

Matematické modelování dynamických systémů v prostředí MATLAB

Mathematical modelling of dynamic systems in MATLAB software

Bc. Roman Mynařík

Diplomová práce
2012



Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky
akademický rok: 2011/2012

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Bc. Roman MYNÁŘÍK**
Osobní číslo: **A10302**
Studijní program: **N 3902 Inženýrská informatika**
Studijní obor: **Automatické řízení a informatika**

Téma práce: **Matematické modelování dynamických systémů v prostředí MATLAB**

Zásady pro vypracování:

1. Provedte literární studii, týkající se řešené problematiky.
2. Navrhněte obecné matematické modely, popisující entalpickou a hmotovou bilanci ve výměnících tepla a hmoty.
3. Vytvořte univerzální programovou aplikaci na základě sestavených deterministických modelů v prostředí MATLAB, která umožní řešit průběhy koncentračních a teplotních polí ve zpracovávané tuhé fázi a následně stanovit optimální doby trvání vybraných technologických procesů při požadovaných vlastnostech výstupního produktu.
4. Správnou funkci uživatelské aplikace ověřte na několika vzorových úlohách.

Rozsah diplomové práce:

Rozsah příloh:

Forma zpracování diplomové práce: tištěná/elektronická

Seznam odborné literatury:

1. PERŮTKA, Karel. MATLAB: Základy pro studenty automatizace a informačních technologií. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2005, 303 s. ISBN 80-7318-355-2.
2. KOLOMAZNÍK, Karel. Modelování zpracovatelských procesů. Brno: Rektorát Vysokého učení technického v Brně, 1990, 191 s. ISBN 80-214-0114-1.
3. KŘUPKA, Jiří a Miloslava KAŠPAROVÁ. Modelování v kostce pro Matlab a Simulink: distanční opora. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2009, 72 s. ISBN 978-80-7395-162-7.
4. KARBAN, Pavel. Výpočty a simulace v programech Matlab a Simulink. Brno: Computer Press, 2006, 224 s. ISBN 978-80-251-1448-3.
5. HUNT, Brian R., Ronald L. LIPSMAN a Jonathan M. ROSENBERG. A guide to MATLAB: for beginners and experienced users. Cambridge: Cambridge University Press, 2001, 327 s. ISBN 0-521-00859-X.
6. DUŠEK, František. MATLAB a SIMULINK: úvod do používání. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2000, 146 s. ISBN 80-7194-273-1.
7. KOVÁŘÍK, Martin. Programování a tvorba grafiky v Matlabu. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2008, 130 s. ISBN 978-80-7318-754-5.
8. ZAPLATÍLEK, Karel a Bohuslav DOŇAR. MATLAB: tvorba uživatelských aplikací. Praha: BEN – technická literatura, 2004, 216 s. ISBN 80-7300-133-0.

Vedoucí diplomové práce:

doc. Ing. Dagmar Janáčková, CSc.

Ústav automatizace a řídicí techniky

Datum zadání diplomové práce:

24. února 2012

Termín odevzdání diplomové práce:

6. června 2012

Ve Zlíně dne 24. února 2012

prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.
děkan



prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.
ředitel ústavu

ABSTRAKT

Obsah diplomové práce je zaměřen na matematické modelování vybraných typů dynamických systémů, jejichž popis vede na diferenciální rovnice či jejich soustavy, které jsou řešeny pomocí Laplaceovy transformace. Diplomová práce je členěna na dvě části – teoretickou a praktickou část. V teoretické části je analyzována problematika matematického modelování jako prostředku vedoucího k vytváření deterministických matematických modelů a s tím související pojmy, které jsou nezbytné pro pochopení dané problematiky. V praktické části je odvozeno obecné řešení vybraných matematických modelů založených na entalpické a hmotové bilanci. Na základě zmíněných matematických modelů je sestavena programová aplikace vytvořená v programovém prostředí MATLAB, pomocí které lze řešit průběhy teploty a koncentrace ve zpracovávané tuhé fázi, jež je podrobena chlazení či ohřevu nebo v ní probíhá transport bilancované složky. Uvedená aplikace umožňuje zobrazovat výsledná řešení nejen numericky, ale i graficky a na základě těchto výpočtů určit, jak dlouho bude zkoumaný technologický proces trvat při uvažování zadaných parametrů a počátečních podmínek. Zároveň lze porovnat získané výsledky při změně některých z těchto parametrů. Součástí praktické části je také ověření správné funkce uživatelské aplikace na vzorových úlohách.

Klíčová slova: matematický model, entalpická bilance, hmotová bilance, dynamický systém, MATLAB

ABSTRACT

The content of the thesis is aimed on mathematical modelling of selected dynamical systems whose description leads to a differential equation or system of differential equations solved by Laplace transform. The thesis is divided into two parts – theoretical and practical part. The theoretical part describes the process of mathematical modelling which deals with creating deterministic mathematical models and some related terms that explain problems at modelling. In the practical part is derived general solution of selected mathematical models of enthalpy and mass balance. Based on these mathematical models is created application program in MATLAB software, which solves the course of the temperature and concentration in the solid phase, which is subjected to heating or cooling. This application allows to display the result numerically and graphically and the basis of these calculations to determine the duration of the technological process for the specified parameters and at the given initial conditions. In addition, it's possible to compare the results obtained when changing some of these parameters. In the practical part also verifies correct functionality of the application on sample problems.

Keywords: mathematical model, enthalpy balance, mass balance, dynamical system, MATLAB

Na tomto místě bych rád poděkoval všem, kteří mě podpořili během psaní diplomové práce. Především pak děkuji své vedoucí doc. Ing. Dagmar Janáčové CSc. za poskytnuté rady, cenné připomínky a hlavně za trpělivost během řešení této práce.

Prohlašuji, že

- beru na vědomí, že odevzdáním diplomové/bakalářské práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb. o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších právních předpisů, bez ohledu na výsledek obhajoby;
- beru na vědomí, že diplomová/bakalářská práce bude uložena v elektronické podobě v univerzitním informačním systému dostupná k prezenčnímu nahlédnutí, že jeden výtisk diplomové/bakalářské práce bude uložen v příruční knihovně Fakulty aplikované informatiky Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně a jeden výtisk bude uložen u vedoucího práce;
- byl/a jsem seznámen/a s tím, že na moji diplomovou/bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších právních předpisů, zejm. § 35 odst. 3;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 1 autorského zákona má UTB ve Zlíně právo na uzavření licenční smlouvy o užití školního díla v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 2 a 3 autorského zákona mohu užít své dílo – diplomovou/bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití jen s předchozím písemným souhlasem Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše);
- beru na vědomí, že pokud bylo k vypracování diplomové/bakalářské práce využito softwaru poskytnutého Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně nebo jinými subjekty pouze ke studijním a výzkumným účelům (tedy pouze k nekomerčnímu využití), nelze výsledky diplomové/bakalářské práce využít ke komerčním účelům;
- beru na vědomí, že pokud je výstupem diplomové/bakalářské práce jakýkoliv softwarový produkt, považují se za součást práce rovněž i zdrojové kódy, popř. soubory, ze kterých se projekt skládá. Neodevzdání této součásti může být důvodem k neobhájení práce.

Prohlašuji,

- že jsem na diplomové práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval. V případě publikace výsledků budu uveden jako spoluautor.
- že odevzdaná verze diplomové práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG jsou totožné.

Ve Zlíně

.....
podpis diplomanta

OBSAH

ÚVOD.....	9
I TEORETICKÁ ČÁST.....	10
1 SYSTÉM JAKO ABSTRAKTNÍ MODEL.....	11
MODEL REÁLNÝCH SYSTÉMŮ	12
DYNAMICKÝ SYSTÉM	13
MÍRA PŘESNOSTI MODELU	14
2 MATEMATICKÉ MODELOVÁNÍ.....	15
2.1 PŘÍSTUPY PŘI MODELOVÁNÍ	16
PŘÍMÉ MODELOVÁNÍ	16
NEPŘÍMÉ MODELOVÁNÍ	17
KOMBINACE PŘÍMÉHO A NEPŘÍMÉHO MODELOVÁNÍ	17
2.2 KLASIFIKACE MATEMATICKÝCH MODELŮ	18
MATEMATICKÉ MODEL STOCHASTICKÉ A DETERMINISTICKÉ	18
MATEMATICKÉ MODEL STATICKÉ A DYNAMICKÉ	19
MATEMATICKÉ MODEL LINEÁRNÍ A NELINEÁRNÍ.....	19
MATEMATICKÉ MODEL SE SOUSTŘEDĚNÝMI A ROZLOŽENÝMI PARAMETRY	20
2.3 TVORBA MATEMATICKÉHO MODELU	20
2.4 POČÁTEČNÍ A OKRAJOVÉ PODMÍNKY POUŽÍVANÉ PŘI NÁVRHU MATEMATICKÉHO MODELU.....	23
3 BILANCE.....	25
3.1 ENTALPIKÁ BILANCE	26
3.2 HMOTOVÁ BILANCE, ZPŮSOBY VYJADŘOVÁNÍ KONCENTRACÍ	28
3.3 MODELOVÉ ROVNICE.....	29
4 PROGRAMOVÁ APLIKACE.....	31
II PRAKTICKÁ ČÁST	32
5 NÁVRH MATEMATICKÝCH MODELŮ.....	33
5.1 MATEMATICKÉ MODEL ZALOŽENÉ NA ENTALPIKÉ BILANCI.....	33
5.2 MATEMATICKÉ MODEL ZALOŽENÉ NA HMOTOVÉ BILANCI	56
6 POPIS A FUNKCE PROGRAMOVÉ APLIKACE.....	62
7 OVĚŘENÍ FUNKČNOSTI UŽIVATELSKÉ APLIKACE.....	69
ZÁVĚR	86
SUMMARY	88
SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY.....	90
SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK.....	92
SEZNAM OBRÁZKŮ	95
SEZNAM TABULEK.....	97
SEZNAM PŘÍLOH.....	98

ÚVOD

Modely reálných systémů jsou součástí našeho života. Setkáváme se s nimi nejen v běžném životě, ale téměř ve všech odborných a vědeckotechnických disciplínách. Člověk má snahu si vytvářet modely reálných objektů s vědomím provádět na daném modelu různorodé operace a využívat je pro nejrůznější cíle, především usnadnit si práci či experimentovat s modelem jako fiktivním nástrojem příslušného reálného objektu. Při práci s takovým modelem se naskytá celá řada možností jak nalézt zcela nové pohledy, poznatky a souvislosti řešení bez přímého zkoumání na reálném objektu. Mezi hlavní významy vytvořeného modelu patří mimo jiné také schopnost provádět simulaci daného modelu jeho verifikaci, což umožní vzájemně porovnávat získaná data ze simulace s hodnotami reálného technologického procesu. V dřívějších dobách nebylo snadné a v některých případech ani možné uskutečnit takový model systému, avšak pokročilý rozvoj počítačové technologie v dnešní době vnesl do této oblasti velké možnosti v podobě řešení komplexních matematických výpočtů bez nutnosti tyto počítat nebo vyčíslovat numericky. Dnes jsou matematické modely zpravidla realizovány počítačovými simulacemi, které zajišťují zkoumat reálné objekty pomocí jejich věrných modelů, přičemž se zde zohledňují různé oblasti praktického použití bez potřeby mít tento reálný objekt k dispozici. Tím je také možno zamezit riziku havárie při experimentování na reálné soustavě a zároveň omezit vynaložené náklady. Tyto nesporné výhody matematického modelu a mnohé další lze všestranně využít při následných simulacích na počítači a výrazně tak zkrátit dobu jejich řešení, které bývá v těchto případech velmi zdoluhavé a namáhavé. Cílem mé práce proto bylo vytvoření univerzální programové aplikace pro řešení entalpických a hmotových bilancí ve výměnících tepla, resp. hmoty a usnadnit tak jejich relativně časově náročné matematické vyčíslování, což velmi přispívá k zefektivnění práce. Ze všeho nejdříve však bylo zapotřebí se seznámit s danou problematikou zabývající se modelováním technologických procesů a jejich bilancováním. Sestavením několika obecných matematických modelů z oblasti tepelných a koncentračních výměníků, mohla být na tomto základě vytvořena zmíněná aplikace v prostředí MATLAB. Toto interaktivní programové prostředí představuje vhodný nástroj pro modelování technologických procesů, neboť dokáže snadno řešit diferenciální počty, provádět počítačovou simulaci a graficky znázornit dosažené výsledky.

I. TEORETICKÁ ČÁST

1 SYSTÉM JAKO ABSTRAKTNÍ MODEL

V souladu s tím, co bylo nastíněno v úvodní části, souvisí také některé pojmy užívané při modelování, proto jsou zde v první řadě uvedeny některé důležité myšlenky, které je nezbytné při vytváření modelů reálných objektů znát. Jak se uvádí v [10], pod reálným objektem si lze představit určitou část objektivní reality (reálného světa), která se podrobuje zkoumání. V této souvislosti je potřeba definovat pojem systém a jeho okolí.

Systém je velmi rozšířený výraz ve vědě. Jde o široce obecný pojem užívaný různými způsoby a pro řešení nejrozumnějších problémů, které jsou dány konkrétními cíli jednotlivých vědeckých disciplín. Obecně je systém chápán ve smyslu určité uspořádanosti či organizovanosti a v mnoha případech také komplexnosti, což značně stěžuje rozhodování o tom, co je a co není uspořádaný systém. V některých přírodovědeckých oborech, především v těch experimentálních jako je fyzika či chemie, u nichž se zkoumají projevy přírodních zákonů, se na systém nahlíží jako na určité abstraktní vyjádření, které je nezbytné pro jeho popis. Při poznávání totiž nelze vědeckému zkoumání podrobit veškerou objektivní realitu a tak je vhodné omezit se pouze na určitou část této objektivní reality, která je zájmem zkoumání. Tato část se nazývá objektem a vše ostatní jeho okolím. Snahou je potom tento objekt co nejvíce zjednodušit, ale přitom zachytit vše podstatné, co je zájmem a cílem zkoumání. [9], [10]

Na zkoumaném objektu se tedy pozorují a měří pouze určité veličiny. Volba těchto veličin je závislá především na tom, co člověk na daném objektu zajímá nebo co považuje za významné vzhledem k účelu zkoumání. Dále je snahou nalézt vztahy mezi vybranými veličinami a stanovit jejich vlastnosti. Výběrem a sledováním těchto důležitých veličin a vlastností lze definovat na patřičném objektu systém. Pokud by se měl definovat systém na reálném objektu, pak jde o snahu stanovit to, co je předmětem zájmu a co nikoliv, tedy určení základních vlastností a podstatných složek (prvků a vazeb) systému. [9]

Jakmile je stanovena množina všech veličin, jež jsou předmětem zájmu, je dále potřeba nalézt vzájemné vztahy mezi zkoumanými veličinami. Tyto vzájemné vztahy mezi veličinami se nazývají chování systému, které je projevem jeho dynamiky. Jelikož je původní systém jako celek složen z jednodušších subsystémů, resp. prvků původního systému, je snahou rozložit zmíněné chování systému na jednodušší vztahy, kde každý prvek systému je charakterizován svým chováním. Chování těchto prvků a jejich vzájemné vazby pak určují chování celého systému. [9]

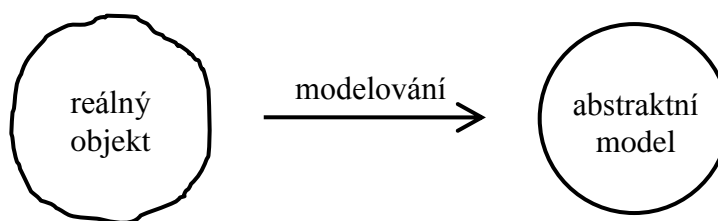
Modely reálných systémů

V technologické praxi se lze setkat s různorodými a rozmanitými chemickými procesy probíhajícími v průmyslových zařízeních, pro které je potřeba vhodným a odpovídajícím způsobem zjistit jejich dynamické vlastnosti. Takové systémy však mnohdy vykazují odlišné chování v závislosti na vstupních, okolních či jiných podmínkách, které mohou výrazně ovlivnit výstupní parametry dynamického systému. To je jedním z důvodů, proč se přistupuje k analýze a popisu zkoumaných reálných systémů.

Vyšetřování rozsáhlých a komplikovaných soustav většinou nelze provádět analytickým výpočtem či přímo experimentováním s nimi, neboť je často nutné zkoumat chování zařízení v mezních situacích, do kterých se skutečné zařízení nesmí dostat, popř. je nutno ověřovat chování zařízení ještě ve fázi jeho návrhu. V těchto a dalších případech je vhodné a efektivní pro účely zkoumání využívat modely těchto soustav. [11]

Model systému představuje určitý abstrakt resp. napodobeninu reálného zařízení jako věrohodnou kopii jeho originálu (viz Obr. 1.1). Jednomu originálu lze přitom přivlastnit několik modelů v jeho různých formách, ať už se jedná o fyzikální, matematický nebo třeba simulační model realizovaný v počítači. Takový model by měl respektovat některé hlavní důležité aspekty týkající se vlastností reálného systému a vhodně je kopírovat, aby byla věrnost modelu co nejvíce podobná realitě. Současně je však nutno dbát také na různá zjednodušení a zobecnění daného modelu, aby byl tento pokud možno snadno realizovatelný a neobsahoval komplikované části [11]. Zjednodušením je míněno zahrnutí pouze takových vlastností originálu, které jsou podstatné pro účel vytváření modelu. Pomocí modelu lze z předem známých veličin systému určit další veličiny, které jsou předmětem zájmu a které se budou v dostatečné míře blížit skutečným hodnotám uvažovaného systému. Lze tedy konstatovat, že účelem modelu je co nejvěrohodněji predikovat či reprodukovat chování daného systému, přičemž je snaha využít přitom principu zobecnění a to tak, že se vytvoří patřičný model jako vzor pro celou skupinu podobných objektů.

Model je obvykle navrhován jako kompletní systém prvků, mezi nimiž jsou přesně definovány vztahy. Dále se uvažuje s rozhraním systému, které představuje určitou interakci se svým okolím. Vstupní vlastnosti systému ovlivňují jeho chování, naopak výstupními vlastnostmi ovlivňuje systém své okolí. [11]

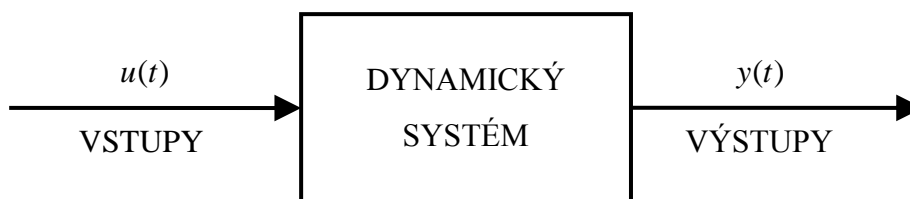


Obr. 1.1 – Obecné znázornění abstraktního modelu reálného objektu [16]

Dynamický systém

Na zkoumaný systém lze nahlížet z různých hledisek. Nejvýznamnějším z nich je především význam času, který je charakteristický pro dynamické systémy. Dynamický systém je abstraktní pojem, který představuje matematický model s jednoznačně definovanými vstupy a výstupy a se známými počátečními podmínkami. Pro dynamický systém je rozhodující jeho momentální stav, který se s časem průběžně mění. Stav systému v daném momentu udávají okamžité hodnoty stavových veličin. Tyto hodnoty je potřeba znát, aby bylo možné předpovědět, jak se bude systém chovat v následujících chvílích. V případě, že je znám stav systému v nějakém konkrétním okamžiku, je možno na základě znalostí fyzikálních zákonů předpovědět jeho stav v budoucnosti a stejně tak zjistit, jaký byl jeho stav v minulosti. Dále platí, že momentální stav (a tedy i výstup) dynamického systému závisí nejen na momentální hodnotě vstupu, ale i na předchozím (resp. počátečním) stavu systému. Pokud dostatečně dlouhou dobu působí na vstup do systému konstantní vstupní veličiny, které se v čase nemění, dojde po určitém čase k ustálení stavových a také výstupních veličin systému. Tato situace je charakteristická pro tzv. ustálený stav systému, při kterém dojde k ustálení těchto veličin na hodnotách v čase konstantních. Jinak řečeno, systém se nachází v ustáleném stavu právě tehdy, když v něm nedochází ke změnám veličin v čase. [10], [12]

Z výše uvedeného vyplývá, že na dynamický systém je možno nahlížet jako na model, který více či méně přesně napodobuje fyzikální strukturu skutečného objektu, přičemž každému fyzikálnímu objektu lze přiřadit jeho abstraktní model, v opačném případě to však nemusí vždy platit, neboť abstraktní model nemusí mít fyzikální realizaci. Dynamický systém je popsán dynamickými podmínkami, které mohou být zadány soustavou diferenciálních rovnic a které popisují změnu stavové veličiny v čase. [12]



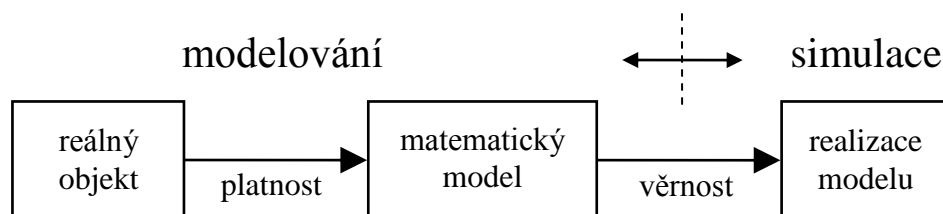
Obr. 1.2 – Abstraktní znázornění dynamického systému

Míra přesnosti modelu

Kromě výše uvedených definic je také vhodné se zmínit i o míře shody chování mezi modelovaným objektem a jeho modelem, respektive o přesnosti získaného modelu. U modelovaného objektu nemusí být vždy známy všechny dílčí procesy v něm probíhající a i v případě, že jsou tyto procesy známy, tak je lze popsat pouze přibližně, jelikož jsou matematická vyjádření přírodních zákonů pouze určitou abstrakcí reality. Z toho je zřejmé, že se nikdy nepodaří obdržet chování modelu totožné s modelovaným objektem. Je to dáno i tím, že se v procesu modelování některé méně významné procesy zanedbávají a zavádí se zjednodušující předpoklady za účelem vhodně zjednodušit získaný model. Při procesu zjednodušování je tak třeba vhodně vystihnout obtížnost. Přesnější model v takovém případě vystihuje věrněji realitu, avšak za cenu jeho složitosti. Při tvorbě modelů jde tedy vždy o určitý kompromis mezi složitostí a přesností. Modely sestavované za účelem návrhu nebo ověřování algoritmů řízení nemusí být zpravidla vysoce přesné z hlediska absolutních hodnot veličin. Musí však v každém případě vystihovat trendy statických i dynamických charakteristik procesu. Naopak modely, používané ve stadiu projektování technologických procesů a inženýrské analýze jsou většinou podstatně přesnější a složitější. [13]

2 MATEMATICKÉ MODELOVÁNÍ

Jak již bylo zmíněno v předcházející kapitole, při návrzích a změnách často komplikovaných technologických zařízení je nutné se s danou problematikou dějů probíhajících ve výrobních procesech řádně seznámit. K tomu je vhodné použít matematického modelování, které představuje účinný způsob, jak poznávat vlastnosti zkoumaného objektu, aniž by se tyto vlastnosti určovaly experimentálními metodami. Podstatou modelování je obecně nahradit zkoumaný (modelovaný) systém jeho modelem (modelujícím systémem) tak, aby se experimentováním s modelem získaly patřičné informace o původním zkoumaném objektu. Jedna z mnoha definic (viz [14]) popisuje modelování také jako soubor aktivit vedoucích k vývoji modelu, který současně reprezentuje strukturu a chování reálného systému. V přeneseném slova smyslu je tedy modelování chápáno jako činnost, resp. proces spojený s vytvářením modelů reálných objektů a je tak specifickým pokračováním započatého experimentu, při němž byl reálný objekt nahrazen patřičným modelem. Výsledkem onoho modelování je pak vytvořený model (viz Obr. 2.1). Simulací (viz [14]) se následně ověřuje správnost modelu a získávají se nové poznatky o činnosti reálných objektů.



Obr. 2.1 – Zjednodušené schéma postupu modelování při tvorbě modelu [14]

Matematické modelování je moderním nástrojem, který se v posledních letech prosazuje především díky výpočetní technice a tím se stává nezbytným prostředkem pro zkoumání dějů probíhajících v technologických procesech. Simulace založené na matematických modelech jsou dnes běžně užívány například při konstrukci a výrobě technických zařízení stejně jako v aplikovaném výzkumu. Pomocí počítačové simulace lze s modelem provádět experimenty jako na skutečném zařízení, avšak bez rizika havarijních stavů či bez potřeby reálného objektu a to vše s mnohem menšími náklady.

2.1 Přístupy při modelování

Jednou ze základních otázek, které se řeší při modelování je, jakým způsobem se má model konstruovat, tj. do jaké míry má být vytvořený model podobný skutečnému zařízení. Odpověď na tuto otázku lze nalézt v dalším postupu modelování, který se aplikuje na proces, tj. použije-li se přímé či nepřímé modelování.

Přímé modelování

Tento přístup patří mezi starší a osvědčené metody, při němž se využívá fyzikálního modelování založeného na vytváření tzv. fyzikálních modelů. Slovo „fyzikální“ je zde podstatné, neboť se vychází z fyzikální nebo geometrické podoby mezi modelem a skutečným zařízením. U přímého modelování se provádí experimentální pokus v laboratoři na zmenšené kopii (modelu) zařízení a na něm se bez výpočtů a matematické analýzy fyzikálních případně fyzikálně chemických pochodů dává přímá odpověď o tom, jak se bude chovat provozní zařízení. V tomto případě je snahou provést experiment vždy tak, aby vztah mezi laboratorním modelem a provozním zařízením byl pokud možno co nejjednodušší. Model je většinou ve zmenšeném měřítku reálného zařízení, na kterém se zkoumají základní vlastnosti nebo ověřují teoretické předpoklady návrhu provozního zařízení a velmi často se experimentálně zjišťují vzájemné závislosti působících veličin. Dosažené výsledky na modelu se poté aplikují na skutečné zařízení. Zde je důležité dodat, že fyzikální model může být zhotovený na stejném fyzikálním principu jako skutečné zařízení (např. zmenšený model technologického zařízení), přičemž se využívá teorie podobnosti nebo na odlišném, ale analogickém principu, který se řídí podobnými zákony (např. elektrický model tepelného objektu). Nevýhodou přímého modelování je však skutečnost, že lze tuto metodu uplatnit především pro méně rozsáhlé systémy, jelikož v některých složitých případech nelze řadu jevů fyzikálně a vhodně vystihnout modelem. Týká se to především řešení přenosu tepla, zvláště typického pro vysoké teploty. Také dochází k velké ekonomické náročnosti, zdlouhavosti experimentu a hlavně rostoucí obtížnosti přiblížení fyzikálního modelu provozním podmínkám. Proto se v současné době rozvíjí nepřímé modelování. [2], [14]

Nepřímé modelování

U tohoto přístupu se provádí matematické modelování a vytváří se tzv. matematické modely založené na aplikaci matematických, fyzikálních a chemických zákonitostí. Matematický model ve své podstatě představuje abstraktní systém, který popisuje zkoumaný objekt pomocí stanoveného formalizovaného zápisu vyjádřený většinou ve formě soustavy rovnic a vztahů mezi veličinami. Tyto vztahy se abstrahují do skupiny parametrů, vzájemně svázanými relačními operátory a funkčními vztahy, čímž lze získat popis výsledného chování daného procesu. Stejně jako u přímého modelování i zde v případě nepřímého modelování se dbá na patřičné zjednodušování matematického modelu vyplývající z komplikovaného popisu některých fází v příslušném procesu. Nutno podotknout, že matematický model sám o sobě ještě neposkytuje informace v podobě, která je potřeba pro vyhodnocení zkoumaného děje. Tyto informace se získají teprve řešením zmíněného modelu, nejčastěji pomocí numerického řešení za použití vhodných simulačních nástrojů v počítači. [2], [14]

Kombinace přímého a nepřímého modelování

Každá z výše uvedených metod má své charakteristické vlastnosti, klady i zápory. Metoda přímého modelování se dnes prakticky používá jen pro specifické aplikace, u kterých je z důvodu jejich složitosti a nastavení provozních podmínek dosti náročné využít metod nepřímého modelování nebo v nich probíhají procesy, které nejsou dosud teoreticky řešitelné. Avšak ani metoda nepřímého modelování není vždy postačující, jelikož některé aplikace využívají parametry jako např. přestup tepla či difuzní koeficient, které jsou zjišťovány výhradně empirickým přístupem zakládající se na přímém pozorování zkoumaných veličin. Takto získané parametry posléze vystupují v matematickém modelu jako konstanty. Z těchto důvodů je vhodné a někdy i nutné pro seznámení se s danou problematikou zvolit vzájemnou kombinaci obou zmíněných přístupů při modelování, čímž se docílí určitého kompromisu mezi kladnými a zápornými vlastnostmi každé z těchto metod a zároveň se tím umožní docílit optimálních výsledků při tvorbě matematických modelů. [2]

2.2 Klasifikace matematických modelů

Při analýze modelovaného systému je vhodné stanovit, do které kategorie patříčný matematický model spadá, což umožní snáze rozpoznat základní vlastnosti a strukturu zkoumaného modelu. Mezi nejčastější členění matematických modelů dynamických systémů lze zařadit stochastické a deterministické modely podle toho, zda se v modelu vyskytují či nevyskytují náhodné veličiny. Dále lze matematické modely klasifikovat dle průběhu času nebo lineárnosti. [10]

Matematické modely stochastické a deterministické

Modelovaný systém je z hlediska stochastického matematického modelu dán pouze definovanými vstupními a výstupními veličiny. Pro tento přístup se také vžil pojem metody „černé skříňky“, která popisuje skutečnost, že na zkoumaný systém se nahlíží pouze z vnějšku, aniž by se zohledňovalo, co se děje uvnitř daného systému. Při vytváření stochastického modelu se v celém rozsahu podmínek experimentálně určí vztahy mezi vstupními a výstupními veličinami a výsledek se popíše vhodným matematickým popisem systému na základě jeho předpokládaného chování, přičemž se do takto vytvořeného matematického popisu zohlední parametry neznámých hodnot. Postupuje se přitom tak, že se na vstupu do systému v pravidelném časovém intervalu přivádí proměnlivý vstupní signál tak dlouho, až se na výstupu ze systému obdrží dostatečný počet naměřených hodnot. Získané výsledky se posléze analyzují a statisticky zpracují tak, že se získají hodnoty parametrů zvoleného matematického popisu. Při tvorbě stochastického modelu se tedy využívá statistických metod a zahrnují se do něj určité pravděpodobnosti výskytu náhodných veličin, jelikož chování modelovaného systému je v tomto případě převážně popsáno pravděpodobnostními funkcemi náhodně přiváděných vstupních a získaných výstupních veličin. Z toho je zřejmé, že je nutné provést větší počet měření, aby bylo možné s určitou pravděpodobností definovat patřičné výstupy. Metoda stochastického modelu je výhodná především z toho důvodu, že není potřeba zkoumat děje probíhající uvnitř systému, pro matematický popis je dostačující znalost vstupních a výstupních veličin. Z toho zároveň plyne i skutečnost, že z důvodu chybějících informací o procesech probíhajících uvnitř systému nelze tento model přenést na jiné zařízení. [2], [16], [17]

Zcela jiným přístupem je použití deterministického modelu, u kterého se již neuplatňují náhodné vlivy či jejich pravděpodobnosti výskytu, ale informace o modelovaném systému jsou zde určovány s jistotou. Deterministické modely vychází z obecně platných fyzikálních či chemických zákonitostí popisující daný proces a jsou tedy odvozovány na základě analýz a matematických popisů skutečných dějů probíhajících ve zkoumaném systému, čímž jsou v nich zachyceny veškeré působící vlivy na tento systém. Mezi stochastickým a deterministickým modelem je tedy zřejmý výrazný rozdíl, zatímco u deterministického modelu se popisuje stav modelovaného systému, který se při opakovaném pokusu a za stejných počátečních podmínek chová stejně, u stochastického modelu se určuje pravděpodobnost, zda se daný stav v jistém bodě vyskytne či nikoliv, přičemž zde hraje roli náhoda i za stejných podmínek. Zde je vhodné dodat, že oba modely nejsou od sebe rozděleny ostrou hranicí a lze je proto vhodně kombinovat. [2], [16], [17]

Matematické modely statické a dynamické

Dalším neméně důležitým rozdělením jsou statické a dynamické matematické modely, u kterých hraje významnou roli čas. Statické modely popisují zkoumaný systém bez ohledu na časový vývoj, všechny jeho proměnné jsou vztaženy ke stejnému časovému období či intervalu. Naopak dynamické modely zohledňují probíhající procesy uvnitř systému právě v průběhu času. Každá proměnná, která je závislá na čase se v tomto případě vztahuje k různému časovému období či intervalu [17]. Převážná většina matematických modelů je právě dynamických jako např. výměníky tepla, u kterých se předpokládá určitá doba trvání dynamického děje.

Matematické modely lineární a nelineární

Matematické modely jsou sestaveny pomocí proměnných, jež charakterizují vzájemné vazby mezi matematickými funkcemi. Tyto vazby mohou být lineární či nelineární podle toho, zda jsou vyjádřeny lineárními nebo nelineárními rovnicemi. Nelinearitu v diferenciálních rovnicích charakterizují např. součin dvou stavových proměnných, mocnina či odmocnina jedné z nich apod. [13]

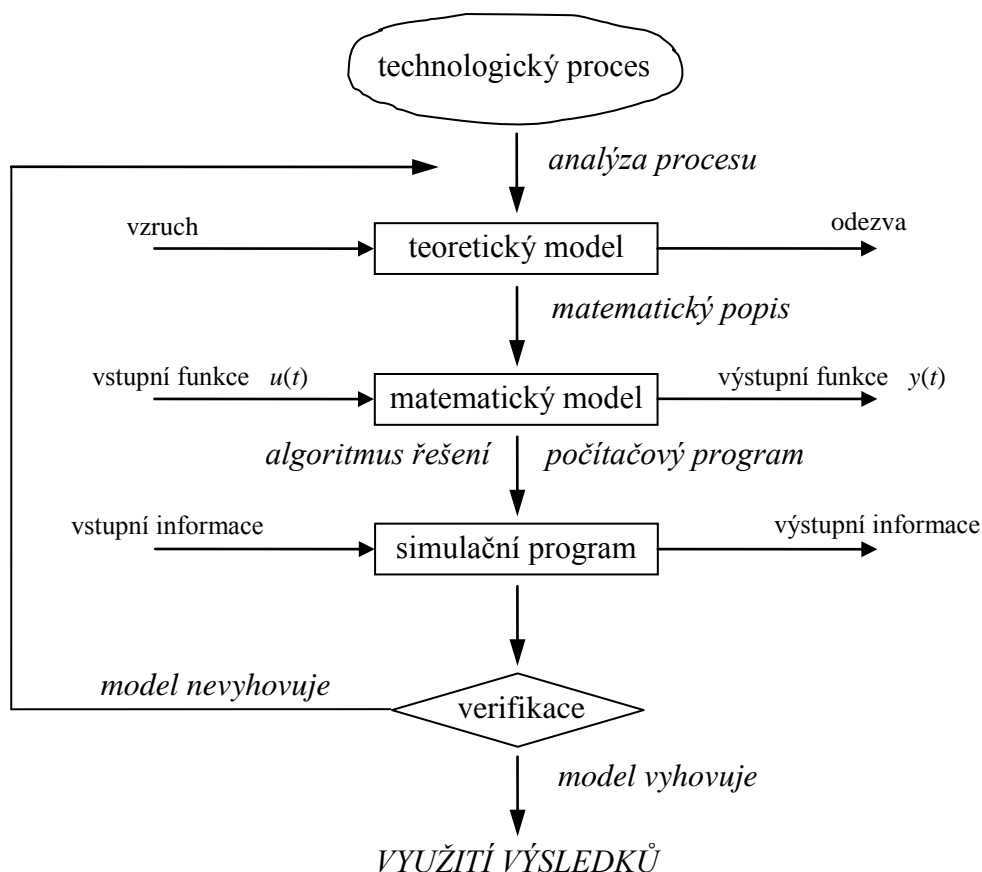
Matematické modely se soustředěnými a rozloženými parametry

Matematické modely se soustředěnými parametry se vztahují k tzv. homogenním systémům konzistentním v celém jejich rozsahu, u kterých není stav funkcí polohy, resp. nezávisí na místě, kde stavovou veličinu měříme. Vyskytují se zde stejné hodnoty sledovaných parametrů v celém prostoru a stavová veličina je tedy funkcí pouze jedné proměnné. Modely se soustředěnými parametry jsou popsány obyčejnými diferenciálními rovnicemi. Pokud je model popsán soustavou parciálních diferenciálních rovnic, jedná se o model s rozloženými parametry. Ten se využívá u heterogenních systémů, u nichž dochází k rozdílnému stavu v různých částech systému. Stavová veličina je v tomto případě závislá nejen na jedné proměnné, ale i na poloze ve zkoumaném objektu [2]. Typickým příkladem matematického modelu s rozloženými parametry může být např. mísič kapalin, u kterého se neuvažuje s dokonalým promícháváním kapalin, v opačném případě při zanedbání nedokonalého promíchávání se jedná již o matematický model se soustředěnými parametry.

2.3 Tvorba matematického modelu

Vytváření matematického modelu je první fází procesu modelování, při němž se vhodnými prostředky získávají poznatky o zkoumaném objektu a procesech, které v něm probíhají. Matematické modely procesů jsou tedy efektivním nástrojem pro jejich hlubší zkoumání, neboť jsou využívány v technické praxi jako levná a bezriziková náhrada technologických experimentů. Matematickým modelem se rozumí úplný matematický popis daného technologického procesu, který popisuje matematické vztahy mezi stavovými veličinami, a které vyjadřují stav daného procesu nejčastěji v závislosti na čase, což je charakterizováno dynamikou procesu. Stavovými veličinami mohou být např. teplota, tlak, množství či koncentrace látek. Matematickými vztahy jsou nejčastěji algebraické nebo diferenciální (obyčejné i parciální) lineární nebo nelineární rovnice či jejich soustavy. Matematický model zahrnuje kromě zmíněných rovnic a jejich soustav také příslušné počáteční a okrajové podmínky. Je však nutno dodat, že vztahy reálných objektů jsou ve skutečnosti vždy složitější, než sebelépe vytvořený model, proto se při tvorbě matematického modelu uplatňují nejruznější zjednodušující předpoklady, případně se aproximují složitější vztahy jednoduššími.

Při matematickém modelování se vychází z obecného schématu znázorněného na Obr. 2.2, který popisuje jednotlivé kroky vedoucí postupně k vytvoření matematického modelu včetně vzájemného propojení a vazeb mezi nimi.



Obr. 2.2 – Schéma detailního postupu vytváření matematického modelu [17]

Prvním krokem, kterým je nutné v první řadě začít, je provést důkladnou analýzu technologického procesu. Při něm se musí specifikovat všechny děje, které v tomto procesu probíhají a určit jejich podstatu. Dále se vymezí vlivy působící na tento proces a jeho průběh a určí se veličiny, které jej popisují. O každém z výše uvedených aspektů je nutné rozhodnout, do jaké míry je pro zkoumaný proces podstatný a zda se do matematického modelu zahrne či nikoliv. Tím se tento model stane výrazně jednodušším a ve výsledku se obdrží teoretický model, jehož výhoda spočívá právě ve zjednodušení, přehlednosti a také snazším řešení výsledných rovnic [17]. Míra přesnosti modelu a jeho zjednodušení byla podrobně popsána na konci první kapitoly, v dalším textu budou uvedeny některé názorné příklady, které k tomuto zjednodušení vedou.

Mezi nejpoužívanější zjednodušující předpoklady patří rozdělení systému na jednodušší podsystémy, které lze s výhodou zpracovávat odděleně, dále zavádět ideální formy v podobě ideálních plynů či kapalin, předpokládat nezávislost látkových vlastností na teplotě, zanedbávat ztráty, neuvažovat závislosti sledovaných veličin na souřadnicích, případně při výskytu nelineárních závislostí tyto vhodně linearizovat.

Po předchozí analýze technologického procesu následuje druhý krok a to sestavení matematického popisu procesu na základě jeho vytvořeného teoretického modelu. Tento postup zahrnuje vhodný výběr matematického popisu zákonitostí a následně vytvoření modelových rovnic doplněné o zjednodušující předpoklady a potřebné matematické úpravy. Dále se určí podmínky řešení v podobě počátečních a okrajových podmínek v případě diferenciálních rovnic. Výše uvedeným postupem se získá obecný matematický model procesu. [17]

V třetím kroku celého postupu následuje vytvoření simulačního programu, který umožní odpovídajícím způsobem řešit navržený matematický model. Hlavními aspekty, které je nutné v tomto kroku splnit, představují vhodnou volbu použité metody řešení modelových rovnic, nalezení vhodného algoritmu řešení a následné sestavení výpočetního programu. [17]

Před samotnou aplikací vytvořeného počítačového programu zahrnující daný matematický model je nutné tento model nejprve verifikovat, resp. ověřit a vyhodnotit jeho řešení, což popisuje poslední čtvrtý krok celého postupu matematického modelování. Ověřením matematického modelu se provádí testování, zda výsledné hodnoty získané řešením tohoto modelu jsou v souladu s teoretickými předpoklady a odpovídají skutečnosti. Znamená to provést simulaci v patřičném počítačovém programu, čímž se obdrží hodnoty, které lze následně porovnat s hodnotami zkoumaného technologického procesu. To umožňuje s předstihem určit, zda matematický model vyhovuje očekávaným předpokladům či nikoliv. Pokud nejsou splněny tyto předpoklady, znamená to, že nastaly v předchozích krocích určité chyby, které mohly být způsobeny např. neadekvátními zjednodušeními, opomenutím některých důležitých vlastností, případně zanedbáním důležitých jevů mající velký vliv na celkový výsledek. V opačném případě, pokud odhadnutý model vyhovuje a splňuje všechna kritéria, tak se získá počítačový program vhodný pro používání v praxi. [17]

Z výše uvedených kroků je patrné, že ačkoliv se zavádí jisté zjednodušující předpoklady pro usnadnění návrhu matematického modelu, není jeho vytvoření nijak jednoduchou záležitostí a je důležité věnovat pozornost adekvátnímu vystihnutí podstaty zkoumaného děje v technologickém procesu. V praxi se zpravidla postupuje tak, že se navrhne matematický model v co nejjednodušší podobě a v případě, že výsledky nevyhovují očekávání, tak se na základě získaných výsledků při testování tento model postupně zdokonaluje a dále vylepšuje.

2.4 Počáteční a okrajové podmínky používané při návrhu matematického modelu

Definování počátečních a okrajových podmínek je nedílnou součástí vytváření matematického modelu řešeného procesu. Používají se pro řešení matematických modelů popsaných pomocí diferenciálních rovnic, které je nutné nejdříve doplnit příslušným počtem zmíněných podmínek. Pro každou nezávisle proměnnou je potřeba mít tolik vzájemně nezávislých podmínek, jaký je nejvyšší se vyskytující řád derivace podle této proměnné v odpovídajících rovnicích.

Pro obecný popis matematického zápisu příslušných počátečních a okrajových podmínek se používá následujícího označení jednotlivých veličin:

u – závisle proměnná, t – čas, x, y, z – souřadnice, f – funkční předpis, jehož tvar je známý a jehož hodnotu funkce lze kdykoliv vypočítat.

Počáteční podmínka

Počáteční podmínka je obvykle jedna a definuje výchozí stav výpočtu na počátku řešení, tj. v čase $t_0 = 0$. Stanovením této podmínky lze řešit nestacionární procesy. Počáteční podmínka může být získána naměřením počátečního stavu na fyzikálním modelu nebo tvořena výsledkem předchozí analýzy. Obecně lze tuto podmínku vyjádřit jako funkci f souřadnic x, y, z v prostoru a čase t_0 , kdy známe závislou proměnnou u , která se s časem průběžně mění, platí tedy:

pro $t = t_0$, je závisle proměnná $u = f(x, y, z)$, tj. na počátku (v čase t_0) je závisle proměnná u známou funkcí souřadnic x, y, z .

Okrajové podmínky

Volba okrajových podmínek je oproti předchozí podmínce komplexnější. Okrajové podmínky se vyskytují v případech, kde jako nezávisle proměnné vystupují souřadnice. Tyto podmínky jsou zadávány na hranicích tělesa a popisují např. teplotu okolí, intenzitu tepla apod. Okrajové podmínky mohou být stacionární (konstantní v čase) nebo nestacionární (časově proměnné) a lineární (nezávislé na dalších veličinách) nebo nelineární (závislé na různých veličinách). Nesprávné zadání okrajových podmínek může vést k chybným výsledkům nebo nestabilitě řešení.

Rozeznáváme celkem tři základní typy okrajových podmínek [17]:

- okrajová podmínka 1. druhu (Dirichletova):

pro $x = x_0$, $u = f(y, z, t)$, tj. hodnota závisle proměnné v místě x_0 je známou funkcí ostatních souřadnic a času;

- okrajová podmínka 2. druhu (Neumannova):

pro $x = x_0$, $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_0} = f(y, z, t)$, tj. hodnota derivace závisle proměnné podle jedné souřadnice (např. podle x v bodě x_0) je známou funkcí ostatních souřadnic a času.

- okrajová podmínka 3. druhu (Newtonova):

pro $x = x_0$, $a \cdot u(x_0, y, z, t) + b \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = f(y, z, t)$, tj. hodnota lineární kombinace hodnoty závisle proměnné u v bodě x_0 a její derivace podle x v místě x_0 je známou funkcí ostatních souřadnic a času. Konstanty a, b jsou koeficienty lineární kombinace.

3 BILANCE

Bilance jsou častým způsobem, pomocí kterého lze vytvářet matematické modely. Slouží k provedení komplexní analýzy činnosti zpracovatelských zařízení, ke zhodnocení více různých technologických postupů, ale také k posouzení ekonomičnosti daného zařízení. Bilancemi se rozumí aplikace zákonů o zachování na zkoumaný, bilancovaný systém. Mezi tyto zákony patří zejména základní zákony o zachování hmoty a energie. V případech, kdy probíhá chemická reakce, se uplatňují též zákony chemické rovnováhy. Před samotným bilancováním je vhodné se nejprve seznámit s některými základními pojmy, mezi které patří zejména bilancovaný systém a bilanční časový interval. Pod bilancovaným systémem si lze představit oblast, která má definované rozhraní, resp. hranice s okolím, které systém obklopuje. Bilanční časový interval charakterizuje časový úsek, během kterého se bilancované veličiny sledují. Při bilancování je vždy snaha rozložit probíhající děje ve zkoumaném, technologickém procesu na soustavu jednodušších dějů, což výrazně pomůže k sestavení základní bilanční rovnice. Tato je obecně ve tvaru [18]:

$$vstup + vznik = výstup + akumulace \quad (3.1)$$

Vstup je množství bilancované veličiny, které za bilanční časový interval vstoupí z okolí přes rozhraní dovnitř systému. Příkladem mohou být vstupující kapaliny na vstupu do výměníku tepla atd.

Vznik je množství bilancované veličiny, které za bilanční časový interval uvnitř systému vznikne (z jiné nebilancované veličiny) nebo zanikne (změnou na jinou, nebilancovanou veličinu). Jestliže bilancovaná veličina zaniká, je to vyjádřeno jako vznik se záporným znaménkem, v opačném případě je znaménko kladné. Příkladem může být chemická přeměna, přeměna elektrického proudu na teplo, růst či odumírání mikroorganismů atd.

Výstup je množství bilancované veličiny, které za bilanční časový interval vystoupí ze systému přes rozhraní do okolí. Příkladem může být výstupní koncentrace kapalin na výstupu z koncentračního směšovače kapalin atd.

Akumulace je změna množství bilancované veličiny uvnitř systému za bilanční časový interval. Akumulací určité veličiny v systému se tedy rozumí změna množství této veličiny, respektive rozdíl mezi jejím množstvím na začátku a na konci bilančního období. Ve sledovaném období se tedy může v daném systému hmota, případně energie hromadit

nebo ubývat, tzn., že systém ztrácí (záporná akumulace) nebo nabývá hmotu či energii (kladná akumulace). K akumulaci běžně dochází u neustálených dějů, při nichž se množství hmoty, energie a složení mění s časem. Pokud se stav systému nemění v čase, pak se tento systém nachází v ustáleném stavu a jeho akumulace je v takovém případě nulová. Příkladem akumulace uvnitř systému může být změna teploty od začátku změny až do jejího ustálení.

Zde je vhodné také zmínit, že bilancovat lze pouze extenzivní veličiny, tzn. veličiny, u kterých se numerická hodnota mění s velikostí bilancovaného systému, jako je např. teplo, energie, entalpie, objem, hmotnost, vnitřní energie apod. V opačném případě se jedná o intenzivní veličiny, jejichž hodnota není závislá na velikosti bilancovaného systému. Příkladem může být čas, teplota, hustota, viskozita, měrné teplo apod.

Matematickými modely, kterými se zabývám ve své práci, jsou založeny na bilanci tepelné energie a hmoty. Jedná se o materiálové bilance, jejichž základem pro zpracování jsou energetické bilance. Do jednotlivých složek úplné energetické bilance jsou zahrnuty všechny druhy energií, mezi které patří např. energie tepelná, kinetická, potenciální, vnitřní apod. Obvykle se uvažuje se zjednodušenou energetickou bilancí, v níž jsou vynechány některé položky, které jsou vůči ostatním zanedbatelné. Mezi nejběžnější formy energetických bilancí patří právě zmíněná tepelná – entalpická a hmotová bilance. Základem těchto bilancí je v takovém případě vždy suma hmoty nebo tepla.

3.1 Entalpická bilance

Entalpická bilance je matematickým vyjádřením zákona zachování energie. Tento lze definovat jako celkový počet energií vstupujících v daných proudech do systému a energii dodanou do systému za určité časové období, které se rovnají součtu celkové energie vystupující ve stejném časovém období, vykonané práce a množství energie, které se v systému akumuluje. Schematicky lze tuto definici vyjádřit následovně:

$$\Sigma \text{ energií ve vstupních proudech} + \text{energie dodaná do systému} = \Sigma \text{ energií ve výstupních proudech} + \text{vykonaná práce} + \text{akumulace energie v systému}$$

Entalpickou bilanci lze sestavit jednak pro bilancované množství tepla v systému (J), jednak pro tepelné toky v jednotkách (W) podle toho, zda je základem entalpické bilance jednotka množství (kg, kmol), jednotka toku látky (kg/s nebo kmol/s), popř. jiné. [22]

S entalpickou bilancí souvisí také sdílení a prostup tepla, které budou v následujících odstavcích krátce zmíněny.

Sdílení tepla

Při vzájemném kontaktu dvou těles si jejich atomy či molekuly v místě styku předávají svou energii. Tím energie postupně přechází z jednoho tělesa na druhé. Těleso, které ztrácí svou energii, se označuje jako teplejší, naopak těleso, které takto energii získává, se označuje jako chladnější. Vzájemné sdílení energie mezi těmito tělesy probíhá do doby, dokud se mezi nimi nevytvoří tzv. tepelná rovnováha. [22]

Rozlišují se tři základní mechanismy sdílení tepla a to vedení (kondukce), proudění (konvekce) a sálání (radiace). Vedením se sdílí teplo mezi molekulami a atomy tělesa. Proudění nastává v tekutinách, kde se mohou pohybovat jak atomy a molekuly, tak i elementy objemu této tekutiny. Sdílení tepla vedením i prouděním je závislé na hmotném prostředí, a pokud se nejedná o plyny, lze je popsat při velmi nízkých tlacích nebo velmi vysokých teplotách. Sdílení tepla sáláním, naopak vázáno na hmotné prostředí není. Energie se zde šíří formou elektromagnetického vlnění pomocí obdobných zákonitostí jako šíření světla. Každé těleso vyzařuje energii, přičemž vyzářené množství rychle roste s teplotou. Ve skutečnosti je sdílení tepla vždy určitou kombinací těchto mechanismů, přičemž jeden z nich obvykle převládá a na ten se při výpočtech celý proces redukuje. Sdílení tepla může probíhat buďto paralelně, když dochází současně k sálání a konvekci nebo sériově tak, jako je tomu například při sdílení tepla mezi dvěma tekutinami oddělených pevnou stěnou. Tento způsob předávání energie se nazývá prostup tepla. [19]

Prostup tepla

Při prostupu dochází ke sdílení tepla z jednoho prostředí do druhého přes jednoduchou nebo vrstvenou přepážku. Tento děj, se cíleně využívá u tepelných výměníků, přičemž k němu může dojít při prostupu tepla rovinnou nebo válcovou stěnou. [19]

3.2 Hmotová bilance, způsoby vyjadřování koncentrací

Hmotová bilance je matematickým vyjádřením zákona zachování hmoty. Pro tento zákon platí, že celková hmota vstupující v daných proudech do systému za určité časové období se rovná celkové hmotě vystupující ve stejném časovém období a množství hmoty, které se v systému akumuluje. Schematicky lze tuto definici vyjádřit následovně:

Σ hmot ve vstupních proudech vstupující do systému = Σ hmot ve výstupních proudech + akumulace hmoty v systému

Ke kvantitativnímu popisu hmotovou bilancí je nutné znát množství a složení jednotlivých proudů, které číselně vyjadřujeme hmotnostmi (m , m_i) v kilogramech, případně v dalších jednotkách (g, t aj.). U nepřetržitých operací se zavádí pojem hmotového průtoku \dot{m} , resp. \dot{m}_i (i -tá složka v daném proudu) v jednotkách kg/s apod.

Obvykle je výhodné vyjadřovat složení pomocí hmotových, objemových nebo molárních zlomků. Hmotový zlomek lze popsat následujícím vztahem:

$$w_i = \frac{m_i}{m} = \frac{m_i}{\sum_{i=1}^k m_i} \quad (3.2)$$

kde k je počet složek v daném proudu, m hmotnost systému (kg) a m_i hmotnost i -té složky v systému (kg). Množství i -té složky proudu je tedy rovno součinu hmotového zlomku a celkového množství proudu $m_i = w_i \cdot m$. Neméně důležitým vyjádřením složení jednotlivých proudů je objemový zlomek, který je dán vztahem:

$$\varphi_i = \frac{V_i}{V} = \frac{V_i}{\sum_{i=1}^k V_i} \quad (3.3)$$

kde k je počet složek v daném proudu, V objem systému (m^3) a V_i objem i -té složky v systému. Analogicky lze odvodit vztah pro vyjádření složení pomocí molárních zlomků:

$$x_i = \frac{n_i}{n} = \frac{n_i}{\sum_{i=1}^k n_i} \quad (3.4)$$

kde k je počet složek v daném proudu, n látkové množství systému (mol) a n_i látkové množství i -té složky v systému.

Při hmotové bilanci se obvykle uvažuje s koncentrací rozpuštěných látek v roztoku. Koncentrací lze číselně charakterizovat složení jednotlivých směsí v uvažovaném roztoku a určovat tak jejich obsah v daném množství (hmotnosti nebo objemu) ve vodných roztocích, resp. jiného rozpouštědla. Existuje celá řada způsobů, jak vyjádřit složení koncentrací, přičemž při hmotové bilanci se uvažují zejména molární a hmotnostní koncentrace. Molární koncentrace je definována jako podíl látkového množství rozpuštěné látky a celkového objemu vodného roztoku:

$$c_i = \frac{n_i}{V}; \quad [\text{mol.m}^{-3}] \quad (3.5)$$

kde n_i je látkové množství složky i v uvažovaném systému (mol) a V je celkový objem systému (m^3). V případě hmotnostní koncentrace je vztah analogický a vyjadřuje podíl hmotnosti rozpuštěné látky a celkového objemu vodného roztoku:

$$c_i = \frac{m_i}{V}; \quad [\text{kg.m}^{-3}] \quad (3.6)$$

kde m_i je hmotnost složky i v uvažovaném systému (kg) a V je celkový objem systému (m^3).

3.3 Modelové rovnice

S popisem a tvorbou matematického modelu pomocí základní bilanční rovnice (3.1) úzce souvisí také otázka řešení zmíněných modelů. Jestliže byl odvozen matematický model, je nutné přistoupit k řešení modelových rovnic a případně stanovit neznámé hodnoty parametrů modelu. Modelovými rovnicemi jsou nejčastěji obyčejné diferenciální rovnice (ODR) s časem jako nezávisle proměnnou, nebo pokud je nezávisle proměnnou i některá souřadnice, pak jejich popis vede na parciální diferenciální rovnice (PDR) [18]. Matematické modely, obsažené v této práci, jsou popsány výhradně obyčejnými diferenciálními rovnicemi 1. řádu s konstantními koeficienty. Obecně lze nehomogenní diferenciální rovnici n -tého řádu v časové oblasti vyjádřit ve tvaru:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_1 u'(t) + b_0 u(t) \quad (3.7)$$

nebo též jako podíl diferenciálů závislé a nezávislé proměnné ve tvaru:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{d\tau^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{d\tau^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{d\tau} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{d\tau^m} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{d\tau} + b_0 u(t) \quad (3.8)$$

Uvedená rovnice (3.7), resp. (3.8) popisuje chování spojitého SISO systému s jednou vstupní a výstupní veličinou, kde a_i a b_i představují konstantní koeficienty, $u(t)$ vstupní a $y(t)$ výstupní veličinu systému. Stupeň nejvyšší derivace n pak určuje řád dynamického systému.

Pro řešení uvedené lineární diferenciální rovnice je nutné znát počáteční podmínky systému $y(0)$, $y'(0)$ až $y^{(n-1)}(0)$ a průběh vstupní veličiny $u(t)$ včetně jejich počátečních podmínek $u(0)$ až $u^{(m-1)}(0)$.

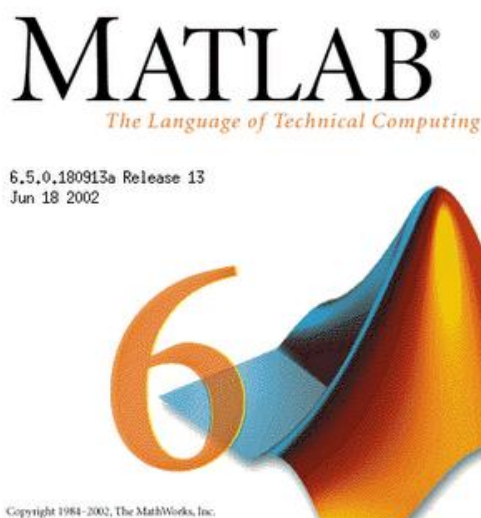
Mezi řady derivací na levé a pravé straně rovnic (3.7) a (3.8) musí platit podmínka fyzikální realizovatelnosti $m \leq n$. Tato podmínka ryzosti (fyzikální realizovatelnosti) systému je podmínkou kauzality. Pokud by byl řád derivace na pravé straně diferenciální rovnice větší jak na levé straně této rovnice, pak by se odezva na budící signál generovala dříve, nežli samotný budící signál, což u reálných fyzikálních systémů nelze realizovat. Na takto sestavenou diferenciální rovnici splňující výše uvedené podmínky lze použít metodu Laplaceovy transformace a pomocí slovníku převést tyto rovnice z časové oblasti do oblasti komplexní proměnné a obdržet tak algebraické rovnice. [10], [21]

4 PROGRAMOVÁ APLIKACE

Pro matematické modelování a simulace dynamických dějů probíhajících v technologických procesech existuje mnoho softwarových aplikací, mezi které patří např. MATLAB nebo jeho nadstavba Simulink, COMSOL Multiphysics, Maple a spousta dalších, pomocí kterých lze tyto procesy snáze simulovat. Z výše jmenovaných byl jako nejvhodnější software pro matematické modelování vybrán právě MATLAB, jelikož tento je hojně dostupný a používaný na téměř všech počítačích fakulty aplikované informatiky ve Zlíně.

Název MATLAB je akronym pro slovní spojení MATrix LABoratory, což lze volně přeložit také jako maticová laboratoř. MATLAB je výkonné programové prostředí a skriptovací programovací jazyk čtvrté generace pro vědeckotechnické výpočty, matematické modelování, návrhy algoritmů, simulace, automatické řízení a regulaci, zpracování signálů, měření aj.

Výpočetní systém MATLAB se během uplynulých let stal celosvětovým standardem v oblasti technických výpočtů a simulací ve sféře vědy, výzkumu, průmyslu i v oblasti vzdělávání. MATLAB poskytuje svým uživatelům nejen výkonné grafické a výpočetní nástroje, ale i rozsáhlé specializované knihovny funkcí spolu s programovacím jazykem čtvrté generace. Díky své architektuře je MATLAB určen zejména těm, kteří potřebují řešit početně náročné úlohy a přitom nechtějí nebo nemají čas zkoumat matematickou podstatu problémů. Za nejsilnější stránku MATLABu je považováno mimořádně rychlé výpočetní jádro s optimálními algoritmy. [20]



Obr. 4.1 – Úvodní okno programového prostředí MATLAB [20]

II. PRAKTICKÁ ČÁST

5 NÁVRH MATEMATICKÝCH MODELŮ

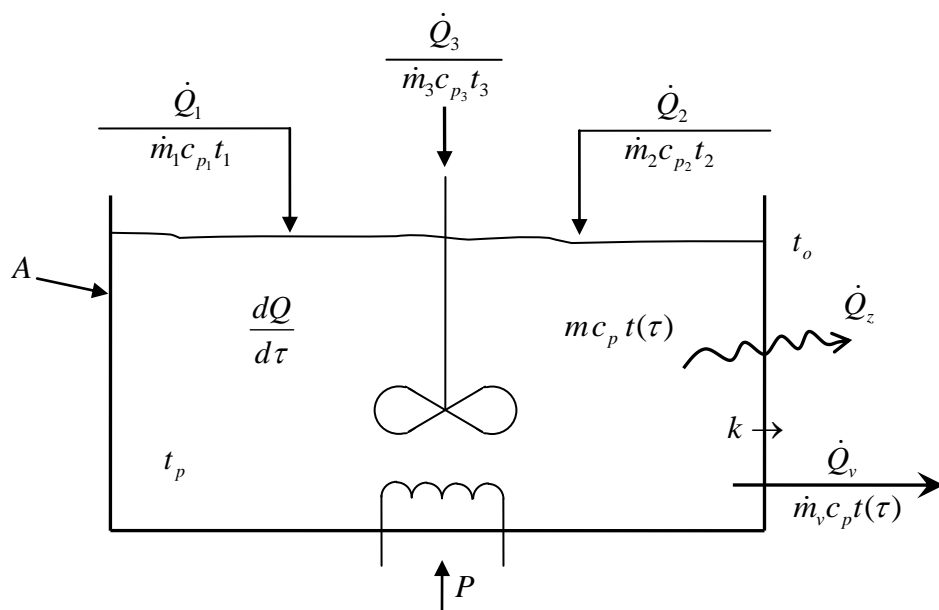
V této části práce se zabývám návrhem matematických modelů založených na entalpické a hmotové bilanci dynamických systémů. Za účelem jednoduššího řešení diferenciálních rovnic, které je jinak poměrně náročné, jsem využil převodu pomocí Laplaceovy transformace [21] metodou rozkladu na parciální zlomky. Tím jsem docílil převodu diferenciálních rovnic z časové oblasti na algebraické rovnice v oblasti komplexní proměnné „ s “, což mi umožnilo tyto rovnice snáze řešit. Po nutných algebraických úpravách jsem mohl pomocí zpětné Laplaceovy transformace převést vyřešené algebraické rovnice zpět do časové oblasti.

5.1 Matematické modely založené na entalpické bilanci

Pomocí matematických modelů založených na entalpické, resp. tepelné bilanci lze řešit průběhy teplotních polí v tuhé fázi během zpracovávaného technologického procesu a na základě toho určit dobu trvání daného procesu při uvažování počátečních, případně okrajových podmínek. Entalpickou bilanci lze bilancovat matematické modely různých technologických zařízení, mezi které patří průtočně míchaný tepelný směšovač kapalin, rekuperační výměník tepla nebo průtočný polymerační reaktor, kterými se zabývám v této práci.

Entalpická bilance průtočného směšovače kapalin

Průtočný, tepelný směšovač nebo také tepelný míšič kapalin slouží pro mísení nebo homogenizaci kapalných produktů v technologických procesech při dodržení optimálních teplot. Jak bylo zmíněno v teoretické části, je pro návrh matematického modelu zapotřebí zavést určité zjednodušující předpoklady. Mezi hlavní zjednodušující podmínky patří dokonalé promíchávání roztoku v mísiči, zanedbání tepelné kapacity stěny zásobníku, uvažování konstantních průtoků kapalin a stejně tak i některých technologických parametrů jako jsou koeficient prostupu tepla a měrné tepelné kapacity kapalin. Vzhledem k zavedení uvedené podmínky dokonalého promíchávání kapalin je stavová veličina nezávislá na poloze v prostoru a je v dynamickém stavu pouze funkcí času, čímž se obdrží model se soustředěnými parametry. Obecné schéma neizolovaného průtočného, tepelného směšovače kapalin se zanedbáním tepelných ztrát do stěn je znázorněno na Obr. 5.1.



Obr. 5.1 – Schéma neizolovaného průtokového míšiče kapalin
se zanedbáním tepelných ztrát do stěn nádoby

kde je \dot{Q}_i tok tepla (tepelný tok) na vstupu, popř. \dot{Q}_v na výstupu z míšiče kapalin (W), Q akumulace tepla (W), \dot{Q}_z přechod tepla přes stěnu nádrže míšiče kapalin do okolí (W), \dot{m}_i , \dot{m}_v hmotnostní průtok kapaliny na vstupu, popř. výstupu z míšiče kapalin ($\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$), m hmotnost kapaliny (kg), c_{p_i} měrná tepelná kapacita na vstupu do směšovače ($\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$), c_p měrná tepelná kapacita akumulovaná ($\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$), t_i teplota vstupní kapaliny ($^{\circ}\text{C}$), t_p počáteční teplota ($^{\circ}\text{C}$), t_o teplota okolí ($^{\circ}\text{C}$), $t(\tau)$ teplota jako funkce času ($^{\circ}\text{C}$), A teplosměnná plocha (m^2), k součinitel prostupu tepla ($\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$), P příkon topení (W).

Na základě bilančního vztahu (3.1) jsem stanovil bilancované veličiny:

- vstupní parametry: $\dot{m}_1 c_{p_1} t_1$, $\dot{m}_2 c_{p_2} t_2$, $\dot{m}_3 c_{p_3} t_3$
- vznik: P
- výstupní parametry: $\dot{m}_v c_p t(\tau)$
- akumulace: $m c_p t(\tau)$

Posléze jsem sestavil z uvažovaných bilančních veličin příslušnou bilanční rovnici podle obecného vyjádření (3.1):

$$\dot{Q}_1 + \dot{Q}_2 + \dot{Q}_3 + P = \frac{dQ}{d\tau} + \dot{Q}_v + \dot{Q}_z \quad (5.1)$$

$$\dot{m}_1 c_{p_1} t_1 + \dot{m}_2 c_{p_2} t_2 + \dot{m}_3 c_{p_3} t_3 + P = mc_p \frac{dt}{d\tau} + \dot{m}_v c_p t(\tau) + kA(t(\tau) - t_o) \quad (5.2)$$

Diferenciální rovnici (5.2) jsem zjednodušil zavedením substituce:

$$U_1 = X_1 \frac{dt}{d\tau} + Y_1 t(\tau) + Y_2 (t(\tau) - t_o) \quad (5.3)$$

$$\text{kde} \quad U_1 = \dot{m}_1 c_{p_1} t_1 + \dot{m}_2 c_{p_2} t_2 + \dot{m}_3 c_{p_3} t_3 + P$$

$$X_1 = mc_p$$

$$Y_1 = \dot{m}_v c_p$$

$$Y_2 = kA$$

Předchozí rovnice (5.3) se transformuje přímou Laplaceovou transformací [21], čímž se převede originál jako reálná funkce definovaná v časové oblasti na obraz v podobě komplexní funkce definované v oblasti komplexní proměnné „s“. Tímto postupem se převede původně diferenciální rovnice na algebraickou, kterou je již snadné řešit.

$$\frac{U_1}{s} = X_1 (sT_L(s) - t_p) + Y_1 T_L(s) + Y_2 \left(T_L(s) - \frac{t_o}{s} \right) \quad (5.4)$$

Roznásobením závorek a následným vydělením celé rovnice komplexní proměnnou „s“, lze obdržet následující rovnici:

$$U_1 = X_1 s^2 T_L(s) - X_1 s t_p + Y_1 s T_L(s) + Y_2 s T_L(s) - Y_2 t_o \quad (5.5)$$

Po úpravě:

$$\frac{U_1}{X_1} + s t_p + \frac{Y_2}{X_1} t_o = s T_L(s) \left(s + \frac{Y_1 + Y_2}{X_1} \right) \quad (5.6)$$

Osamostatněním $T_L(s)$ se získá předchozí rovnice ve tvaru:

$$T_L(s) = \frac{\frac{U_1}{X_1} + st_p + \frac{Y_2}{X_1} t_o}{s \left(s + \frac{Y_1 + Y_2}{X_1} \right)} \quad (5.7)$$

Výše uvedená rovnice se rozloží rozkladem na parciální zlomky:

$$\frac{\frac{U_1}{X_1} + st_p + \frac{Y_2}{X_1} t_o}{s \left(s + \frac{Y_1 + Y_2}{X_1} \right)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{\left(s + \frac{Y_1 + Y_2}{X_1} \right)} \quad (5.8)$$

$$\frac{\frac{U_1}{X_1} + st_p + \frac{Y_2}{X_1} t_o}{s \left(s + \frac{Y_1 + Y_2}{X_1} \right)} = \frac{A \left(s + \frac{Y_1 + Y_2}{X_1} \right) + Bs}{s \left(s + \frac{Y_1 + Y_2}{X_1} \right)} \quad (5.9)$$

Dalšími matematickými úpravami rovnice (5.9) jsem dospěl k vyjádření:

$$\frac{U_1}{X_1} + st_p + \frac{Y_2}{X_1} t_o = As + A \frac{Y_1 + Y_2}{X_1} + Bs \quad (5.10)$$

Porovnáním jednotlivých koeficientů u jednotlivých mocnin „s“ se obdrží rovnice:

$$s^0 : \quad \frac{U_1}{X_1} + \frac{Y_2}{X_1} t_o = A \frac{Y_1 + Y_2}{X_1} \quad / \cdot X_1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{U_1 + Y_2 t_o}{Y_1 + Y_2} \quad (5.11)$$

$$s^1 : \quad t_p = A + B \quad (5.12)$$

Dosazením rovnice (5.11) do rovnice (5.12) jsem získal vyjádření B :

$$t_p = \frac{U_1 + Y_2 t_o}{Y_1 + Y_2} + B \quad \Rightarrow \quad B = t_p - \frac{U_1 + Y_2 t_o}{Y_1 + Y_2} \quad (5.13)$$

Pomocí slovníku Laplaceovy transformace [21] jsem rovnici (5.8) převedl zpět do časové oblasti:

Obraz Laplaceovy transformace: $\frac{1}{s} \rightarrow 1$ (jednotkový skok – Heavisideova funkce)

Obraz Laplaceovy transformace: $\frac{1}{s+a} \rightarrow e^{-a\tau}$

Aplikováním zpětné Laplaceovy transformace lze obdržet rovnici opět v časové oblasti:

$$t(\tau) = A + Be^{-a\tau} \quad (5.14)$$

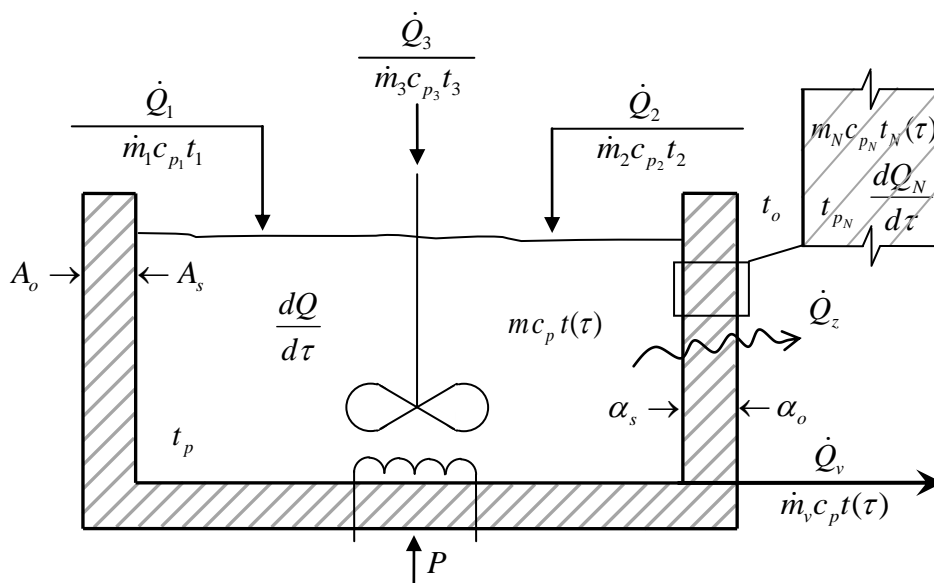
Dosazením rovnic (5.11) a (5.13) s vyjádřením A a B do výše uvedené rovnice jsem získal tuto rovnici ve tvaru:

$$t(\tau) = \frac{U_1 + Y_2 t_o}{Y_1 + Y_2} + \left(t_p - \frac{U_1 + Y_2 t_o}{Y_1 + Y_2} \right) e^{-\frac{Y_1 + Y_2}{X_1} \tau} \quad (5.15)$$

Zpětným převodem substituce se získá výsledné řešení matematického modelu:

$$t(\tau) = \frac{\dot{m}_1 c_{p1} t_1 + \dot{m}_2 c_{p2} t_2 + \dot{m}_3 c_{p3} t_3 + P + k A t_o}{\dot{m}_v c_p + k A} + \left(t_p - \frac{\dot{m}_1 c_{p1} t_1 + \dot{m}_2 c_{p2} t_2 + \dot{m}_3 c_{p3} t_3 + P + k A t_o}{\dot{m}_v c_p + k A} \right) e^{-\frac{\dot{m}_v c_p + k A}{m c_p} \tau} \quad (5.16)$$

V další části bude uvažována entalpická bilance neizolovaného průtočného směšovače kapalin s uvažováním tepelných ztrát do stěny nádoby. Ostatní výše uvedené zjednodušující předpoklady platí i pro tento typ tepelného směšovače kapalin. Obecné schéma průtočně míchaného tepelného směšovače kapalin s uvažováním tepelných ztrát do stěn nádoby je znázorněno na Obr. 5.2.



Obr. 5.2 – Schéma neizolovaného průtokového míšiče kapalin
s uvažováním tepelných ztrát do stěn nádoby

kde je \dot{Q}_i tok tepla (tepelný tok) na vstupu, popř. \dot{Q}_v na výstupu z míšiče kapalin (W), \dot{Q} akumulace tepla kapaliny, popř. \dot{Q}_N akumulace tepla ve stěně nádoby (W), \dot{Q}_z přechod tepla přes stěnu nádoby směšovače kapalin do okolí (W), \dot{m}_i hmotnostní průtok kapaliny na vstupu, popř. \dot{m}_v na výstupu ze směšovače ($\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$), m hmotnost kapaliny (kg), m_N hmotnost stěny nádrže (kg), c_{p_i} měrná tepelná kapacita na vstupu do směšovače ($\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$), c_p , c_{p_N} měrná tepelná kapacita akumulovaná ($\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$), t_i teplota vstupní kapaliny ($^{\circ}\text{C}$), t_p počáteční teplota kapaliny, popř. t_{p_N} počáteční teplota stěny nádrže ($^{\circ}\text{C}$), t_o teplota okolí ($^{\circ}\text{C}$), $t(\tau)$ a $t_N(\tau)$ teplota jako funkce času ($^{\circ}\text{C}$), A_o teplosměnná plocha z vnější strany, popř. A_s teplosměnná plocha z vnitřní strany (m^2), α_o , α_s součinitel přestupu tepla mezi vnější a vnitřní stěnou ($\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$), P příkon topení (W).

Na základě bilančního vztahu (3.1) jsem stanovil bilancované veličiny:

- vstupní parametry: $\dot{m}_1 c_{p1} t_1$, $\dot{m}_2 c_{p2} t_2$, $\dot{m}_3 c_{p3} t_3$, $\alpha_s A_s (t(\tau) - t_N(\tau))$
- vznik: P
- výstupní parametry: $\dot{m}_v c_p t(\tau)$, $\alpha_s A_s (t(\tau) - t_N(\tau))$, $\alpha_o A_o (t_N(\tau) - t_o)$
- akumulace: $m c_p t(\tau)$, $m_N c_{p_N} t_N(\tau)$

Z uvažovaných bilančních veličin jsem podle obecného vyjádření (3.1) sestavil bilanční rovnici:

$$\dot{Q}_1 + \dot{Q}_2 + \dot{Q}_3 + P = \frac{dQ}{d\tau} + \dot{Q}_v + \dot{Q}_{z_1} \quad (5.17)$$

$$\dot{Q}_{z_1} = \frac{dQ_N}{d\tau} + \dot{Q}_{z_2} \quad (5.18)$$

$$\dot{m}_1 c_{p_1} t_1 + \dot{m}_2 c_{p_2} t_2 + \dot{m}_3 c_{p_3} t_3 + P = mc_p \frac{dt}{d\tau} + \dot{m}_v c_p t(\tau) + \alpha_s A_s (t(\tau) - t_N(\tau)) \quad (5.19)$$

$$\alpha_s A_s (t(\tau) - t_N(\tau)) = m_N c_{p_N} \frac{dt_N}{d\tau} + \alpha_o A_o (t_N(\tau) - t_o) \quad (5.20)$$

Diferenciální rovnici (5.19) a (5.20) jsem zjednodušil zavedením substitute:

$$U_1 = X_1 \frac{dt}{d\tau} + Y_1 t(\tau) + Y_2 (t(\tau) - t_N(\tau)) \quad (5.21)$$

$$Y_2 (t(\tau) - t_N(\tau)) = X_2 \frac{dt_N}{d\tau} + Y_3 (t_N(\tau) - t_o) \quad (5.22)$$

kde $U_1 = \dot{m}_1 c_{p_1} t_1 + \dot{m}_2 c_{p_2} t_2 + \dot{m}_3 c_{p_3} t_3 + P$, $X_1 = mc_p$, $Y_1 = \dot{m}_v c_p$, $Y_2 = kA$

Předchozí dvě rovnice (5.21) a (5.22) se transformují přímou Laplaceovou transformací [21], čímž se převede originál jako reálná funkce definovaná v časové oblasti na obraz v podobě komplexní funkce definované v oblasti komplexní proměnné „s“. Tímto postupem se převedou původně diferenciální rovnice na algebraické, které lze již snadno řešit.

$$\frac{U_1}{s} = X_1(sT_L(s) - t_p) + Y_1T_L(s) + Y_2(T_L(s) - T_{L_N}(s)) \quad (5.23)$$

$$Y_2(T_L(s) - T_{L_N}(s)) = X_2(sT_{L_N}(s) - t_{p_N}) + Y_3\left(T_{L_N}(s) - \frac{t_o}{s}\right) \quad (5.24)$$

Roznásobením závorek a následným vydělením obou rovnic komplexní proměnnou „s“, jsem obdržel rovnice:

$$U_1 = X_1s^2T_L(s) - X_1t_p s + Y_1sT_L(s) + Y_2sT_L(s) - Y_2sT_{L_N}(s) \quad (5.25)$$

$$Y_2sT_L(s) - Y_2sT_{L_N}(s) = X_2s^2T_{L_N}(s) - X_2t_{p_N}s + Y_3sT_{L_N}(s) - Y_3t_o \quad (5.26)$$

Rovnici (5.25) jsem dále upravil:

$$U_1 = X_1s^2T_L(s) - X_1t_p s + Y_1sT_L(s) + Y_2s(T_L(s) - T_{L_N}(s)) \quad (5.27)$$

Z druhé rovnice (5.26) jsem vytknul $T_{L_N}(s)$:

$$T_{L_N}(s) = \frac{Y_2sT_L(s) + X_2t_{p_N}s + Y_3t_o}{s(X_2s + Y_2 + Y_3)} \quad (5.28)$$

Předchozí rovnici jsem dosadil do rovnice (5.27):

$$U_1 = X_1s^2T_L(s) - X_1t_p s + Y_1sT_L(s) + Y_2s\left(T_L(s) - \frac{Y_2sT_L(s) + X_2t_{p_N}s + Y_3t_o}{s(X_2s + Y_2 + Y_3)}\right) \quad (5.29)$$

Následnými úpravami jsem docílil vyjádření $T_L(s)$ z upravované rovnice:

$$T_L(s) = \frac{U_1(X_2s + Y_2 + Y_3) + X_1t_p s(X_2s + Y_2 + Y_3) + X_2Y_2t_{p_N}s + Y_2Y_3t_o}{X_1X_2s^3 + s^2(X_1(Y_2 + Y_3) + X_2Y_1 + X_2Y_2) + s(Y_2(Y_1 + Y_3) + Y_1Y_3)} \quad (5.30)$$

V dalším postupu je nutné upravit jmenovatel, resp. charakteristický polynom ze zlomku (5.30) tak, že se nejdříve osamostatní nejvyšší mocnina „ s “, a dále určí kořeny z kvadratické rovnice:

$$X_1 X_2 s^3 + s^2 (X_1 (Y_2 + Y_3) + X_2 Y_1 + X_2 Y_2) + s (Y_2 (Y_1 + Y_3) + Y_1 Y_3) \quad (5.31)$$

$$s^3 + s^2 \frac{X_1 (Y_2 + Y_3) + X_2 Y_1 + X_2 Y_2}{X_1 X_2} + s \frac{Y_2 (Y_1 + Y_3) + Y_1 Y_3}{X_1 X_2} \quad (5.32)$$

$$a=1; \quad b = \frac{X_1 (Y_2 + Y_3) + X_2 Y_1 + X_2 Y_2}{X_1 X_2}; \quad c = \frac{Y_2 (Y_1 + Y_3) + Y_1 Y_3}{X_1 X_2} \quad (5.33)$$

Řešení kvadratické rovnice:

$$K_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (5.34)$$

$$K_1 = -\frac{\left(\frac{X_1 (Y_2 + Y_3) + X_2 Y_1 + X_2 Y_2}{X_1 X_2} \right)}{2} + \frac{\sqrt{\left(\frac{X_1 (Y_2 + Y_3) + X_2 Y_1 + X_2 Y_2}{X_1 X_2} \right)^2 - 4 \left(\frac{Y_2 (Y_1 + Y_3) + Y_1 Y_3}{X_1 X_2} \right)}}{2} \quad (5.35)$$

$$K_2 = -\frac{\left(\frac{X_1 (Y_2 + Y_3) + X_2 Y_1 + X_2 Y_2}{X_1 X_2} \right)}{2} - \frac{\sqrt{\left(\frac{X_1 (Y_2 + Y_3) + X_2 Y_1 + X_2 Y_2}{X_1 X_2} \right)^2 - 4 \left(\frac{Y_2 (Y_1 + Y_3) + Y_1 Y_3}{X_1 X_2} \right)}}{2} \quad (5.36)$$

Následně jsem obdobným způsobem provedl osamostatnění nejvyšší mocniny „ s “ v čitateli zlomku (5.30):

$$U_1(X_2s + Y_2 + Y_3) + X_1t_p s(X_2s + Y_2 + Y_3) + X_2Y_2t_{p_N}s + Y_2Y_3t_o \quad (5.37)$$

$$\frac{U_1X_2}{X_1X_2}s + \frac{U_1Y_2}{X_1X_2} + \frac{U_1Y_3}{X_1X_2} + \frac{X_1X_2t_p}{X_1X_2}s^2 + \frac{X_1Y_2t_p}{X_1X_2}s + \frac{X_1Y_3t_p}{X_1X_2}s + \frac{X_2Y_2t_{p_N}}{X_1X_2}s + \frac{Y_2Y_3t_o}{X_1X_2} \quad (5.38)$$

Na výše uvedenou rovnici jsem použil metodu rozkladu na parciální zlomky a získal tak následující rovnice:

$$\begin{aligned} t_p s^2 + \frac{U_1}{X_1}s + \frac{Y_2t_p}{X_2}s + \frac{Y_3t_p}{X_2}s + \frac{Y_2t_{p_N}}{X_1}s + \frac{U_1Y_2}{X_1X_2} + \frac{U_1Y_3}{X_1X_2} + \frac{Y_2Y_3t_o}{X_1X_2} = \\ = A(s + K_1)(s + K_2) + Bs(s + K_2) + Cs(s + K_1) \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$\begin{aligned} t_p s^2 + s \left(\frac{U_1}{X_1} + \frac{Y_2t_p}{X_2} + \frac{Y_3t_p}{X_2} + \frac{Y_2t_{p_N}}{X_1} \right) + \frac{U_1Y_2}{X_1X_2} + \frac{U_1Y_3}{X_1X_2} + \frac{Y_2Y_3t_o}{X_1X_2} = \\ = s^2(A + B + C) + s(AK_1 + AK_2 + BK_2 + CK_1) + AK_1K_2 \end{aligned} \quad (5.40)$$

Porovnáním jednotlivých koeficientů u jednotlivých mocnin „ s “:

$$s^0: \quad \frac{U_1Y_2}{X_1X_2} + \frac{U_1Y_3}{X_1X_2} + \frac{Y_2Y_3t_o}{X_1X_2} = AK_1K_2 \quad (5.41)$$

$$s^1: \quad \frac{U_1}{X_1} + \frac{Y_2t_p}{X_2} + \frac{Y_3t_p}{X_2} + \frac{Y_2t_{p_N}}{X_1} = A(K_1 + K_2) + BK_2 + CK_1 \quad (5.42)$$

$$s^2: \quad t_p = A + B + C \quad (5.43)$$

Z rovnice (5.41) jsem vyjádřil člen A :

$$A = \frac{U_1(Y_2 + Y_3) + Y_2Y_3t_o}{K_1K_2X_1X_2} \quad (5.44)$$

Předchozí rovnici jsem dosadil do rovnice (5.42):

$$\frac{U_1}{X_1} + \frac{Y_2 t_p}{X_2} + \frac{Y_3 t_p}{X_2} + \frac{Y_2 t_{p_N}}{X_1} = \frac{U_1(Y_2 + Y_3) + Y_2 Y_3 t_o}{K_1 K_2 X_1 X_2} (K_1 + K_2) + BK_2 + CK_1 \quad (5.45)$$

Následnou úpravou výše uvedené rovnice lze vyjádřit první člen B :

$$B = - \left(\frac{CK_1^2 K_2 X_1 X_2 - K_1 (K_2 (U_1 X_2 + X_1 t_p (Y_2 + Y_3) + X_2 Y_2 t_{p_N}) - U_1 (Y_2 + Y_3) - Y_2 Y_3 t_o) +}{K_1 K_2^2 X_1 X_2} \right. \\ \left. + \frac{K_2 (U_1 (Y_2 + Y_3) + Y_2 Y_3 t_o)}{K_1 K_2^2 X_1 X_2} \right) \quad (5.46)$$

Dosazením do rovnice (5.39) za $s \rightarrow -K_1$ jsem získal tuto ve tvaru:

$$K_1^2 t_p - \frac{U_1 K_1}{X_1} - \frac{K_1 Y_2 t_p}{X_2} - \frac{K_1 Y_3 t_p}{X_2} - \frac{K_1 Y_2 t_{p_N}}{X_1} + \frac{U_1 Y_2}{X_1 X_2} + \frac{U_1 Y_3}{X_1 X_2} + \frac{Y_2 Y_3 t_o}{X_1 X_2} = BK_1 (K_1 - K_2) \quad (5.47)$$

Tímto postupem jsem vyjádřil z této rovnice druhý člen B :

$$B = \frac{K_1^2 X_1 X_2 t_p - K_1 (U_1 X_2 + X_1 t_p (Y_2 + Y_3) + X_2 Y_2 t_{p_N}) + U_1 (Y_2 + Y_3) + Y_2 Y_3 t_o}{K_1 X_1 X_2 (K_1 - K_2)} \quad (5.48)$$

Dosazením rovnic (5.44) a (5.46) do rovnice (5.43) jsem získal rovnici ve tvaru:

$$t_p = \frac{U_1 (Y_2 + Y_3) + Y_2 Y_3 t_o}{K_1 K_2 X_1 X_2} - \\ - \frac{CK_1^2 K_2 X_1 X_2 + K_1 (K_2 (U_1 X_2 + X_1 t_p (Y_2 + Y_3) + X_2 Y_2 t_{p_N}) - U_1 (Y_2 + Y_3) - Y_2 Y_3 t_o) -}{K_1 K_2^2 X_1 X_2} \\ - \frac{K_2 (U_1 (Y_2 + Y_3) + Y_2 Y_3 t_o)}{K_1 K_2^2 X_1 X_2} + C \quad (5.49)$$

$$C = \frac{K_2^2 X_1 X_2 t_p - K_2 (U_1 X_2 + X_1 t_p (Y_2 + Y_3) + X_2 Y_2 t_{p_N}) + U_1 (Y_2 + Y_3) + Y_2 Y_3 t_o}{K_2 X_1 X_2 (K_2 - K_1)} \quad (5.50)$$

Pomocí slovníku Laplaceovy transformace [21] jsem provedl zpětnou Laplaceovu transformaci:

Obraz Laplaceovy transformace: $\frac{1}{s} \rightarrow 1$ (jednotkový skok – Heavisideova funkce)

Obraz Laplaceovy transformace: $\frac{1}{s+a} \rightarrow e^{-a\tau}$

Aplikováním zpětné Laplaceovy transformace lze obdržet rovnici opět v časové oblasti:

$$t(\tau) = A + Be^{-K_1\tau} + Ce^{-K_2\tau} \quad (5.51)$$

Dosazením rovnic (5.44), (5.48) a (5.50) s vyjádřením A , B a C do výše uvedené rovnice jsem získal tuto rovnici ve tvaru:

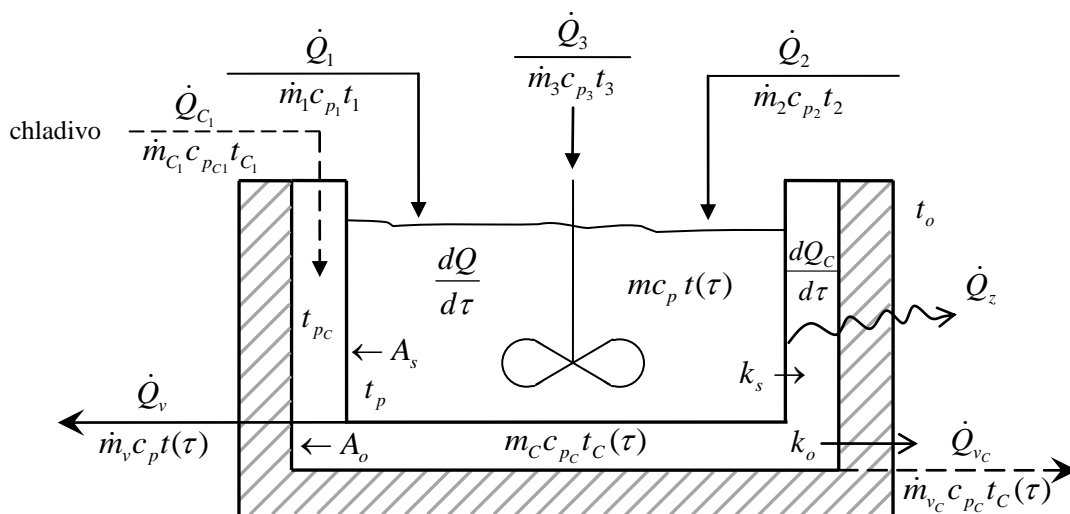
$$\begin{aligned} t(\tau) = & \frac{U_1(Y_2 + Y_3) + Y_2 Y_3 t_o}{K_1 K_2 X_1 X_2} + \\ & + \frac{K_1^2 X_1 X_2 t_p - K_1(U_1 X_2 + X_1 t_p(Y_2 + Y_3) + X_2 Y_2 t_{pN}) + U_1(Y_2 + Y_3) + Y_2 Y_3 t_o}{K_1 X_1 X_2 (K_1 - K_2)} e^{-K_1\tau} + \\ & + \frac{K_2^2 X_1 X_2 t_p - K_2(U_1 X_2 + X_1 t_p(Y_2 + Y_3) + X_2 Y_2 t_{pN}) + U_1(Y_2 + Y_3) + Y_2 Y_3 t_o}{K_2 X_1 X_2 (K_2 - K_1)} e^{-K_2\tau} \end{aligned} \quad (5.52)$$

Zpětným převodem substituce se získá výsledné řešení matematického modelu.

Entalpická bilance rekuperačního výměníku tepla

Rekuperační výměník tepla je jedním z řad technologických zařízení, u kterého je požadavek, aby nedocházelo k vzájemnému smíšení chlazených a chladicích kapalin. Tvoří jej vnitřní, dobře vodivá, teplosměnná stěna oddělující obě kapaliny, přes kterou probíhá výměna tepla mezi těmito kapalinami. Při modelování rekuperačního výměníku tepla se uvažuje s následujícími zjednodušujícími předpoklady: dokonalé promíchávání chlazené kapaliny, zanedbání tepelné kapacity vnitřní i vnější stěny výměníku, uvažování konstantních průtoků kapalin a stejně tak i fyzikálních vlastností jako je prostup tepla nebo měrné tepelné kapacity vyskytujících se kapalin na uvažovaném teplotním rozmezí.

Obecné schéma neizolovaného rekuperačního výměníku tepla s promícháváním a chlazením v plášti je zobrazeno na Obr. 5.3.



Obr. 5.3 – Schéma neizolovaného rekuperačního výměníku tepla s mícháním a chlazením v plášti

kde je \dot{Q}_i a \dot{Q}_{C_i} tok tepla (tepelný tok) na vstupu, popř. \dot{Q}_v a \dot{Q}_{v_c} na výstupu ze směšovače kapalin (W), \dot{Q} akumulace tepla chlazené kapaliny, popř. \dot{Q}_C akumulace tepla chladicí kapaliny (W), \dot{Q}_z přechod tepla přes stěny výměníku (W), \dot{m}_i a \dot{m}_{C_i} hmotnostní průtok vstupních, popř. \dot{m}_v a \dot{m}_{v_c} výstupních kapalin (kg.s^{-1}), m hmotnost chlazené a m_C hmotnost chladicí kapaliny (kg), c_{p_i} a $c_{p_{C_i}}$ měrná tepelná kapacita na vstupu do výměníku ($\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$), c_p , c_{p_c} měrná tepelná kapacita akumulovaná ($\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$), t_i a t_{C_i} teplota vstupní kapaliny ($^{\circ}\text{C}$), t_p a t_{p_c} počáteční teplota chlazené a chladicí kapaliny ($^{\circ}\text{C}$), t_o teplota okolí ($^{\circ}\text{C}$), $t(\tau)$ a $t_C(\tau)$ teplota jako funkce času ($^{\circ}\text{C}$), A_o vnější teplosměnná plocha, popř. A_s vnitřní teplosměnná plocha (m^2), k_o , k_s součinitel prostupu tepla vnější a vnitřní stěny ($\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$).

Na základě bilančního vztahu (3.1) jsem stanovil bilancované veličiny pro první rovnici:

- vstupní parametry: $\dot{m}_1 c_{p_1} t_1$, $\dot{m}_2 c_{p_2} t_2$, $\dot{m}_3 c_{p_3} t_3$
- výstupní parametry: $\dot{m}_v c_p t(\tau)$, $k_s A_s (t(\tau) - t_C(\tau))$
- akumulace: $m c_p t(\tau)$

Dále obdobným způsobem pro druhou diferenciální rovnici:

- vstupní parametry: $\dot{m}_{C_1} c_{p_{C1}} t_{C1}, k_s A_s (t(\tau) - t_C(\tau))$
- výstupní parametry: $\dot{m}_{v_C} c_{p_C} t_C(\tau), k_o A_o (t_C(\tau) - t_o)$
- akumulace: $m_C c_{p_C} t_C(\tau)$

Posléze jsem sestavil z uvažovaných bilančních veličin příslušné bilanční rovnice podle obecného vyjádření (3.1):

$$\dot{Q}_1 + \dot{Q}_2 + \dot{Q}_3 = \frac{dQ}{d\tau} + \dot{Q}_v + \dot{Q}_{z_1} \quad (5.53)$$

$$\dot{Q}_{z_1} + \dot{Q}_{C_1} = \frac{dQ_C}{d\tau} + \dot{Q}_{v_C} + \dot{Q}_{z_2} \quad (5.54)$$

$$\dot{m}_1 c_{p_1} t_1 + \dot{m}_2 c_{p_2} t_2 + \dot{m}_3 c_{p_3} t_3 = m c_p \frac{dt}{d\tau} + \dot{m}_v c_p t(\tau) + k_s A_s (t(\tau) - t_C(\tau)) \quad (5.55)$$

$$k_s A_s (t(\tau) - t_C(\tau)) + \dot{m}_{C_1} c_{p_{C1}} t_{C1} = m_C c_{p_C} \frac{dt_C}{d\tau} + \dot{m}_{v_C} c_{p_C} t_C(\tau) + k_o A_o (t_C(\tau) - t_o) \quad (5.56)$$

Diferenciální rovnici (5.55) a (5.56) jsem zjednodušil zavedením substituce:

$$U_1 = X_1 \frac{dt}{d\tau} + Y_1 t(\tau) + Y_2 (t(\tau) - t_C(\tau)) \quad (5.57)$$

$$Y_2 (t(\tau) - t_C(\tau)) + U_2 = X_2 \frac{dt_C}{d\tau} + Y_4 t_C(\tau) + Y_3 (t_C(\tau) - t_o) \quad (5.58)$$

kde pro rovnici (5.57) a (5.58) platí:

$$U_1 = \dot{m}_1 c_{p_1} t_1 + \dot{m}_2 c_{p_2} t_2 + \dot{m}_3 c_{p_3} t_3; X_1 = m c_p; Y_1 = \dot{m}_v c_p; Y_2 = k_s A_s$$

$$U_2 = \dot{m}_{C_1} c_{p_{C1}} t_{C1}; X_2 = m_C c_{p_C}; Y_3 = k_o A_o; Y_4 = \dot{m}_{v_C} c_{p_C}$$

Předchozí rovnice (5.57) a (5.58) se transformuje přímou Laplaceovou transformací [21], čímž se převede originál jako reálná funkce definovaná v časové oblasti na obraz v podobě komplexní funkce definované v oblasti komplexní proměnné s . Tímto postupem se převedou původně diferenciální rovnice na algebraické, které lze již snadno řešit.

$$\frac{U_1}{s} = X_1(sT_L(s) - t_p) + Y_1T_L(s) + Y_2(T_L(s) - T_{L_c}(s)) \quad (5.59)$$

$$Y_2(T_L(s) - T_{L_c}(s)) + \frac{U_2}{s} = X_2(sT_{L_c}(s) - t_{pc}) + Y_4T_{L_c}(s) + Y_3\left(T_{L_c}(s) - \frac{t_o}{s}\right) \quad (5.60)$$

V obou rovnicích jsem nejprve roznásobil závorky a následně v nich vydělil komplexní proměnnou s , čímž jsem získal následující rovnice:

$$U_1 = X_1s^2T_L(s) - X_1t_p s + Y_1sT_L(s) + Y_2sT_L(s) - Y_2sT_{L_c}(s) \quad (5.61)$$

$$Y_2sT_L(s) - Y_2sT_{L_c}(s) + U_2 = X_2s^2T_{L_c}(s) - X_2t_{pc}s + Y_4sT_{L_c}(s) + Y_3sT_{L_c}(s) - Y_3t_o \quad (5.62)$$

Po úpravě rovnice (5.61):

$$U_1 = X_1s^2T_L(s) - X_1t_p s + Y_1sT_L(s) + Y_2s(T_L(s) - T_{L_c}(s)) \quad (5.63)$$

Z druhé rovnice (5.62) jsem vytknul $T_{L_c}(s)$:

$$T_{L_c}(s) = \frac{Y_2sT_L(s) + X_2t_{pc}s + Y_3t_o + U_2}{s(X_2s + Y_2 + Y_3 + Y_4)} \quad (5.64)$$

Předchozí rovnici jsem dosadil do rovnice (5.63):

$$U_1 = X_1s^2T_L(s) - X_1t_p s + Y_1sT_L(s) + Y_2s\left(T_L(s) - \frac{Y_2sT_L(s) + X_2t_{pc}s + Y_3t_o + U_2}{s(X_2s + Y_2 + Y_3 + Y_4)}\right) \quad (5.65)$$

Následnými úpravami jsem docílil vyjádření $T_L(s)$ z upravované rovnice:

$$T_L(s) = \frac{U_1(X_2s + Y_2 + Y_3 + Y_4) + X_1t_p s(X_2s + Y_2 + Y_3 + Y_4) + X_2Y_2t_{pc}s + Y_2Y_3t_o + U_2Y_2}{X_1X_2s^3 + s^2(X_1(Y_2 + Y_3 + Y_4) + X_2Y_1 + X_2Y_2) + s(Y_2(Y_1 + Y_3 + Y_4) + Y_1Y_3 + Y_1Y_4)} \quad (5.66)$$

V dalším postupu je nutné upravit jmenovatel, resp. charakteristický polynom ze zlomku (5.66) tak, že se nejdříve osamostatní nejvyšší mocnina s , a dále určí kořeny z kvadratické rovnice:

$$X_1X_2s^3 + s^2(X_1(Y_2 + Y_3 + Y_4) + X_2Y_1 + X_2Y_2) + s(Y_2(Y_1 + Y_3 + Y_4) + Y_1Y_3 + Y_1Y_4) \quad (5.67)$$

$$s^3 + s^2 \frac{X_1(Y_2 + Y_3 + Y_4) + X_2Y_1 + X_2Y_2}{X_1X_2} + s \frac{Y_2(Y_1 + Y_3 + Y_4) + Y_1Y_3 + Y_1Y_4}{X_1X_2} \quad (5.68)$$

$$a = 1; \quad b = \frac{X_1(Y_2 + Y_3 + Y_4) + X_2Y_1 + X_2Y_2}{X_1X_2}; \quad (5.69)$$

$$c = \frac{Y_2(Y_1 + Y_3 + Y_4) + Y_1Y_3 + Y_1Y_4}{X_1X_2} \quad (5.70)$$

$$K_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (5.71)$$

$$K_1 = -\frac{\left(\frac{X_1(Y_2 + Y_3 + Y_4) + X_2Y_1 + X_2Y_2}{X_1X_2} \right)}{2} + \frac{\sqrt{\left(\frac{X_1(Y_2 + Y_3 + Y_4) + X_2Y_1 + X_2Y_2}{X_1X_2} \right)^2 - 4 \left(\frac{Y_2(Y_1 + Y_3 + Y_4) + Y_1Y_3 + Y_1Y_4}{X_1X_2} \right)}}{2} \quad (5.72)$$

$$K_2 = -\frac{\left(\frac{X_1(Y_2 + Y_3 + Y_4) + X_2Y_1 + X_2Y_2}{X_1X_2} \right)}{2} - \frac{\sqrt{\left(\frac{X_1(Y_2 + Y_3 + Y_4) + X_2Y_1 + X_2Y_2}{X_1X_2} \right)^2 - 4 \left(\frac{Y_2(Y_1 + Y_3 + Y_4) + Y_1Y_3 + Y_1Y_4}{X_1X_2} \right)}}{2} \quad (5.73)$$

$$-\frac{\sqrt{\left(\frac{X_1(Y_2+Y_3+Y_4)+X_2Y_1+X_2Y_2}{X_1X_2}\right)^2-4\left(\frac{Y_2(Y_1+Y_3+Y_4)+Y_1Y_3+Y_1Y_4}{X_1X_2}\right)}}{2}$$

Následně jsem obdobným způsobem provedl osamostatnění nejvyšší mocniny s v čitateli zlomku (5.66):

$$U_1(X_2s+Y_2+Y_3+Y_4)+X_1t_p s(X_2s+Y_2+Y_3+Y_4)+X_2Y_2t_{pc}s+Y_2Y_3t_o+U_2Y_2 \quad (5.74)$$

$$\begin{aligned} &\frac{U_1X_2}{X_1X_2}s+\frac{U_1Y_2}{X_1X_2}+\frac{U_1Y_3}{X_1X_2}+\frac{U_1Y_4}{X_1X_2}+\frac{X_1X_2t_p}{X_1X_2}s^2+ \\ &+\frac{X_1Y_2t_p}{X_1X_2}s+\frac{X_1Y_3t_p}{X_1X_2}s+\frac{X_1Y_4t_p}{X_1X_2}s+\frac{X_2Y_2t_{pc}}{X_1X_2}s+\frac{Y_2Y_3t_o}{X_1X_2}+\frac{U_2Y_2}{X_1X_2} \end{aligned} \quad (5.75)$$

Na výše uvedenou rovnici jsem použil metodu rozkladu na parciální zlomky a získal tak následující rovnice:

$$\begin{aligned} t_p s^2 + \frac{U_1}{X_1}s + \frac{Y_2t_p}{X_2}s + \frac{Y_3t_p}{X_2}s + \frac{Y_2t_{pc}}{X_1}s + \frac{Y_4t_p}{X_2}s + \frac{U_1Y_2}{X_1X_2} + \frac{U_1Y_3}{X_1X_2} + \frac{U_1Y_4}{X_1X_2} + \frac{Y_2Y_3t_o}{X_1X_2} + \frac{U_2Y_2}{X_1X_2} = \\ = A(s+K_1)(s+K_2) + Bs(s+K_2) + Cs(s+K_1) \end{aligned} \quad (5.76)$$

$$\begin{aligned} t_p s^2 + \left(\frac{U_1}{X_1} + \frac{Y_2t_p}{X_2} + \frac{Y_3t_p}{X_2} + \frac{Y_2t_{pc}}{X_1} + \frac{Y_4t_p}{X_2}\right)s + \frac{U_1Y_2}{X_1X_2} + \frac{U_1Y_3}{X_1X_2} + \frac{U_1Y_4}{X_1X_2} + \frac{Y_2Y_3t_o}{X_1X_2} + \frac{U_2Y_2}{X_1X_2} = \\ = s^2(A+B+C) + s(AK_1 + AK_2 + BK_2 + CK_1) + AK_1K_2 \end{aligned} \quad (5.77)$$

Porovnáním jednotlivých koeficientů u jednotlivých mocnin „ s “:

$$s^0: \quad \frac{U_1Y_2}{X_1X_2} + \frac{U_1Y_3}{X_1X_2} + \frac{U_1Y_4}{X_1X_2} + \frac{Y_2Y_3t_o}{X_1X_2} + \frac{U_2Y_2}{X_1X_2} = AK_1K_2 \quad (5.78)$$

$$s^1: \quad \frac{U_1}{X_1} + \frac{Y_2t_p}{X_2} + \frac{Y_3t_p}{X_2} + \frac{Y_2t_{pc}}{X_1} + \frac{Y_4t_p}{X_2} = A(K_1+K_2) + BK_2 + CK_1 \quad (5.79)$$

$$s^2: \quad t_p = A+B+C \quad (5.80)$$

Z rovnice (5.78) jsem vyjádřil A :

$$A = \frac{U_1(Y_2 + Y_3 + Y_4) + Y_2 Y_3 t_o + U_2 Y_2}{K_1 K_2 X_1 X_2} \quad (5.81)$$

Předchozí rovnici jsem dosadil do rovnice (5.79):

$$\frac{U_1}{X_1} + \frac{Y_2 t_p}{X_2} + \frac{Y_3 t_p}{X_2} + \frac{Y_2 t_{p_c}}{X_1} + \frac{Y_4 t_p}{X_2} = \frac{U_1(Y_2 + Y_3 + Y_4) + Y_2 Y_3 t_o + U_2 Y_2}{K_1 K_2 X_1 X_2} (K_1 + K_2) + BK_2 + CK_1 \quad (5.82)$$

Následnou úpravou výše uvedené rovnice lze vyjádřit první B :

$$B = - \left(\frac{CK_1^2 K_2 X_1 X_2 -}{K_1 K_2^2 X_1 X_2} - K_1 \left(K_2 (U_1 X_2 + X_1 t_p (Y_2 + Y_3 + Y_4) + X_2 Y_2 t_{p_c}) - U_1 (Y_2 + Y_3 + Y_4) - Y_2 Y_3 t_o - U_2 Y_2 \right) + \frac{K_2 (U_1 (Y_2 + Y_3 + Y_4) + Y_2 Y_3 t_o + U_2 Y_2)}{K_1 K_2^2 X_1 X_2} \right) \quad (5.83)$$

Dosazením do rovnice (5.76) za $s \rightarrow -K_1$ jsem získal tuto ve tvaru:

$$K_1^2 t_p - \frac{K_1 U_1}{X_1} - \frac{K_1 Y_2 t_p}{X_2} - \frac{K_1 Y_3 t_p}{X_2} - \frac{K_1 Y_2 t_{p_c}}{X_1} - \frac{K_1 Y_4 t_p}{X_2} + \frac{U_1 Y_2}{X_1 X_2} + \frac{U_1 Y_3}{X_1 X_2} + \frac{U_1 Y_4}{X_1 X_2} + \frac{Y_2 Y_3 t_o}{X_1 X_2} + \frac{U_2 Y_2}{X_1 X_2} = BK_1 (K_1 - K_2) \quad (5.84)$$

Tímto postupem jsem vyjádřil z této rovnice druhé B :

$$B = \frac{K_1^2 X_1 X_2 t_p - K_1 (U_1 X_2 + X_1 t_p (Y_2 + Y_3 + Y_4) + X_2 Y_2 t_{p_c}) + U_1 (Y_2 + Y_3 + Y_4) + Y_2 Y_3 t_o + U_2 Y_2}{K_1 X_1 X_2 (K_1 - K_2)} \quad (5.85)$$

Dosazením rovnic (5.81) a (5.83) do rovnice (5.80) jsem získal rovnici ve tvaru:

$$\begin{aligned}
t_p = & \frac{U_1(Y_2 + Y_3 + Y_4) + Y_2 Y_3 t_o + U_2 Y_2}{K_1 K_2 X_1 X_2} - \frac{CK_1^2 K_2 X_1 X_2 +}{K_1 K_2^2 X_1 X_2} \\
& + \frac{K_1(K_2(U_1 X_2 + X_1 t_p(Y_2 + Y_3 + Y_4) + X_2 Y_2 t_{p_c}) - U_1(Y_2 + Y_3 + Y_4) - Y_2 Y_3 t_o - U_2 Y_2) -}{K_1 K_2^2 X_1 X_2} \\
& - \frac{K_2(U_1(Y_2 + Y_3 + Y_4) + Y_2 Y_3 t_o + U_2 Y_2)}{K_1 K_2^2 X_1 X_2} + C \quad (5.86)
\end{aligned}$$

$$C = \frac{K_2^2 X_1 X_2 t_p - K_2(U_1 X_2 + X_1 t_p(Y_2 + Y_3 + Y_4) + X_2 Y_2 t_{p_c}) + U_1(Y_2 + Y_3 + Y_4) + Y_2 Y_3 t_o + U_2 Y_2}{K_2 X_1 X_2 (K_2 - K_1)} \quad (5.87)$$

Pomocí slovníku Laplaceovy transformace [21] jsem provedl zpětnou Laplaceovu transformaci:

Obraz Laplaceovy transformace: $\frac{1}{s} \rightarrow 1$ (jednotkový skok – Heavisideova funkce)

Obraz Laplaceovy transformace: $\frac{1}{s+a} \rightarrow e^{-a\tau}$

Aplikováním zpětné Laplaceovy transformace lze obdržet rovnici opět v časové oblasti:

$$t(\tau) = A + Be^{-K_1\tau} + Ce^{-K_2\tau} \quad (5.88)$$

Dosazením rovnic (5.81), (5.85) a (5.87) s vyjádřením A , B a C do výše uvedené rovnice jsem získal tuto rovnici ve tvaru:

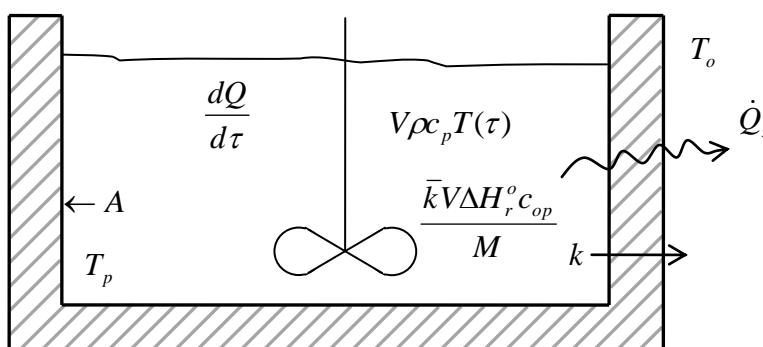
$$\begin{aligned}
t(\tau) = & \frac{U_1(Y_2 + Y_3 + Y_4) + Y_2 Y_3 t_o + U_2 Y_2}{K_1 K_2 X_1 X_2} + \\
& \frac{K_1^2 X_1 X_2 t_p - K_1(U_1 X_2 + X_1 t_p(Y_2 + Y_3 + Y_4) + X_2 Y_2 t_{p_c}) + U_1(Y_2 + Y_3 + Y_4) + Y_2 Y_3 t_o + U_2 Y_2}{K_1 X_1 X_2 (K_1 - K_2)} e^{-K_1\tau} + \\
& + \frac{K_2^2 X_1 X_2 t_p - K_2(U_1 X_2 + X_1 t_p(Y_2 + Y_3 + Y_4) + X_2 Y_2 t_{p_c}) + U_1(Y_2 + Y_3 + Y_4) + Y_2 Y_3 t_o + U_2 Y_2}{K_2 X_1 X_2 (K_2 - K_1)} e^{-K_2\tau} \quad (5.89)
\end{aligned}$$

Zpětným převodem substituce se získá výsledné řešení matematického modelu.

Entalpická bilance průtočně míchaného (polymeračního) reaktoru

Průtočně míchaný reaktor je svou konstrukcí podobný rekuperačnímu výměníku tepla, avšak na rozdíl od něj dochází uvnitř polymeračního reaktoru k chemické reakci, která může být endotermní nebo exotermní podle toho, zda je teplo při chemické reakci spotřebováváno (dochází k endotermní reakci) nebo naopak vyvíjeno a dochází tak k exotermní reakci. Při modelování polymeračního reaktoru se uvažuje s následujícími zjednodušujícími předpoklady: dokonalé promíchávání kapaliny a uvažování konstantního objemu během reakce, zanedbatelná tepelná kapacita stěny nádrže, uvažování konstantních fyzikálních vlastností kapalin jako je hustota polymerační směsi nebo prostup tepla na daném teplotním rozmezí.

Obecné schéma neizolovaného průtočně míchaného reaktoru je zobrazeno na Obr. 5.4.



Obr. 5.4 – Schéma neizolovaného polymeračního reaktoru

kde je Q akumulace tepla reakční směsi (W), \dot{Q}_z přechod tepla přes stěnu reaktoru (W), \bar{k} rychlostní konstanta (s^{-1}), V vnitřní objem nádrže (m^3), ΔH_r^o reakční teplo ($J \cdot mol^{-1}$), c_{op} počáteční koncentrace ($mol \cdot m^{-3}$), M molární hmotnost monomeru ($kg \cdot mol^{-1}$), T_p počáteční teplota (K), T_o absolutní teplota okolí (K), $T(\tau)$ absolutní teplota jako funkce času (K), τ čas (s), ρ hustota polymerační směsi ($kg \cdot m^{-3}$), A vnější teplosměnná plocha (m^2), k součinitel prostupu tepla ($W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$).

Na základě bilančního vztahu (3.1) jsem stanovil bilancované veličiny:

$$\begin{aligned}
 - \text{vznik:} & \quad \frac{\bar{k}V\Delta H_r^o c_{op}}{M} \\
 - \text{výstupní parametry:} & \quad kA(T(\tau) - T_o) \\
 - \text{akumulace:} & \quad V\rho c_p T(\tau)
 \end{aligned}$$

Posléze jsem sestavil z uvažovaných bilančních veličin příslušnou bilanční rovnici podle obecného vyjádření (3.1) a na základě toho matematický model polymeračního reaktoru:

$$\dot{Q}_1 = \frac{dQ}{d\tau} + \dot{Q}_z \quad (5.90)$$

$$\frac{\bar{k}V\Delta H_r^o c_{op}}{M} e^{-\bar{k}\tau} = V\rho c_p \frac{dT}{d\tau} + kA(T(\tau) - T_o) \quad (5.91)$$

Diferenciální rovnici (5.91) jsem zjednodušil zavedením substitute:

$$U_1 e^{-\bar{k}\tau} = X_1 \frac{dT}{d\tau} + Y_1 (T(\tau) - T_o) \quad (5.92)$$

$$\text{kde} \quad U_1 = \frac{\bar{k}V\Delta H_r^o c_{op}}{M}; \quad X_1 = V\rho c_p; \quad Y_1 = kA$$

Předchozí rovnice (5.92) se transformuje přímou Laplaceovou transformací [21], čímž se převede originál jako reálná funkce definovaná v časové oblasti na obraz v podobě komplexní funkce definované v oblasti komplexní proměnné „s“. Tímto postupem se převede původně diferenciální rovnice na algebraickou, kterou je již snadné řešit.

$$U_1 \frac{1}{s + \bar{k}} = X_1 (sT_L(s) - T_p) + Y_1 \left(T_L(s) - \frac{T_o}{s} \right) \quad (5.93)$$

Roznásobením závorek a následným vydělením celé rovnice členem $s(s + \bar{k})$, lze obdržet následující rovnici:

$$U_1 s = X_1 s^2 (s + \bar{k}) T_L(s) - X_1 s (s + \bar{k}) T_p + Y_1 s (s + \bar{k}) T_L(s) - Y_1 (s + \bar{k}) T_o \quad (5.94)$$

Po úpravě:

$$\frac{U_1}{X_1} s + s(s + \bar{k}) T_p + \frac{Y_1}{X_1} (s + \bar{k}) T_o = s T_L(s) \left(s(s + \bar{k}) + \frac{Y_1}{X_1} (s + \bar{k}) \right) \quad (5.95)$$

Osamostatněním $T_L(s)$ se získá předchozí rovnice ve tvaru:

$$T_L(s) = \frac{\frac{U_1}{X_1} s + s(s + \bar{k}) T_p + \frac{Y_1}{X_1} (s + \bar{k}) T_o}{s \left(s^2 + \left(\bar{k} + \frac{Y_1}{X_1} \right) s + \frac{Y_1}{X_1} \bar{k} \right)} \quad (5.96)$$

Výše uvedená rovnice se rozloží rozkladem na parciální zlomky:

$$\frac{\frac{U_1}{X_1} s + s(s + \bar{k}) T_p + \frac{Y_1}{X_1} (s + \bar{k}) T_o}{s \left(s + \frac{Y_1}{X_1} \right) (s + \bar{k})} = \frac{A}{s} + \frac{B}{\left(s + \frac{Y_1}{X_1} \right)} + \frac{C}{(s + \bar{k})} \quad (5.97)$$

$$\frac{\frac{U_1}{X_1} s + s(s + \bar{k}) T_p + \frac{Y_1}{X_1} (s + \bar{k}) T_o}{s \left(s + \frac{Y_1}{X_1} \right) (s + \bar{k})} = \frac{A \left(s + \frac{Y_1}{X_1} \right) (s + \bar{k}) + B s (s + \bar{k}) + C s \left(s + \frac{Y_1}{X_1} \right)}{s \left(s + \frac{Y_1}{X_1} \right) (s + \bar{k})} \quad (5.98)$$

Dalšími matematickými úpravami rovnice (5.98) jsem dospěl k vyjádření:

$$\frac{U_1}{X_1} s + T_p s^2 + \bar{k} T_p s + \frac{Y_1}{X_1} T_o s + \frac{Y_1}{X_1} \bar{k} T_o = A s^2 + A \bar{k} s + A \frac{Y_1}{X_1} s + A \frac{Y_1}{X_1} \bar{k} + B s^2 + B \bar{k} s + C s^2 + C \frac{Y_1}{X_1} s \quad (5.99)$$

Porovnáním jednotlivých koeficientů u jednotlivých mocnin „ s “:

$$s^0: \quad \frac{Y_1}{X_1} \bar{k} T_o = A \frac{Y_1}{X_1} \bar{k} \quad \Rightarrow \quad A = T_o \quad (5.100)$$

$$s^1: \quad \frac{U_1}{X_1} + \bar{k} T_p + \frac{Y_1}{X_1} T_o = A \bar{k} + A \frac{Y_1}{X_1} + B \bar{k} + C \frac{Y_1}{X_1} \quad (5.101)$$

$$s^2: \quad T_p = A + B + C \quad \Rightarrow \quad B = T_p - T_o - C \quad (5.102)$$

Dosazením rovnic (5.100) a (5.102) do rovnice (5.101) jsem získal po následné úpravě rovnici s vyjádřením C :

$$C = \frac{U_1}{Y_1 - X_1 \bar{k}} \quad (5.103)$$

Pomocí slovníku Laplaceovy transformace jsem z rovnice (5.97) provedl transformaci:

Obraz Laplaceovy transformace: $\frac{1}{s} \rightarrow 1$ (jednotkový skok – Heavisideova funkce)

Obraz Laplaceovy transformace: $\frac{1}{s+a} \rightarrow e^{-a\tau}$

Aplikováním zpětné Laplaceovy transformace lze obdržet rovnici opět v časové oblasti:

$$T(\tau) = A + B e^{-a\tau} + C e^{-b\tau} \quad (5.104)$$

Dosazením rovnic (5.100), (5.102) a (5.103) s vyjádřením A , B a C do výše uvedené rovnice jsem získal tuto rovnici ve tvaru:

$$T(\tau) = T_o + \left(T_p - T_o - \frac{U_1}{Y_1 - X_1 \bar{k}} \right) e^{-\frac{Y_1}{X_1} \tau} + \left(\frac{U_1}{Y_1 - X_1 \bar{k}} \right) e^{-\bar{k} \tau} \quad (5.105)$$

Zpětným převodem substituce se získá výsledné řešení matematického modelu:

$$T(\tau) = T_o + \left(T_p - T_o - \frac{\bar{k} V \Delta H_r^o c_{op}}{M(kA - \bar{k} V \rho c_p)} \right) e^{-\frac{kA}{V \rho c_p} \tau} + \left(\frac{\bar{k} V \Delta H_r^o c_{op}}{M(kA - \bar{k} V \rho c_p)} \right) e^{-\bar{k} \tau} \quad (5.106)$$

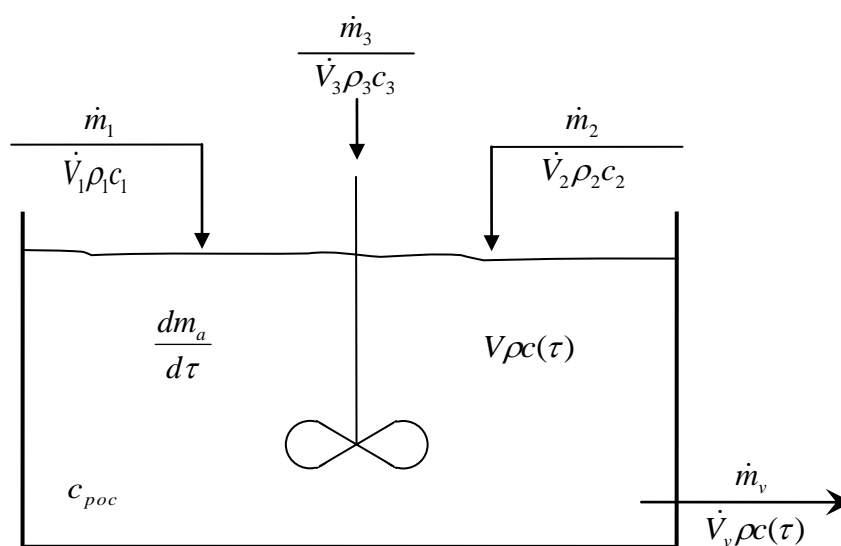
5.2 Matematické modely založené na hmotové bilanci

Matematickými modely založenými na hmotové bilanci lze řešit průběhy koncentračních polí v tuhé fázi během zpracovávaného technologického procesu a určit tak dobu jeho trvání při uvažování počátečních, případně okrajových podmínek. Obvykle se bilancují na základě hmotové bilance koncentrace roztoků v průtočném, koncentračním směšovači kapalin, jehož matematický model zde bude názorně odvozen.

Hmotová bilance průtočného, koncentračního směšovače kapalin

Koncentrační směšovače kapalin slouží pro přípravu roztoků, které jsou složeny z různých příměsí látek, tvořící různě koncentrované roztoky. Pomocí koncentračního směšovače kapalin lze obdržet roztok o požadovaném složení. Při modelování koncentračního směšovače kapalin se uvažuje s následujícími zjednodušujícími předpoklady: dokonalé promíchávání roztoku v mísiči, konstantní průtoky vstupujících kapalin a průřez nádrže.

Obecné schéma průtočně míchaného reaktoru je zobrazeno na Obr. 5.5.



Obr. 5.5 – Schéma průtokového mísiče kapalin

kde je \dot{m}_i tok hmoty (hmotnostní tok) směsi na vstupu, popř. \dot{m}_v na výstupu z mísiče kapalin (kg.s^{-1}), m_a akumulace hmoty směsi v mísiči kapalin (kg), \dot{V}_i objemový průtok vstupní, popř. \dot{V}_v výstupní kapaliny (m^3), ρ_i hustota vstupní kapaliny (kg.m^{-3}), c_i koncentrace vstupní kapaliny (obj. %), m hmotnost kapaliny (kg), ρ hustota roztoku (kg.m^{-3}), V vnitřní objem nádrže (m^3), c_{poc} počáteční koncentrace (obj. %), $c(\tau)$ koncentrace látky jako funkce času (obj. %), τ čas (s).

Na základě bilančního vztahu (3.1) jsem stanovil bilancované veličiny:

- vstupní parametry: $\dot{V}_1\rho_1c_1, \dot{V}_2\rho_2c_2, \dot{V}_3\rho_3c_3$
- výstupní parametry: $\dot{V}_v\rho c(\tau)$
- akumulace: $V\rho c(\tau)$

Posléze jsem sestavil z uvažovaných bilančních veličin příslušnou bilanční rovnici podle obecného vyjádření (3.1) a na základě toho matematický model směšovače kapalin:

$$\dot{m}_1 + \dot{m}_2 + \dot{m}_3 = \frac{dm_a}{d\tau} + \dot{m}_v \quad (5.107)$$

$$\dot{V}_1\rho_1c_1 + \dot{V}_2\rho_2c_2 + \dot{V}_3\rho_3c_3 = V\rho \frac{dc}{d\tau} + \dot{V}_v\rho c(\tau) \quad (5.108)$$

Diferenciální rovnici (5.108) jsem zjednodušil zavedením substituce:

$$U_1 = X_1 \frac{dt}{d\tau} + Y_1 c(\tau) \quad (5.109)$$

kde $U_1 = \dot{V}_1\rho_1c_1 + \dot{V}_2\rho_2c_2 + \dot{V}_3\rho_3c_3$; $X_1 = V\rho$; $Y_1 = \dot{V}_v\rho$

Předchozí rovnice (5.109) se transformuje přímou Laplaceovou transformací [21], čímž se převede originál jako reálná funkce definovaná v časové oblasti na obraz v podobě komplexní funkce definované v oblasti komplexní proměnné „s“. Tímto postupem se převede původně diferenciální rovnice na algebraickou, kterou je již snadné řešit.

$$\frac{U_1}{s} = X_1(sC_L(s) - c_p) + Y_1C_L(s) \quad (5.110)$$

Roznásobením závorky a následným vydělením celé rovnice komplexní proměnnou „s“, lze obdržet následující rovnici:

$$U_1 = X_1s^2C_L(s) - X_1sc_p + Y_1sC_L(s) \quad (5.111)$$

Tuto dále upravíme:

$$\frac{U_1}{X_1} + sc_p = sC_L(s) \left(s + \frac{Y_1}{X_1} \right) \quad (5.112)$$

Osamostatněním $C_L(s)$ se získá předchozí rovnice ve tvaru:

$$C_L(s) = \frac{\frac{U_1}{X_1} + sc_p}{s \left(s + \frac{Y_1}{X_1} \right)} \quad (5.113)$$

Výše uvedená rovnice se rozloží rozkladem na parciální zlomky:

$$\frac{\frac{U_1}{X_1} + sc_p}{s \left(s + \frac{Y_1}{X_1} \right)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{\left(s + \frac{Y_1}{X_1} \right)} \quad (5.114)$$

$$\frac{\frac{U_1}{X_1} + sc_p}{s \left(s + \frac{Y_1}{X_1} \right)} = \frac{A \left(s + \frac{Y_1}{X_1} \right) + Bs}{s \left(s + \frac{Y_1}{X_1} \right)} \quad (5.115)$$

Dalšími matematickými úpravami rovnice (5.115) jsem dospěl k vyjádření:

$$\frac{U_1}{X_1} + s c_p = A s + A \frac{Y_1}{X_1} + B s \quad (5.116)$$

Porovnáním jednotlivých koeficientů u jednotlivých mocnin „s“ se obdrží rovnice:

$$s^0: \quad \frac{U_1}{X_1} = A \frac{Y_1}{X_1} \quad / \cdot X_1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{U_1}{Y_1} \quad (5.117)$$

$$s^1: \quad c_p = A + B \quad (5.118)$$

Dosazením rovnice (5.117) do rovnice (5.118) jsem získal rovnici s vyjádřením B :

$$c_p = \frac{U_1}{Y_1} + B \quad \Rightarrow \quad B = c_p - \frac{U_1}{Y_1} \quad (5.119)$$

Zpětnou Laplaceovou transformací [21] jsem rovnici (5.114) převedl do časové oblasti:

Obraz Laplaceovy transformace: $\frac{1}{s} \rightarrow 1$ (jednotkový skok – Heavisideova funkce)

Obraz Laplaceovy transformace: $\frac{1}{s+a} \rightarrow e^{-a\tau}$

Aplikováním zpětné Laplaceovy transformace lze obdržet rovnici opět v časové oblasti:

$$c(\tau) = A + B e^{-a\tau} \quad (5.120)$$

Dosazení rovnic (5.117) a (5.119) s vyjádřením A a B do výše uvedené rovnice:

$$c(\tau) = \frac{U_1}{Y_1} + \left(c_p - \frac{U_1}{Y_1} \right) e^{-\frac{Y_1}{X_1} \tau} \quad (5.121)$$

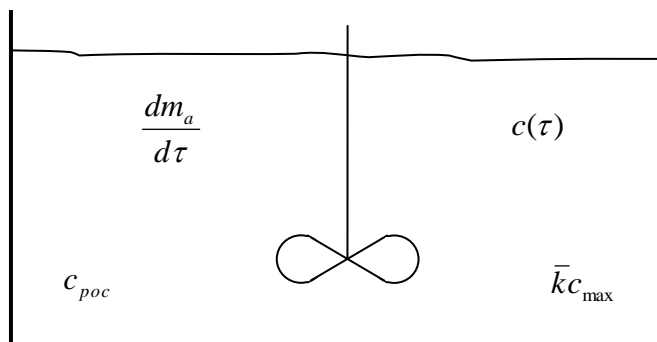
Zpětným převodem substituce se získá výsledné řešení matematického modelu:

$$c(\tau) = \frac{\dot{V}_1 \rho_1 c_1 + \dot{V}_2 \rho_2 c_2 + \dot{V}_3 \rho_3 c_3}{\dot{V}_v \rho} + \left(c_p - \frac{\dot{V}_1 \rho_1 c_1 + \dot{V}_2 \rho_2 c_2 + \dot{V}_3 \rho_3 c_3}{\dot{V}_v \rho} \right) e^{-\frac{\dot{V}_v \rho}{\dot{V}_p} \tau} \quad (5.122)$$

Hmotová bilance průtočně míchaného (polymeračního) reaktoru

Polymerační reaktor lze stejně jako u průtočného směšovače kapalin použít jak pro entalpickou, tak pro hmotovou bilanci a řešit tak průběhy koncentračních polí ve zpracovávané tuhé fázi při chemické reakci 1. řádu [2]. Při modelování polymeračního reaktoru hmotovou bilancí se vychází ze stejných zjednodušujících předpokladů jako v případě entalpické bilance.

Obecné schéma průtočně míchaného reaktoru je zobrazeno na Obr. 5.6.



Obr. 5.6 – Schéma polymeračního reaktoru

kde je m_a akumulace hmoty směsi v reaktoru (kg), \bar{k} rychlostní konstanta (s^{-1}), c_{\max} maximální koncentrace složky v krystalické formě na povrchu tuhé fáze ($kg \cdot m^{-3}$), c_{poc} počáteční koncentrace ($kg \cdot m^{-3}$), $c(\tau)$ koncentrace látky jako funkce času ($kg \cdot m^{-3}$), τ čas (s).

Na základě bilančního vztahu (3.1) jsem stanovil bilancované veličiny:

- vznik: $\bar{k}(c_{\max} - c(\tau))$
- akumulace: $c(\tau)$

Pomocí těchto bilancovaných veličin jsem sestavil matematický model polymeračního reaktoru pro hmotovou bilanci:

$$\bar{k}(c_{\max} - c(\tau)) = \frac{dc}{d\tau} \quad (5.123)$$

Diferenciální rovnici (5.123) jsem pomocí Laplaceovy transformace [21] převedl z časové oblasti do oblasti komplexní proměnné „ s “ a tím jsem obdržel následující vyjádření:

$$\bar{k} \left(\frac{c_{\max}}{s} - C_L(s) \right) = s C_L(s) - c_p \quad (5.124)$$

Roznásobením závorky a dalšími úpravami předchozí rovnice jsem vyjádřil $C_L(s)$:

$$C_L(s) = \frac{\bar{k} c_{\max} + c_p s}{s(s + \bar{k})} \quad (5.125)$$

Výše uvedená rovnice se rozloží rozkladem na parciální zlomky:

$$\frac{\bar{k} c_{\max} + c_p s}{s(s + \bar{k})} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s + \bar{k})} \quad (5.126)$$

Dalšími matematickými úpravami rovnice (5.126) jsem dospěl k vyjádření:

$$\bar{k} c_{\max} + c_p s = As + A\bar{k} + Bs \quad (5.127)$$

Porovnáním jednotlivých koeficientů u jednotlivých mocnin „ s “:

$$s^0: \quad \bar{k} c_{\max} = A\bar{k} \quad \Rightarrow \quad A = c_{\max} \quad (5.128)$$

$$s^1: \quad c_p = A + B \quad \Rightarrow \quad B = c_p - c_{\max} \quad (5.129)$$

Aplikováním zpětné Laplaceovy transformace jsem převedl rovnici zpět do časové oblasti:

$$c(\tau) = A + B e^{-a\tau} \quad (5.130)$$

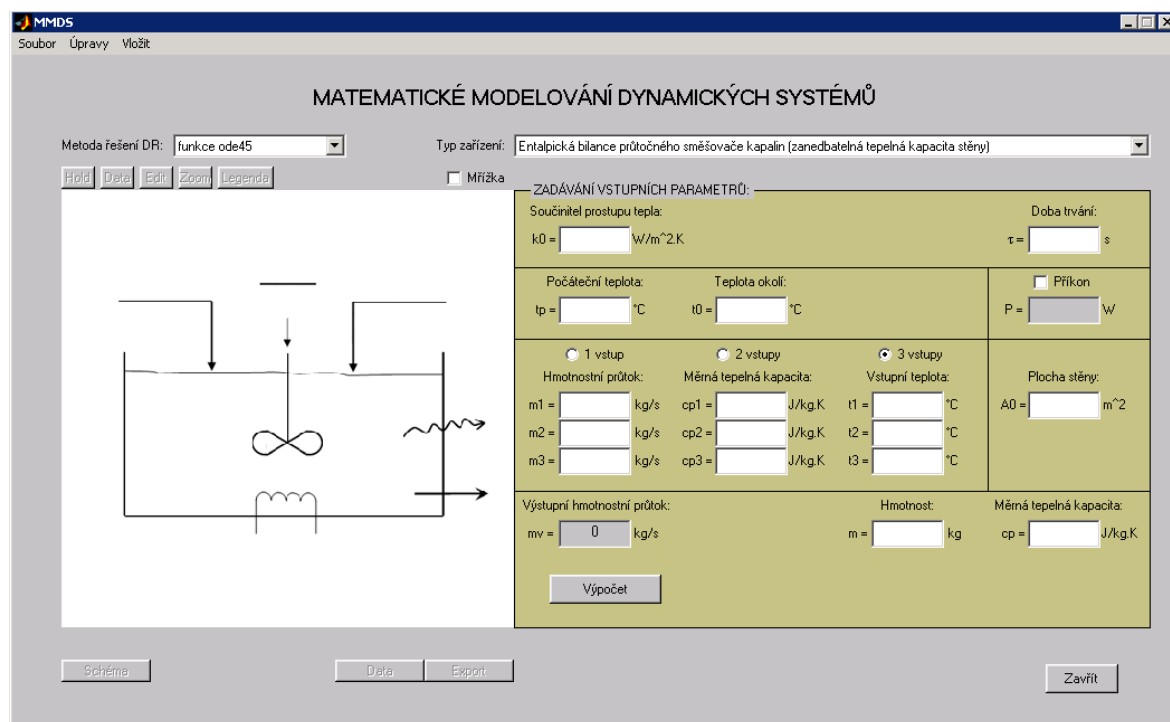
Vyjádřením zpětným převodem substituce jsem získal řešení matematického modelu:

$$c(\tau) = c_{\max} + (c_p - c_{\max}) e^{-\bar{k}\tau} \quad (5.131)$$

6 POPIS A FUNKCE PROGRAMOVÉ APLIKACE

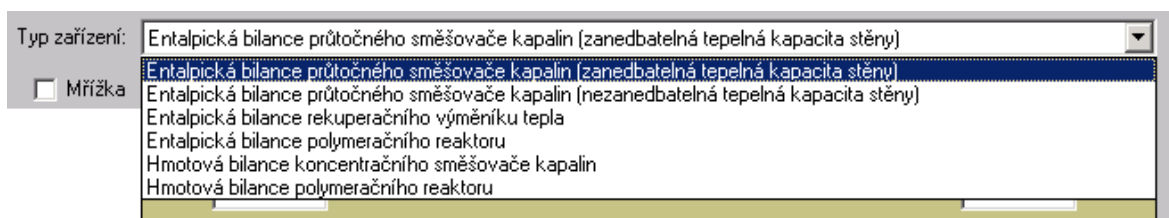
Vytvořená aplikace matematického modelování dynamických systémů je primárně vyvíjena ve starší verzi MATLAB verze 6.5 z toho důvodu, aby se eliminovala nefunkčnost ve starších verzích, jelikož právě verze 6.5 tohoto programového prostředí byla hojně používána na fakultě aplikované informatiky a stále se s touto verzí lze setkat na mnoha učebnách s výpočetní technikou. Vytvořenou aplikaci lze pak samozřejmě bez potíží spouštět a používat i ve vyšších verzích MATLABu. Pro snazší a intuitivní ovládání používá aplikace matematického modelování dynamických systémů (dále jen MMDS) grafického rozhraní GUI (Graphical User Interface), které umožňuje přehledné ovládání aplikace bez nutnosti hlouběji studovat zdrojový kód a zadávat parametry vstupních bilancovaných veličin přímo do tohoto kódu.

Samotná aplikace se instaluje pouhým zkopírováním do předem vytvořené a zvolené složky MATLABu. Spuštění aplikace MMDS se provádí dvojím kliknutím myši na spouštěcí skript „MMDS.m“ či zápisem „MMDS“ do příkazového řádku MATLABu. Poté se již spustí základní okno aplikace jako na Obr. 6.1.



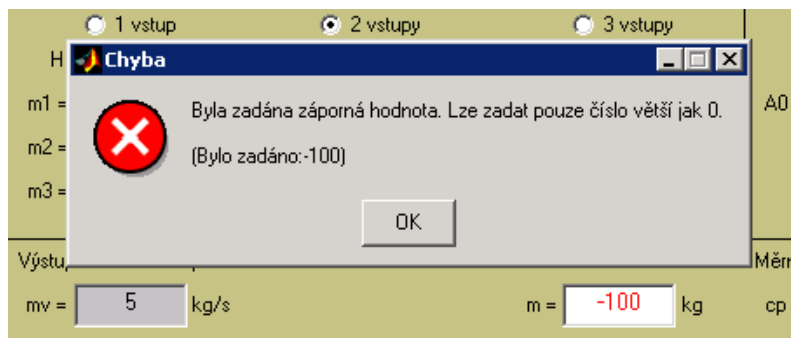
Obr. 6.1 – Základní okno aplikace MMDS

Ještě předtím, než se uživatel dostane k samotnému výpočtu, je nutné nejprve zvolit typ modelovaného zařízení. Aplikace nabízí možnost výběru ze šesti typů modelovaných zařízení, z toho čtyři jsou vytvořeny pro entalpickou a dva typy pro hmotovou bilanci. Jmenovitě jde o entalpickou bilanci průtočného směšovače kapalin se zanedbáním a bez zanedbání tepelné kapacity stěny nádoby, dále pak entalpickou bilanci rekuperačního výměníku tepla s chlazením v plášti a entalpickou bilanci polymeračního reaktoru. Mezi technologická zařízení, u kterých se provádí hmotová bilance, jsou zastoupeny průtočně míchaný směšovač kapalin a polymerační reaktor. Volbu ze zmíněných modelovaných zařízení lze provést pomocí příslušné rozbalovací nabídky v základním okně aplikace.



Obr. 6.2 – Rozbalovací nabídka pro výběr modelovaného zařízení

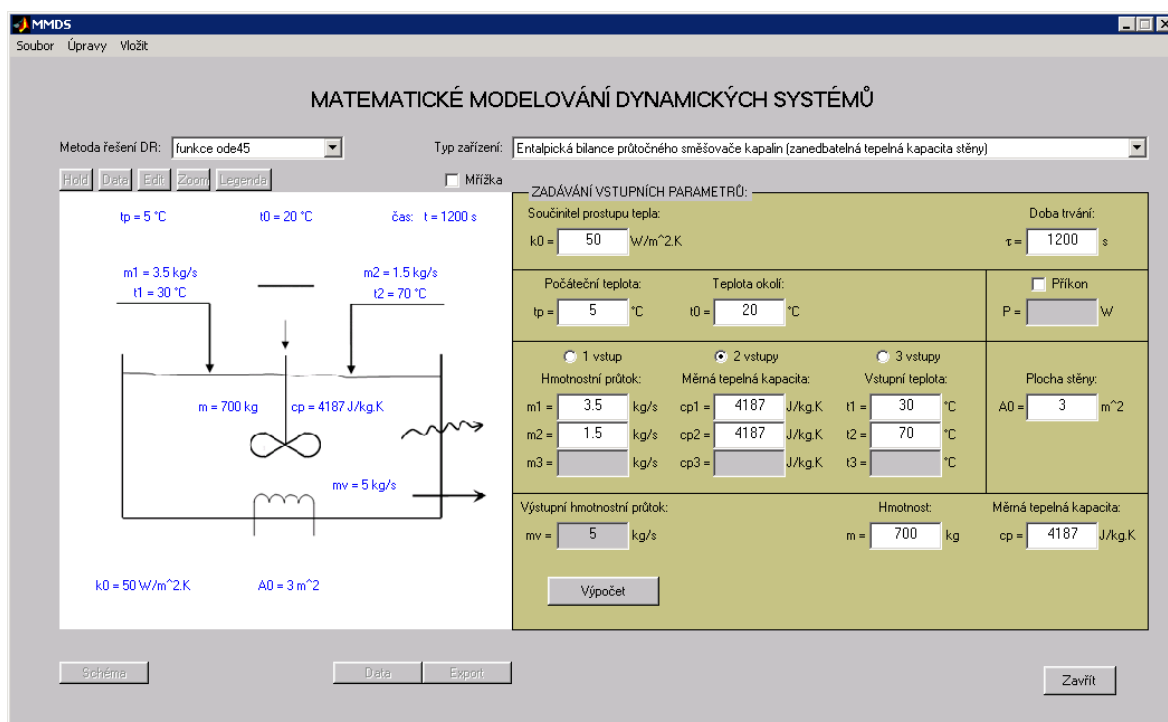
Po výběru jednoho z typů modelovaných zařízení lze již zadávat vstupní parametry bilancovaných veličin do příslušných polí. Zde jsou však některé parametry volitelné jako je např. počet vstupních parametrů, příkon topení nebo třeba výpočet plochy a objemu nádoby a tak je potřeba nejprve rozhodnout, zda s těmito parametry uvažujeme či nikoliv a případně v jakém počtu. Vytvořená aplikace z důvodu snazšího zadávání také dovozuje zadávat tyto parametry ve formě desetinných míst a to jak pomocí teček, tak i čárek. Výjimkou je pouze vstupní pole pro zadávání doby trvání, kde lze zadávat pouze čísla celá, bez desetinných míst či záporných čísel. Naopak je tomu u všech ostatních polí, kde lze desetinná místa volitelně zadávat, avšak i zde jsou určité specifické vlastnosti pro jednotlivá vstupní pole. Tak např. při zadávání teploty je možné zadávat i záporná čísla a desetinná místa, u jiných vstupních polí jako je např. hmotnost, plocha stěny či měrná tepelná kapacita lze zadávat jen kladné hodnoty a desetinná místa. Samozřejmě je pak zabránit uživateli zadávat alfanumerické hodnoty nebo vynechat některá povinná pole. V případě zadání hodnoty nesplňující jednu z některých nutných podmínek pro určité vstupní pole oznámí aplikace uživateli poznámku o chybném zadání (viz Obr. 6.3).



Obr. 6.3 – Chybové hlášení při zadání nepovolené hodnoty

I v případě, že uživatel nezadá do všech povinných polí potřebné údaje, tak je informován o této skutečnosti a vyzván, aby tyto povinné údaje do příslušných polí zadal.

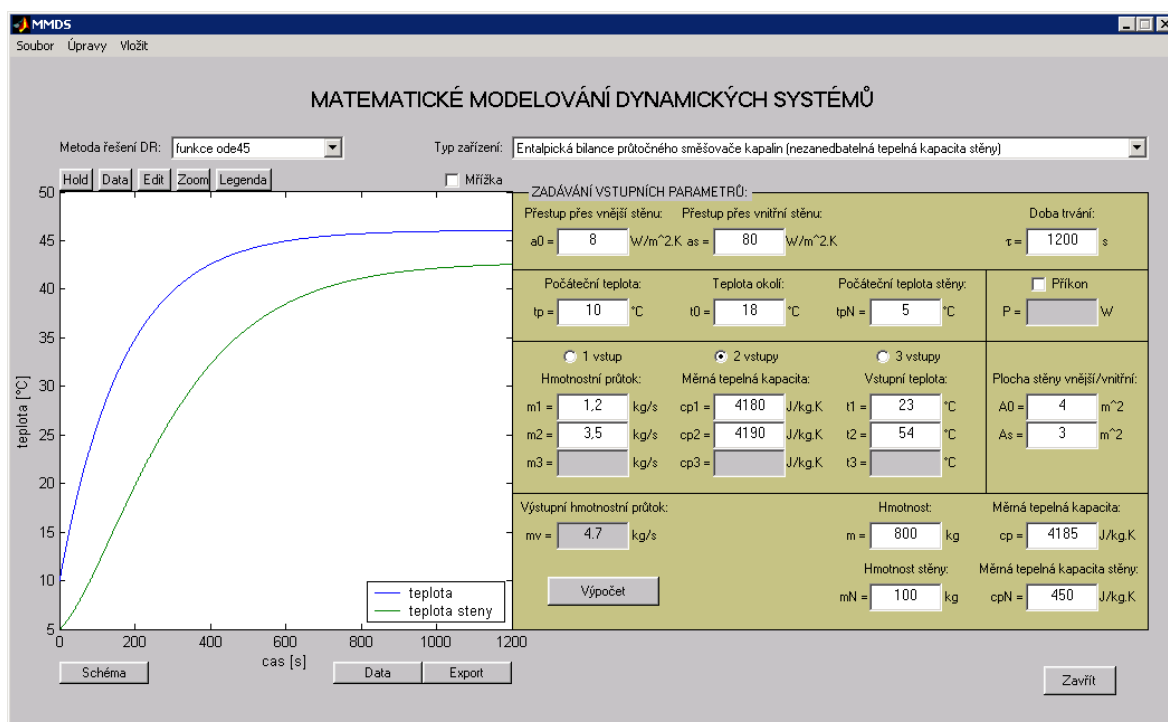
Kromě výše uvedeného dovoluje aplikace z hlavní nabídky doplnit přednastavené hodnoty v podobě vzorového příkladu pro každý typ technologického zařízení a tím se blíže seznámit s možností zadávaných údajů. Tyto údaje jsou ať už ze vzorového příkladu nebo při postupném doplňování do příslušných vstupních polí ihned automaticky zobrazovány do vzorového schématu příslušného technologického zařízení, což by mělo ještě více zjednodušit uživateli představu o zadávaných parametrech.



Obr. 6.4 – Vložení vstupních parametrů vzorového příkladu a jejich zobrazení ve schématu

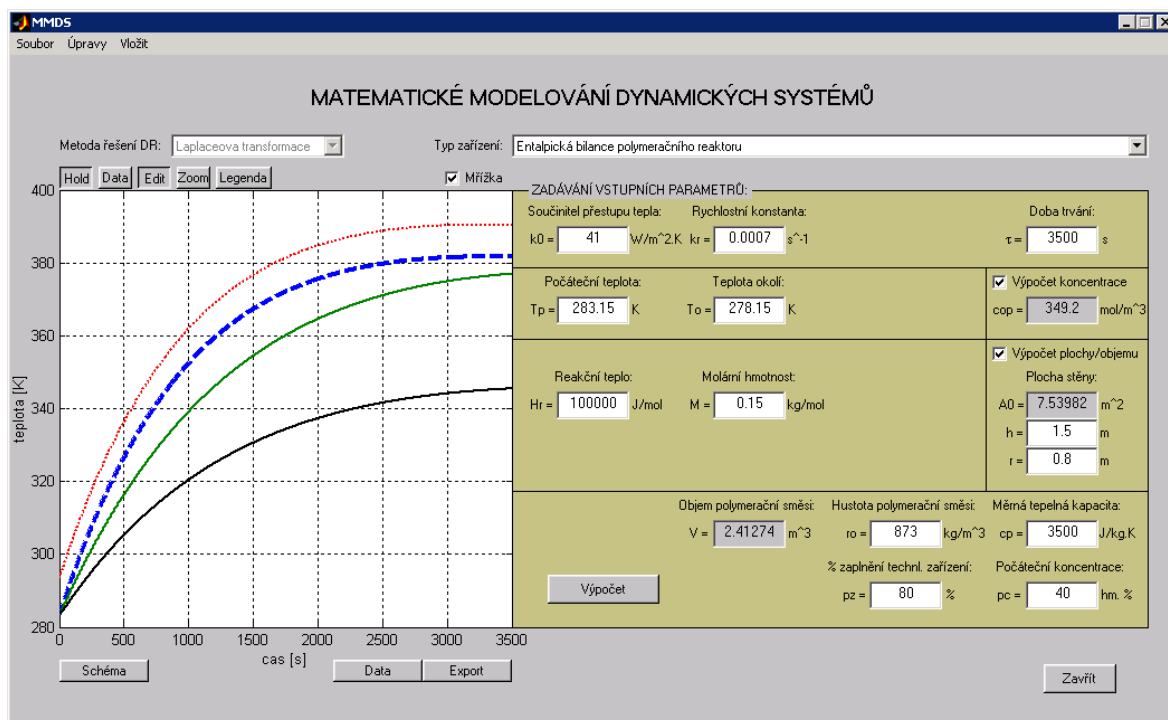
Mimo jiné, nabízí vytvořená aplikace také volbu, kterou je možné řešený model vypočítat. Zvolit lze buď řešení diferenciálních rovnic pomocí funkce ode45 nebo pomocí obecně vyjádřeného řešení matematického modelu metodou Laplaceovy transformace, jehož odvození je uvedeno v kapitole 5 tohoto dokumentu.

Jakmile jsou doplněny všechny potřebné parametry do příslušných vstupních polí, lze provést již samotný výpočet, který na základě zadaných parametrů vykreslí do integrovaného okna aplikace výslednou křivku doby ustálení teploty nebo koncentrace technologického procesu za daný časový interval (viz Obr. 6.5). V případě technologických zařízení, u kterých se nezanedbává přenos tepla do stěn nádoby, se navíc u průtočného směšovače kapalin vykreslí do stávajícího grafu dále průběh teploty ve stěně nádoby a podobně u rekuperačního výměníku tepla průběh teploty chladicí kapaliny. Tento dodatečný průběh však lze získat pouze řešením patřičného modelu pomocí funkce ode45.



Obr. 6.5 – Výpočet a následné grafické zobrazení průběhu teploty v závislosti na čase

Aplikace také zpřístupní po vykreslení grafu další ovládací prvky, které umožní dále pracovat s grafickými objekty. Lze tak např. zobrazit mřížku nebo legendu v grafu, vykreslit další průběhy do stávajícího grafu, editovat tento graf či jej přibližovat nebo oddalovat.



Obr. 6.6 – Editace a zobrazení více průběhů teploty v závislosti na čase v jednom grafu

U vyšších verzí MATLABu, které podporují zobrazování hodnot grafického průběhu podržením tlačítka počítačové myši nad křivkou v grafu, umožní uživateli zobrazovat výsledná data přímo v integrovaném grafu programu. Pokud uživatel spouští aplikaci ve verzi MATLABu nepodporující zmíněnou funkci, neznamená to, že by byl o zobrazení numerických hodnot ihned ochuzen, aplikace totiž v takovém případě nabízí uživateli zobrazit přehledně výsledná data v k tomu určené tabulce vstupních a výstupních hodnot jak je názorně předvedeno na následujícím obrázku.

The screenshot shows the "Tabulka vstupních a výstupních hodnot" window. It displays input parameters, output parameters, and a table of results.

Vstupní parametry:

- $\tau = 1200 \text{ s}$
- $\alpha_0 = 8 \text{ W/m}^2\text{K}$
- $\alpha_s = 80 \text{ W/m}^2\text{K}$
- $A_0 = 4 \text{ m}^2$
- $A_s = 3 \text{ m}^2$
- $c_p = 4185 \text{ J/kg.K}$
- $c_{p1} = 4180 \text{ J/kg.K}$
- $c_{p2} = 4190 \text{ J/kg.K}$
- $c_{p3} = 0 \text{ J/kg.K}$
- $c_{pN} = 450 \text{ J/kg.K}$
- $m = 800 \text{ kg}$
- $m_N = 100 \text{ kg}$
- $m_1 = 1.2 \text{ kg/s}$
- $m_2 = 3.5 \text{ kg/s}$
- $m_3 = 0 \text{ kg/s}$

Výstupní parametry:

- čas [s]
- teplota [°C]

čas [s]	teplota [°C]
0	10
1	10.211
2	10.421
3	10.63
4	10.838
5	11.044
6	11.249
7	11.453
8	11.655
9	11.857
10	12.057
11	12.256

Teplota v ustáleném stavu:

- $t_{max} = 46.046 \text{ °C}$

Přesnost výsledných hodnot:

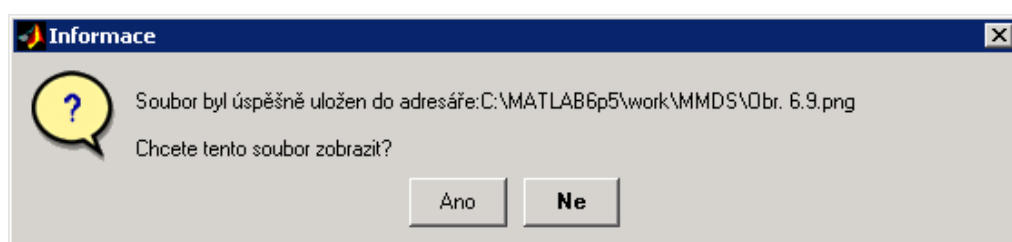
- 3 desetinná místa

Buttons: Uložit, Zavřít.

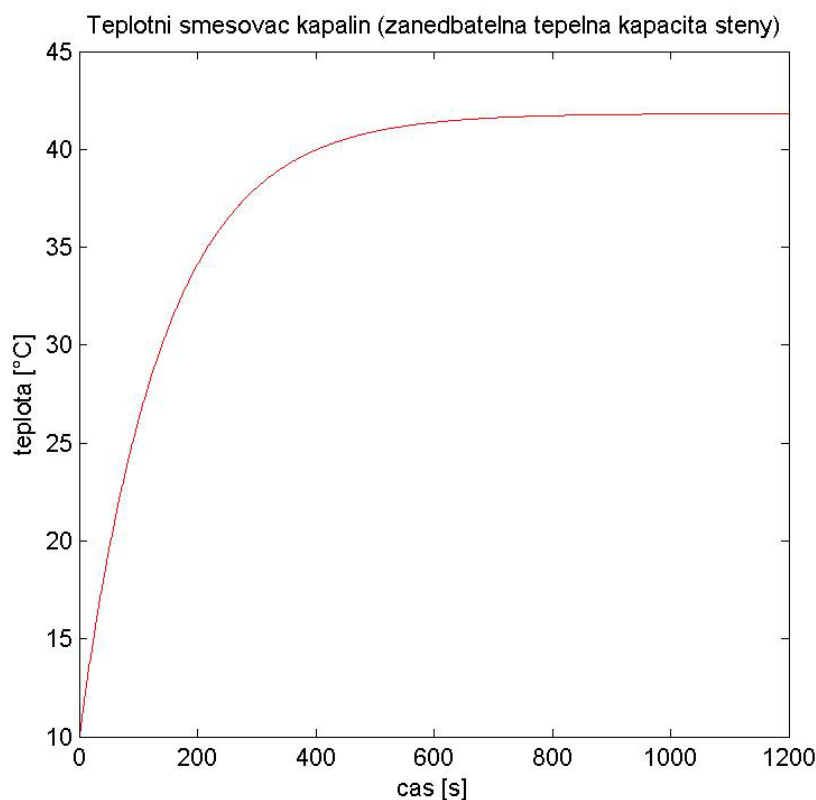
Obr. 6.7 – Zobrazení vstupních a výstupních parametrů v tabulce hodnot

V této tabulce jsou v levém sloupci zobrazeny vstupní parametry zadávané do příslušných polí vytvořené aplikace, v pravém sloupci jsou pak zobrazeny výstupní parametry získané z konkrétního řešení. Dále je zde zobrazena hodnota v ustáleném stavu. U výstupních parametrů lze ovlivňovat také přesnost výsledného řešení a to nastavením počtu desetinných míst. Všechny tyto získané hodnoty je možné uložit do zvoleného textového souboru.

Pokud se vrátíme zpět do základního okna aplikace, je zde dostupné dále tlačítko „Export“, které umožní uživateli exportovat graf do souboru *.png.



Obr. 6.8 – Dialogové okno s informacemi o uložení souboru



Obr. 6.9 – Ukázka exportovaného grafu

Zdrojový kód

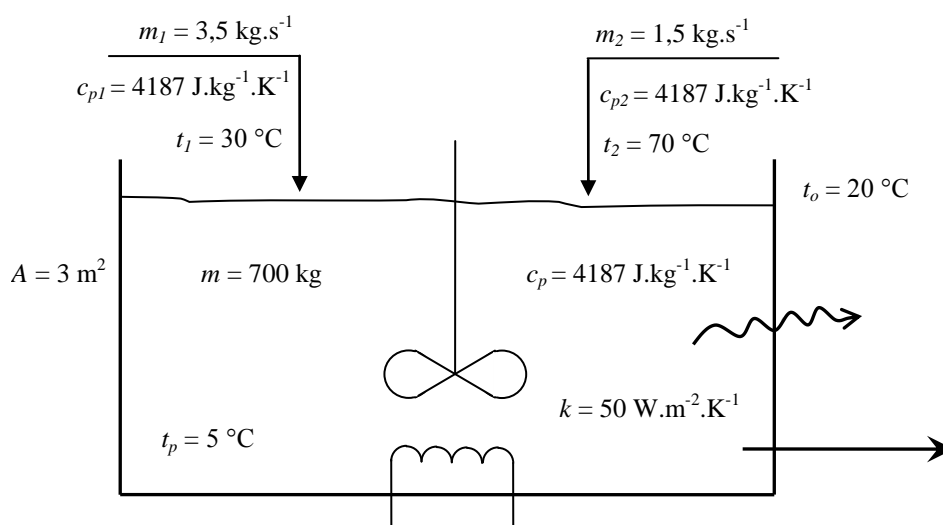
Celá aplikace se skládá z několika textových souborů ve formě skriptů s příponou *.m, jejichž obsahem je posloupnost příkazů, které lze opakovaně spouštět. Tyto skripty obsahují kromě sledu příkazů také rozšíření o funkce, které jsou volány během vykonávání určitých částí programu. Hlavním souborem, který se spouští po startu je skript „MMDS.m“, jehož obsahem jsou mimo jiné všechny objekty a prvky zobrazované v okně aplikace. Dále pak tento skript obsahuje interní funkce volané např. při stisku některého z tlačítek nebo při aktivaci vstupního pole. Kromě tohoto souboru aplikace používá některé další skripty oddělené od hlavního souboru a spouštěné při vykonávání určité akce. Jedná se především o skripty mající na starost kontrolu zadávaných parametrů a předně také skripty obsluhující samotný výpočet pro jednotlivé typy modelovaných zařízení. Jejich výpočet se řeší buďto pomocí funkce ode45, což je numerická funkce pro řešení soustavy diferenciálních rovnic metodou Runge-Kutta 4. řádu nebo analyticky metodou Laplaceovy transformace. Vlastní část zdrojového kódu provádějící výpočet zmíněnými dvěma metodami pro tepelný směšovač kapalin se zanedbáním tepelných ztrát ve stěně nádoby je uvedena v příloze P I této práce.

7 OVĚŘENÍ FUNKČNOSTI UŽIVATELSKÉ APLIKACE

Správnou funkci vytvořené uživatelské aplikace (dále jen MMDS) jsem ověřil na následujících vzorových úlohách založených na entalpické nebo hmotové bilanci. Pro porovnání výsledných hodnot a grafických průběhů jsem použil vzorové příklady, které jsou řešeny v předmětu modelování dynamických systémů. [22]

Příklad č. 1: Entalpická bilance průtočného směšovače kapalin se zanedbatelnou tepelnou kapacitou stěny

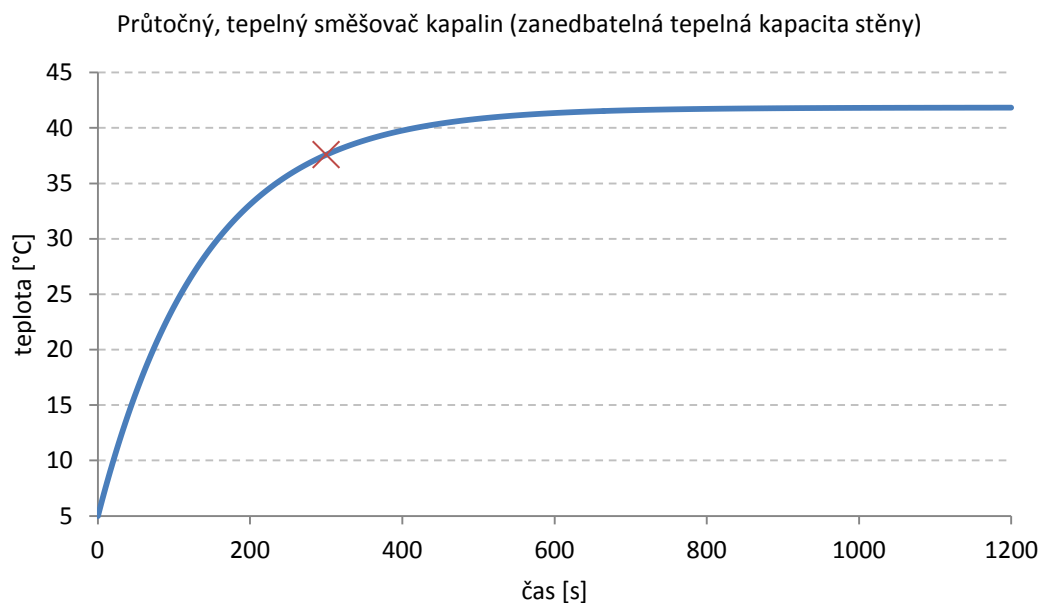
Určete průběh teploty na výstupu ze směšovače kapalin až do ustálení a teplotu v čase 5 minut, jestliže do něho přitéká kapalina dvěma proudy o konstantních hmotových průtocích. Jedním proudem přitéká 3,5 kg/s vody o teplotě 30 °C a druhým proudem přitéká 1,5 kg/s vody o teplotě 70 °C. V nádobě je udržována konstantní výška hladiny, což odpovídá hmotnosti náplně směšovače 700 kg. Měrná tepelná kapacita vstupujících proudů a kapaliny ve směšovači je stejná s hodnotou 4,187 kJ.kg⁻¹.K⁻¹. Počáteční teplota směsi na výstupu ze směšovače kapalin je 5 °C, střední teplota okolního vzduchu je 20 °C. Smáčená plocha směšovače je 3 m², součinitel prostupu tepla mezi tekutinou uvnitř směšovače a okolním prostředím je 50 W.m⁻².K⁻¹. Předpokládejte, že tepelná kapacita stěny je zanedbatelná, dále se předpokládá ideální míchání kapaliny ve směšovači a konstantní odtok kapaliny, jehož průtok je shodný se vstupními proudy.

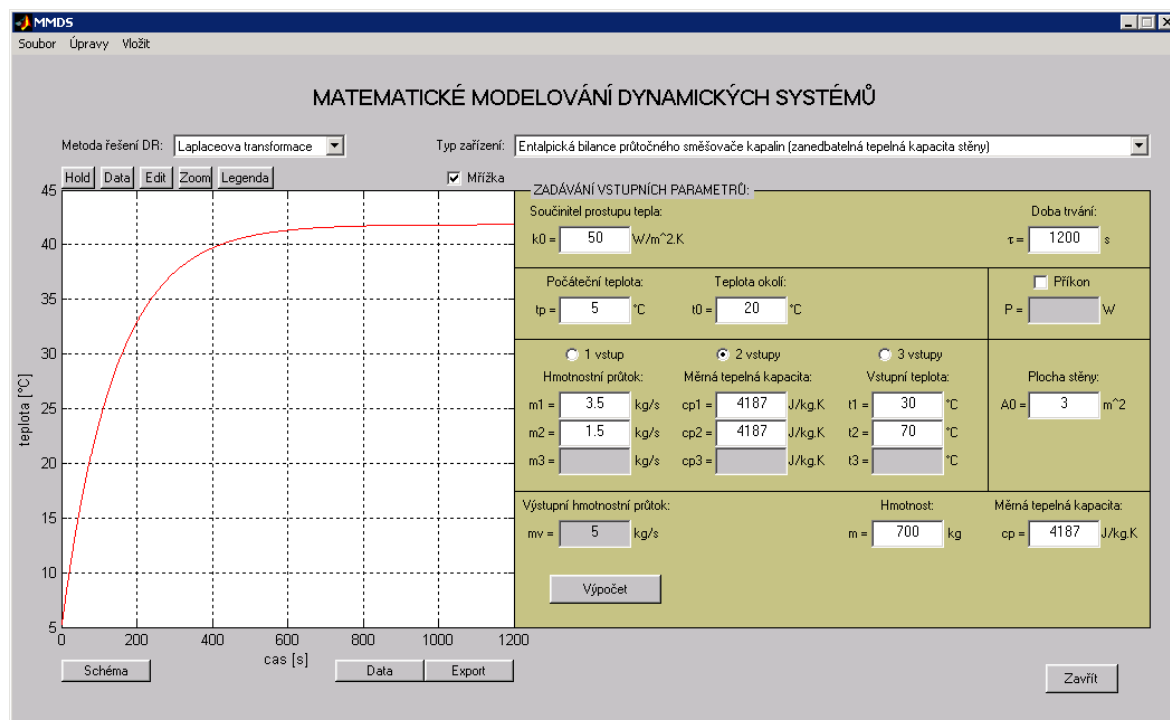


Obr. 7.1 – Schéma průtokového mísiče kapalin se zanedbáním tepelných ztrát do stěn nádoby

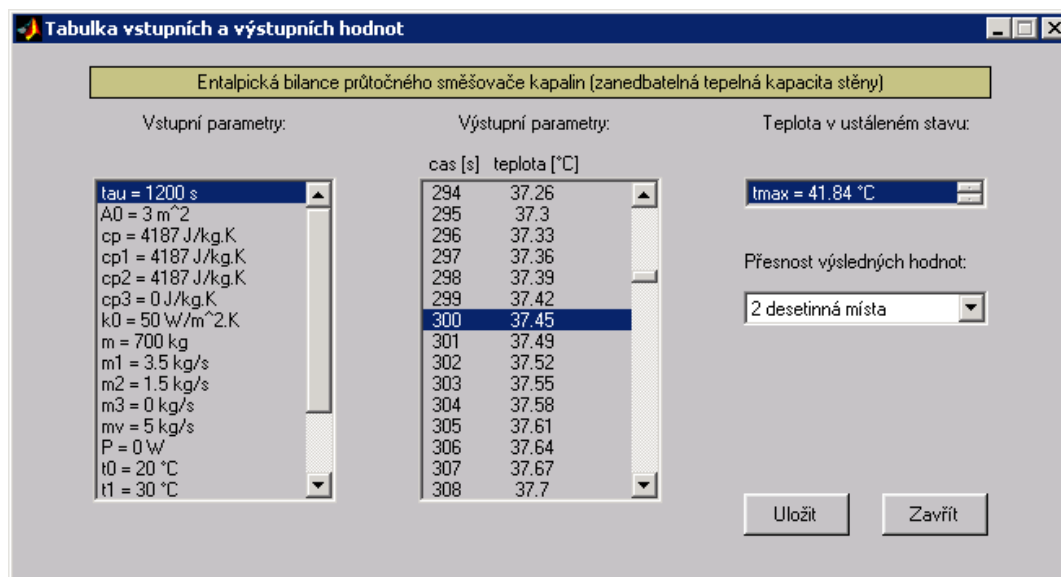
Tab. 7.1 – Vstupní parametry a výsledné hodnoty pro příklad č. 1 získané z MS Excel

Zadané parametry	Veličina	Jednotky	Výsledné hodnoty
Doba trvání technologického procesu:	$\tau =$	1200 s	Teplota v čase $\tau = 5$ min: $t_5(\tau) = 37,58$ °C
Plocha směšovače:	$A =$	3 m ²	
Měrná tepelná kapacita kapaliny:	$c_p =$	4187 J.kg ⁻¹ .K ⁻¹	Teplota v čase $\tau = 20$ min: $t_{20}(\tau) = 41,83$ °C
Měrná tepelná kapacita proudu č. 1 a 2:	$c_{p1}, c_{p2} =$	4187 J.kg ⁻¹ .K ⁻¹	
Součinitel prostupu tepla:	$k =$	50 W.m ⁻² .K ⁻¹	
Hmotnost směšovače:	$m =$	700 kg	
Hmotový průtok vstupního proudu č. 1:	$m_1 =$	3,5 kg.s ⁻¹	
Hmotový průtok vstupního proudu č. 2:	$m_2 =$	1,5 kg.s ⁻¹	
Střední teplota okolního vzduchu:	$t_o =$	20 °C	
Teplota vstupního proudu č. 1:	$t_1 =$	30 °C	
Teplota vstupního proudu č. 2:	$t_2 =$	70 °C	
Počáteční teplota:	$t_p =$	5 °C	

Obr. 7.2 – Grafický průběh závislosti teploty na čase pro příklad č. 1
(vykreslen v prostředí Microsoft Excel)



Obr. 7.3 – Grafický průběh závislosti teploty na čase pro příklad č. 1
(vykreslen aplikací MMDS)

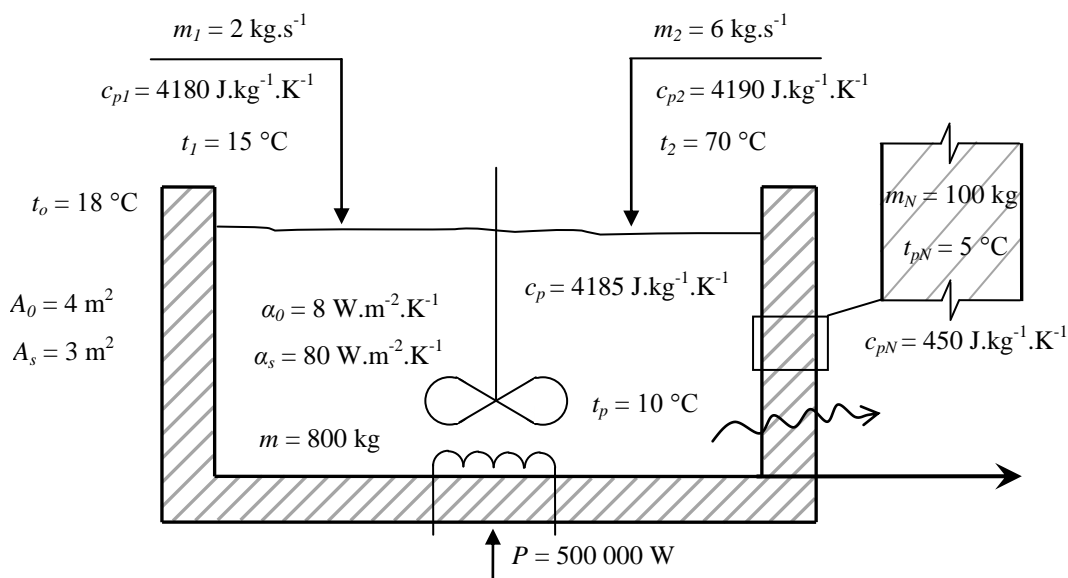


Obr. 7.4 – Teplota v čase 5 minut získaná aplikací MMDS

V čase 5 minut dosáhne teplota v průtočně míchaném směšovači kapalin hodnoty $37,5 \text{ °C}$ a v ustáleném stavu je rovna $41,8 \text{ °C}$.

Příklad č. 2: Entalpická bilance průtočného směšovače kapalin s nezanedbatelnou tepelnou kapacitou stěny

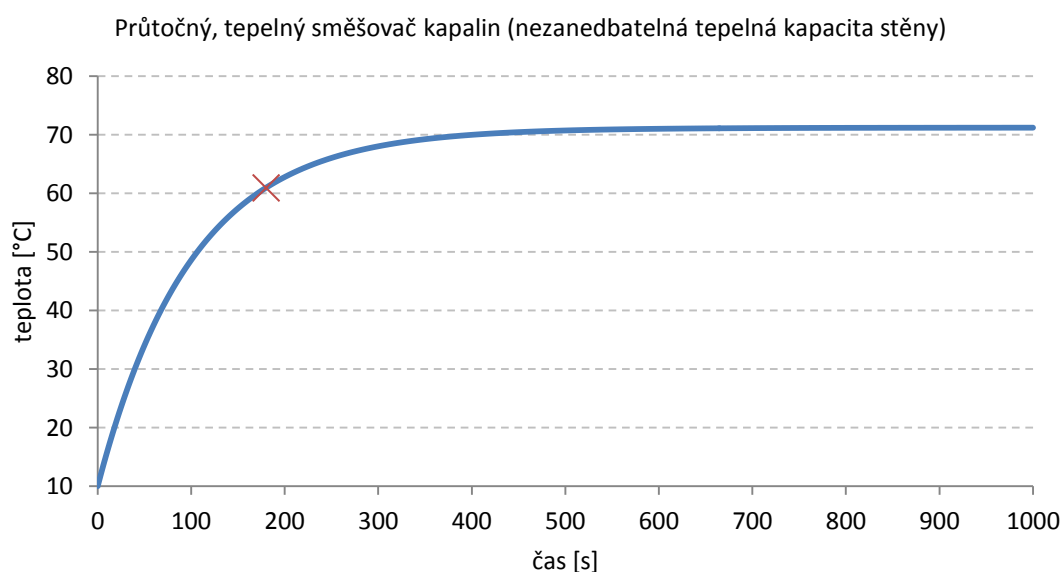
Do průtočného směšovače kapalin s vnitřní plochou 3 m^2 a vnější plochou 4 m^2 se přivádí kapalina dvěma vstupními proudy o konstantních hmotových průtocích, přičemž jedním proudem přitéká kapalina o průtoku 2 kg/s s měrnou tepelnou kapacitou $4,18 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ a teplotou $15 \text{ }^\circ\text{C}$, druhým proudem přitéká kapalina o průtoku 6 kg/s s měrnou tepelnou kapacitou $4,19 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ a teplotou $70 \text{ }^\circ\text{C}$. Určete průběh teploty tekutiny ve směšovači kapalin v čase 3 minut, jehož tepelná kapacita stěny je nezanedbatelná a zároveň teplotu v ustáleném stavu. Dále předpokládejte s ohřevem tekutiny o příkonu topení 500 kW . Počáteční teplota směsi na výstupu ze směšovače je $10 \text{ }^\circ\text{C}$ a počáteční teplota jeho stěny je $5 \text{ }^\circ\text{C}$. Střední teplota okolního vzduchu je $18 \text{ }^\circ\text{C}$. Předpokládejte, že součinitel přestupu tepla mezi kapalinou a vnitřní stěnou je $80 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ a součinitel přestupu tepla mezi stěnou a okolním prostředím je $8 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$. Kapalina uvnitř směšovače má hmotnost 800 kg a měrnou tepelnou kapacitu $4,185 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$. Hmotnost ocelového pláště směšovače je 100 kg a jeho měrná tepelná kapacita $450 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$. Při výpočtu předpokládejte ideální míchání, konstantní výšku kapaliny uvnitř směšovače a účinnost topení $100 \text{ } \%$.



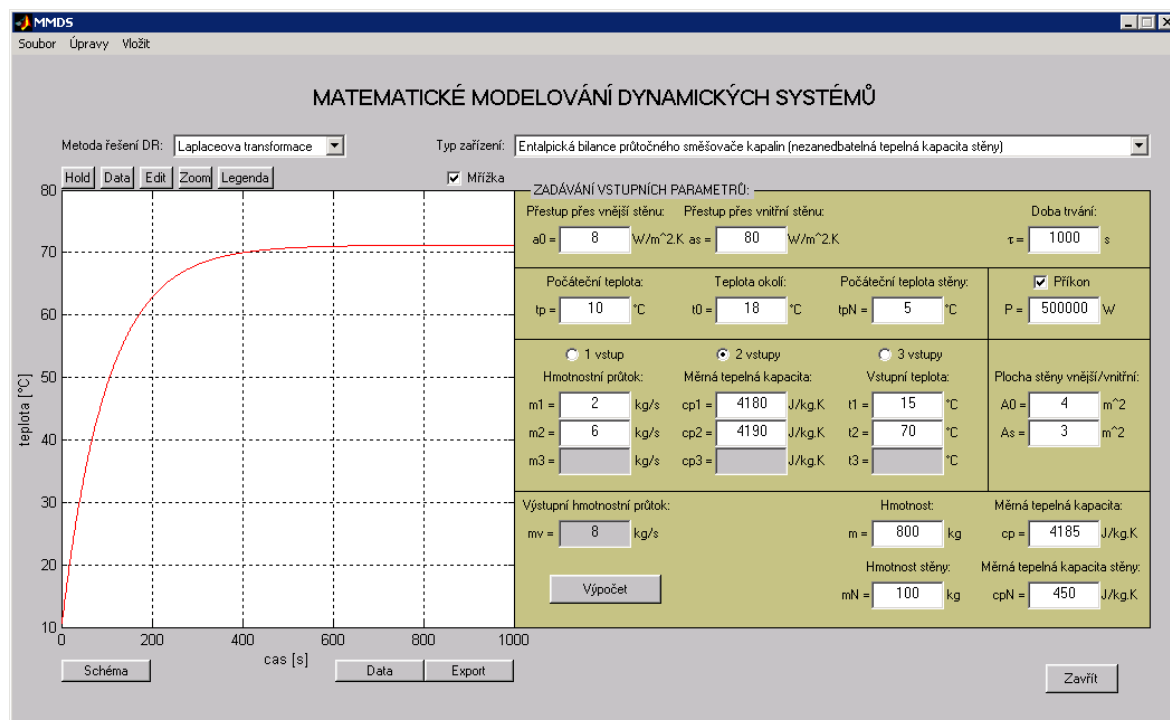
Obr. 7.5 – Schéma průtokového mísiče kapalin s uvažováním tepelných ztrát do stěn nádoby

Tab. 7.2 – Vstupní parametry a výsledné hodnoty pro příklad č. 2 získané z MS Excel

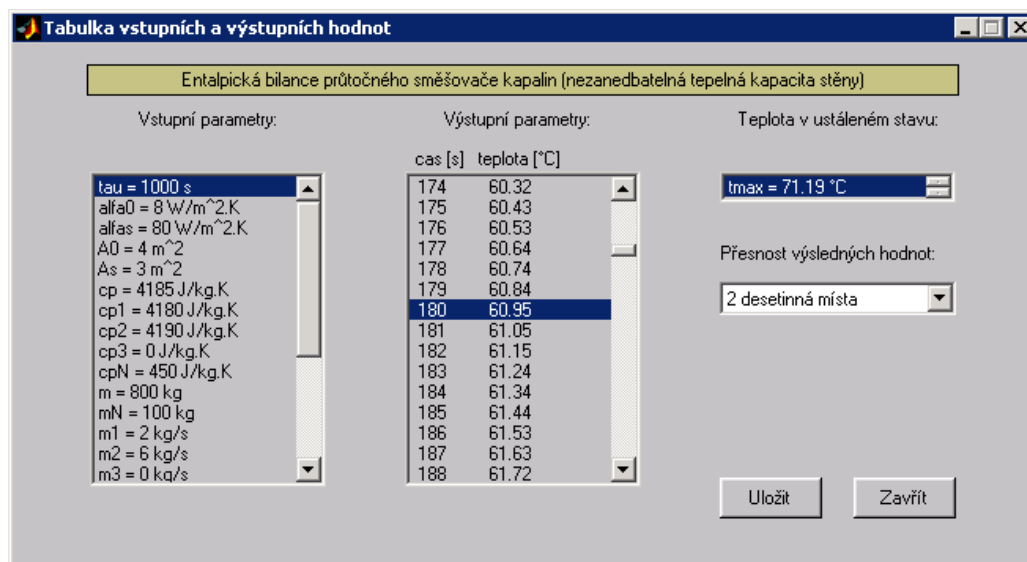
Zadané parametry	Veličina	Jednotky	Výsledné hodnoty
Doba trvání technologického procesu:	$\tau =$	1000 s	Teplota v čase $\tau = 180$ s:
Součinitel prostupu tepla:	$\alpha_0 =$	8 W.m ⁻² .K ⁻¹	$t_{180}(\tau) =$ 60,95 °C
Součinitel prostupu tepla:	$\alpha_s =$	80 W.m ⁻² .K ⁻¹	
Plocha vnější stěny směšovače:	$A_0 =$	4 m ²	Teplota v čase $\tau = 1000$ s:
Plocha vnitřní stěny směšovače:	$A_s =$	3 m ²	$t_{1000}(\tau) =$ 71,19 °C
Měrná tepelná kapacita kapaliny v mísiči:	$c_p =$	4185 J.kg ⁻¹ .K ⁻¹	
Měrná tepelná kapacita proudu č. 1:	$c_{p1} =$	4180 J.kg ⁻¹ .K ⁻¹	
Měrná tepelná kapacita proudu č. 2:	$c_{p2} =$	4190 J.kg ⁻¹ .K ⁻¹	
Měrná tepelná kapacita stěny:	$c_{pN} =$	450 J.kg ⁻¹ .K ⁻¹	
Hmotnost kapaliny ve směšovači:	$m =$	800 kg	
Hmotnost stěny směšovače:	$m_N =$	100 kg	
Hmotový průtok vstupního proudu č. 1:	$m_1 =$	2 kg.s ⁻¹	
Hmotový průtok vstupního proudu č. 2:	$m_2 =$	6 kg.s ⁻¹	
Příkon topení:	$P =$	500000 W	
Střední teplota okolního vzduchu:	$t_o =$	18 °C	
Teplota vstupního proudu č. 1:	$t_1 =$	15 °C	
Teplota vstupního proudu č. 2:	$t_2 =$	70 °C	
Počáteční teplota:	$t_p =$	10 °C	
Počáteční teplota stěny:	$t_{pN} =$	5 °C	



Obr. 7.6 – Grafický průběh závislosti teploty na čase pro příklad č. 2
(vykreslen v prostředí Microsoft Excel)



Obr. 7.7 – Grafický průběh závislosti teploty na čase pro příklad č. 2
(vykreslen aplikací MMDS)

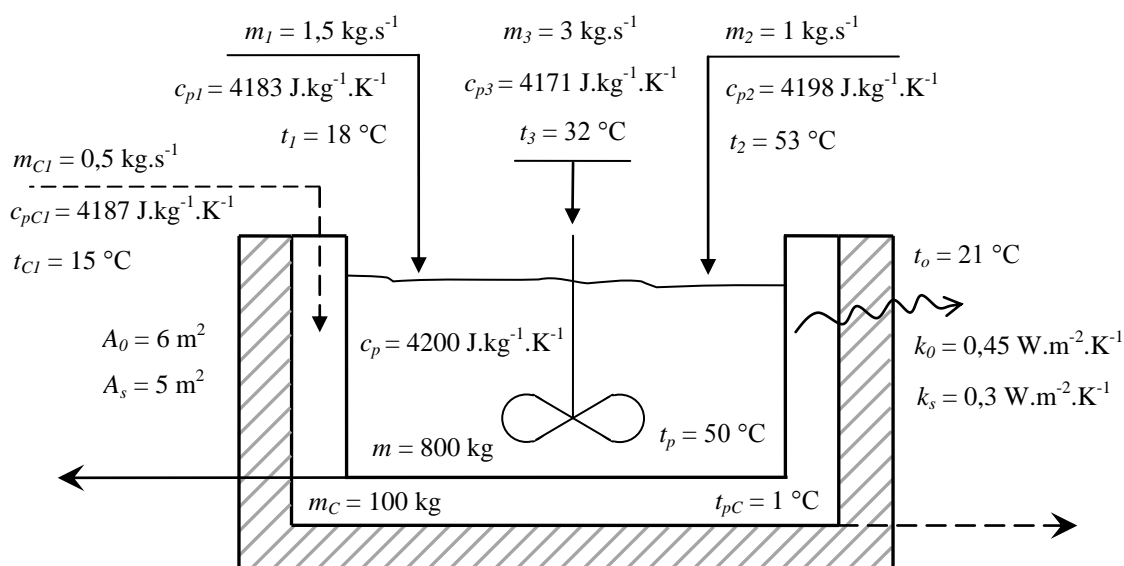


Obr. 7.8 – Teplota v čase 3 minut získaná aplikací MMDS

V čase 3 minut se teplota zvýší na 61 °C a doba, za kterou je dosaženo ustáleného stavu je rovna 71,2 °C.

Příklad č. 3: Entalpická bilance rekuperačního výměníku tepla

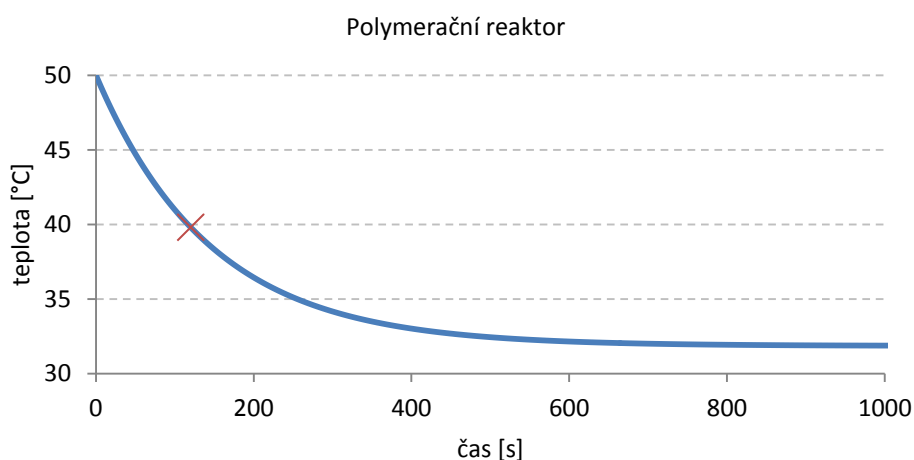
Do rekuperačního výměníku tepla, který je chlazen vodou o teplotě $15\text{ }^{\circ}\text{C}$ a hmotnostním průtoku $0,5\text{ kg/s}$ se přivádí třemi proudy kapalina o konstantních průtocích. V prvním proudě přitéká $1,5\text{ kg/s}$ kapaliny o teplotě $18\text{ }^{\circ}\text{C}$ a měrné tepelné kapacitě $4183\text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$. V druhém proudě přitéká 1 kg/s kapaliny o teplotě $53\text{ }^{\circ}\text{C}$ a měrné tepelné kapacitě $4198\text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$. Třetím proudem přitéká kapalina o průtoku 3 kg/s o teplotě $32\text{ }^{\circ}\text{C}$ s měrnou tepelnou kapacitou $4171\text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$. Měrná tepelná kapacita chladiva je $4187\text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$. Hmotnost chlazené kapaliny v rekuperačním výměníku je 800 kg s měrnou tepelnou kapacitou $4200\text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$. Hmotnost chladicí kapaliny je 100 kg a její měrná tepelná kapacita činí $500\text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$. Na jaké teplotě se za daných podmínek ustálí teplota výstupního proudu, jestliže uvažujeme počáteční teplotu chlazené kapaliny $50\text{ }^{\circ}\text{C}$ a počáteční teplotu chladiva $1\text{ }^{\circ}\text{C}$. Jaká bude teplota v čase 2 minut? Dále se uvažuje s teplotou okolí $21\text{ }^{\circ}\text{C}$. Součinitel prostupu tepla přes vnitřní stěnu o ploše 5 m^2 je $0,3\text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ a součinitel prostupu tepla přes vnější stěnu o ploše 6 m^2 je $0,45\text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$. Předpokládejte, že v rekuperačním výměníku dochází k dokonalému promíchávání chlazené kapaliny. Tepelná kapacita vnitřní i vnější stěny výměníku je zanedbatelná. Výška hladiny uvnitř výměníku je konstantní.

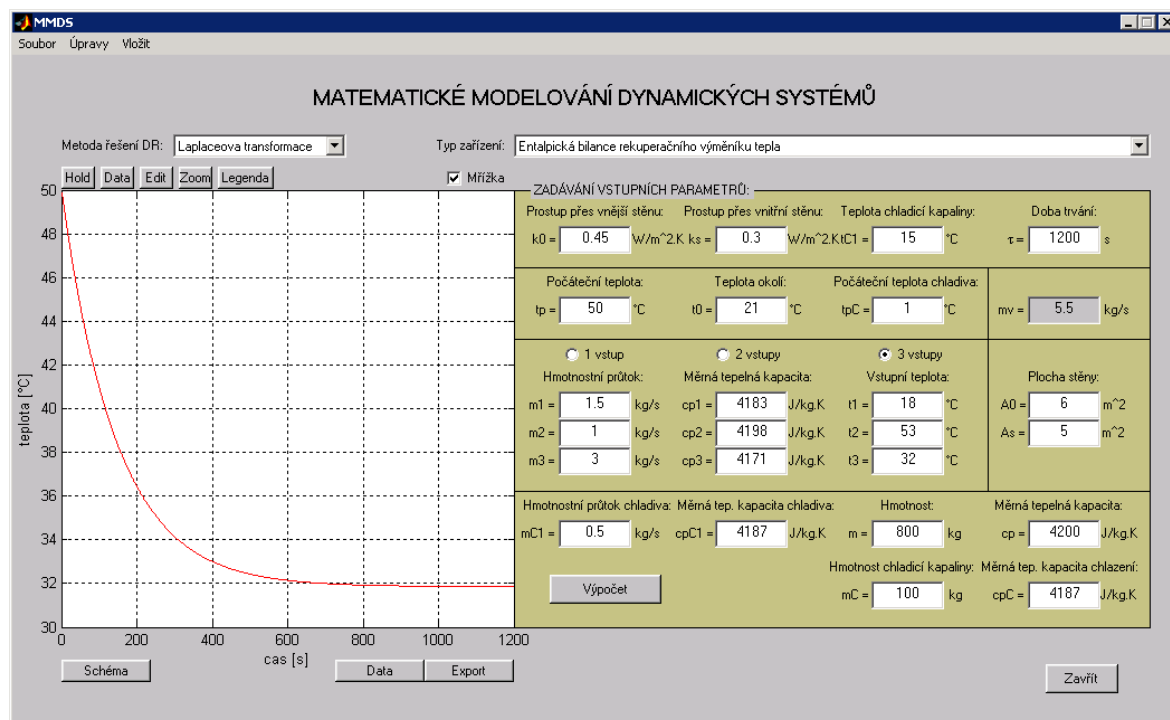


Obr. 7.9 – Schéma rekuperačního výměníku tepla
s mícháním a chlazením v plášti

Tab. 7.3 – Vstupní parametry a výsledné hodnoty pro příklad č. 3 získané z MS Excel

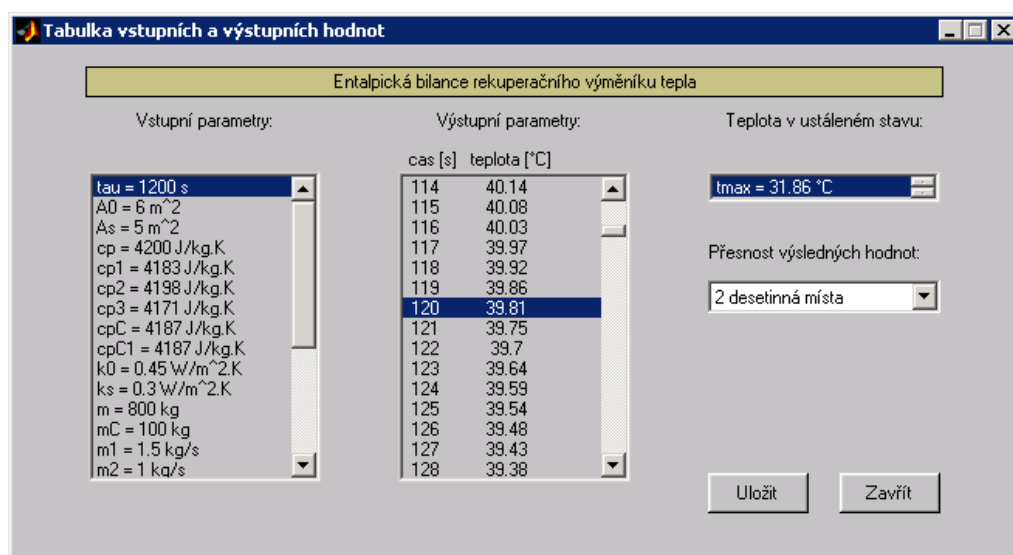
Zadané parametry	Veličina	Jednotky	Výsledné hodnoty
Doba trvání technologického procesu:	$\tau =$	1200 s	Teplota v čase $\tau = 2$ min: $t_2(\tau) = 39,81$ °C
Plocha vnější stěny výměníku:	$A_0 =$	6 m ²	
Plocha vnitřní stěny výměníku:	$A_s =$	5 m ²	Teplota v čase $\tau = 20$ min: $t_{20}(\tau) = 31,86$ °C
Součinitel prostupu tepla vnější stěny:	$k_0 =$	0,45 W.m ⁻² .K ⁻¹	
Součinitel prostupu tepla vnitřní stěny:	$k_s =$	0,3 W.m ⁻² .K ⁻¹	
Měrná tepelná kapacita proudu č. 1:	$c_{p1} =$	4183 J.kg ⁻¹ .K ⁻¹	
Měrná tepelná kapacita proudu č. 2:	$c_{p2} =$	4198 J.kg ⁻¹ .K ⁻¹	
Měrná tepelná kapacita proudu č. 3:	$c_{p3} =$	4171 J.kg ⁻¹ .K ⁻¹	
Měrná tepelná kapacita chladiva:	$c_{pCl} =$	4187 J.kg ⁻¹ .K ⁻¹	
Hmotnost kapaliny ve výměníku:	$m =$	800 kg	
Hmotový průtok vstupního proudu č. 1:	$m_1 =$	1,5 kg.s ⁻¹	
Hmotový průtok vstupního proudu č. 2:	$m_2 =$	1 kg.s ⁻¹	
Hmotový průtok vstupního proudu č. 2:	$m_3 =$	3 kg.s ⁻¹	
Hmotnost chladiva:	$m_C =$	100 kg	
Hmotový průtok chladiva:	$m_{Cl} =$	0,5 kg.s ⁻¹	
Střední teplota okolního vzduchu:	$t_o =$	21 °C	
Teplota vstupního proudu č. 1:	$t_1 =$	18 °C	
Teplota vstupního proudu č. 2:	$t_2 =$	53 °C	
Teplota vstupního proudu č. 3:	$t_3 =$	32 °C	
Teplota chladiva:	$t_{Cl} =$	15 °C	
Počáteční teplota kapaliny na výstupu:	$t_p =$	50 °C	
Počáteční teplota chladiva:	$t_{pC} =$	1 °C	

Obr. 7.10 – Průběh závislosti teploty na čase pro příklad č. 3
(vykreslen v prostředí Microsoft Excel)



Obr. 7.11 – Průběh závislosti teploty na čase pro příklad č. 3

(vykreslen aplikací MMDS)

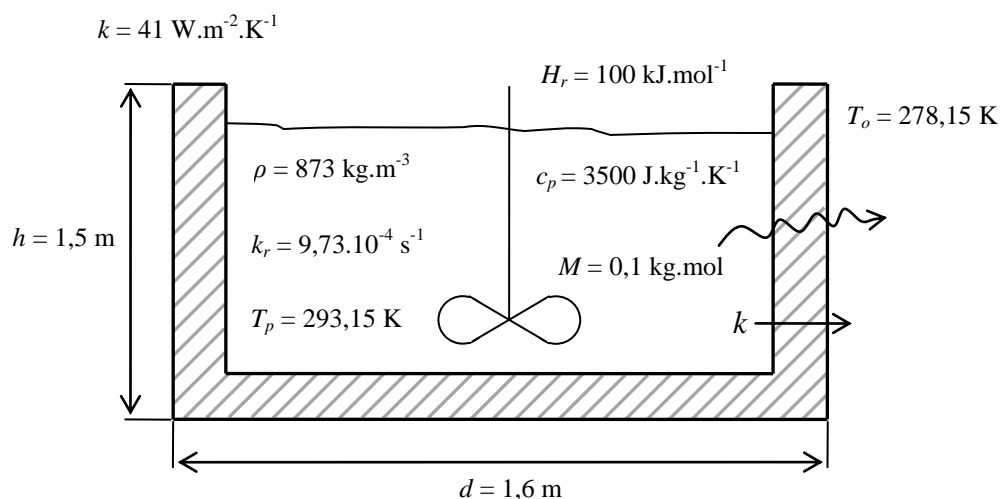


Obr. 7.12 – Teplota v čase 2 minut získaná aplikací MMDS

Při zadaných parametrech bylo za dobu 2 minut dosaženo teploty $39,8 \text{ °C}$. Teplota výstupního proudu se v tomto případě ustálila na hodnotě $31,9 \text{ °C}$.

Příklad č. 4: Entalpická bilance polymeračního reaktoru

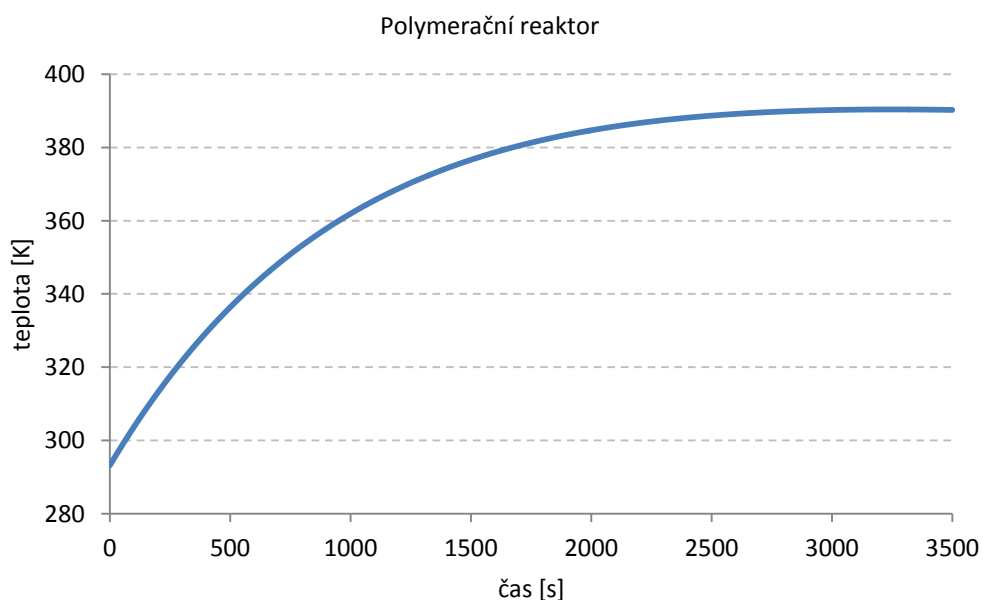
Polymerační reaktor pro roztokovou polymeraci je z 80 % naplněn reakční kapalinou o počáteční koncentraci 40 hmotnostních % monomeru. Polymerace je reakce 1. řádu vzhledem ke koncentraci monomeru. Stanovte dobu, za kterou teplota dosáhne kritické maximální hodnoty uvnitř válcového reaktoru, jehož poloměr plochého dna je 0,8 m a výška 1,5 m. Uvažujte dále ztráty tepla do okolí při teplotě okolního prostředí 5 °C, s rychlostní konstantou $9,73 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, hustotou polymerační směsi 873 kg/m^3 , molární hmotností monomeru 0,1 kg/mol, měrnou tepelnou kapacitou směsi $3500 \text{ J.kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ a s reakčním teplem 100 kJ.mol^{-1} . Teplota reakční směsi na začátku reakce je 20 °C, součinitel prostupu tepla mezi stěnou a vnějším okolím je $41 \text{ W.m}^2 \cdot \text{K}^{-1}$. Molární hmotnosti rozpouštědla a monomeru jsou stejné.



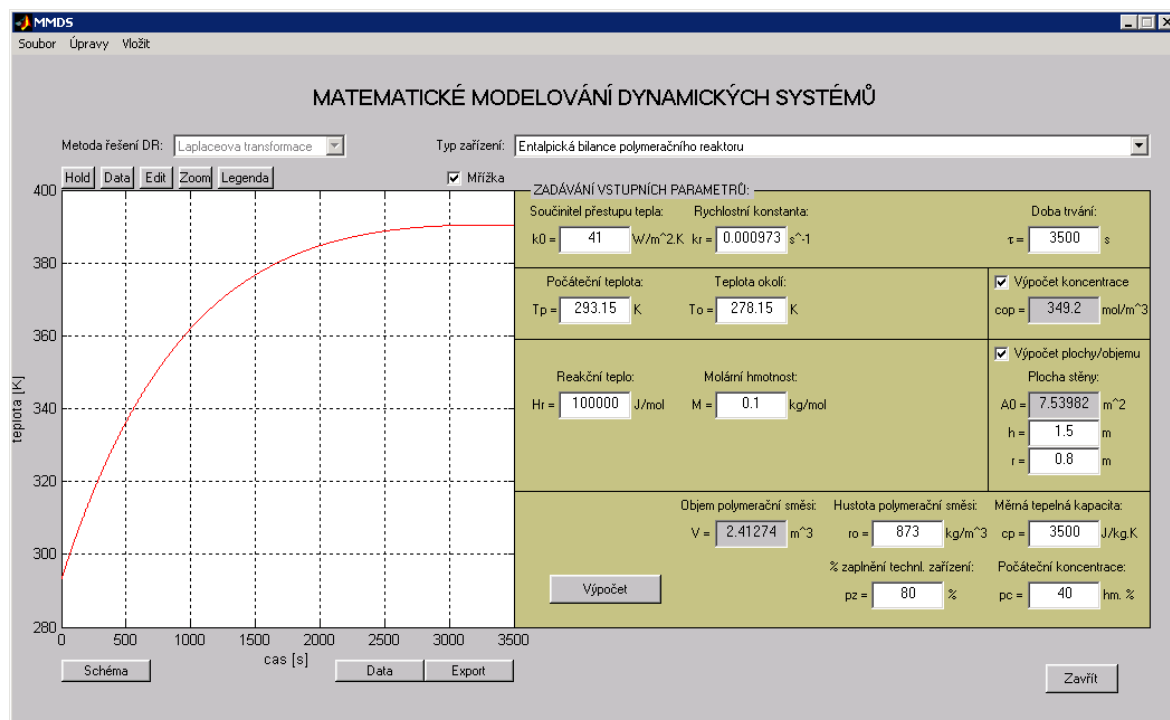
Obr. 7.13 – Schéma polymeračního reaktoru

Tab. 7.4 – Vstupní parametry a výsledné hodnoty pro příklad č. 4 získané z MS Excel

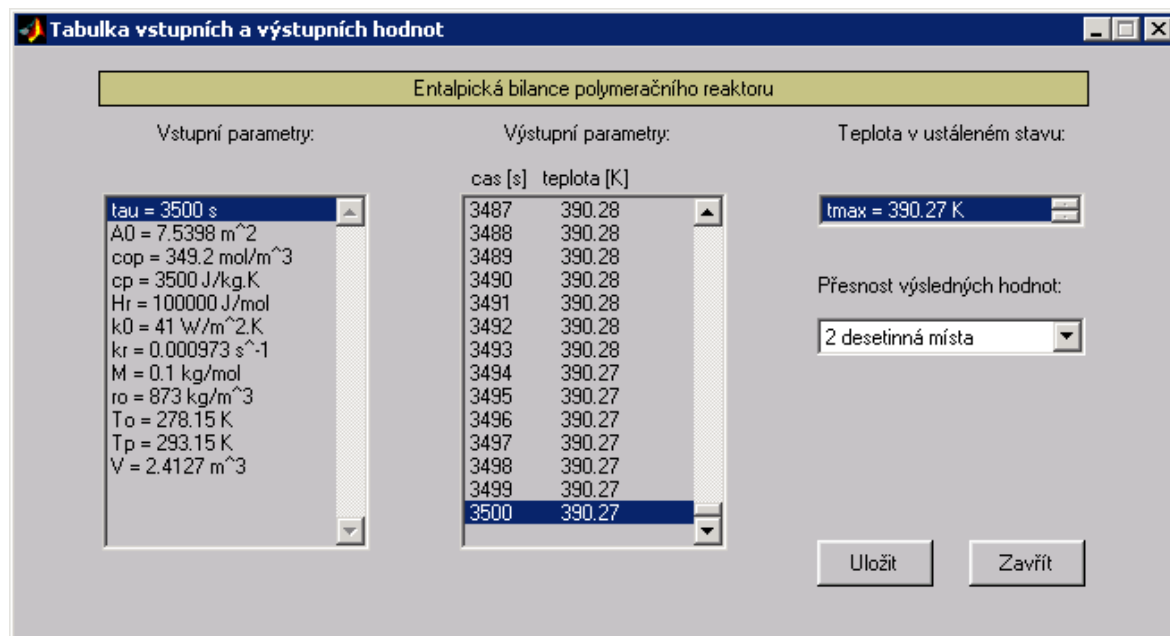
Zadané parametry	Veličina	Jednotky	Výsledné hodnoty
Doba trvání technologického procesu:	$\tau =$	3500 s	Teplota v čase $\tau = 3500$ s: $t_{3500}(\tau) = \mathbf{390,27\ K}$
Hustota polymerační směsi:	$\rho =$	873 kg.m ⁻³	
Plocha válcového reaktoru:	$A =$	7,54 m ²	
Počáteční koncentrace:	$c_{op} =$	349,2 mol.m ⁻³	
Měrná tepelná kapacita směsi:	$c_p =$	3500 J.kg ⁻¹ .K ⁻¹	
Výška válcového reaktoru:	$h =$	1,5 m	
Reakční teplo:	$H_r =$	100000 J.mol ⁻¹	
Součinitel prostupu tepla:	$k_0 =$	41 W.m ⁻² .K ⁻¹	
Rychlostní konstanta:	$k_r =$	0,00097 s ⁻¹	
Molární hmotnost monomeru:	$M =$	0,1 kg.mol ⁻¹	
Počáteční koncentrace:	$p_c =$	40 %	
Procento zaplnění zařízení:	$p_z =$	80 %	
Poloměr plochého dna:	$r =$	0,8 m	
Teplota reakční směsi na začátku reakce:	$T_p =$	293,15 K	
Střední teplota okolního vzduchu:	$T_o =$	278,15 K	
Objem směsi v reaktoru:	$V =$	2,41274 m ³	



Obr. 7.14 – Průběh závislosti absolutní teploty na čase pro příklad č. 4
(vykreslen v prostředí Microsoft Excel)



Obr. 7.15 – Grafický průběh závislosti absolutní teploty na čase pro příklad č. 4
(vykreslen aplikací MMDS)

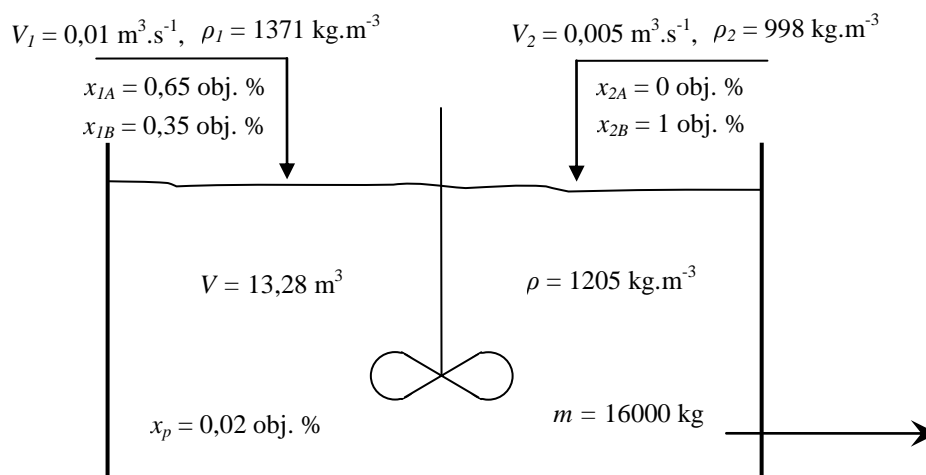


Obr. 7.16 – Teplota v ustáleném stavu získaná aplikací MMDS

Doba, za kterou teplota dosáhne kritické maximální hodnoty uvnitř válcového reaktoru je rovna přibližně 3500 s při absolutní teplotě 390,3 K.

Příklad č. 5: Hmotová bilance průtočného, koncentračního směšovače kapalin

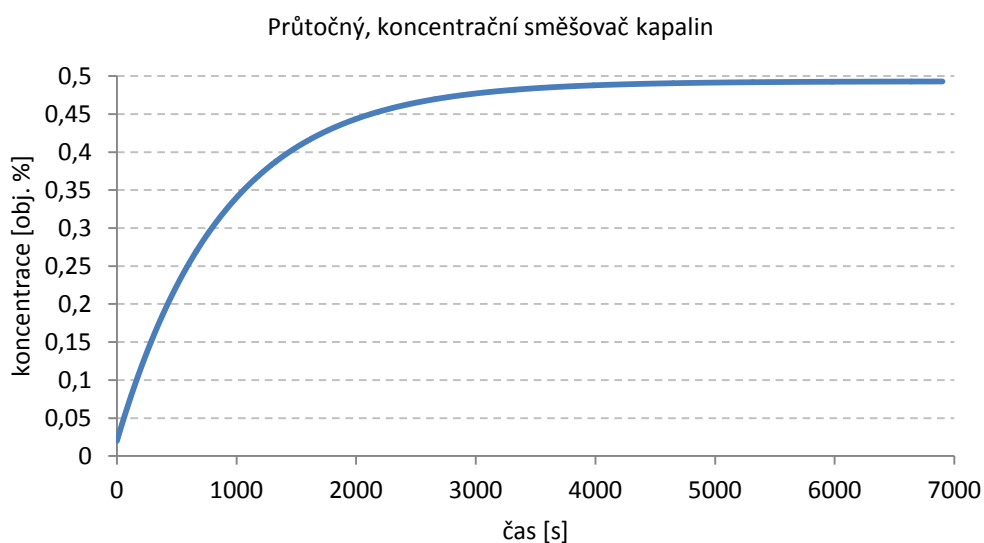
V míchané uzavřené nádrži o hmotnosti 16 tun je mísen roztok NaCl vodou a dále tento roztok odtéká. Průtoky jsou konstantní, přičemž objemový průtok roztoku NaCl je $0,01 \text{ m}^3/\text{s}$ a objemový průtok vody $0,005 \text{ m}^3/\text{s}$. Zpočátku je v nádrži roztok o koncentraci 2 objemová % NaCl. Koncentrace roztoku NaCl na vstupu je 65 obj. % a jeho hustota 1371 kg/m^3 . Hustota vody je 998 kg/m^3 a hustota roztoku v mísiči je 1205 kg/m^3 . Vypočítejte koncentraci NaCl na výstupu ze směšovače v ustáleném stavu. Určete také koncentraci NaCl na výstupu v čase 20 min. Předpokladem je dokonalé promíchávání roztoku v mísiči a konstantní výška hladiny.



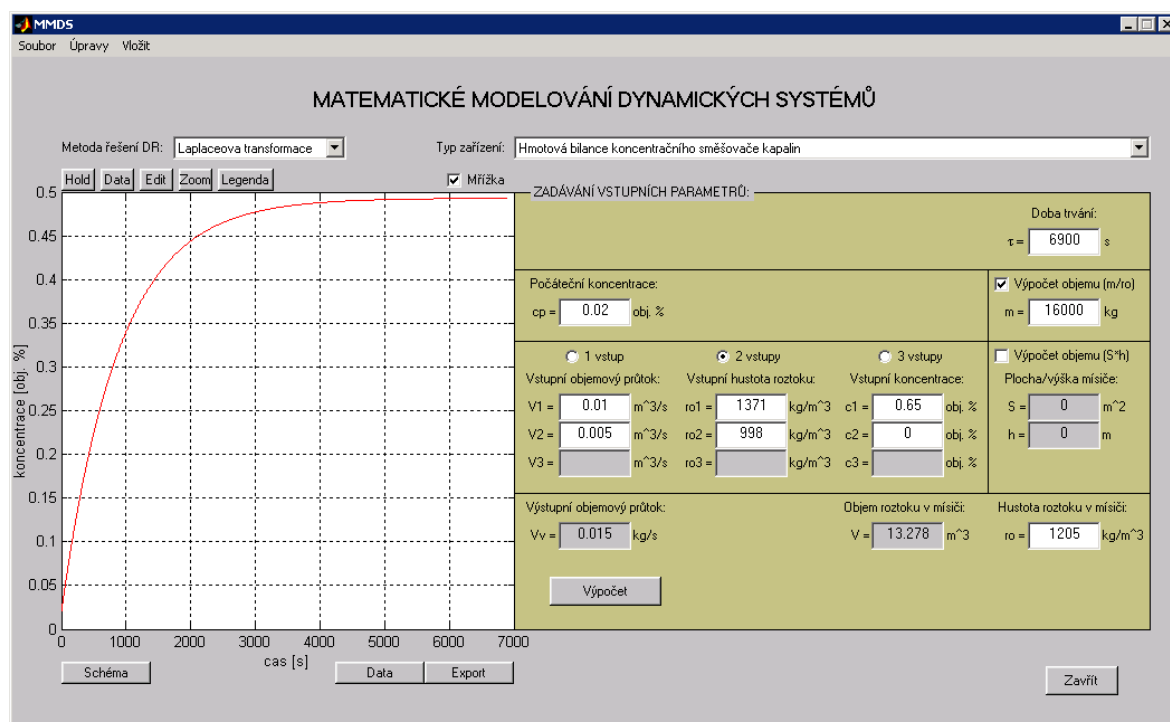
Obr. 7.17 – Schéma průtokového mísiče kapalin

Tab. 7.5 – Vstupní parametry a výsledné hodnoty pro příklad č. 5 získané z MS Excel

Zadané parametry	Veličina	Jednotky	Výsledné hodnoty
Doba trvání technologického procesu:	$\tau =$	7000 s	Koncentrace v čase $\tau = 115 \text{ min}$: $x_{115}(\tau) = \mathbf{0,493 \text{ obj. \%}}$
Hustota roztoku ve směšovači:	$\rho =$	1205 kg.m^{-3}	
Hustota roztoku NaCl na vstupu:	$\rho_1 =$	1371 kg.m^{-3}	
Hustota vody na vstupu:	$\rho_2 =$	998 kg.m^{-3}	
Koncentrace NaCl v proudu č. 1:	$x_{1A} =$	0,65 obj. %	
Koncentrace vody v proudu č. 2:	$x_{2A} =$	0 obj. %	
Počáteční koncentrace:	$x_p =$	0,02 obj. %	
Hmotnost směšovače:	$m =$	16000 kg	
Objem roztoku ve směšovači:	$V =$	13,28 m^3	
Objemový průtok NaCl v proudu č. 1:	$V_1 =$	0,01 $\text{m}^3.\text{s}^{-1}$	
Objemový průtok vody v proudu č. 2:	$V_2 =$	0,005 $\text{m}^3.\text{s}^{-1}$	

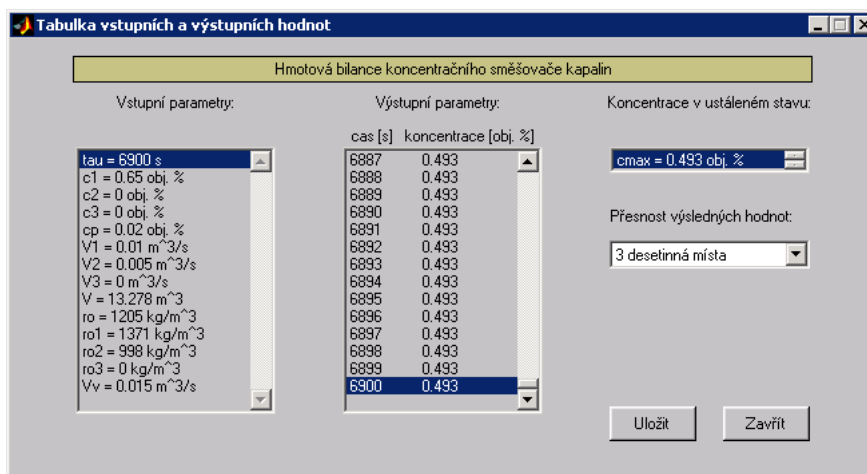


Obr. 7.18 – Průběh závislosti koncentrace na čase pro příklad č. 5
(vykreslen v prostředí Microsoft Excel)



Obr. 7.19 – Grafický průběh závislosti koncentrace na čase pro příklad č. 5
(vykreslen aplikací MMDS)

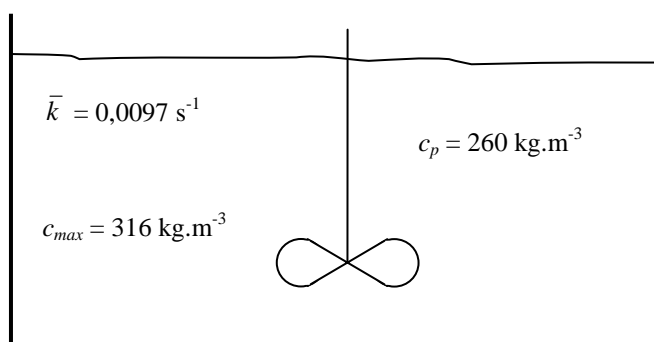
Koncentrace NaCl v ustáleném stavu na výstupu z průtočně míchaného směšovače je 0,49 objemových %.



Obr. 7.20 – Koncentrace v ustáleném stavu získaná aplikací MMDS

Příklad č. 6: Hmotová bilance polymeračního reaktoru

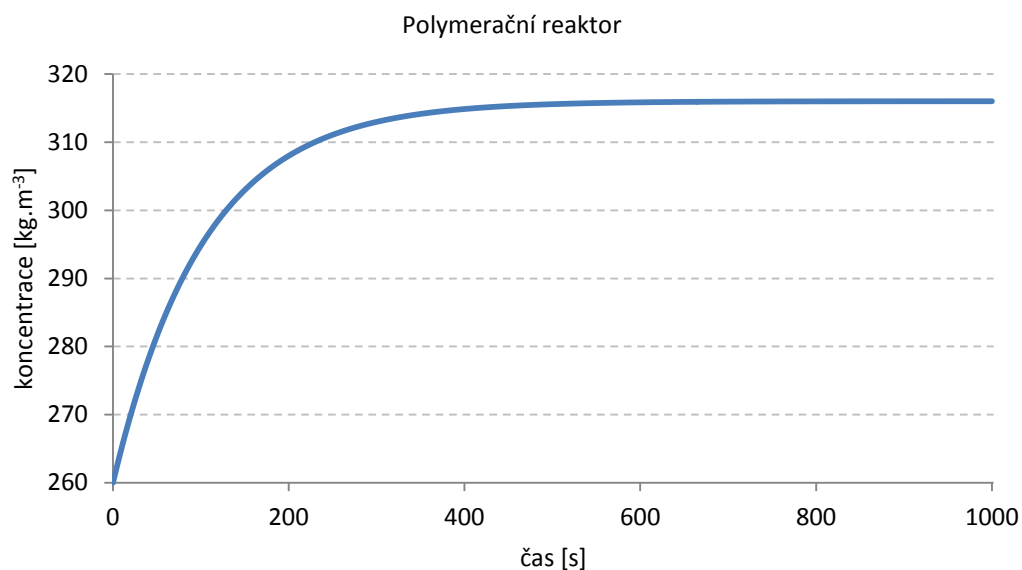
Stanovte průběh koncentrace chloridu sodného pro jednorázové dekantační praní nevázané složky (NaCl) v surové kůži. Rozpouštění NaCl je reakce 1. řádu (pozn. jedná se o surovou kůži konzervovanou chloridem sodným, takže část NaCl je v krystalické formě na povrchu kůže a část je rozpouštěna v mezivkládnitých prostorech suroviny). Brzdící vliv difúze není uvažován. Koncentrace soli na povrchu kůže je 316 kg/m^3 , koncentrace soli v kůži je 260 kg/m^3 . Rychlostní konstanta rozpouštění se uvažuje 35 1/h .



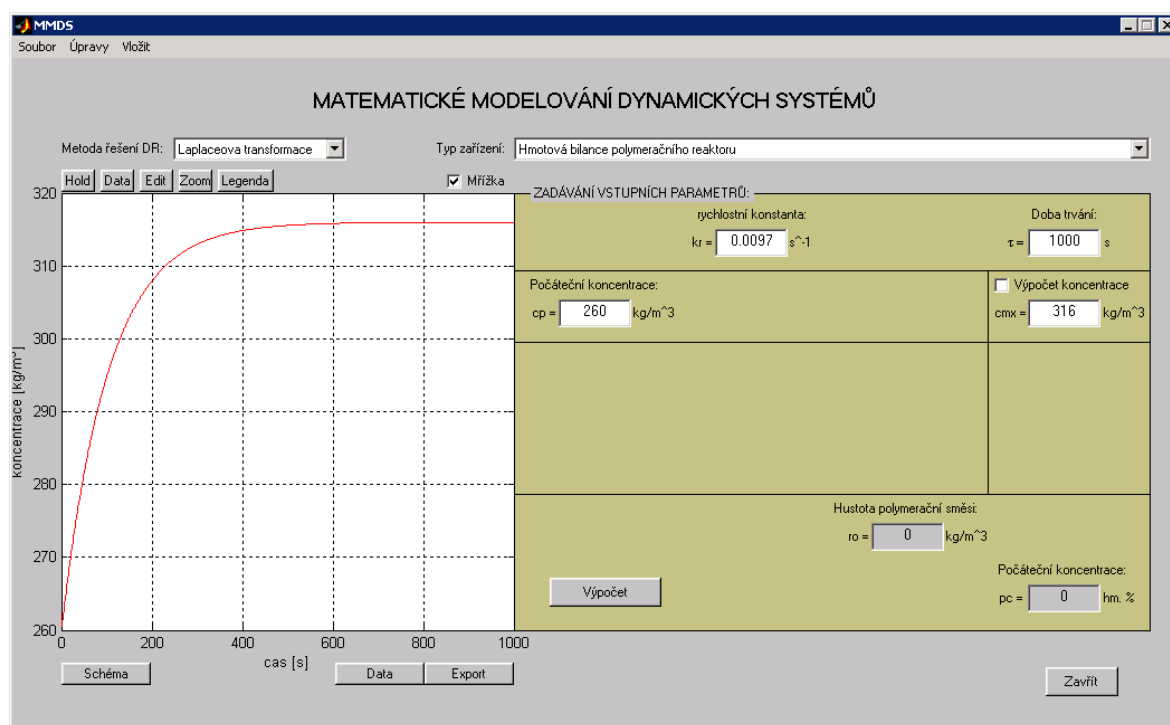
Obr. 7.21 – Schéma polymeračního reaktoru

Tab. 7.6 – Vstupní parametry a výsledné hodnoty pro příklad č. 6 získané z MS Excel

Zadané parametry	Veličina	Jednotky	Výsledné hodnoty
Doba trvání technologického procesu:	$\tau =$	1000 s	Koncentrace v čase $\tau = 1000 \text{ s}$: $c_{1000}(\tau) = \mathbf{316,00} \text{ kg.m}^{-3}$
Koncentrace látky v krystalické formě:	$c_{max} =$	316 kg.m^{-3}	
Počáteční koncentrace:	$c_p =$	260 kg.m^{-3}	
Rychlostní konstanta:	$k =$	0,0097 s^{-1}	



Obr. 7.22 – Průběh závislosti koncentrace na čase pro příklad č. 6
(vykreslen v prostředí Microsoft Excel)



Obr. 7.23 – Grafický průběh závislosti koncentrace na čase pro příklad č. 6
(vykreslen aplikací MMDS)

Tabulka vstupních a výstupních hodnot

Hmotová bilance polymeračního reaktoru

Vstupní parametry:

tau = 1000 s
 cmax = 316 kg.m⁻³
 cp = 260 kg.m⁻³
 kr = 0.0097 s⁻¹

Výstupní parametry:

cas [s]	koncentrace [kg/m ³]
988	315.996
989	315.996
990	315.996
991	315.996
992	315.996
993	315.996
994	315.996
995	315.996
996	315.996
997	315.996
998	315.997
999	315.997
1000	315.997

Koncentrace v ustáleném stavu:

cmax = 315.997 kg/m³

Přesnost výsledných hodnot:

3 desetinná místa

Uložit Zavřít

Obr. 7.24 – Koncentrace v ustáleném stavu získaná aplikací MMDS

Průběh koncentrace chloridu sodného pro jednorázové dekantační praní nevázané složky v surové kůži byl stanoven v časovém rozmezí 0 až 1000 s. V tomto intervalu došlo postupně k ustálení koncentrace na hodnotě 316 kg/m³.

Z uvedeného grafického i numerického řešení jednotlivých vzorových příkladů je patrné, že výsledky získané pomocí vytvořené aplikace jsou v souladu s kontrolním řešením, které jsem provedl v programovém prostředí Microsoft Excel. Rozdíly mezi těmito výsledky jsou minimální, většinou jsou v řádech desetin z uvedených hodnot.

ZÁVĚR

Obsah diplomové práce je zaměřen na návrh vybraných matematických modelů dynamických systémů za účelem odvodit jejich obecné řešení vycházející z entalpické nebo hmotové bilance s cílem vytvořit programovou aplikaci, která umožní řešit průběhy teploty a koncentrace ve zpracovávané tuhé fázi během uvažovaného technologického procesu.

V teoretické části této práce jsem provedl literární studii týkající se analýzy dynamických systémů, tj. detailní souhrn důležitých pojmů a vlastností, které je nezbytné znát při matematickém modelování dynamických dějů probíhajících ve zkoumaných systémech. Seznámil jsem se tak se způsobem, jakým lze modelovat a vytvářet matematické modely technologických zařízení, čehož jsem následně využil při tvorbě mé diplomové práce.

V praktické části jsem se zabýval matematickým popisem vybraných modelů založených na entalpické a hmotové bilanci. Pro řešení sestavených matematických modelů reprezentované diferenciálními rovnicemi jsem využil metodu Laplaceovy transformace, která mi umožnila převést relativně nesnadné řešení diferenciálních rovnic v časové oblasti na algebraické rovnice, což významně přispělo k ulehčení tohoto řešení. Nicméně i přes snahu si co nejvíce usnadnit práci při výpočtu obecného vyjádření matematických modelů potřebného pro zadání do programové aplikace, vedl tento proces na zdlouhavé a časově náročné vyčíslování matematických rovnic. Obzvláště během řešení matematických modelů vedoucí na dvě diferenciální rovnice jsem se potýkal s nepřehledností a častými chybami, které mi nejprve znemožnily docílit se správného výsledku. Následně jsem při výpočtu kladl důraz na zavedení patřičného zjednodušení pomocí substitucí a také na detailní zápis všech kroků, které jsem během řešení provedl. Jen tak se mi podařilo nalézt správné řešení a obdržet tím výslednou rovnici v korektním tvaru. Během výpočtu mi také přišlo vhodné použít jednotnou formu zápisu v rámci řešených příkladů, což výrazně přispělo k přehlednosti a dalšímu zjednodušení při řešení následujících matematických modelů.

Na základě sestavených deterministických modelů vycházející z entalpické a hmotové bilance zkoumaných zařízení jsem se mohl následně zabývat tvorbou aplikace, která by časově zdlouhavé řešení rovnic usnadnila a zkrátila tak dobu jejich výpočtu. Při výběru vhodné aplikace pro matematické modelování jsem využil svých předchozích

znalostí při programování v prostředí MATLAB a rozhodl se tak pro výběr zrovna tohoto programu, který je navíc k dispozici v učebnách všem studentům na fakultě aplikované informatiky. Zmíněná aplikace umožňuje na základě deterministických matematických modelů entalpické a hmotové bilance řešit v nestacionárních systémech a při uvažování počátečních podmínek změnu stavové veličiny na čase a vypočítat tak dobu trvání daného technologického procesu. Tato doba je vyjádřena grafickým průběhem charakterizující změnu teploty nebo koncentrace v závislosti na čase, čímž lze simulovat nestacionární děje probíhající uvnitř provozního zařízení.

Funkci vytvořené programové aplikace jsem po jejím dokončení následně ověřil na vzorových úlohách vytvořených v programovém prostředí Microsoft Excel. Z uvedených výsledků v praktické části a jejich vzájemným porovnáním je patrné, že jsou rozdíly mezi nimi minimální.

Při tvorbě aplikace jsem se zaměřil především na jednoduchost ovládání a proto je celá aplikace pro pohodlí uživatele vytvořena v intuitivním grafickém prostředí, bez nutnosti přistupovat a zadávat vstupní parametry přímo do zdrojového kódu aplikace. Důraz byl také kladen na univerzálnost aplikace, která by umožnila zobrazit řešení při uvažování různých složek vstupních či jiných parametrů a přizpůsobit tak výpočet konkrétním požadavkům uživatele. Vytvořená aplikace tak nejen zkrátí dobu řešení, ale také poskytne možnost volby některých zadávaných parametrů, čímž se simulace více přiblíží realitě zkoumaného děje probíhajícího v provozním zařízení. Z těchto důvodů věřím, že bude aplikace přínosem pro výukové účely předmětu „Modelování dynamických systémů“ a poslouží pro řešení podobných úloh rozebíraných v tomto předmětu.

SUMMARY

The content of the thesis is aimed on the proposal of selected mathematical models of dynamical systems in order to create and derive the general solution of these models based on the enthalpy or mass balance and on this basis to create an application that allows to solve courses of temperature and concentration fields in the solid phase during the technological process.

The theoretical part of this work deals with the literary study concerning the analysis of dynamical systems, i.e. a summary of the properties and terms which is necessary to know for mathematical modelling of dynamic processes occurring in examined systems. I was so familiar with how to model and create mathematical models of technological devices, which I then use to write my thesis.

The created mathematical models represented by differential equations I solved by Laplace transform which allowed me to convert a relatively difficult differential equations to algebraic equations, which significantly contributed to the ease of solution of the problem. However, despite my efforts to ease the work during the calculation of mathematical models needed for use in the application, the procedure for making this calculation was time consuming. Especially during the solution of mathematical models lead to two differential equations, I often made mistakes that prevented me to achieve the correct result. Then I simplified the calculation of these equations by substitution of variables and also noticed all steps I performed during the solution. Just so I could find the correct solution and obtain the equation in the correct form. During the calculation, I also used the uniform rules of the notation, which a greatly simplified and more transparent solution of the following mathematical models.

On the basis of created deterministic models based on enthalpy and mass balance I could deal with creating an application that would facilitate the solution of the equations and reduce the computing time. When selecting an acceptable application for mathematical modelling, I used my previous knowledge of programming in MATLAB and I so decided to select this software, which is also available to all students at the Faculty of Applied Informatics. The application allows for deterministic mathematical models of enthalpy and mass balance in non-stationary systems to solve when considering the initial conditions the change of the state variables at time and calculate the duration of the technological process.

This time is expressed by a graphical course that describes the change of temperature or concentration depending on time, which can simulate non-stationary process.

After completing the application, I verified the correct functionality of this application on the selected types of sample problems created in the spreadsheet software Microsoft Excel. A Mutual comparison of the results in the practical part shows that the differences between them are minimal.

When creating the application, I aimed at simplicity of use and minimal complexity. That is why the application is created in the intuitive graphical interface without having to access and set input parameters directly into the application source code. Emphasis was also placed on universality of the application that would allow users to display solution for calculating the different input or other parameters and customize the calculation to the specific user requirements. The created application reduces the time solution and also provides a choice of some input parameters. By doing so, the simulation approximates reality examined process in the operating device. For these reasons, I believe that the created application will be usable for the purpose of the course "Modelling of dynamical systems" and will be used for solving similar problems in this subject.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] PERŮTKA, Karel. *MATLAB: Základy pro studenty automatizace a informačních technologií*. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2005, 303 s. ISBN 80-7318-355-2.
- [2] KOLOMAZNÍK, Karel. *Modelování zpracovatelských procesů*. Brno: Rektorát Vysokého učení technického v Brně, 1990, 191 s. ISBN 80-214-0114-1.
- [3] KŘUPKA, Jiří a Miloslava KAŠPAROVÁ. *Modelování v kostce pro Matlab a Simulink: distanční opora*. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2009, 72 s. ISBN 978-80-7395-162-7.
- [4] KARBAN, Pavel. *Výpočty a simulace v programech Matlab a Simulink*. Brno: Computer Press, 2006, 224 s. ISBN 978-80-251-1448-3.
- [5] HUNT, Brian R., Ronald L. LIPSMAN a Jonathan M. ROSENBERG. *A guide to MATLAB: for beginners and experienced users*. Cambridge: Cambridge University Press, 2001, 327 s. ISBN 0-521-00859-X.
- [6] DUŠEK, František. *MATLAB a SIMULINK: úvod do používání*. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2000, 146 s. ISBN 80-7194-273-1.
- [7] KOVAŘÍK, Martin. *Programování a tvorba grafiky v Matlabu*. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2008, 130 s. ISBN 978-80-7318-754-5.
- [8] ZAPLATÍLEK, Karel a Bohuslav DOŇAR. *MATLAB: tvorba uživatelských aplikací*. Praha: BEN - technická literatura, 2004, 216 s. ISBN 80-7300-133-0.
- [9] ŠTECHA, Jan a Vladimír HAVLENA. *Teorie dynamických systémů* [online]. České vysoké učení technické v Praze, 2005 [cit. 2012-03-27]. Ediční středisko ČVUT. Dostupné z: felddocuments.googlecode.com/svn-history/r191/trunk/4_semestr/y35zrs/ots.pdf
- [10] DOSTÁL, Petr a František GAZDOŠ. *Řízení technologických procesů: Některé základní pojmy* [online]. [cit. 2012-03-27]. Dostupné z: <http://rtp.webzdarma.cz/pojmy.php>
- [11] ŠIROKÝ, Jaromír. *Úvod do modelování a simulace systémů* [online]. [cit. 2012-04-07]. Dostupné z: http://homen.vsb.cz/~s1i95/appr/MaSvd_uvod_2.pdf

- [12] *Dynamické systémy a děje, které v nich probíhají* [online]. Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava [cit. 2012-04-07]. Dostupné z: http://www.337.vsb.cz/materialy/experimentalni_mechanika/DYNAM_SYST.pdf
- [13] DOSTÁL, Petr a František GAZDOŠ. *Řízení technologických procesů: Základní postupy při modelování a identifikaci* [online]. [cit. 2012-03-29]. Dostupné z: <http://rtp.webzdarma.cz/model2.php>
- [14] POTUČEK, Jiří. *Modelování a simulace* [online]. České vysoké učení technické - Fakulta elektrotechnická [cit. 2012-04-08]. Dostupné z: cw.felk.cvut.cz/lib/exe/fetch.php/courses/a6m33mos/mos_p1_mbp.ppt
- [15] KOZUBKOVÁ, Milada. *Simulace a modelování hydraulických systémů* [online]. Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2009 [cit. 2012-04-08]. Dostupné z: <http://www.338.vsb.cz/PDF/Simulace2009.pdf>
- [16] GRYGAR, Vojtěch. *Modelování sušicího procesu pro materiály tvaru válce*. Zlín, 2011. Diplomová práce. Fakulta aplikované informatiky. Vedoucí práce doc. Ing. Dagmar Janáčková, CSc.
- [17] KADLEC, Karel a Miloš KMÍNEK. *Měřicí a řídicí technika: Modelování a simulace* [online]. Verze 2.01. 2005 [cit. 2012-04-09]. Dostupné z: <http://uprt.vscht.cz/kminekm/MRT/index.htm>
- [18] *Modelování bioproců* [online]. Praha: Vysoká škola chemicko-technologická, elektronické studijní opory, s. 14 [cit. 2012-05-12]. Dostupné z: eso.vscht.cz/cache_data/1164/www.vscht.cz/kch/kestazeni/sylaby/model.pdf
- [19] MÍKA, Vladimír. *Základy chemického inženýrství*. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1977, 170 s. ISBN 04-622-77.
- [20] *Humusoft: Technické výpočty, řídicí technika, simulace* [online]. © 1991-2012 [cit. 2012-05-14]. Dostupné z: <http://www.humusoft.cz>
- [21] PROKOP, Roman, Radek MATUŠŮ a Zdenka PROKOPOVÁ. *Teorie automatického řízení: lineární spojitě dynamické systémy*. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2006. ISBN 80-7318-369-2.
- [22] JANÁČKOVÁ, Dagmar. *Vybrané statě z Procesního inženýrství: podklady k přednáškám*. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, Fakulta aplikované informatiky, 2009. Dostupné z: <http://www.vyuka.fai.utb.cz>

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

<i>Symbol</i>	Význam	Jednotka
α_o	součinitel přestupu tepla mezi kapalinou a vnitřní stěnou	$[\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}]$
α_s	součinitel přestupu tepla mezi vnější stěnou a okolím	$[\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}]$
ρ	hustota roztoku	$[\text{kg.m}^{-3}]$
ρ_i	hustota vstupní kapaliny	$[\text{kg.m}^{-3}]$
τ	čas	[s]
ΔH_r^o	reakční teplo	$[\text{J.mol}^{-1}]$
a_i, b_i	konstantní koeficienty	[1]
A	teplosměnná plocha	$[\text{m}^2]$
A_o	teplosměnná plocha vnější stěny	$[\text{m}^2]$
A_s	teplosměnná plocha vnitřní stěny	$[\text{m}^2]$
c_i	koncentrace vstupní kapaliny	[obj. %]
c_{\max}	koncentrace látky v krystalické formě	$[\text{kg.m}^{-3}]$
c_{op}	počáteční koncentrace	$[\text{mol.m}^{-3}]$
c_p	měrná tepelná kapacita	$[\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}]$
c_{poc}	počáteční koncentrace	$[\text{kg.m}^{-3}]$
c_{p_i}	měrná tepelná kapacita na vstupu	$[\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}]$
c_{p_c}	měrná tepelná kapacita chladiwa	$[\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}]$
$c_{p_{C1}}$	měrná tepelná kapacita chladiwa	$[\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}]$
c_{p_N}	měrná tepelná kapacita akumulovaná	$[\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}]$
$c(\tau)$	koncentrace látky (funkce času)	$[\text{kg.m}^{-3}]$
k	součinitel prostupu tepla	$[\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}]$

k_o	součinitel prostupu tepla vnější stěny	$[\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}]$
k_s	součinitel prostupu tepla vnitřní stěny	$[\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}]$
\bar{k}	rychlostní konstanta	$[\text{s}^{-1}]$
m	hmotnost kapaliny	$[\text{kg}]$
M	molární hmotnost	$[\text{kg.mol}^{-1}]$
m_a	akumulace hmoty směsi	$[\text{kg}]$
m_C	hmotnost chladicí kapaliny	$[\text{kg}]$
m_N	hmotnost stěny nádoby	$[\text{kg}]$
\dot{m}_i	vstupní hmotnostní průtok kapaliny	$[\text{kg.s}^{-1}]$
\dot{m}_{C_1}	vstupní hmotnostní průtok chladiva	$[\text{kg.s}^{-1}]$
\dot{m}_v	výstupní hmotnostní průtok kapaliny	$[\text{kg.s}^{-1}]$
\dot{m}_{v_C}	výstupní hmotnostní průtok chladiva	$[\text{kg.s}^{-1}]$
P	příkon topení	$[\text{W}]$
t_i	teplota vstupní kapaliny	$[\text{°C}]$
t_{C_1}	teplota vstupní kapaliny chladiva	$[\text{°C}]$
t_o	teplota okolního prostředí	$[\text{°C}]$
T_o	absolutní teplota okolního prostředí	$[\text{K}]$
t_p	počáteční teplota kapaliny	$[\text{°C}]$
T_p	počáteční absolutní teplota kapaliny	$[\text{K}]$
t_{p_C}	počáteční teplota chladicí kapaliny	$[\text{°C}]$
t_{p_N}	počáteční teplota stěny nádoby	$[\text{°C}]$
$t(\tau)$	teplota (funkce času)	$[\text{°C}]$

$T(\tau)$	absolutní teplota (funkce času)	[K]
$t_c(\tau)$	teplota chladiva (funkce času)	[°C]
$t_N(\tau)$	teplota stěny (funkce času)	[°C]
$u(t)$	vstupní veličina systému	[1]
Q	teplo akumulované v kapalině	[W]
Q_c	teplo akumulované v chladicí kapalině	[W]
Q_N	teplo akumulované ve stěně nádoby	[W]
\dot{Q}_i	tepelný tok tekutiny na vstupu	[W]
\dot{Q}_{c_i}	tepelný tok chladiva na vstupu	[W]
\dot{Q}_v	tepelný tok tekutiny na výstupu	[W]
\dot{Q}_{v_c}	tepelný tok chladiva na výstupu	[W]
\dot{Q}_z	přechod tepla přes stěnu nádoby technologického zařízení	[W]
V	objem nádrže	[m ³]
\dot{V}_i	objemový průtok na vstupu	[m ³ .s ⁻¹]
\dot{V}_v	objemový průtok na výstupu	[m ³ .s ⁻¹]
x_{iA}	koncentrace vstupní bilancované složky roztoku NaCl	[obj. %]
x_{iB}	koncentrace vstupní bilancované složky vody	[obj. %]
x_p	počáteční koncentrace bilancované složky	[obj. %]
$x(\tau)$	koncentrace bilancované složky (funkce času)	[obj. %]
$y(t)$	výstupní veličina systému	[1]

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr. 1.1 – Obecné znázornění abstraktního modelu reálného objektu	13
Obr. 1.2 – Abstraktní znázornění dynamického systému	14
Obr. 2.1 – Zjednodušené schéma postupu modelování při tvorbě modelu.....	15
Obr. 2.2 – Schéma detailního postupu vytváření matematického modelu	21
Obr. 4.1 – Úvodní okno programového prostředí MATLAB.....	31
Obr. 5.1 – Schéma neizolovaného průtokového mísiče kapalin se zanedbáním tepelných ztrát do stěn nádoby	34
Obr. 5.2 – Schéma neizolovaného průtokového mísiče kapalin s uvažováním tepelných ztrát do stěn nádoby	38
Obr. 5.3 – Schéma neizolovaného rekuperačního výměníku tepla s mícháním a chlazením v plášti	45
Obr. 5.4 – Schéma neizolovaného polymeračního reaktoru	52
Obr. 5.5 – Schéma průtokového mísiče kapalin	56
Obr. 5.6 – Schéma polymeračního reaktoru	60
Obr. 6.1 – Základní okno aplikace MMDS	62
Obr. 6.2 – Rozbalovací nabídka pro výběr modelovaného zařízení	63
Obr. 6.3 – Chybové hlášení při zadání nepovolené hodnoty	64
Obr. 6.4 – Vložení vstupních parametrů vzorového příkladu a jejich zobrazení ve schématu	64
Obr. 6.5 – Výpočet a následné grafické zobrazení průběhu teploty v závislosti na čase	65
Obr. 6.6 – Editace a zobrazení více průběhů teploty v závislosti na čase v jednom grafu ..	66
Obr. 6.7 – Zobrazení vstupních a výstupních parametrů v tabulce hodnot	66
Obr. 6.8 – Dialogové okno s informacemi o uložení souboru	67
Obr. 6.9 – Ukázka exportovaného grafu	67
Obr. 7.1 – Schéma průtokového mísiče kapalin se zanedbáním tepelných ztrát do stěn nádoby	69
Obr. 7.2 – Grafický průběh závislosti teploty na čase pro příklad č. 1 (vykreslen v prostředí Microsoft Excel)	70
Obr. 7.3 – Grafický průběh závislosti teploty na čase pro příklad č. 1 (vykreslen aplikací MMDS)	71
Obr. 7.4 – Teplota v čase 5 minut získaná aplikací MMDS	71

Obr. 7.5 – Schéma průtokového mísiče kapalin s uvažováním tepelných ztrát do stěn nádoby	72
Obr. 7.6 – Grafický průběh závislosti teploty na čase pro příklad č. 2 (vykreslen v prostředí Microsoft Excel)	73
Obr. 7.7 – Grafický průběh závislosti teploty na čase pro příklad č. 2 (vykreslen aplikací MMDS)	74
Obr. 7.8 – Teplota v čase 3 minut získaná aplikací MMDS	74
Obr. 7.9 – Schéma rekuperačního výměníku tepla s mícháním a chlazením v plášti	75
Obr. 7.10 – Průběh závislosti teploty na čase pro příklad č. 3 (vykreslen v prostředí Microsoft Excel)	76
Obr. 7.11 – Průběh závislosti teploty na čase pro příklad č. 3 (vykreslen aplikací MMDS)	77
Obr. 7.12 – Teplota v čase 2 minut získaná aplikací MMDS	77
Obr. 7.13 – Schéma polymeračního reaktoru	78
Obr. 7.14 – Průběh závislosti absolutní teploty na čase pro příklad č. 4 (vykreslen v prostředí Microsoft Excel)	79
Obr. 7.15 – Grafický průběh závislosti absolutní teploty na čase pro příklad č. 4	80
Obr. 7.16 – Teplota v ustáleném stavu získaná aplikací MMDS	80
Obr. 7.17 – Schéma průtokového mísiče kapalin	81
Obr. 7.18 – Průběh závislosti koncentrace na čase pro příklad č. 5 (vykreslen v prostředí Microsoft Excel)	82
Obr. 7.19 – Grafický průběh závislosti koncentrace na čase pro příklad č. 5 (vykreslen aplikací MMDS)	82
Obr. 7.20 – Koncentrace v ustáleném stavu získaná aplikací MMDS	83
Obr. 7.21 – Schéma polymeračního reaktoru	83
Obr. 7.22 – Průběh závislosti koncentrace na čase pro příklad č. 6 (vykreslen v prostředí Microsoft Excel)	84
Obr. 7.23 – Grafický průběh závislosti koncentrace na čase pro příklad č. 6 (vykreslen aplikací MMDS)	84
Obr. 7.24 – Koncentrace v ustáleném stavu získaná aplikací MMDS	85

SEZNAM TABULEK

Tab. 7.1 – Vstupní parametry a výsledné hodnoty pro příklad č. 1 získané z MS Excel	70
Tab. 7.2 – Vstupní parametry a výsledné hodnoty pro příklad č. 2 získané z MS Excel	73
Tab. 7.3 – Vstupní parametry a výsledné hodnoty pro příklad č. 3 získané z MS Excel	76
Tab. 7.4 – Vstupní parametry a výsledné hodnoty pro příklad č. 4 získané z MS Excel	79
Tab. 7.5 – Vstupní parametry a výsledné hodnoty pro příklad č. 5 získané z MS Excel	81
Tab. 7.6 – Vstupní parametry a výsledné hodnoty pro příklad č. 6 získané z MS Excel	83

SEZNAM PŘÍLOH

Příloha P I – Část zdrojového kódu pro výpočet tepelného směšovače kapalin se zanedbáním tepelných ztrát ve stěně nádoby

PŘÍLOHA P I: ČÁST ZDROJOVÉHO KÓDU PRO VÝPOČET TEPELNÉHO SMĚŠOVAČE KAPALIN SE ZANEDBÁNÍM TEPELNÝCH ZTRÁT VE STĚNĚ NÁDOBY

skript: teplotni_smesovac_kapalin_1_LT.m

```

1  %Teplotni smesovac kapalin 1 - analyticke reseni diferencialni rovnice metodou LT:
2  %=====
3  global p graf_okno2 data %definovani globalnich promennych
4
5  %Napoveda k prikazum:
6  %-----
7  %navez_promenne=str2double(get(findobj('Tag','navez_objektu'),'String')) --> ziska
8  %a prevede textovou hodnotu na cislo z objektu pole do promenne
9
10
11 %Zadavane parametry:
12 %-----
13 p.tau=str2double(get(findobj('Tag','po_edit_cas'),'String'));
14 p.A0=str2double(strrep(get(findobj('Tag','po_edit_A0'),'String'),' ','.'));
15 p.cp=str2double(strrep(get(findobj('Tag','po_edit_mtk'),'String'),' ','.'));
16 p.cp1=str2double(strrep(get(findobj('Tag','po_edit_mtk1'),'String'),' ','.'));
17 p.cp2=str2double(strrep(get(findobj('Tag','po_edit_mtk2'),'String'),' ','.'));
18 p.cp3=str2double(strrep(get(findobj('Tag','po_edit_mtk3'),'String'),' ','.'));
19 p.k0=str2double(strrep(get(findobj('Tag','po_edit_k0'),'String'),' ','.'));
20 p.m=str2double(strrep(get(findobj('Tag','po_edit_hmotnost'),'String'),' ','.'));
21 p.m1=str2double(strrep(get(findobj('Tag','po_edit_hmprutok1'),'String'),' ','.'));
22 p.m2=str2double(strrep(get(findobj('Tag','po_edit_hmprutok2'),'String'),' ','.'));
23 p.m3=str2double(strrep(get(findobj('Tag','po_edit_hmprutok3'),'String'),' ','.'));
24 p.mv=str2double(strrep(get(findobj('Tag','po_edit_funkcel'),'String'),' ','.'));
25 p.P=str2double(strrep(get(findobj('Tag','po_edit_P'),'String'),' ','.'));
26 p.t0=str2double(strrep(get(findobj('Tag','po_edit_teplota0'),'String'),' ','.'));
27 p.t1=str2double(strrep(get(findobj('Tag','po_edit_teplota1'),'String'),' ','.'));
28 p.t2=str2double(strrep(get(findobj('Tag','po_edit_teplota2'),'String'),' ','.'));
29 p.t3=str2double(strrep(get(findobj('Tag','po_edit_teplota3'),'String'),' ','.'));
30 p.tp=str2double(strrep(get(findobj('Tag','po_edit_pocteplota'),'String'),' ','.'));
31
32 prom_cas=p.tau;
33 cas=1:prom_cas;
34 cas=cas';
35 delka=length(cas);
36 t=zeros(delka,1);
37
38
39 %Vypocet z obecne vyjadrene rovnice metodou LT:
40 %-----
41 for tau=1:delka
42 t(tau)=((p.m1*p.cp1*p.t1+p.m2*p.cp2*p.t2+p.m3*p.cp3*p.t3+p.P+p.k0*p.A0*p.t0)/(p.mv*
43 p.cp+p.k0*p.A0))+p.tp-
44 (p.m1*p.cp1*p.t1+p.m2*p.cp2*p.t2+p.m3*p.cp3*p.t3+p.P+p.k0*p.A0*p.t0)/(p.mv*p.cp+p.k
45 0*p.A0))*exp((-p.mv*p.cp+p.k0*p.A0)/(p.m*p.cp))*tau);
46 end
47 data=[cas t];
48
49
50 %Vykresleni grafu:
51 %-----
52 axes(graf_okno2);
53 plot(cas,t,'r');
54 xlabel('cas [s]');
55 ylabel('teplota [°C]');
```

skript: teplotni_smesovac_kapalin_1_ode45_start.m

```

1  %Teplotni smesovac kapalin 1 - numericke reseni diferencialni rovnice funkci ode45:
2  %=====
3  global p graf_okno2 data %definovani globalnich promennych
4
5  %Napoveda k prikazum:
6  %-----
7  %navez_promenne=str2double(get(findobj('Tag','navez_objektu'),'String')) --> ziska
8  %a prevede textovou hodnotu na cislo z objektu pole do promenne
9
10
11 %Zadavane parametry:
12 %-----
13 p.tau=str2double(get(findobj('Tag','po_edit_cas'),'String'));
14 p.A0=str2double(strrep(get(findobj('Tag','po_edit_A0'),'String'),' ','.'));
15 p.cp=str2double(strrep(get(findobj('Tag','po_edit_mtk'),'String'),' ','.'));
16 p.cp1=str2double(strrep(get(findobj('Tag','po_edit_mtk1'),'String'),' ','.'));
17 p.cp2=str2double(strrep(get(findobj('Tag','po_edit_mtk2'),'String'),' ','.'));
18 p.cp3=str2double(strrep(get(findobj('Tag','po_edit_mtk3'),'String'),' ','.'));
19 p.k0=str2double(strrep(get(findobj('Tag','po_edit_k0'),'String'),' ','.'));
20 p.m=str2double(strrep(get(findobj('Tag','po_edit_hmotnost'),'String'),' ','.'));
21 p.m1=str2double(strrep(get(findobj('Tag','po_edit_hmprutok1'),'String'),' ','.'));
22 p.m2=str2double(strrep(get(findobj('Tag','po_edit_hmprutok2'),'String'),' ','.'));
23 p.m3=str2double(strrep(get(findobj('Tag','po_edit_hmprutok3'),'String'),' ','.'));
24 p.mv=str2double(strrep(get(findobj('Tag','po_edit_funkcel'),'String'),' ','.'));
25 p.P=str2double(strrep(get(findobj('Tag','po_edit_P'),'String'),' ','.'));
26 p.t0=str2double(strrep(get(findobj('Tag','po_edit_teplota0'),'String'),' ','.'));
27 p.t1=str2double(strrep(get(findobj('Tag','po_edit_teplota1'),'String'),' ','.'));
28 p.t2=str2double(strrep(get(findobj('Tag','po_edit_teplota2'),'String'),' ','.'));
29 p.t3=str2double(strrep(get(findobj('Tag','po_edit_teplota3'),'String'),' ','.'));
30 p.tp=str2double(strrep(get(findobj('Tag','po_edit_pocteplota'),'String'),' ','.'));
31
32 cas=linspace(0,p.tau,p.tau+1);
33
34
35 %Volani funkce a nasledny vypocet pomoci ode45:
36 %-----
37 [tau,t]=ode45(@teplotni_smesovac_kapalin_1_ode45,cas,p.tp);
38 data=[tau t];
39
40
41 %Vykresleni grafu:
42 %-----
43 axes(graf_okno2);
44 plot(tau,t,'b');
45 xlabel('cas [s]');
46 ylabel('teplota [°C]');
```

skript: teplotni_smesovac_kapalin_1_ode45.m

```

1  function DR=teplotni_smesovac_kapalin_1_ode45(t,tau)
2  global p %definovani globalni promenne
3
4  %Diferencialni rovnice:
5  %-----
6  DR=((p.m1*p.cp1*p.t1)/(p.m*p.cp))+((p.m2*p.cp2*p.t2)/(p.m*p.cp))+((p.m3*p.cp3*p.t3)
7  /(p.m*p.cp))+((p.P)/(p.m*p.cp))-
8  ((p.mv*p.cp+p.k0*p.A0)/(p.m*p.cp))*tau+((p.k0*p.A0*p.t0)/(p.m*p.cp));
```