m}$
- Hmotnostní průtok oleje $\dot{m}_1 = 0,0087\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$
- Hmotnostní průtok vody $\dot{m}_2 = 0,0024\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$

Hodnoty z tabulek (pro teplotu 20°C) [14]:

- Měrná tepelná kapacita oleje $cp_1 = 1,89\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
- Měrná tepelná kapacita vody $cp_1 = 4,18\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
- Hustota oleje $\rho_1 = 866\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$
- Hustota vody $\rho_2 = 998\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$
- Kinematická viskozita oleje $\nu_1 = 3,65\cdot 10^{-5}\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$
- Kinematická viskozita vody $\nu_2 = 1,007\cdot 10^{-6}\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$
- Dynamická viskozita oleje $\eta_1 = 31,6\cdot 10^{-3}\text{Pa}\cdot\text{s}$
- Dynamická viskozita vody $\eta_2 = 1\cdot 10^{-3}\text{Pa}\cdot\text{s}$
- Součinitel tepelné vodivosti oleje $\lambda_1 = 0,15\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
- Součinitel tepelné vodivosti vody $\lambda_2 = 0,6\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
- Součinitel tepelné vodivosti ocele $\lambda_3 = 47\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
- Součinitel objemové roztažnosti oleje $\beta_1 = 0,75\cdot 10^{-3}\text{K}^{-1}$
- Součinitel objemové roztažnosti vody $\beta_2 = 0,18\cdot 10^{-3}\text{K}^{-1}$

5.1 Výpočet vzorové úlohy

Vnitřní průřez 4 menších trubek lze vypočítat podle vztahu (5.1) [16]:

$$S_1 = \left(\frac{\pi \cdot d_1^2}{4} \cdot n \right) \quad (5.1)$$

Po dosazení hodnot uvedených v zadání se průřez 4 menších trubek uvnitř potrubí rovná:

$$S_1 = \left(\frac{\pi \cdot 0,02^2}{4} \cdot 4 \right) = 1,257 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \quad (5.2)$$

Výpočet průřezu potrubí se vypočítá podle vztahu (5.3) [16]:

$$S_2 = \left(\frac{\pi \cdot d_2^2}{4} \right) - \left(\frac{\pi \cdot (d_1 + 2 \cdot d_3)^2}{4} \cdot n \right) \quad (5.3)$$

Po dosazení hodnot uvedených v zadání se průřez potrubí rovná:

$$S_2 = \left(\frac{\pi \cdot 0,14^2}{4} \right) - \left(\frac{\pi \cdot (0,02 + 2 \cdot 0,01)^2}{4} \cdot 4 \right) = 0,01037 \text{ m}^2 \quad (5.4)$$

Tepelný tok výměníku lze vyjádřit z tepelné bilance pomocí vztahů (5.5) a (5.6):

$$\dot{Q} = \dot{m}_1 \cdot cp_1 \cdot \Delta t_1 \quad (5.5)$$

$$\dot{Q} = \dot{m}_2 \cdot cp_2 \cdot \Delta t_2 \quad (5.6)$$

Po dosazení hodnot uvedených v zadání do vztahu (5.5) se potom tepelný tok rovná:

$$\dot{Q} = 0,0087 \cdot 1890 \cdot (60 - 40) = 328,86 \text{ W} \quad (5.7)$$

Teplota vody na výstupu se vypočítá dosazením zadaných a vypočtených hodnot do rovnice (5.6):

$$328,86 = 0,0024 \cdot 4180 \cdot (t_{21} - 2) \quad \Rightarrow \quad t_{21} = 34,8^\circ\text{C} \quad (5.8)$$

Pro výpočet středního logaritmického rozdílu teplot se využívá vztahu (5.11) [1]:

$$\Delta t_{ls} = \frac{(t_{11} - t_{21}) - (t_{12} - t_{22})}{\ln \frac{(t_{11} - t_{21})}{(t_{12} - t_{22})}} \quad (5.11)$$

Dosazením hodnot do rovnice (5.11) lze získat hodnotu středního logaritmického rozdílu teplot:

$$\Delta t_{ls} = \frac{(60 - 34,8) - (40 - 2)}{\ln \frac{(60 - 34,8)}{(40 - 2)}} = 31,16 \text{ °C} \quad (5.12)$$

Pro výpočet součinitele přestupu tepla mezi stěnami trubek a olejem bylo nutné nejdříve vypočítat hodnotu Reynoldsova kritéria, pomocí něhož se výpočet rozdělí do různých oblastí. Pro zjištění, v jakém režimu proudění se tato tekutina nachází (laminární, přechodná, turbulentní), se využívá se rozdílných empiricky zjištěných vztahů pro výpočet Nusseltova kritéria, pomocí něhož lze spočítat součinitele přestupu tepla [4].

Pro výpočet Reynoldsova kritéria se využívá vztahu (5.13):

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu} \quad (5.13)$$

Rychlost proudící kapaliny se vypočítá podle vztahu (5.14):

$$v = \frac{\dot{m}}{\rho \cdot S} \quad (5.14)$$

Po dosazení hodnot uvedených v zadání do vztahu (5.14) se potom tedy rychlost proudícího oleje rovná:

$$v_1 = \frac{0,0087}{866 \cdot 1,257 \cdot 10^{-3}} = 0,008 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (5.15)$$

Po dosazení hodnot do vztahu (5.13) získáme hodnotu Reynoldsova kritéria:

$$Re = \frac{0,008 \cdot 0,02}{3,65 \cdot 10^{-5}} = 4,384 \quad (5.16)$$

Je dáno, že pokud je hodnota Reynoldsova kritéria v intervalu $Re < 2300$, pak se jedná o laminární proudění, pro které platí vztah (5.18) [4]:

$$Nu = 0,17 \cdot Re^{0,33} \cdot Pr^{0,43} \cdot Gr^{0,10} \quad (5.17)$$

Pro výpočet Grasshofova kritéria se využívá vztahu (5.19) [4]:

$$Gr = \frac{g \cdot d^3 \cdot \beta}{\nu^2} \cdot \Delta t \quad (5.18)$$

Pro výpočet Prandtlova kritéria se využívá vztahu (5.20) [4]:

$$Pr = \frac{cp \cdot \eta}{\lambda} \quad (5.19)$$

Po dosazení hodnot do rovnic (5.19) a (5.20) jsem získala hodnoty Grasshofova a Prandtlova kritéria, které jsem dále využila pro výpočet Nusseltova kritéria ve vztahu (5.15):

$$Gr = \frac{9,81 \cdot 0,02^3 \cdot 0,75 \cdot 10^{-3}}{(3,65 \cdot 10^{-5})^2} \cdot (50 - 18,4) = 1396,12 \quad (5.20)$$

$$Pr = \frac{1890 \cdot 31,6 \cdot 10^{-3}}{0,15} = 398,16 \quad (5.21)$$

Po dosazení hodnot (5.17), (5.21) a (5.22) do vztahu (5.18) je hodnota Nusseltova kritéria:

$$Nu = 0,17 \cdot 4,384^{0,33} \cdot 398,16^{0,43} \cdot 1396,12^{0,10} = 7,5 \quad (5.22)$$

Pro výpočet součinitele přestupu tepla mezi stěnami trubek a olejem je nutno použít vztah (5.24):

$$\alpha = \frac{Nu \cdot \lambda}{d} \quad (5.23)$$

Po dosazení hodnot do vztahu (5.23) jsem získala hodnotu součinitele přestupu tepla mezi stěnami trubek a olejem:

$$\alpha_1 = \frac{7,5 \cdot 0,15}{0,02} = 56,25 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1} \quad (5.24)$$

Pro výpočet součinitele přestupu tepla mezi stěnami trubek a vodou jsem postupovala stejným způsobem jako v případě výpočtu α_1 součinitele přestupu tepla mezi stěnami trubek a olejem. Nejdříve jsem musela vypočítat hodnotu Reynoldsova kritéria.

Jelikož voda prochází mezitrubkovým prostorem, je nutno spočítat tzv. ekvivalentní průměr, který je dán vztahem (5.26) [1]:

$$d_{ekv} = \frac{D^2 - n \cdot d^2}{D + n \cdot d} \quad (5.25)$$

Dosazením hodnot do vztahu (5.26) dostanu hodnotu ekvivalentního průměru, který jsem dále použila pro výpočet Reynoldsova kritéria.

$$d_{ekv} = \frac{0,14^2 - 4 \cdot (0,02 + 2 \cdot 0,01)^2}{0,14 + 4 \cdot (0,02 + 2 \cdot 0,01)} = 0,044m \quad (5.26)$$

Po dosazení hodnot uvedených v zadání do vztahu (5.14) se rychlost proudící vody rovná:

$$v_2 = \frac{0,0024}{998 \cdot 0,01037} = 0,00023 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (5.27)$$

Dosazením hodnot do vztahu (5.13) získám hodnotu Reynoldsova kritéria:

$$\text{Re} = \frac{0,00023 \cdot 0,044}{1,007 \cdot 10^{-6}} = 10,05 \quad (5.28)$$

Jelikož je hodnota Reynoldsova kritéria v intervalu $\text{Re} < 2300$, jedná se o laminární proudění, pro které platí vztah (5.18). Po dosazení hodnot do rovnic (5.19) a (5.20) jsem získala hodnoty Grasshofova a Prandtlova kritéria, které jsem dále využila pro výpočet Nusseltova kritéria ve vztahu (5.18):

$$\text{Gr} = \frac{9,81 \cdot 0,044^3 \cdot 0,18 \cdot 10^{-3}}{(1,007 \cdot 10^{-6})^2} \cdot (50 - 18,4) = 468735324 \quad (5.29)$$

$$\text{Pr} = \frac{4180 \cdot 1 \cdot 10^{-3}}{0,6} = 6,97 \quad (5.30)$$

Po dosazení hodnot (5.28), (5.29) a (5.30) do vztahu (5.18) jsem získala hodnotu Nusseltova kritéria:

$$\text{Nu} = 0,17 \cdot 10,05^{0,33} \cdot 6,97^{0,43} \cdot 468735324^{0,10} = 3,898 \quad (5.31)$$

Po dosazení hodnot do vztahu (5.23) jsem získala hodnotu součinitele přestupu tepla mezi stěnami trubek a vodou:

$$\alpha_2 = \frac{3,898 \cdot 0,6}{0,044} = 53,155 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1} \quad (5.32)$$

Délkový součinitel prostupu tepla lze určit dosazením hodnot do vztahu (2.4) [1]:

$$k_L = \frac{\pi}{\frac{1}{56,25 \cdot 0,02} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{47} \cdot \ln \frac{0,044}{0,02} + \frac{1}{53,155 \cdot 0,044}} = 2,37 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1} \quad (5.33)$$

Pro výpočet délky výměníku jsem použila vztah (5.34):

$$\dot{Q} = k_L \cdot L \cdot \Delta t_{ls} \cdot n \quad (5.34)$$

Dosazením zadanych a vypočtených hodnot do rovnice (5.34) jsem získala hodnotu délky výměníku:

$$L = \frac{328,86}{2,371 \cdot 31,16 \cdot 4} = 1,11 \text{ m} \quad (5.35)$$

5.2 Ověření odvozených rovnic pro izolovaný výměník na vzorové úloze

Provedla jsem ověření odvozených diferenciálních rovnic popisujících průběh teplot ohřívání a ochlazování tekutiny v izolovaném protiproudém výměníku (3.40) a (3.41). Nejprve jsem do rovnic dosadila délku $L=0\text{m}$, abych ověřila hodnotu vstupních středních teplot oleje a vody. Toto je vypočteno v rovnicích (5.36) a (5.37), kde za hodnoty Z_1 , Z_2 a Z_3 byly dosazeny hodnoty vypočtené ze vztahů (3.3), (3.4) a (3.5).

$$t_1(0) = \frac{-16,44 \cdot 60 - 10,03 \cdot 2 - 10,03 \cdot e^{\frac{(-0(-16,44-10,03)0)}{-16,44-10,03}} \cdot 60 + 10,03 \cdot e^{\frac{(-0(-16,44-10,03)0)}{-16,44-10,03}} \cdot 2}{-16,44 - 10,03} = 60^\circ\text{C} \quad (5.36)$$

$$t_2(0) = \frac{-16,44 \cdot 60 - 10,03 \cdot 2 + 16,44 \cdot e^{\frac{(-0(-16,44-10,03)0)}{-16,44-10,03}} \cdot 60 - 16,44 \cdot e^{\frac{(-0(-16,44-10,03)0)}{-16,44-10,03}} \cdot 2}{-16,44 - 10,03} = 2^\circ\text{C} \quad (5.37)$$

Z výsledků rovnic (5.36) a (5.37) je patrné, že hodnoty odpovídají.

Následně jsem do rovnic dosadila délku celého výměníku $L=1,11\text{m}$, abych ověřila hodnotu výstupních středních teplot oleje a vody. Toto je vypočteno v rovnicích (5.38) a (5.39)

$$t_1(1,11) = \frac{-16,44 \cdot 60 - 10,03 \cdot 2 - 10,03 \cdot e^{\frac{(-10,58(-16,44-10,03)1,11)}{-16,44-10,03}} \cdot 60 + 10,03 \cdot e^{\frac{(-10,58(-16,44-10,03)1,11)}{-16,44-10,03}} \cdot 2}{-16,44 - 10,03} =$$

$$= 41,36^\circ\text{C}$$
(5.38)

$$t_2(1,11) = \frac{-16,44 \cdot 60 - 10,03 \cdot 2 + 16,44 \cdot e^{\frac{(-10,58(-16,44-10,03)1,11)}{-16,44-10,03}} \cdot 60 - 16,44 \cdot e^{\frac{(-10,58(-16,44-10,03)1,11)}{-16,44-10,03}} \cdot 2}{-16,44 - 10,03} =$$

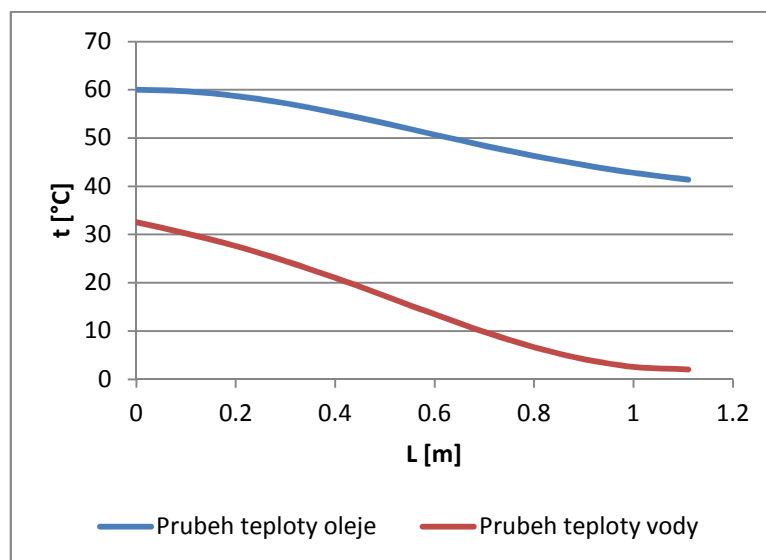
$$= 33,55^\circ\text{C}$$
(5.39)

Z výsledků rovnic (5.38) a (5.39) je patrné, že hodnota teploty oleje vypočtená řešením diferenciální rovnice se liší od hodnot v příkladu o $1,36^\circ\text{C}$ a hodnota teploty vody o $1,25^\circ\text{C}$. Toto může být způsobeno zaokrouhlováním čísel.

Tabulka 1 Zobrazení změny teploty oleje a vody v izolovaném výměníku

L [m]	t_1 [$^\circ\text{C}$]	t_2 [$^\circ\text{C}$]
0	60	33,55
0,1	59,6663	30,2212
0,2	58,6954	27,5896
0,3	57,1731	24,4908
0,4	55,2282	21,0004
0,5	53,015	17,2549
0,6	50,6929	13,4487
0,7	48,4077	9,8212
0,8	46,2782	6,6335
0,9	44,3876	4,1383
1	42,782	2,5469
1,11	41,3595	2

V tabulce 1 je zobrazena závislost délky L v izolovaném výměníku na teplotě oleje t_1 a teplotě vody t_2 . Z tabulky je patrné, že dojde k ochlazení oleje o $19,65^\circ\text{C}$ a ohřátí vody o $30,55^\circ\text{C}$ na délce 1,11m. Tyto hodnoty jsou zobrazeny v grafu na obrázku 9.



Obr. 9 Zobrazení průběhu teploty oleje a vody v izolovaném výměníku

5.3 Ověření odvozených rovnic pro neizolovaný výměník na vzorové úloze

Provedla jsem ověření odvozených diferenciálních rovnic popisujících průběh teplot ohřívané a ochlazované tekutiny v neizolovaném protiproudém výměníku (3.71) a (3.79). Nejprve bylo nutné vypočítat hodnotu délkového součinitele prostupu tepla k_{L0} , tu jsem vypočítala pomocí vztahu (2.4).

Pro výpočet tohoto vztahu bylo zapotřebí vyhledat v tabulkách hodnoty vzduchu (pro teplotu 20°C) [14]:

- Měrná tepelná kapacita $cp_4 = 1,01 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
- Hustota $\rho_4 = 1,28 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- Kinematická viskozita $\nu_4 = 1,33 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
- Dynamická viskozita $\eta_4 = 1,74 \cdot 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$
- Součinitel tepelné vodivosti $\lambda_4 = 0,0252 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
- Součinitel objemové roztažnosti oleje $\beta_1 = 0,75 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$
- Součinitel objemové roztažnosti vody $\beta_2 = 0,18 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$

Ze vztahů (5.18) a (5.19) byly vypočteny hodnoty Prandtlova a Grasshofova kritéria, které byly dosazeny do vztahu (5.40) pro výpočet přestupu tepla při volném proudění bez fázové přeměny [1].

$$Nu = C \cdot (Gr \cdot Pr)^n \quad (5.40)$$

Tabulka 2 Konkrétní vyjádření rovnice (5.40) je dáno hodnotami konstanty C a exponentu n [1]

$Gr \cdot Pr$	C	n
$<10^3$	0,5	0
$\langle 1 \cdot 10^{-3}; 5 \cdot 10^2 \rangle$	1,18	1/8
$\langle 5 \cdot 10^2; 2 \cdot 10^7 \rangle$	0,54	1/4
$\langle 2 \cdot 10^7; 1 \cdot 10^{13} \rangle$	0,135	1/3

Hodnotu Nusseltova kritéria ovlivňuje součin Grasshofova a Prandtlova kritéria, jak je zobrazeno v tabulce 2.

Dosazení hodnot do vztahu (5.40):

$$Nu = 1,18 \cdot (75,86)^{\frac{1}{8}} = 2,03 \quad (5.41)$$

Po dosazení hodnot do vztahu (5.23) jsem získala hodnotu součinitele přestupu tepla mezi stěnou potrubí a okolním vzduchem:

$$\alpha_4 = \frac{2,03 \cdot 0,0252}{0,16} = 0,319 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1} \quad (5.42)$$

Délkový součinitel prostupu tepla jsem vypočítala dosazením zadáných a vypočtených hodnot do rovnice (2.4):

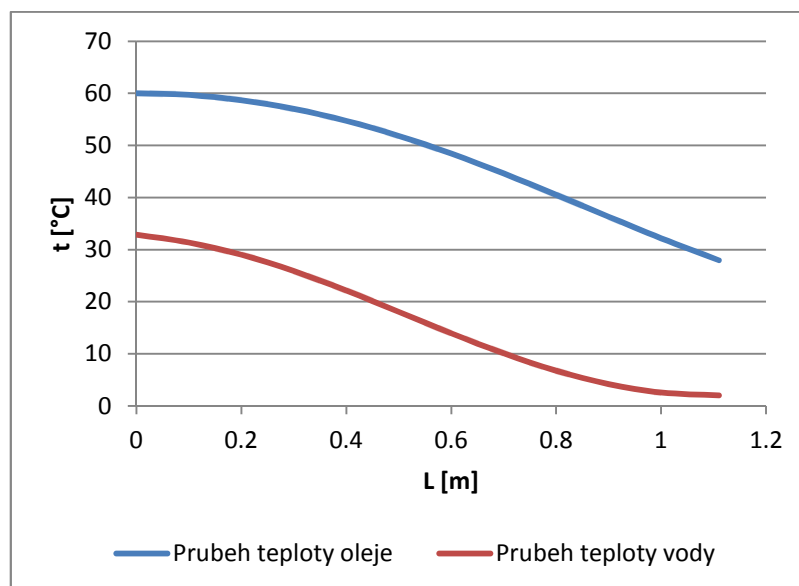
$$k_{L0} = \frac{\pi}{\frac{1}{53,16 \cdot 0,044} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{47} \cdot \ln \frac{0,16}{0,044} + \frac{1}{0,319 \cdot 0,16}} = 0,1535 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1} \quad (5.43)$$

Po vypočtení délkového součinitele prostupu tepla jsem provedla ověření odvozených diferenciálních rovnic pro neizolovaný výměník (3.71) a (3.79), kde za hodnoty Z_1 , Z_2 , Z_3 a Z_4 byly dosazeny hodnoty vypočtené ze vztahů (3.44) až (3.47). Výsledné hodnoty teplot pro různou délku výměníku jsou zobrazeny v tabulce 3.

Tabulka 3 Zobrazení změny teploty oleje a vody v neizolovaném výměníku

L [m]	t_1 [°C]	t_2 [°C]
0	60	32,8495
0,1	59,664	31,3464
0,2	58,6591	29,0069
0,3	56,9963	25,8659
0,4	54,6996	22,1266
0,5	51,8134	18,05
0,6	48,4093	13,9293
0,7	44,5914	10,0627
0,8	40,4974	6,7286
0,9	36,294	4,1643
1	32,1663	2,5506
1,11	27,9373	2

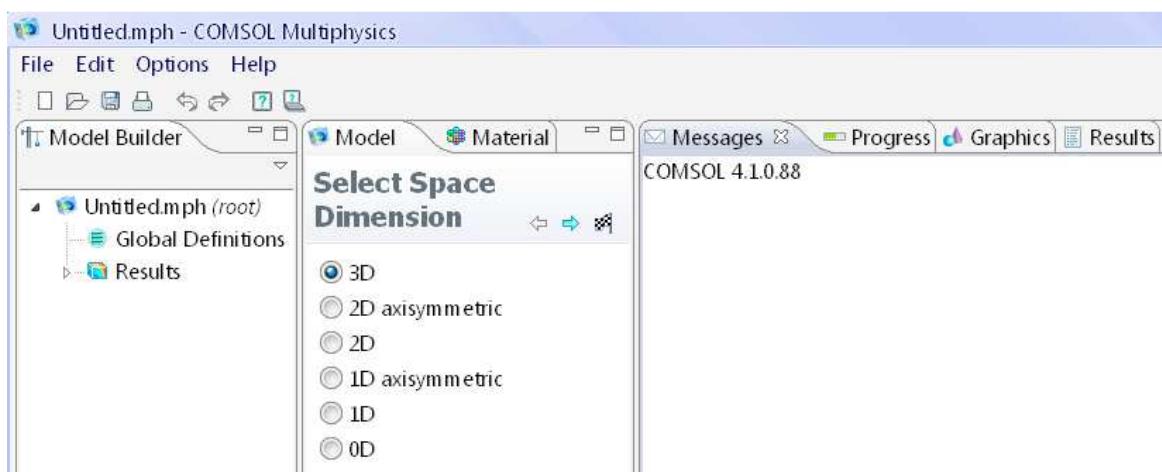
V tabulce 3 je zobrazena závislost délky L v neizolovaném výměníku na teplotě oleje t_1 a teplotě vody t_2 . Z tabulky je patrné, že dojde k ochlazení oleje o 32,16°C a ohřátí vody o 30,85°C na délce 1,11m. Tyto hodnoty jsou zobrazeny v grafu na obrázku 10.



Obr. 10 Zobrazení průběhu teploty oleje a vody v neizolovaném výměníku

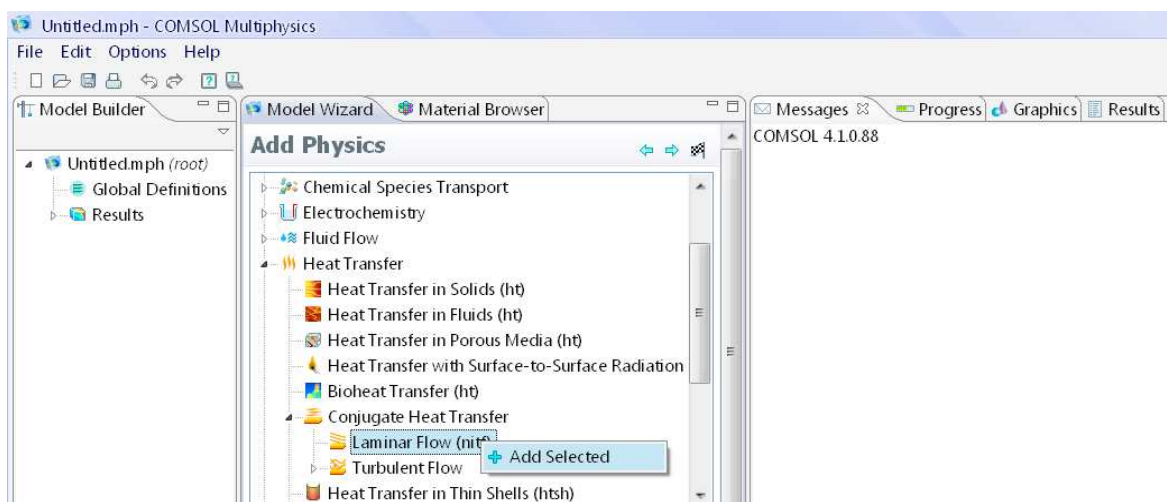
6 SIMULACE ÚLOHY V PROSTŘEDÍ COMSOL MULTIPHYSICS

Po spuštění simulačního programu je nutné nejprve vybrat dimenzi, ve které se má modelování dané úlohy provádět.



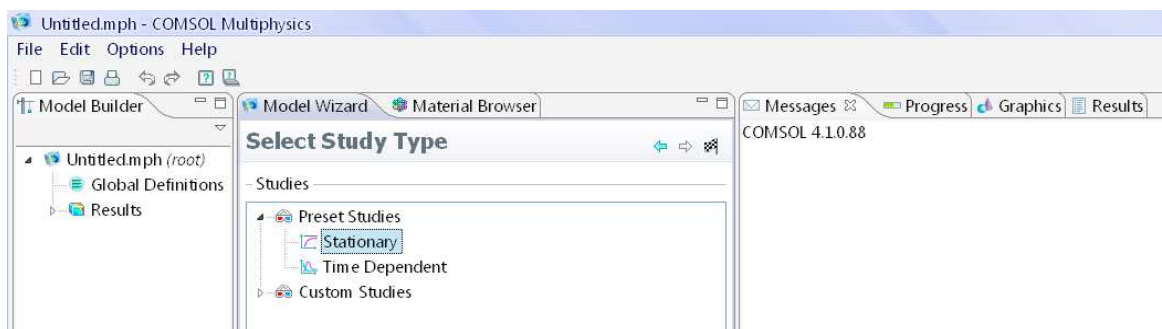
Obr. 11 Okno programu COMSOL Multiphysics po spuštění - výběr dimenze

Pro svoji úlohu jsem řešila dimenzi 3D. Po zvolení tlačítka šipky jsem se dostala k dalšímu nastavení, což byl výběr fyziky.



Obr. 12 Okno programu COMSOL Multiphysics - výběr fyziky

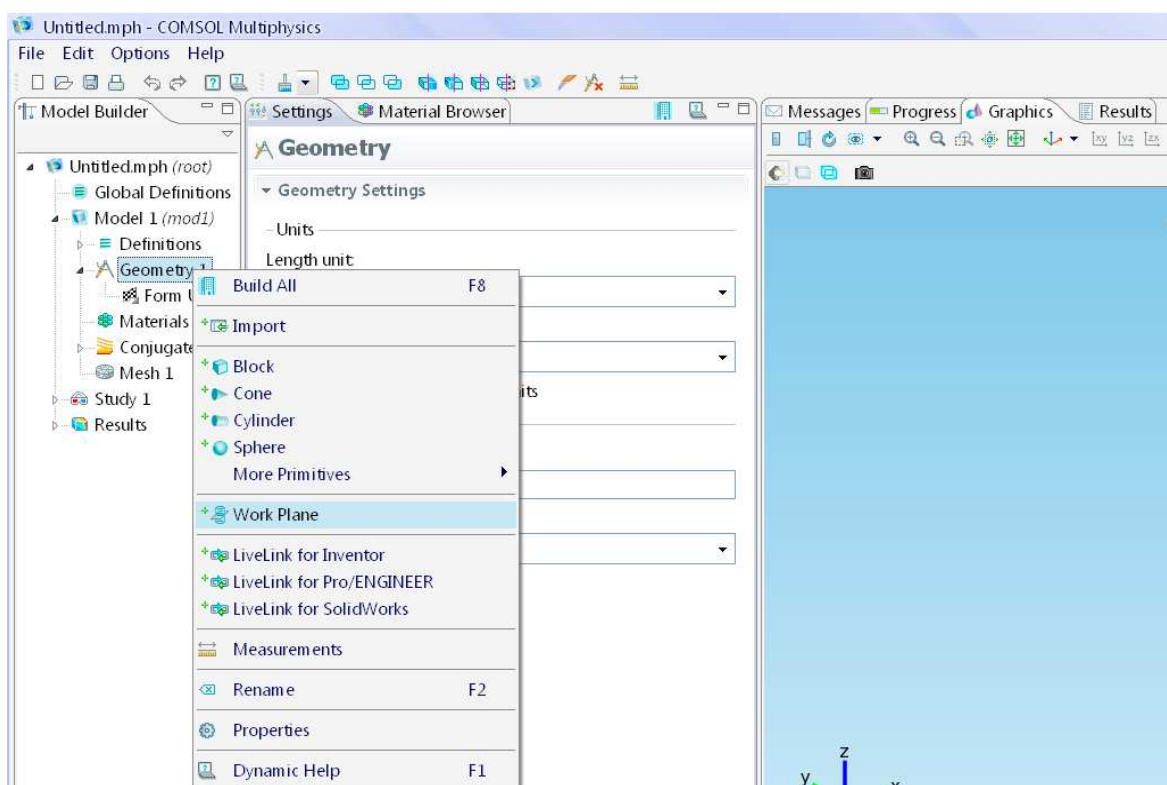
Zvolila jsem Heat Transfer – Conjugate Heat Transfer – Laminar Flow (nitf) a přes pravé tlačítko myši (Add Selected) jsem přidala fyziku do programu. Po dalším zvolení tlačítka šipky jsem se dostala k poslednímu kroku základního nastavení – výběr typu výpočtu (Study Type).



Obr. 13 Okno programu COMSOL Multiphysics - výběr typu výpočtu

Pro řešení úlohy jsem zvolila režim Stationary, protože v tomto případě není výměník závislý na čase. Nyní jsou provedeny všechny kroky základního nastavení a lze tedy přistoupit k samotnému modelování.

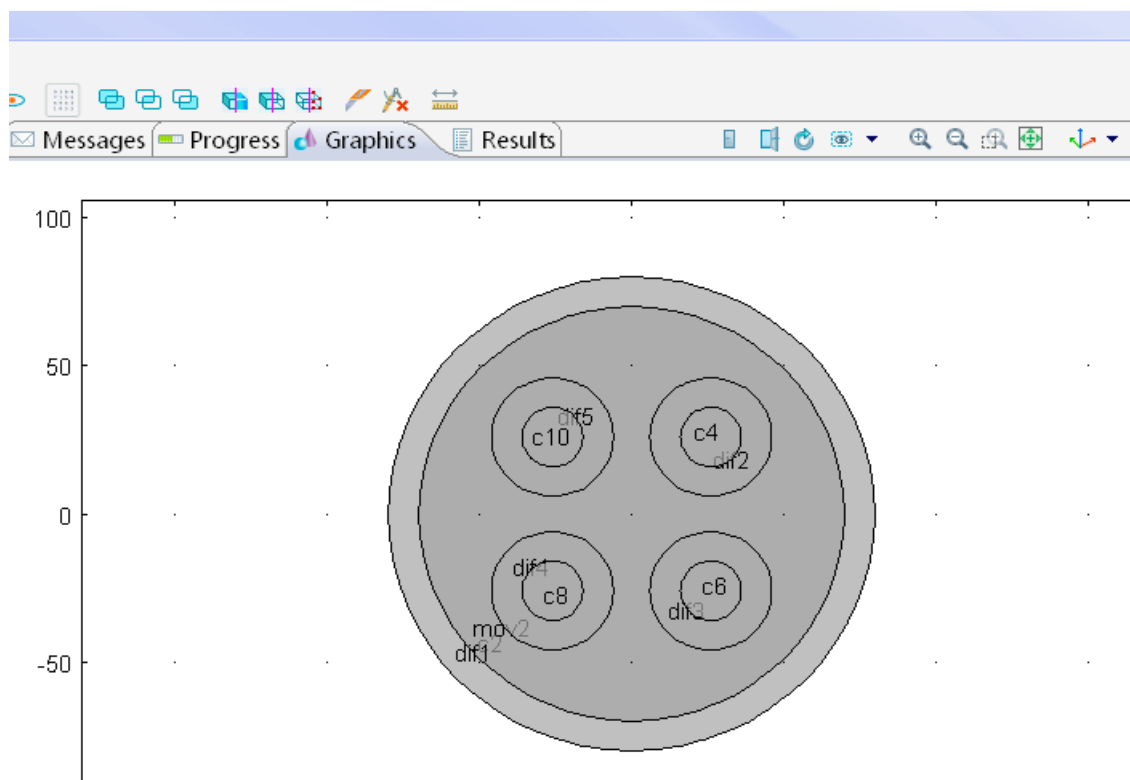
Nejdříve jsem si v programu Comsol nakreslila geometrii tohoto výměníku. Volbou Model 1 a poté Geometry 1 jsem z nabídky vybrala pracovní rovinu (Work Plane).



Obr. 14 Okno programu COMSOL Multiphysics - výběr pracovní roviny

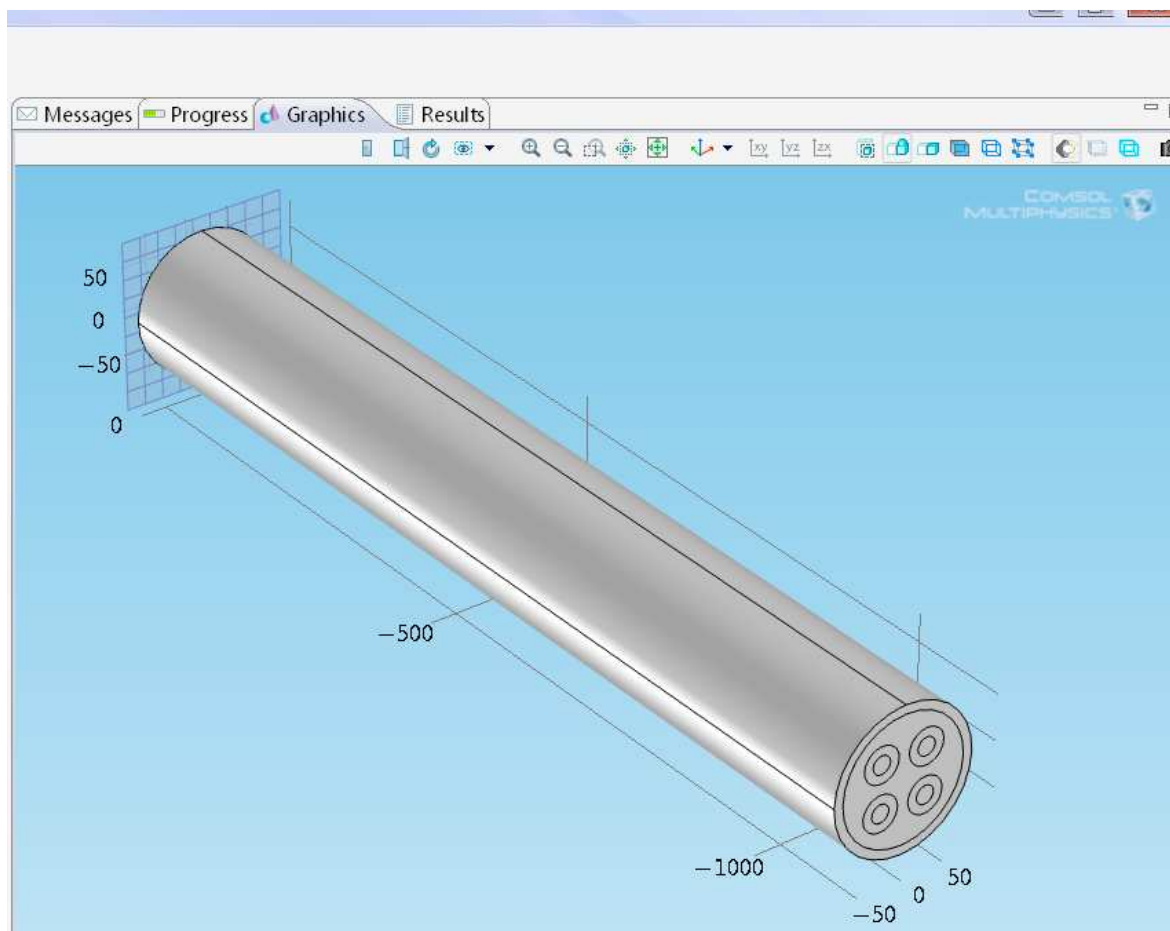
Z nabídky Work Plane jsem přešla na kreslení vlastní geometrie daného výměníku. Z nabídky Geometry jsem vybrala kruh (Circle) a nastavila jeho rozměry. Poté jsem

pomocí výběru funkcí rozdíl (Difference) a odstranění subjektů (Delete Entities) odstranila překrývající se objekty, které byly navíc. Stejným postupem jsem pokračovala i při kreslení kruhů, které budou představovat menší trubky uvnitř výměníku, jak je znázorněno níže na obrázku 15.



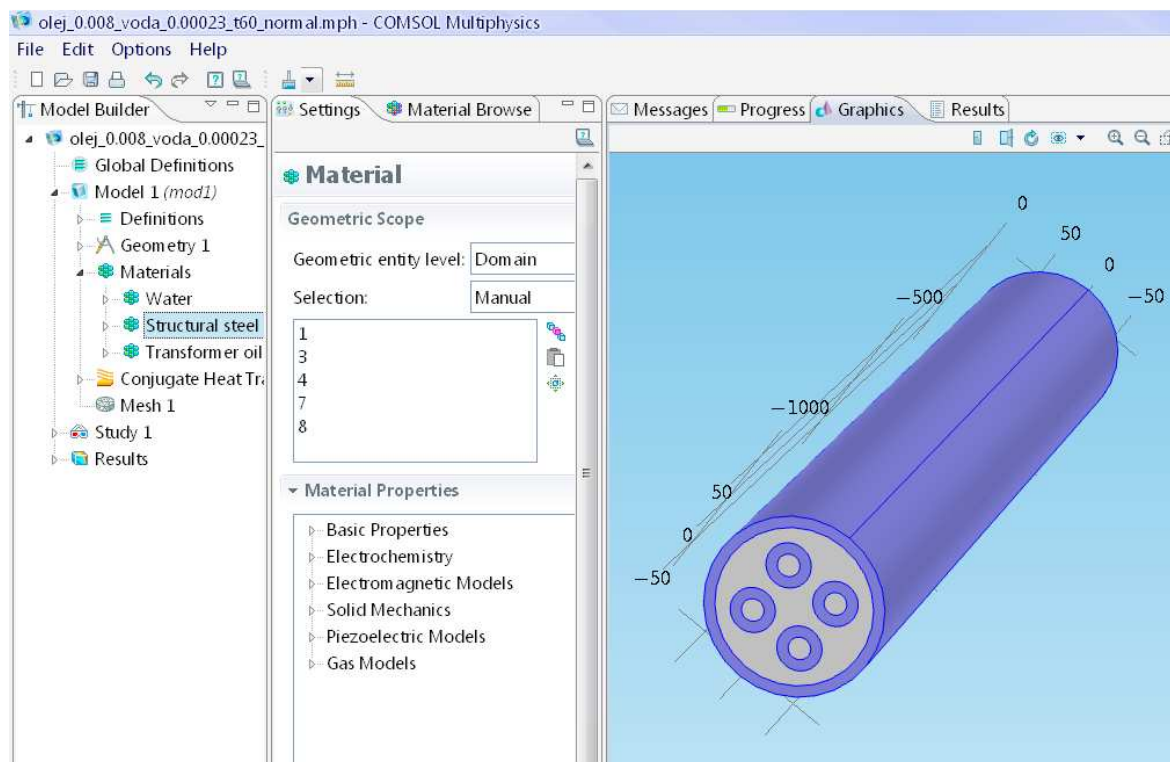
Obr. 15 Prostředí aplikace COMSOL Multiphysics – zobrazení nakreslené geometrie (v souladu s Obr. 8)

Následně bylo nutné zadat délku výměníku, proto jsem pomocí pravého tlačítka zvolila volbu Geometry a vybrala možnost vytažení (Extrude), kde jsem zadala požadovanou hodnotu. Jak tento výměník vypadá, je zobrazeno níže na obrázku 16.



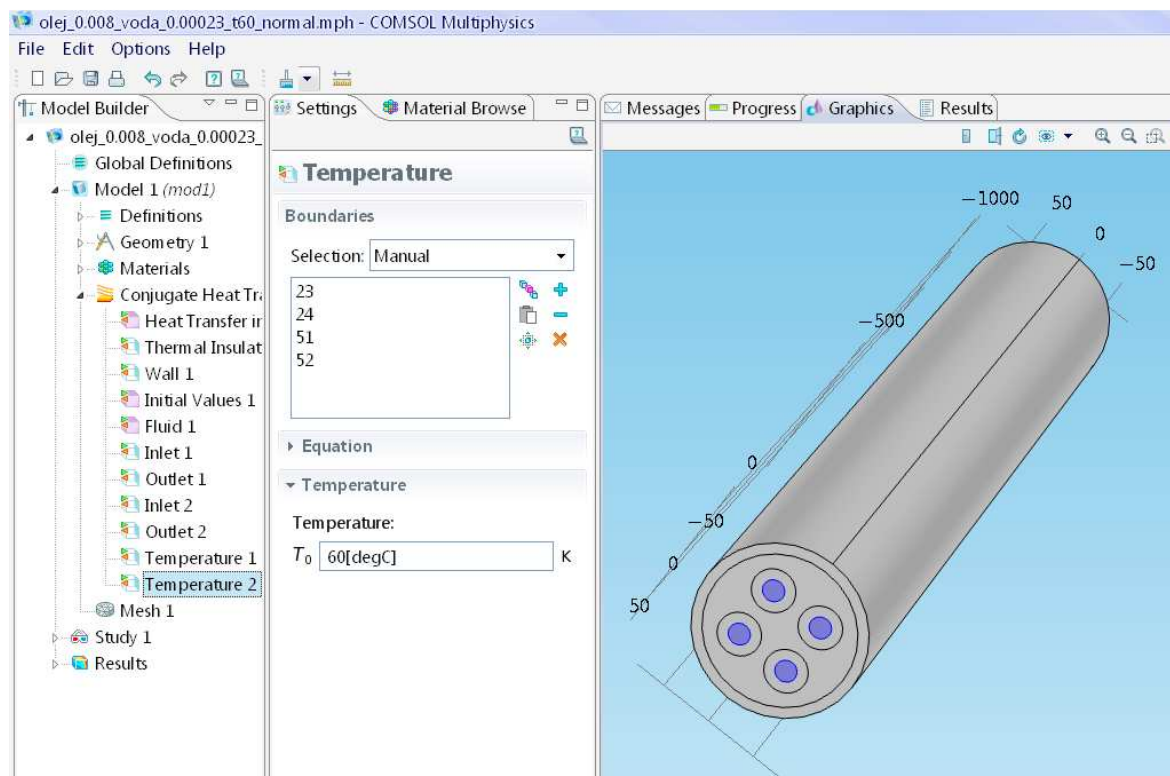
Obr. 16 Prostředí aplikace COMSOL Multiphysics – zobrazení nakresleného tvaru výměníku

Po nakreslení tvaru výměníku jsem vybrala materiál výplně jednotlivých částí (Model 1 – Materials). Z nabídky Materials jsem vybrala Open Material Browser, čímž se mi otevřela knihovna materiálů. Zde jsem si přímo vyhledala vhodný materiál a označila části, které jím budou vyplněny. Pro výplň vnitřní části výměníku jsem zvolila vodu (Water), která bude obtékat menší trubky. Pro výplň vnitřní části menších trubek uvnitř výměníku byl zvolen transformátorový olej (Transformer oil). Jako materiál těchto trubek jsem zvolila konstrukční ocel (Structural steel). Výběr tohoto materiálu je zobrazen na obrázku 17.



Obr. 17 Prostředí aplikace COMSOL Multiphysics – zvolení konstrukční ocele pro výplň materiálu trubek

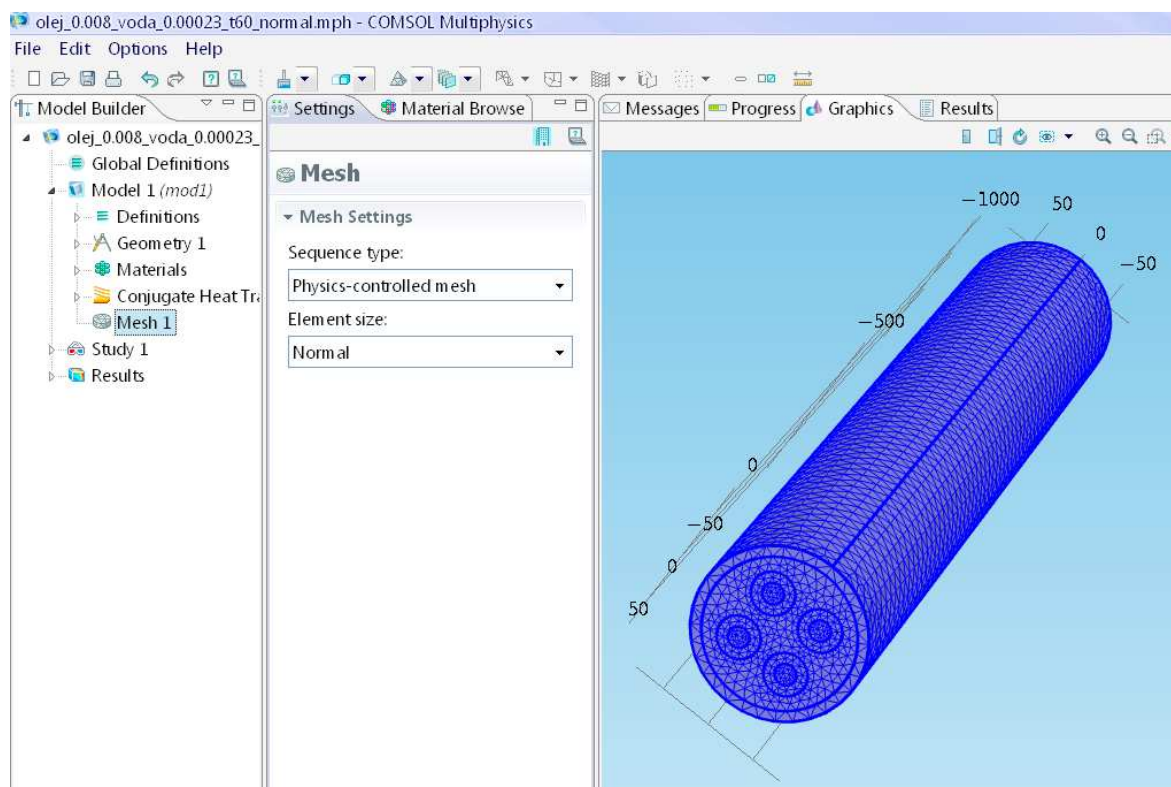
Následně bylo nutné nastavit podmínky tepelné výměny, proto jsem zvolila blok Conjugate Heat Transfer. Zadala jsem zde vstupy a výstupy laminárního proudění, rychlosti proudění a počáteční teploty vody i oleje na začátku této tepelné výměny. Na obrázku 18 je ukázáno nastavení vstupní teploty vody ve vnitřních trubkách.



Obr. 18 Prostředí aplikace COMSOL Multiphysics – nastavení vstupní teploty vody ve vnitřních trubkách

V dalším kroku bylo nutné nastavit síť tohoto výměníku. To jsem provedla pomocí volby Mesh 1. Zde jsem si z možnosti velikosti prvku (Element size) postupně vybírala hustotu sítě. Nejdříve jsem si vybrala extra hrubou (Extra coarse). Pro toto nastavení byla síť sice vytvořena, bohužel ale po spuštění fáze výpočtu program začal vytvářet další síť, čímž se spustila chyba řešení a program se ukončil. Proto jsem vybrala hustší síť (Coarser). Pro toto síťování již simulace proběhla, ale pro přesnější výsledky jsem síťování raději ještě zpřesnila. Pro konečnou simulaci úlohy, jsem vybrala síť Normal. Ukázka tohoto síťování je na obrázku 19.

Platí, že čím hustší síťování bude zvoleno, tím bude dosaženo přesnějších výsledků. Jak už ale bylo v teoretické části řečeno, je zde problém s tím, že čím hustší síťování bude, tím je program náročnější na výpočetní výkon počítače.

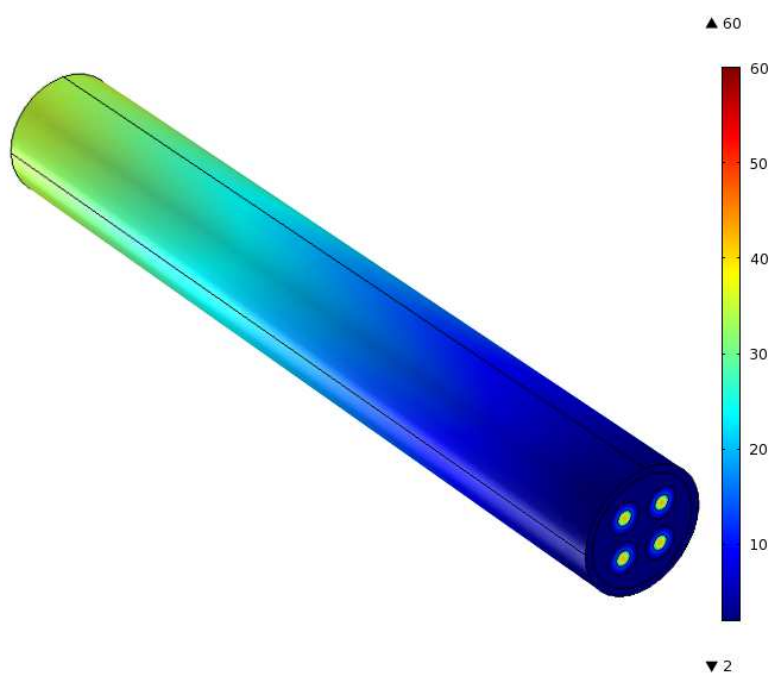


Obr. 19 Prostředí aplikace COMSOL Multiphysics – zobrazení síťování výměníku (Normal)

V posledním kroku jsem provedla nastavení způsobu provedení výpočtu. Zvolila jsem Study 1 – Solver Configurations – Solver 1 – Stationary Solver 1 a zde jsem přes pravé tlačítko vybrala volbu přímého výpočtu (Direct). Poté jsem ještě nastavila typ výpočtu Pardiso, což je přímý řešič, podporující víceprostorové a vícejádrové paralelní výpočty. Nakonec jsem spustila výpočet tlačítkem vypočítat (Compute).

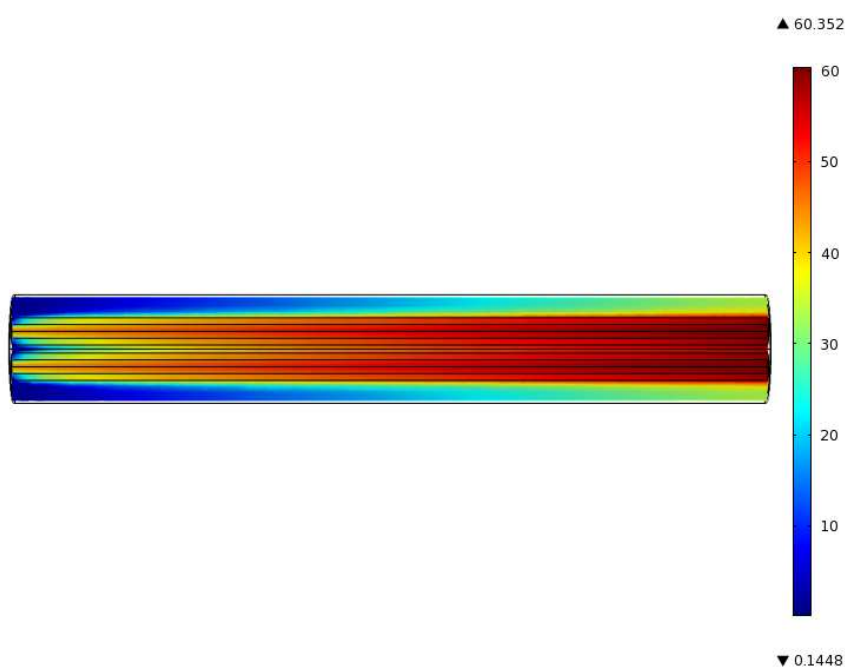
6.1 Ověření programové aplikace COMSOL Multiphysics na vzorové úloze pro izolovaný výměník

Po provedení výpočtu jsem získala 3D model s rozložením teploty v izolovaném protiproudém svazkovém výměníku. Pro lepší určení teploty jsem provedla řezy tímto modelem.



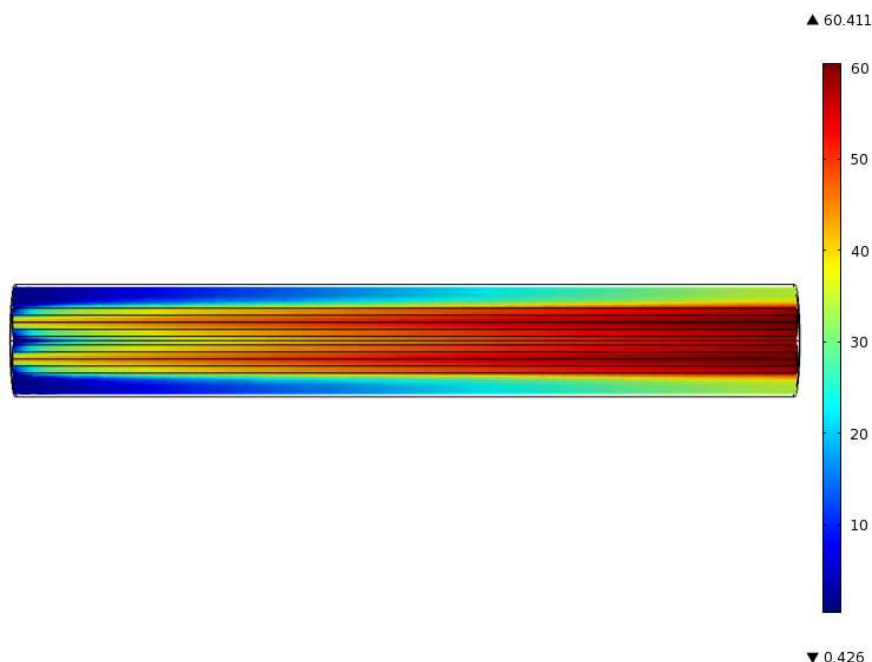
Obr. 20 Zobrazení 3D modelu izolovaného protiproudého svazkového výměníku

Na obrázku 20 je 3D zobrazení rozložení teploty v izolovaném protiproudém svazkovém výměníku. Barevná stupnice odpovídá rozložení teploty v bilancovaném systému.



Obr. 21 Grafické znázornění podélného řezu v modelu izolovaného protiproudého výměníku

Na obrázku 21 je zobrazen podélný řez středem izolovaného výměníku. Tento řez vede mezitrubkovým prostorem. Je zde proto vidět, jaký je průběh teplot mezi svazky trubek.



Obr. 22 Řez izolovaným výměníkem ve vzdálenosti od středu 0,026m

Na obrázku 22 je zobrazen řez izolovaným výměníkem ve vzdálenosti od středu 0,026m. Tento řez vede napříč svazkem trubek. Je zde vidět, jaký je průběh teploty oleje v podélném řezu svazku trubek a průběh teploty vody v potrubí. Z grafu lze dle stupnice vyčíst, že se teplota oleje ze vstupní hodnoty $t_{11} = 60^{\circ}\text{C}$ ochladí na výstupní hodnotu $t_{12} = 41,22^{\circ}\text{C}$ a teplota vody se ze vstupní hodnoty $t_{22} = 2^{\circ}\text{C}$ ochladí na výstupní hodnotu $t_{21} = 33,94^{\circ}\text{C}$.

Tabulka 4 Porovnání teplot ohřívané a ochlazované tekutiny získaných jednotlivými metodami v izolovaném výměníku

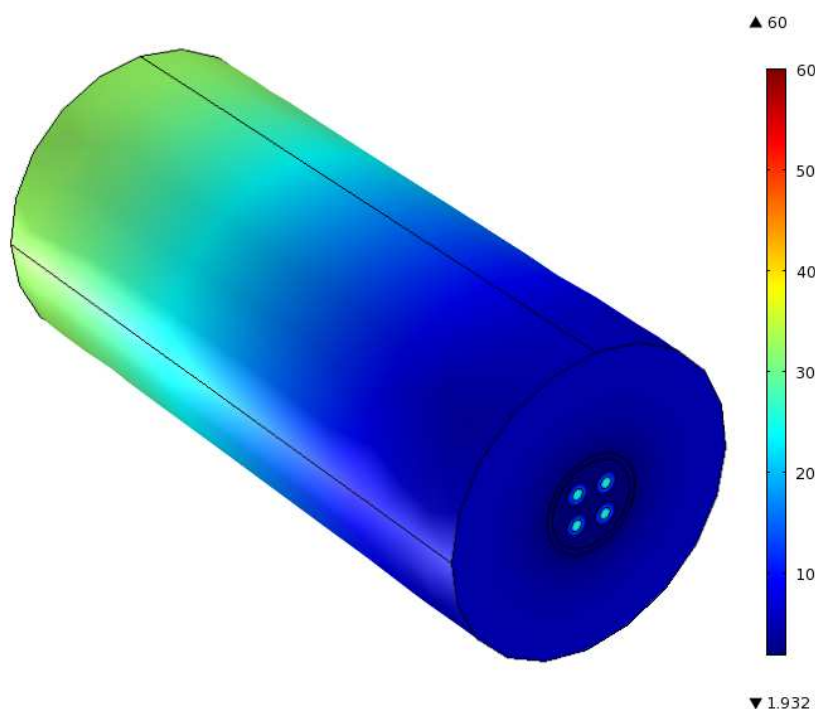
médiu	Hodnoty teplot získané standardním způsobem		Hodnoty teplot získané na základě matematického modelu		Hodnoty teplot získané simulací prostředí COMSOL Multiphysics	
	vstup [$^{\circ}\text{C}$]	výstup [$^{\circ}\text{C}$]	vstup [$^{\circ}\text{C}$]	výstup [$^{\circ}\text{C}$]	vstup [$^{\circ}\text{C}$]	výstup [$^{\circ}\text{C}$]
olej	60	40	60	41.36	60	41.22
voda	2	34.8	2	33.55	2	33.94

Z tabulky 3 je patrné, že hodnoty teplot získané na základě matematického modelu se liší od hodnot teplot získaných standardním způsobem o 3,4% u výstupu oleje a o 3,6% u výstupu vody. Hodnoty teplot získané simulací prostředí COMSOL Multiphysics se liší od hodnot získaných standardním způsobem o 3,05% u výstupu oleje a o 2,5% u výstupu vody. Hodnoty teplot získané na základě matematického modelu se liší od hodnot získaných simulací v prostředí COMSOL Multiphysics o 0,3% u výstupu oleje a o 1,16% u výstupu vody.

6.2 Ověření programové aplikace COMSOL Multiphysics na vzorové úloze pro neizolovaný výměník

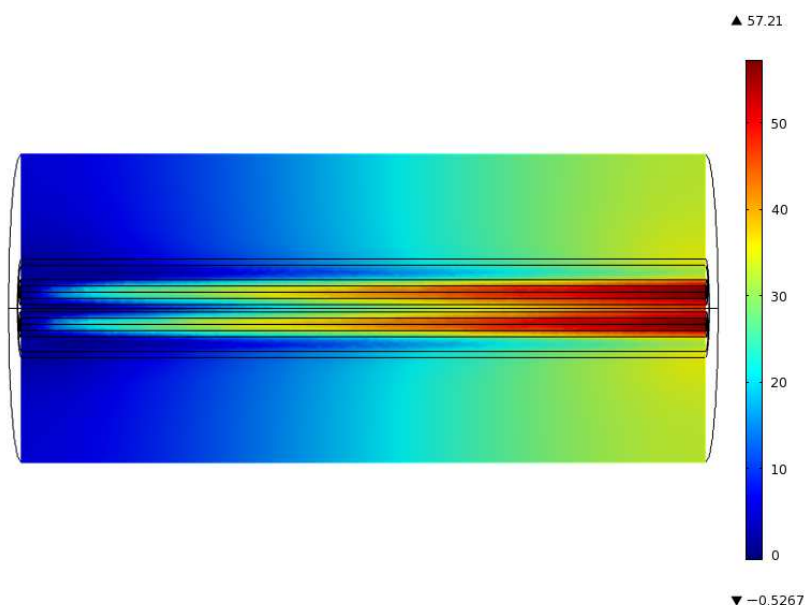
Ztráty do okolí jsem nasimulovala vytvořením vzduchového pláště v celé délce výměníku, jehož počáteční teplotu jsem stanovila na 20°C.

Po provedení výpočtu jsem získala 3D model s rozložením teploty ohřívané a ochlazované tekutiny v neizolovaném protiproudém svazkovém výměníku. Pro lepší určení teploty jsem provedla řezy tímto modelem.



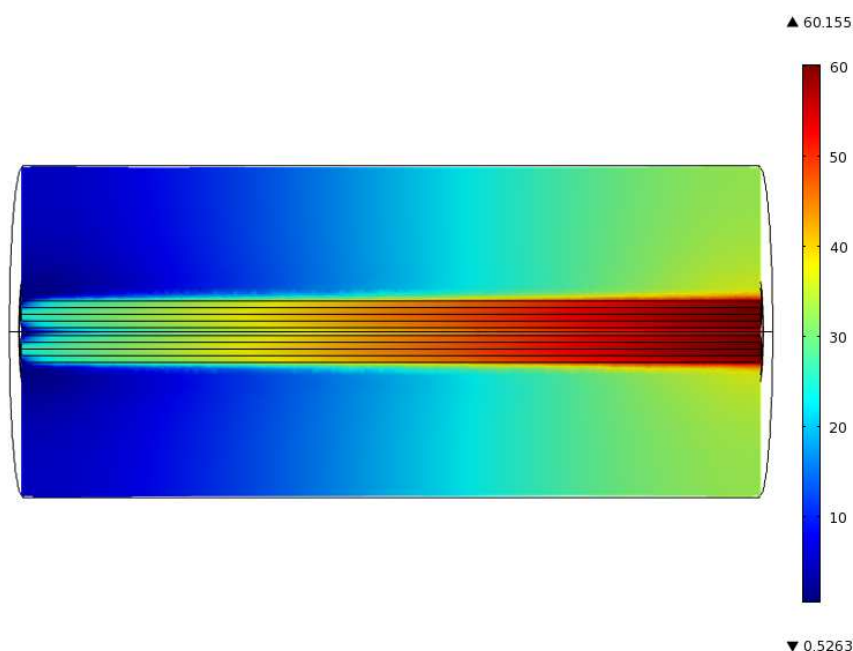
Obr. 23 Zobrazení 3D modelu neizolovaného protiproudého svazkového výměníku

Na obrázku 23 je 3D zobrazení rozložení teploty ohřívané a ochlazované tekutiny v neizolovaném protiproudém svazkovém výměníku. Vnější válcová vrstva o tloušťce 0,5m reprezentuje okolní prostředí, které je tvořeno vzduchem o teplotě $t_0 = 20^\circ\text{C}$. Barevná stupnice odpovídá rozložení teploty v bilancovaném systému.



Obr. 24 Grafické znázornění podélného řezu v modelu neizolovaného protiproudého výměníku

Na obrázku 24 je zobrazen podélný řez středem neizolovaného výměníku. Tento řez vede mezitrubkovým prostorem. Je zde vidět, jaký je průběh teplot mezi svazky trubek a také jaké jsou ztráty tepla do okolí.



Obr. 25 Řez neizolovaným výměníkem ve vzdálenosti od středu 0,026m

Na obrázku 25 je zobrazen řez neizolovaným výměníkem ve vzdálenosti od středu 0,026m. Tento řez vede napříč svazkem trubek. Je zde vidět, jaký je průběh teploty oleje v podélném řezu svazku trubek, průběh teploty oleje ve svazku trubek, vody v potrubí a prostup tepla do okolí. Z grafu lze vyčíst, že se teplota oleje ze vstupní hodnoty $t_{11} = 60^{\circ}\text{C}$ ochladí na výstupní hodnotu $t_{12} = 26,31^{\circ}\text{C}$ a teplota vody se ze vstupní hodnoty $t_{22} = 2^{\circ}\text{C}$ ochladí na výstupní hodnotu $t_{21} = 35,37^{\circ}\text{C}$. Teplota okolí u vstupu oleje do výměníku je $32,81^{\circ}\text{C}$ a u vstupu vody do výměníku je teplota okolí $5,64^{\circ}\text{C}$. Lze vidět, že ztráty do okolí ovlivní průběh teploty ve výměníku. Teplota oleje na výstupu z výměníku nabývá díky okolnímu vzduchu, který je ochlazen nízkou teplotou vody, nižších hodnot než v izolovaném výměníku. Teplota vody na výstupu se změní minimálně.

Tabulka 5 Porovnání teplot ohřívané a ochlazované tekutiny získaných jednotlivými metodami v neizolovaném výměníku

médium	Hodnoty teplot získané na základě matematického modelu		Hodnoty teplot získané simulací prostředí COMSOL Multiphysics	
	vstup [$^{\circ}\text{C}$]	výstup [$^{\circ}\text{C}$]	vstup [$^{\circ}\text{C}$]	výstup [$^{\circ}\text{C}$]
olej	60	27.94	60	26.31
voda	2	32.85	2	35.37

Pro neizolovaný výměník neexistuje způsob řešení výpočtu běžně využívanou metodou, proto jsou zde porovnány pouze hodnoty teplot získané na základě matematického modelu a simulací prostředí COMSOL Multiphysics. Z tabulky 4 je patrné, že hodnoty získané těmito dvěma různými způsoby se liší u výstupu oleje odchylkou 5,83% a u výstupu vody odchylkou 7,7%.

ZÁVĚR

Práce je zaměřena na matematický popis protiproudého izolovaného i neizolovaného výměníku na základě entalpické bilance.

V první části práce jsem provedla literární studii týkající se prostupu tepla a tepelných výměníků, ze které jsem se zaměřila na protiproudý svazkový výměník. V další části jsem navrhla diferenciální rovnice popisující průběhy teplot ohřívané a ochlazované tekutiny v izolovaném a neizolovaném protiproudém výměníku. Tyto rovnice jsem řešila analyticky s pomocí Laplaceovy transformace.

Praktická část je rozdělena na řešení vzorové úlohy standardním způsobem, řešení na základě matematického modelu a simulaci úlohy v simulačním prostředí COMSOL Multiphysics. Vzorovou úlohu jsem řešila standardním způsobem, jak se řeší v procesním inženýrství. Hodnoty získané ze vzorové úlohy jsem dosadila do diferenciálních rovnic a vypočítala průběh teplot ohřívané a ochlazované tekutiny. Následně jsem provedla simulaci úlohy v prostředí COMSOL Multiphysics. Výsledné teploty ze všech řešení jsem porovnávala.

V izolovaném výměníku se hodnoty teplot získané na základě matematického modelu liší od hodnot teplot získaných standardním způsobem s odchylkou 3,4% u výstupu oleje a 3,6% u výstupu vody. Hodnoty teplot získané simulací prostředí COMSOL Multiphysics se liší od hodnot získaných standardním způsobem s odchylkou 3,05% u výstupu oleje a 2,5% u výstupu vody. Hodnoty teplot získané na základě matematického modelu se liší od hodnot získaných simulací v prostředí COMSOL Multiphysics s odchylkou 0,3% u výstupu oleje a 1,16% u výstupu vody (výsledné hodnoty teplot jsou zobrazeny v tabulce 4).

V technické praxi se provádí tepelná bilance výměníku buď mezi proudícími tekutinami nebo mezi tekutinou a okolním prostředím, kdežto mnou navržený matematický model zohledňuje tepelnou bilanci celého systému, v čemž je přínos této práce. Proto jsem porovnávala u neizolovaného výměníku pouze hodnoty teplot ohřívané a ochlazované tekutiny získané na základě matematického modelu a simulací prostředí COMSOL Multiphysics. Hodnoty získané těmito dvěma různými způsoby se liší u výstupu oleje s odchylkou 5,83% a u výstupu vody s odchylkou 7,7% (výsledné hodnoty teplot jsou zobrazeny v tabulce 5). Tyto odchylky mohly být způsobeny tím, že jsem v simulačním

prostředí COMSOL Multiphysics hodnoty teplot odečítala pouze vizuálně pomocí stupnice teplot nebo zaokrouhlováním v řešení úlohy standardním způsobem.

Hlavní výhodou řešení entalpické bilance výměníku pomocí diferenciálních rovnic oproti standardnímu řešení je, že uvažuje ztráty tepla do okolí a je zde možné určit teplotu ohřívané a ochlazované tekutiny v jakékoliv délce výměníku. Tyto získané poznatky by mohly být dále využity pro dosažení lepších výsledků při návrhu a realizaci protiproudých výměníků.

CONCLUSION

The thesis deals with the mathematical description of counter – current isolated and non-isolated exchanger founded on enthalpy balance.

In the first part, I created the literary study referring to heat transfer and heat exchanger. Based on this, I measured counter-flow bound exchanger. In the next part, I proposed the differential equation describing the process of heated and cooled liquid in isolated and non-isolated counter-flow exchanger. Those equations were solved analytically with the use of Laplace's transformation. The practical part is divided into solution of model task in a standard way, tackling based on mathematical model and simulation of the task in simulation ambient COMSOL Multiphysics.

The model task was solved in a standard way how it is solved in process engineering. The results obtained in the model task I used in differential equations and calculated the process of temperatures of heated and cooled liquid. Further, I carried out the task simulation in COMSOL Multiphysics. Subsequently, I compared the consequent temperatures from all solutions.

In isolated exchanger, the temperatures gained thanks to mathematical model differ from temperatures obtained in a standard way – there is inclination of 3,4% at the oil output and 3,6% at water output. Temperatures gained by simulation in COMSOL Multiphysics ambient differ from the temperatures obtained in a standard way – there is inclination of 3,5% at the oil output and 2,5% at water output. The values acquired thanks to mathematical model differ from the values gained by simulation in COMSOL Multiphysics ambient with an inclination of 0,3% at the oil output and 1,16% at the water output (the resulting values are shown in table number 4).

In technical practice is carried out either by the heat exchanger heat balance between streaming liquids or between liquid and the environment, but my proposed mathematical model takes into account the thermal balance of the system, in which the benefits of this work. Therefore, I compared with uninsulated coil temperature values only heated and cooled by liquid based on a mathematical model and simulation environment of COMSOL Multiphysics. The values acquired by those two different ways differ with an inclination of 5,83% at the oil output and 7,7% at the water output (the resulting values are shown in table number 5).

Those inclinations might have been caused by the fact, that in simulation ambient COMSOL Multiphysics I subtracted the temperatures just visually by means of temperature scale or rounding when solving the task in a standard way.

The main advantage of solution enthalpy heat balance method of differential equations, compared to standard way, is that it takes into account heat losses into ambient and it is possible to determine the temperature of heated and cooled liquid in any length of exchanger.

The acquired pieces of knowledge might be further used for reached better results when proposing and realizing the counterflow heat exchangers.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] NEUŽIL, Lubomír. *Chemické inženýrství I. 2.*, uprav.vyd. Praha: Vydavatelství VŠCHT, 1998, 464 s. ISBN 80-708-0312-6.
- [2] HEJZLAR, Radko. *Sdílení tepla*. Vyd. 3. Praha: ČVUT, Jáderná a fyzikálně inženýrská fakulta, 1999, 186 s. ISBN 80-010-1982-9.
- [3] KOLOMAZNÍK, Karel, Jaroslav SEDLÁŘ a Alena MACHÁČKOVÁ. *Teorie technologických procesů III*. Vyd. 1. Brno: Rektorát Vysokého učení technického v Brně, 1978. ISBN 55-588-78.
- [4] MÍKA, Vladimír. *Základy chemického inženýrství*. Vyd. 1. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1977. ISBN 04-622-77.
- [5] PRYOR, Roger W. *Multiphysics modeling using COMSOL: a first principles approach*. Sudbury: Jones and Bartlett Publishers, c2011, 852 s. ISBN 978-076-3779-993.
- [6] ŠESTÁK, Jiří a Rudolf ŽITNÝ. *Tepelné pochody II: výměníky tepla, odpařování, sušení, průmyslové pece a elektrický ohřev*. Vyd. 2. Praha: Nakladatelství ČVUT, 2006, 165 s. ISBN 80-010-3475-5.
- [7] VÍT, Tomáš. *Základy přenosu tepla a hmoty I: přenos hybnosti a tepla - výměníky tepla*. Liberec, 1998.
- [8] ÚChI - výuka: CHI II. VŠCHT - vysoká škola Chemicko-Techmologická v Praze [online]. 2009 [cit. 2012-05-06]. Dostupné z: <http://www.vscht.cz/uchi/ped/chi/chi.ii.materialy.html>
- [9] PŘÍHODA, Miroslav a Miroslav RÉDR. *Sdílení tepla a proudění. 2.*, přeprac. vyd. Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2008, 177 s. ISBN 978-80-248-1748-4.
- [10] *Multiphysics Modeling and Simulation Software* [online]. 1998 [cit. 2012-05-06]. Dostupné z: <http://www.comsol.com/>
- [11] HASAL, Pavel, Igor SCHREIBER a Dalimil ŠNITA. *Chemické inženýrství I. 2.* přeprac. vyd. Praha: VŠCHT, 2007, 350 s. ISBN 978-80-7080-002-7.
- [12] *TZB-info* [online]. 2001 [cit. 2012-05-06]. Dostupné z: <http://www.tzb-info.cz/>
- [13] Index of /ktv/uc_texty/ptu. *Fakulta životního prostředí* [online]. 2008 [cit. 2012-05-06]. Dostupné z: http://fzp.ujep.cz/ktv/uc_texty/ptu/

- [14] *ConVERTER web - převody fyzikálních jednotek, převodní tabulky, fyzikální tabulky, slavní fyzici a Nobelova cena.* [online]. 2002 [cit. 2012-05-06]. Dostupné z: <http://www.converter.cz/>
- [15] NAVRÁTIL, Pavel. *Podpora cvičení z předmětu: „Teorie automatického řízení I“.* Fakulta aplikované informatiky UTB Zlín, 2007.
- [16] *Matematické fyzikální a chemické tabulky pro střední školy.* 3. vyd. Praha: Prometheus, 1995, 206 s. ISBN 80-858-4984-4.
- [17] MÍKA, Vladimír. *Chemickoinženýrské výpočty I.* 3. vyd. Praha: VŠCHT, 1996, 314 s. ISBN 80-708-0255-3.
- [18] MÍKA, Vladimír. *Příklady a úlohy z chemického inženýrství - I. díl.* 1. vyd. Praha: Vydavatelství VŠCHT, 1997, Přer.str. ISBN 80-708-0305-3.
- [19] GOŇA, Tomáš. *Entalpická bilance svazkového výměníku.* Zlín, 2009. Bakalářská práce. Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, Fakulta aplikované informatiky. Vedoucí práce doc. Ing. Dagmar Janáčková, CSc.
- [20] *COMSOL Multiphysics pro multifyzikální modelování a simulaci / Humusoft* [online]. 1991-2012 [cit. 2012-05-07]. Dostupné z: <http://www.humusoft.cz/produkty/comsol/>
- [21] *Ústní konzultace s Ing. Vojtěchem Grygarem.* Zlín, 2012.
- [22] MÍKA, Vladimír, Lubomír NEUŽIL a Jiří VLČEK. *Sbírka příkladů z chemického inženýrství.* II. vydání. Praha: SNTL, 1981. ISBN 04-607-81.

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

<i>Symbol</i>	Význam	Jednotka
α	Součinitel přestupu tepla	$[\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}]$
α_1	Součinitel přestupu tepla mezi stěnou a teplejší tekutinou	$[\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}]$
α_2	Součinitel přestupu tepla mezi stěnou a chladnější tekutinou	$[\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}]$
β	Součinitel objemové roztažnosti	$[\text{K}^{-1}]$
δ, δ_i	Tloušťka stěny	$[\text{m}]$
η	Dynamická viskozita	$[\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}]$
λ	Součinitel tepelné vodivosti	$[\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}]$
λ_i	Součinitel tepelné vodivosti materiálu	$[\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}]$
ν	Kinematická viskozita	$[\text{m}^2 \cdot \text{s}]$
π	Bezrozměrná proměnná	$[1]$
ρ	Hustota	$[\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}]$
A	Teplosměnná plocha	$[\text{m}^2]$
C	Konstanta prostupu tepla	$[1]$
cp	Měrná tepelná kapacita	$[\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}]$
cp_1	Měrná tepelná kapacita teplejší tekutiny	$[\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}]$
cp_2	Měrná tepelná kapacita chladnější tekutiny	$[\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}]$
d, D	průměr	$[\text{m}]$
d_1	Vnitřní průměr trubky	$[\text{m}]$
d_2	Vnitřní průměr potrubí	$[\text{m}]$
d_{ekv}	Ekvivalentní průměr	$[\text{m}]$
g	Gravitační zrychlení	$[\text{m} \cdot \text{s}^{-2}]$
Gr	Grasshofovo kritérium	$[1]$
k	Součinitel prostupu tepla	$[\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}]$

k_L	Délkový součinitel prostupu tepla mezi stěnou a teplejší tekutinou	$[\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}]$
k_{L0}	Délkový součinitel prostupu tepla mezi stěnou a chladnější tekutinou	$[\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}]$
L	Délka výměníku	$[\text{m}]$
L	Charakteristický rozměr	$[\text{m}]$
\dot{m}	Hmotnostní průtok	$[\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}]$
\dot{m}_1	Hmotnostní průtok	$[\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}]$
\dot{m}_2	Hmotnostní průtok	$[\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}]$
n	Počet trubek ve výměníku	$[1]$
n	Mocninný exponent	$[1]$
Nu	Nusseltovo kritérium	$[1]$
Pr	Prandtlovo kritérium	$[1]$
\dot{Q}	Tepelný tok	$[\text{W}]$
r_1	Vnitřní poloměr trubky	$[\text{m}]$
r_2	Vnější poloměr trubky	$[\text{m}]$
Re	Reynoldsovo kritérium	$[1]$
s	Proměnný operátor	$[1]$
S_1	Průřez vnitřních trubek	$[\text{m}^2]$
S_2	Průřez potrubí	$[\text{m}^2]$
t_0	Teplota okolního vzduchu	$[\text{°C}]$
t_1	Střední teplota teplejší tekutiny	$[\text{°C}]$
t_2	Střední teplota chladnější tekutiny	$[\text{°C}]$
t_{11}	Vstupní teplota ochlazované tekutiny	$[\text{°C}]$
t_{12}	Výstupní teplota ochlazované tekutiny	$[\text{°C}]$
t_{21}	Výstupní teplota ohřívání tekutiny	$[\text{°C}]$

t_{22}	Vstupní teplota ohřívané tekutiny	[°C]
t_{1W}	Teplota stěny na rozhraní s teplejší tekutinou	[°C]
t_{W2}	Teplota stěny na rozhraní s chladnější tekutinou	[°C]
Δt	Teplotní rozdíl	[°C]
Δt_{ls}	Střední logaritmický rozdíl teplot	[°C]
Δt_1	Rozdíl teplot teplejší tekutiny	[°C]
Δt_2	Rozdíl teplot chladnější tekutiny	[°C]
v	Charakteristická rychlost proudící kapaliny	[m·s ⁻¹]

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr. 1 Ukázka svazkového výměníku tepla a uspořádání toků [1].	12
Obr. 2 Detail svazkového výměníku tepla [13].	13
Obr. 3 Prostup tepla rovinnou přepážkou [4]	15
Obr. 4 Prostup tepla válcovou přepážkou [4]	16
Obr. 5 Schéma průběhu teplot v protiproudém výměníku.....	17
Obr. 6 Ukázka programového prostředí COMSOL Multiphysics	31
Obr. 7 Schéma průběhu teplot v protiproudém výměníku.....	33
Obr. 8 Pohled na zadaný svazkový výměník.....	33
Obr. 9 Zobrazení průběhu teploty oleje a vody v izolovaném výměníku.....	41
Obr. 10 Zobrazení průběhu teploty oleje a vody v neizolovaném výměníku.....	43
Obr. 11 Okno programu COMSOL Multiphysics po spuštění - výběr dimenze	44
Obr. 12 Okno programu COMSOL Multiphysics - výběr fyziky.....	44
Obr. 13 Okno programu COMSOL Multiphysics - výběr typu výpočtu.....	45
Obr. 14 Okno programu COMSOL Multiphysics - výběr pracovní roviny	45
Obr. 15 Prostředí aplikace COMSOL Multiphysics – zobrazení nakreslené geometrie (v souladu s Obr. 8)	46
Obr. 16 Prostředí aplikace COMSOL Multiphysics – zobrazení nakresleného tvaru výměníku	47
Obr. 17 Prostředí aplikace COMSOL Multiphysics – zvolení konstrukční ocele pro výplň materiálu trubek.....	48
Obr. 18 Prostředí aplikace COMSOL Multiphysics – nastavení vstupní teploty vody ve vnitřních trubkách.....	49
Obr. 19 Prostředí aplikace COMSOL Multiphysics – zobrazení síťování výměníku (Normal)	50
Obr. 20 Zobrazení 3D modelu izolovaného protiproudého svazkového výměníku	51
Obr. 21 Grafické znázornění podélného řezu v modelu izolovaného protiproudého výměníku	51
Obr. 22 Řez izolovaným výměníkem ve vzdálenosti od středu 0,026m	52
Obr. 23 Zobrazení 3D modelu neizolovaného protiproudého svazkového výměníku	53
Obr. 24 Grafické znázornění podélného řezu v modelu neizolovaného protiproudého výměníku	54
Obr. 25 Řez neizolovaným výměníkem ve vzdálenosti od středu 0,026m.....	55

SEZNAM TABULEK

Tabulka 1 Zobrazení změny teploty oleje a vody v izolovaném výměníku	40
Tabulka 2 Konkrétní vyjádření rovnice (5.40) je dáno hodnotami konstanty C a exponentu n [1].....	42
Tabulka 3 Zobrazení změny teploty oleje a vody v neizolovaném výměníku	43
Tabulka 4 Porovnání teplot ohřívané a ochlazované tekutiny získaných jednotlivými metodami v izolovaném výměníku	52
Tabulka 5 Porovnání teplot ohřívané a ochlazované tekutiny získaných jednotlivými metodami v neizolovaném výměníku.....	55