

# **Knihovna komplexních příkladů a úloh z předmětu Teorie systémů**

A Library of Complex Examples and Exercises for the Subject:  
System Theory

Milan Hlinák



Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně  
Fakulta aplikované informatiky  
akademický rok: 2012/2013

## **ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE**

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Milan HLINÁK**  
Osobní číslo: **A10088**  
Studijní program: **B3902 Inženýrská informatika**  
Studijní obor: **Informační a řídicí technologie**  
Forma studia: **prezenční**

Téma práce: **Knihovna komplexních příkladů a úloh z předmětu  
Teorie systémů**

Zásady pro vypracování:

1. Nastudujte náplň předmětu Teorie systémů a vytvořte jeho sylabus.
2. Z dostupné literatury vyberte a popište vhodné modely spojitých dynamických systémů.
3. Na zvolených modelech demonstруйте různé postupy a výpočetní techniky probírané v rámci předmětu.
4. Demonstrativní příklady vhodně doplňte obrázky, simulacemi apod.
5. Ke každému z modelů a výpočetních postupů navrhnete úlohy k samostatnému procvičování.

Rozsah bakalářské práce:

Rozsah příloh:

Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

1. OGATA, Katsuhiko. **System Dynamics**. 4th ed. Upper Saddle River, New Jersey: Pearson Prentice Hall, 2004, 768 s. ISBN 0-13-142462-9.
2. WOODS, Robert L. a Kent L. LAWRENCE. 1st ed. **Modeling and Simulation of Dynamic Systems**. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 1997, 521 s. ISBN 0-13-337379-7.
3. FRANKLIN, Gene F., J. David POWELL a Abbas EMAMI-NAEINI. **Feedback Control of Dynamic Systems**. 5th ed. Upper Saddle River, New Jersey: Pearson Prentice Hall, 2006, 910 s. ISBN 0-13-149930-0.
4. NOSKIEVIČ, Petr. **Modelování a identifikace systémů**. Vyd. 1. Ostrava: Montanex, 1999, 276 s. ISBN 80-7225-030-2.
5. PROKOP, Roman, Radek MATUŠŮ a Zdenka PROKOPOVÁ. **Teorie automatického řízení – lineární spojité dynamické systémy**. Vyd. 1. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, Fakulta aplikované informatiky, 2006, 102 s. ISBN 80-7318-369-2.
6. NAVRÁTIL, Pavel. **Automatizace – Vybrané statě [online]**. Vyd. 1. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, Fakulta aplikované informatiky, 2011, 289 s. Icit. 2013-01-23. ISBN 978-80-7318-935-8. Dostupné z: <http://dspace.k.utb.cz/handle/10563/18581>

Vedoucí bakalářské práce:

**Ing. Libor Pekař**

Ústav automatizace a řídicí techniky

Datum zadání bakalářské práce:

**24. února 2013**

Termín odevzdání bakalářské práce:

**14. června 2013**

Ve Zlíně dne 24. února 2013

  
prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.  
*děkan*



  
prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.  
*ředitel ústavu*

## ABSTRAKT

Předmětem této bakalářské práce je vytvoření knihovny komplexních příkladů a úloh probíraných v rámci cvičení předmětu Teorie systémů. V teoretické části je shrnuta probíraná látka předmětu a uveden popis a rozbor vybraných modelů spojitých dynamických systémů. V praktické části jsou na vybraných modelech demonstrovány různé výpočetní metody a postupy. Ke každému z vybraných modelů je vytvořena simulace v programu MATLAB/SIMULINK. Součástí této práce je také sbírka neřešených úloh k vybraným modelům, výpočetním metodám a postupům určená k samostatnému procvičování.

Klíčová slova: Matematický model systému, Lineární spojitý dynamické systémy, Laplaceova transformace, Vnitřní popis systému, Vnější popis systému, Stabilita systému, Diofantické rovnice, Polynomiální metoda návrhu regulátorů, Mnohorozměrné systémy.

## ABSTRACT

The subject of this bachelor thesis is to create a library of comprehensive examples and problems discussed in the tutorial of Systems Theory. In the theoretical part is summarized and discussed substance of subject and mentioned description and analysis of selected models of continuous dynamic systems. In the practical part are on selected models demonstrated different computational methods and procedures. For each of the selected models is created simulation in program MATLAB/SIMULINK. Part of this work is a collection of unsolved problems to selected models, computational methods and procedures designed for self practice.

Keywords: Mathematical model of the system, Linear continuous dynamical systems, Laplace transform, External description of the system, Internal description of the system, System stability, Diophantine equations, Polynomial controller design method, Multidimensional systems.

Rád bych poděkoval vedoucímu bakalářské práce panu Ing. Liboru Pekařovi za odborné vedení, cenné rady a připomínky, poskytnutou literaturu a ochotu při řešení dané problematiky. Dále bych chtěl poděkovat své rodině a přítelkyni za podporu při studiu a psaní této práce.

**Prohlašuji, že**

- beru na vědomí, že odevzdáním bakalářské práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb. o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších právních předpisů, bez ohledu na výsledek obhajoby;
- beru na vědomí, že bakalářská práce bude uložena v elektronické podobě v univerzitním informačním systému dostupná k prezenčnímu nahlédnutí, že jeden výtisk bakalářské práce bude uložen v příruční knihovně Fakulty aplikované informatiky Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně a jeden výtisk bude uložen u vedoucího práce;
- byl/a jsem seznámen/a s tím, že na moji bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších právních předpisů, zejm. § 35 odst. 3;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 1 autorského zákona má UTB ve Zlíně právo na uzavření licenční smlouvy o užití školního díla v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 2 a 3 autorského zákona mohu užít své dílo – bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití jen s předchozím písemným souhlasem Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše);
- beru na vědomí, že pokud bylo k vypracování bakalářské práce využito softwaru poskytnutého Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně nebo jinými subjekty pouze ke studijním a výzkumným účelům (tedy pouze k nekomerčnímu využití), nelze výsledky bakalářské práce využít ke komerčním účelům;
- beru na vědomí, že pokud je výstupem bakalářské práce jakýkoliv softwarový produkt, považují se za součást práce rovněž i zdrojové kódy, popř. soubory, ze kterých se projekt skládá. Neodevzdání této součásti může být důvodem k neobhájení práce.

**Prohlašuji,**

- že jsem na bakalářské práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval. V případě publikace výsledků budu uveden jako spoluautor.
- že odevzdaná verze bakalářské práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG jsou totožné.

Ve Zlíně

.....  
podpis diplomanta

**OBSAH**

<b>ÚVOD.....</b>	<b>10</b>
<b>1 TEORETICKÁ ČÁST .....</b>	<b>11</b>
<b>1 ÚVOD DO TEORIE SYSTÉMŮ .....</b>	<b>12</b>
<b>2 LAPLACEOVA TRANSFORMACE.....</b>	<b>13</b>
2.1 PŘÍMÁ LAPLACEOVA TRANSFORMACE.....	13
2.2 VLASTNOSTI LAPLACEOVY TRANSFORMACE .....	13
2.3 ZPĚTNÁ LAPLACEOVA TRANSFORMACE.....	14
2.3.1 Věta o residuech.....	15
2.3.2 Heavisideův rozvoj.....	15
<b>3 VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍCH SPOJITÝCH DYNAMICKÝCH SYSTÉMŮ.....</b>	<b>17</b>
3.1 OBYČEJNÁ LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY .....	17
3.2 PŘENOSOVÁ FUNKCE .....	17
3.3 NULY A PÓLY PŘENOSU .....	17
3.4 PŘECHODOVÁ FUNKCE A CHARAKTERISTIKA .....	18
3.5 IMPULSNÍ FUNKCE A CHARAKTERISTIKA .....	18
3.6 FREKVENČNÍ PŘENOS.....	19
3.7 FREKVENČNÍ CHARAKTERISTIKY .....	19
3.7.1 Nyquistova křivka .....	20
3.7.2 Bodeho křivky .....	20
<b>4 STABILITA LINEÁRNÍCH SPOJITÝCH DYNAMICKÝCH SYSTÉMŮ .....</b>	<b>21</b>
4.1 NUTNÁ A POSTAČUJÍCÍ PODMÍNKA STABILITY .....	21
4.2 KRITÉRIA STABILITY .....	21
<b>5 VNITŘNÍ POPIS LINEÁRNÍCH SPOJITÝCH DYNAMICKÝCH SYSTÉMŮ.....</b>	<b>22</b>
5.1 PŘEVOD STAVOVÉHO POPISU NA PŘENOS.....	22
5.2 PŘEVOD PŘENOSU NA STAVOVÝ POPIS .....	22
5.3 ŘEŠENÍ STAVOVÝCH ROVNIC .....	23
5.3.1 Homogenní stavová rovnice.....	23
5.3.2 Nehomogenní stavová rovnice .....	23
5.4 VLASTNOSTI SYSTÉMŮ.....	24
5.4.1 Řiditelnost a dosažitelnost.....	24
5.4.2 Pozorovatelnost a rekonstruovatelnost.....	24
5.5 TRANSFORMACE STAVŮ.....	25
<b>6 DIOFANTICKÉ ROVNICE.....</b>	<b>27</b>

6.1	OKRUH .....	27
6.1.1	Dělitelnost v okruhu .....	27
6.2	NEJVĚTŠÍ SPOLEČNÝ DĚLITEL .....	27
6.2.1	Největší společný dělitel v okruhu celých čísel .....	27
6.2.2	Největší společný dělitel v okruhu polynomů .....	27
6.3	DIOFANTICKÁ ROVNICE .....	28
6.3.1	Řešení diofantických rovnic v okruhu polynomů .....	28
6.4	ZOBECNĚNÝ EUKLIDŮV ALGORITMUS .....	29
<b>7</b>	<b>POLYNOMIÁLNÍ METODA NÁVRHU REGULÁTORŮ .....</b>	<b>30</b>
7.1	1DOF SYSTÉM ŘÍZENÍ.....	30
7.1.1	Požadavky na kvalitu řízení .....	30
7.1.2	Volba stupňů polynomů .....	31
7.1.3	Výpočet parametrů regulátoru .....	31
7.2	2DOF SYSTÉM ŘÍZENÍ.....	31
7.2.1	Požadavky na kvalitu řízení .....	32
7.2.2	Volba stupňů polynomů .....	33
7.2.3	Výpočet parametrů regulátoru .....	34
<b>8</b>	<b>MNOHOROZMĚRNÉ SYSTÉMY .....</b>	<b>35</b>
8.1	OBEČNÝ POPIS MNOHOROZMĚRNÝCH SYSTÉMŮ.....	35
8.1.1	Přenosová matice, levý a pravý maticový zlomek .....	35
8.1.2	Stabilita mnohorozměrného systému .....	36
8.2	ŘEŠENÍ MATICOVÝCH DIOFANTICKÝCH ROVNIC .....	36
8.3	ŘÍZENÍ MNOHOROZMĚRNÝCH SYSTÉMŮ.....	37
8.3.1	Požadavky na kvalitu řízení .....	38
<b>9</b>	<b>POPIS VYBRANÝCH MODELŮ SPOJITÝCH DYNAMICKÝCH SYSTÉMŮ.....</b>	<b>39</b>
9.1	MECHANICKÝ OSCILÁTOR .....	39
9.2	SÉRIOVÝ OBVOD RLC .....	40
9.3	INVERZNÍ KYVADLO NA VOZÍKU .....	42
9.4	SYSTÉM HLADIN DVOU NÁDRŽÍ S KAPALINOU .....	45
<b>II</b>	<b>PRAKTICKÁ ČÁST .....</b>	<b>47</b>
<b>10</b>	<b>MODEL MECHANICKÉHO OSCILÁTORU .....</b>	<b>48</b>
10.1	SIMULAČNÍ MODEL .....	48
10.2	VÝPOČETNÍ ČÁST.....	48
10.2.1	Přenos systému .....	48
10.2.2	Nuly a póly přenosu.....	49
10.2.3	Přechodová funkce a přechodová charakteristika .....	50
10.2.4	Impulsní funkce a impulsní charakteristika.....	52
10.2.5	Frekvenční přenos a frekvenční charakteristiky.....	53
<b>11</b>	<b>MODEL SÉRIOVÉHO OBVODU RLC.....</b>	<b>57</b>



11.1	SIMULAČNÍ MODEL .....	57
11.2	VÝPOČETNÍ ČÁST.....	57
11.2.1	Převod přenosu na stavový popis .....	58
11.2.2	Převod stavového popisu na přenos .....	63
11.2.3	Řešení stavové rovnice.....	64
11.2.4	Řiditelnost a dosažitelnost.....	68
11.2.5	Pozorovatelnost a rekonstruovatelnost.....	69
11.2.6	Transformace stavů .....	70
<b>12</b>	<b>MODEL INVERZNÍHO KYVADLA NA VOZÍKU.....</b>	<b>73</b>
12.1	SIMULAČNÍ MODEL .....	73
12.2	VÝPOČETNÍ ČÁST.....	73
12.2.1	Návrh regulátoru pomocí polynomiální syntézy pro 1DOF strukturu řízení.....	74
12.2.2	Ověření stability regulačního obvodu .....	77
12.2.3	Návrh regulátoru pomocí polynomiální syntézy pro 2DOF strukturu řízení.....	81
<b>13</b>	<b>MODEL SYSTÉMU HLADIN DVOU NÁDRŽÍ S KAPALINOU .....</b>	<b>86</b>
13.1	SIMULAČNÍ MODEL .....	86
13.2	VÝPOČETNÍ ČÁST.....	87
13.2.1	Maticový přenos (levý maticový zlomek).....	87
13.2.2	Převod levého maticového zlomku na pravý maticový zlomek.....	89
13.2.3	Maticový přenos (pravý maticový zlomek).....	91
13.2.4	Stabilita systému .....	91
13.2.5	Návrh maticového regulátoru.....	91
<b>14</b>	<b>SBÍRKA ÚLOH K SAMOSTATNÉMU PROCVIČOVÁNÍ .....</b>	<b>97</b>
14.1	ÚLOHY K JEDNOTLIVÝM VÝPOČETNÍM METODÁM A POSTUPŮM .....	97
14.2	ÚLOHY K JEDNOTLIVÝM MODELŮM .....	104
14.2.1	Model mechanického oscilátoru.....	104
14.2.2	Model sériového obvodu RLC .....	105
14.2.3	Model inverzního kyvadla na vozíku .....	106
14.2.4	Model systému hladin dvou nádrží s kapalinou .....	107
	<b>ZÁVĚR .....</b>	<b>108</b>
	<b>ZÁVĚR V ANGLIČTINĚ.....</b>	<b>109</b>
	<b>SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY.....</b>	<b>110</b>
	<b>SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK .....</b>	<b>112</b>
	<b>SEZNAM OBRÁZKŮ .....</b>	<b>114</b>
	<b>SEZNAM PŘÍLOH.....</b>	<b>116</b>

## ÚVOD

Teorie systémů je disciplínou teoretické kybernetiky. Tato disciplína se zabývá analýzou a syntézou dynamických systémů a představuje důležitý základ modelování. Modelování je proces, kdy sledovanému objektu přiřadíme fyzický nebo abstraktní (matematický) model. Fyzický model umožňuje provádět experimenty stejné fyzikální podstaty, naopak pomocí matematického model můžeme sledovat průběhy jednotlivých fyzikálních veličin pomocí matematického popisu bez potřeby reálného objektu.

Předmětem této práce je vytvoření knihovny komplexních příkladů a úloh z předmětu Teorie systémů. Cílem je pak uvést potenciální čtenáře do problematiky teorie systémů, poskytnout základní, ale nutnou teorii k pochopení problematiky a názorně demonstrovat jednotlivé výpočetní metody a postupy na vybraných modelech dynamických systémů.

V teoretické části je shrnuta potřebná teorie k řešené problematice, jež se následně využívá k demonstraci jednotlivých výpočetních metod a postupů v praktické části. Součástí teoretické části je také popis jednotlivých vybraných modelů spojitých dynamických systémů. Tyto systémy byly vybrány tak, aby jednotlivé výpočetní metody a postupy mohly být demonstrovány co nejnázornějším způsobem.

Praktická část je složena z kapitol odpovídajících jednotlivým vybraným modelům spojitých dynamických systémů. Ke každému modelu je vytvořena simulace v prostředí MATLAB/SIMULINK umožňující měnit parametry daného systému a sledovat odezvu systému na různé volitelné vstupní signály. Následuje výpočetní část, která kopíruje obsah cvičení předmětu Teorie systémů. Z důvodu rozsáhlosti výpočetních metod a postupů probíraných v rámci cvičení předmětu Teorie systémů je na každém z modelů vypočtena jen určitá část výpočetních metod a postupů. Tato část byla vybrána tak, aby zachytila charakteristické vlastnosti daného modelu. Jednotlivé výpočetní metody a postupy jsou nejprve demonstrovány obecně, až následně je provedeno dosazení zvolených parametrů pro daný model systému. V závěru praktické části je vytvořena sbírka neřešených úloh určená k samostudiu. Tato sbírka je rozdělena na dvě části. V první části se nachází úlohy k jednotlivým výpočetním metodám a postupům, ve druhé části se nachází úlohy k jednotlivým modelům. Součástí práce jsou také programy a simulační modely vytvořené v prostředí MATLAB/SIMULINK. Tyto soubory jsou dostupné na přiloženém CD.

## **I. TEORETICKÁ ČÁST**

## 1 ÚVOD DO TEORIE SYSTÉMŮ

Teorie systémů patří mezi disciplíny teoretické kybernetiky, která se zabývá vědami obecného a abstraktního charakteru. Tato disciplína se zabývá analýzou a syntézou dynamických systémů. Systém je abstraktní pojem, který lze formulovat jako množinu obsahující prvky systému a relace mezi nimi, dále vstupní a výstupní veličiny. Z hlediska relací můžeme systémy rozdělit na statické, kde výstupní veličiny jsou pouze funkcí vstupních veličin, a dynamické, kde výstupní veličiny závisí nejen na vstupních veličinách, ale také předchozích hodnotách výstupních veličin. Systémy můžeme dále dělit na lineární, které jsou složeny pouze z lineárních členů, a nelineární, kde je alespoň jeden člen systému nelineární. Jelikož je práce s lineárními systémy mnohem jednodušší, u nelineárních systémů (což je většina reálných systémů) se provádí linearizace, neboli aproximace v okolí pracovního bodu lineárním modelem. Podle toho, zda mohou systémy měnit své chování v čase, dělíme systémy na nestacionární (časově proměnné) a stacionární (časově neproměnné). Podle počtu vstupních a výstupních veličin dělíme systémy na jednorozměrné a mnohorozměrné. [1, s. 5-7]

## 2 LAPLACEOVA TRANSFORMACE

### 2.1 Přímá Laplaceova transformace

Laplaceova transformace je metoda, kterou lze s výhodou použít pro řešení lineárních stacionárních diferenciálních rovnic. Principem této transformace je převedení úlohy z časové oblasti do oblasti komplexní proměnné, kde se úloha řeší snadněji řešením rovnice algebraické. [1, s. 11]

Přímá Laplaceova transformace přiřazuje reálné funkci  $f(t)$  reálné proměnné  $t$  komplexní funkci komplexní proměnné podle vztahu

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (1)$$

kde  $F(s)$  je komplexní funkce komplexní proměnné  $s$ ,  $L$  je operátor přímé Laplaceovy transformace,  $t$  je čas. [1, s. 11]

Pro existenci transformace reálné funkce  $f(t)$  musí být splněny požadavky:

- a)  $f(t)$  je rovna 0 pro  $t < 0$
- b)  $f(t)$  musí být alespoň po částech spojitá
- c)  $f(t)$  musí být exponenciálního řádu, což je splněno, pokud  $|f(t)| \leq Me^{-at}$ , kde  $M > 0$ ;  $a \in (-\infty, \infty)$ ;  $t \in (0, \infty)$

dle [2, s. 68].

Dalším způsobem určení přímé Laplaceovy transformace je využití slovníku Laplaceovy transformace. Slovník Laplaceovy transformace pro některé základní funkce je uveden v příloze (P I).

### 2.2 Vlastnosti Laplaceovy transformace

Mezi nejdůležitější vlastnosti Laplaceovy transformace patří:

1. Věta o derivaci obrazu

$$L\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s) \quad (2)$$

2. Věta o derivaci originálu

$$\begin{aligned} L\left\{\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right\} &= s^n F(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} \frac{d^{i-1} f(0)}{dt^{i-1}} \\ &= s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \end{aligned} \quad (3)$$

3. Věta o obrazu primitivní funkce

$$L\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s} F(s) \quad (4)$$

4. Věta o počáteční a koncové hodnotě

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (5)$$

$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (6)$$

5. Věta o posunutí originálu (zpoždění)

$$L\{f(t - \tau)\} = e^{-s\tau} F(s) \quad (7)$$

6. Věta o určitém integrálu

$$L\left\{\int_0^\infty f(\tau) d\tau\right\} = \lim_{s \rightarrow 0} F(s) \quad (8)$$

7. Věta o linearitě (superpozice)

$$L\{\alpha f(t) \pm \beta g(t)\} = \alpha F(s) \pm \beta G(s) \quad (9)$$

dle [1, s. 10, 11].

## 2.3 Zpětná Laplaceova transformace

Zpětná Laplaceova transformace je definována vztahem

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C F(s) e^{st} ds \quad (10)$$

kde  $L^{-1}$  je operátor zpětné Laplaceovy transformace,  $F(s)$  je komplexní funkce komplexní proměnné  $s$ ,  $t$  je čas,  $C$  je kružnice o poloměru  $r$ , uvnitř které leží všechny singulární body (kořeny jmenovatele) funkce  $F(s)$ ,  $j$  je imaginární jednotka. [2, s. 72]

Pomocí zpětné Laplaceovy transformace lze převést řešení úlohy z oblasti komplexní proměnné zpět do časové oblasti.

Dalším způsobem určení zpětné Laplaceovy transformace je využití slovníku Laplaceovy transformace. Slovník Laplaceovy transformace pro některé základní funkce je uveden v příloze (P I).

### 2.3.1 Věta o residuích

K výpočtu zpětné Laplaceovy transformace můžeme také využít větu o residuích, která je definována vztahem

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{res} [F(s)e^{st}]_{s=s_k} \quad (11)$$

kde  $s_k$  jsou póly (kořeny jmenovatele) funkce  $F(s)$ . [2, s. 72]

Pro každý  $n$ -násobný pól pak platí

$$\operatorname{res}_{s=s_k} [F(s)e^{st}] = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} [(s-s_i)^n F(s)e^{st}] \quad (12)$$

dle [2, s. 72].

### 2.3.2 Heavisideův rozvoj

Pro složitější funkci  $F(s)$ , kterou nejsme schopni nalézt ve slovníku, můžeme využít rozklad funkce  $F(s)$  na parciální zlomky, následné aplikace Heavisideova rozvoje a slovníku Laplaceovy transformace. [1, s. 14]

Nejprve je nutné zjistit póly (kořeny jmenovatele) funkce  $F(s)$ , následně se provede rozklad na součin kořenových činitelů. Každému kořenovému činiteli pak přísluší jeden parciální zlomek. [1, s. 14]

Podle násobnosti pólů mohou nastat dva případy:

a) nenásobné póly

$$F(s) = \frac{A_1}{s - p_1} + \frac{A_2}{s - p_2} + \dots + \frac{A_n}{s - p_n} \quad (13)$$

kde  $p_1, p_2, \dots, p_n$  jsou nenásobné póly,  $A_1, A_2, \dots, A_n$  jsou konstanty v čitatelích parciálních zlomků. [1, s. 14]

Pro určení konstant  $A_i$  použijeme Heavisideův rozvoj podle vztahu

$$A_i = \lim_{s \rightarrow p_i} [(s - p_i)F(s)] = [(s - p_i)F(s)]_{s=p_i} \quad (14)$$

dle [1, s. 14].

b) násobné póly

$$F(s) = \frac{A_1}{s - p_1} + \frac{A_2}{(s - p_1)^2} + \dots + \frac{A_k}{(s - p_1)^k} \quad (15)$$

kde  $p_1$  je  $k$ -násobný pól,  $A_1, A_2, \dots, A_k$  jsou konstanty v čitatelích parciálních zlomků. [1, s. 14]

Pro určení konstant  $A_k$  použijeme Heavisideův rozvoj podle vztahu

$$A_k = \lim_{s \rightarrow p_1} [(s - p_1)^k F(s)] = [(s - p_1)^k F(s)]_{s=p_1} \quad (16)$$

$$A_{k-j} = \frac{1}{j!} \frac{d^j}{ds^j} \lim_{s \rightarrow p_1} [(s - p_1)^k F(s)] = \frac{1}{j!} \frac{d^j}{ds^j} [(s - p_1)^k F(s)]_{s=p_1} \quad (17)$$

dle [1, s. 15].

U členů obsahujících komplexní proměnnou můžeme využít Eulerova vztahu

$$e^{a \pm jb} = e^a [\cos(b) \pm j \sin(b)] \quad (18)$$

dle [3, s. 9].



### 3 VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍCH SPOJITÝCH DYNAMICKÝCH SYSTÉMŮ

Vnější popis lineárních spojitých dynamických systémů (LSDS) popisuje vztah mezi vstupem a výstupem systému. Vnější popis lze vyjádřit několika způsoby uvedenými v této kapitole. [4, s. 35]

#### 3.1 Obyčejná lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

LSDS se vstupem  $u(t)$  a výstupem  $y(t)$  je obecně popsán diferenciální rovnicí

$$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_1 u'(t) + b_0 u(t) \quad (19)$$

kde  $a_i$ ,  $b_i$  jsou konstanty,  $u(t)$  je vstupní veličina,  $y(t)$  je výstupní veličina,  $m$  je stupeň derivace vstupní veličiny,  $n$  je stupeň derivace výstupní veličiny. Pro stupně derivací platí nerovnost  $m \leq n$ . [4, s. 36]

#### 3.2 Přenosová funkce

Přenosová funkce systému je definována jako poměr Laplaceova obrazu výstupní veličiny k Laplaceovu obrazu vstupní veličiny při uvažování nulových počátečních podmínek. Přenosovou funkci můžeme zapsat vztahem

$$G(s) = \frac{L\{y(t)\}}{L\{u(t)\}} = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} \quad (20)$$

kde  $a_i$ ,  $b_i$  jsou konstanty,  $u(t)$  je vstupní veličina,  $y(t)$  je výstupní veličina,  $U(s)$  je obraz vstupní veličiny,  $Y(s)$  je obraz výstupní veličiny,  $s$  je komplexní proměnná,  $m$  je stupeň derivace vstupní veličiny,  $n$  je stupeň derivace výstupní veličiny. Pro stupně derivací platí nerovnost  $m \leq n$ . [4, s. 37]

#### 3.3 Nuly a póly přenosu

K popisu LSDS pomocí nul a pólů upravíme přenosovou funkci do tvaru

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m (s - n_1)(s - n_2) \dots (s - n_m)}{a_n (s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} \quad (21)$$

kde  $a_i$ ,  $b_i$  jsou konstanty,  $n_i$  jsou nuly (kořeny čitatele přenosu),  $p_i$  jsou póly (kořeny jmenovatele přenosu). [2, s. 91]

Nuly a póly systému mají velký význam, jelikož jejich poloha v komplexní rovině rozhoduje o vlastnostech systému. Poloha nul systému rozhoduje o tzv. minimální a neminimální fázi. Pokud má systém všechny nuly v levé části komplexní roviny, jde o systém minimálně fázový. Pokud se nachází alespoň jedna nula v pravé části komplexní roviny, jde o systém neminimálně fázový. Poloha pólů systému rozhoduje o stabilitě a periodicitě systému. Pokud má systém všechny póly v levé části komplexní roviny, systém je stabilní. Pokud se nachází alespoň jeden pól v pravé části komplexní roviny včetně imaginární osy (hranice stability), jde o systém nestabilní. Periodicita systému je dána polohou pólů vzhledem k reálné ose. Pokud všechny póly leží na reálné ose (jejich imaginární část je nulová), systém je aperiodický (nekmitavý). Pokud ale systém obsahuje komplexně sdružené póly, jde o systém periodický (kmitavý). [1, s. 17]

### 3.4 Přechodová funkce a charakteristika

Přechodová funkce je definována jako odezva systému na jednotkový skok (Heavisideova funkce) na vstupu při uvažování nulových počátečních podmínek. Přechodová funkce se označuje  $h(t)$  a je dána vztahem

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} = L^{-1} \{H(s)\} \quad (22)$$

dle [4, s. 40].

Přechodová charakteristika se získá grafickým zobrazením přechodové funkce. [4, s. 40]

### 3.5 Impulsní funkce a charakteristika

Impulsní funkce je definována jako odezva systému na jednotkový impuls (Diracova funkce) na vstupu při uvažování nulových počátečních podmínek. Impulsní funkce se označuje  $i(t)$  a je dána vztahem

$$i(t) = L^{-1} \{G(s)\} \quad (23)$$

dle [4, s. 39].

Impulsní charakteristika se získá grafickým zobrazením impulsní funkce. [4, s. 39]

### 3.6 Frekvenční přenos

Frekvenční přenos je definován vztahem

$$G(j\omega) = G(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} \quad (24)$$

kde  $Y(j\omega)$  je Fourierův obraz výstupního signálu,  $U(j\omega)$  je Fourierův obraz vstupního signálu,  $j$  je imaginární jednotka,  $\omega$  je úhlová frekvence. [2, s. 109]

Frekvenční přenos lze vyjádřit ve složkovém tvaru komplexního čísla

$$G(j\omega) = \operatorname{Re} G(j\omega) + j \operatorname{Im} G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) \quad (25)$$

nebo exponenciálním tvaru komplexního čísla

$$G(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \quad (26)$$

kde  $A(\omega)$  je amplituda (zesílení),  $\varphi(\omega)$  je fázový posun,  $j$  je imaginární jednotka,  $\omega$  je úhlová frekvence. [2, s. 109]

Amplituda  $A(\omega)$  je dána vztahem

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} \quad (27)$$

dle [2, s. 110].

Fázový posun  $\varphi(\omega)$  je dán vztahem

$$\varphi(\omega) = \arctg \left( \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \right) \quad (28)$$

dle [2, s. 110].

### 3.7 Frekvenční charakteristiky

Frekvenční charakteristika je grafické zobrazení frekvenčního přenosu v komplexní rovině pro  $\omega \in \langle 0, \infty \rangle$ . [2, s. 109]

Pro sestrojení frekvenční charakteristiky v komplexní rovině upravíme frekvenční přenos na složkový, resp. exponenciální tvar dle rovnice (25), resp. (26). [2, s. 110]

### 3.7.1 Nyquistova křivka

Grafickým znázorněním frekvenčního přenosu se získá frekvenční charakteristika (amplitudově-fázová frekvenční charakteristika). Amplitudově-fázová frekvenční charakteristika se označuje taky jako Nyquistova křivka. [1, s. 20]

### 3.7.2 Bodeho křivky

Bodeho křivky (logaritmická amplitudová a logaritmická fázová frekvenční charakteristika) jsou grafickým znázorněním frekvenčního přenosu v logaritmických souřadnicích. U logaritmické amplitudové frekvenční charakteristiky je amplituda (zesílení) uváděna v decibelech. Amplitudu v decibelech určíme dle vztahu

$$A(\omega)[\text{dB}] = 20 \log A(\omega) \quad (29)$$

dle [2, s. 114].

## 4 STABILITA LINEÁRNÍCH SPOJITÝCH DYNAMICKÝCH SYSTÉMŮ

Stabilita dynamického systému (Ljapunovská stabilita) je schopnost systému vrátit se po vychýlení z rovnovážného stavu do původního stavu. [2, s. 148]

### 4.1 Nutná a postačující podmínka stability

Nutnou, ale nepostačující podmínkou stability LSDS je, aby koeficienty jmenovatele přenosu systému měly stejné znaménko a žádný z nich nebyl nulový. [1, s. 24]

Postačující podmínkou stability LSDS je poloha kořenů jmenovatele přenosu (pólů) systému v levé části komplexní roviny. [1, s. 24]

### 4.2 Kritéria stability

Pro určení stability systému musíme znát polohu pólů v komplexní rovině. Pokud je ale nalezení kořenů jmenovatele přenosu systému složité (v případě vyššího stupně polynomu), můžeme s výhodou využít kritéria stability, které umožňují rozhodnout o stabilitě systému bez výpočtu jeho pólů (kořenů jmenovatele přenosu). [2, s. 151]

Kritéria stability můžeme rozdělit do dvou skupin:

- a) Algebraická kritéria stability
  - Routh-Schurovo kritérium
  - Hurwitzovo kritérium
- b) Geometrická kritéria stability
  - Michajlovo-Leonhardovo kritérium
  - Nyquistovo kritérium

dle [2, s. 151].

Popis jednotlivých kritérií stability dle [2], [5] je uveden v příloze (P II).

## 5 VNITŘNÍ POPIS LINEÁRNÍCH SPOJITÝCH DYNAMICKÝCH SYSTÉMŮ

Vnitřní (stavový) popis LDSDS vyjadřuje vlastnosti systému vztahem mezi vstupem, výstupem a stavem systému. Tento popis vede na tzv. stavový model systému. [4, s. 36]

Stavový model LDSDS je tvořen stavovou a výstupní rovnicí

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (30)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (31)$$

kde  $\mathbf{A}$  je matice systému,  $\mathbf{B}$  je matice buzení,  $\mathbf{C}$  je matice výstupní,  $\mathbf{D}$  je matice převodu,  $\mathbf{u}(t)$  je vektor vstupních veličin,  $\mathbf{y}(t)$  je vektor výstupních veličin,  $\mathbf{x}(t)$  je vektor stavových proměnných. [6, s. 1, 2]

### 5.1 Převod stavového popisu na přenos

Převod stavového popisu na přenos je jednoznačný a převodní vztah lze odvodit pomocí Laplaceovy transformace. Aplikací Laplaceovy transformace na rovnice (30) a (31), při uvažování nulových počátečních podmínek, získáme po úpravách vztah pro převod stavového popisu na přenos ve tvaru

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \frac{1}{\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})} \mathbf{C} \text{adj}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (32)$$

dle [6, s. 3].

### 5.2 Převod přenosu na stavový popis

Převod přenosové funkce na stavový popis není jednoznačný a závisí na volbě stavových proměnných. [6, s. 10]

Pro převod přenosové funkce na stavový popis můžeme použít např. metody:

- a) Přímá metoda
- b) Metoda postupné integrace
- c) Jordanův kanonický tvar

dle [6, s. 10].

Popis jednotlivých metod pro převod přenosové funkce na stavový popis dle [6], [7] je uveden v příloze (P III).

## 5.3 Řešení stavových rovnic

### 5.3.1 Homogenní stavová rovnice

Pro řešení homogenní stavové rovnice uvažujeme, že vektor vstupních veličin  $\mathbf{u}(t) = 0$ . Za tohoto předpokladu přejde rovnice (30) do tvaru

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad (33)$$

a rovnice (31) do tvaru

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (34)$$

kde řešení soustavy rovnic (33) a (34) spočívá v řešení rovnice (33) a následném dosazení do rovnice (34). [1, s. 86, 87]

Pomocí Laplaceovy transformace lze odvodit vztah pro určení vektoru stavových proměnných

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) = \Phi(t) \mathbf{x}(0) \quad (35)$$

kde  $\mathbf{x}(0)$  je vektor počátečních podmínek a  $\Phi(t)$  je fundamentální matice systému, kterou lze určit dle vztahu

$$\Phi(t) = L^{-1} \{ [s\mathbf{E} - \mathbf{A}]^{-1} \} \quad (36)$$

dle [1, s. 88].

V případě, že vektor počátečních podmínek  $\mathbf{x}(0)$  je roven matici buzení  $\mathbf{B}$ , výstupní rovnice obsahuje matici impulsních funkcí dílčích přenosů systému, resp. pro systém s jedním vstupem a jedním výstupem impulsní funkci systému.

### 5.3.2 Nehomogenní stavová rovnice

V případě nehomogenní stavové rovnice je vektor vstupních veličin  $\mathbf{u}(t) \neq 0$ . Za tohoto předpokladu stavová a výstupní rovnice zůstávají ve tvaru rovnice (30) a (31). Řešení soustavy rovnic (30) a (31) spočívá v řešení rovnice (30), které je dáno vztahem

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (37)$$

a následném dosazení do rovnice (31). [1, s. 90]

V případě nulových počátečních podmínek  $\mathbf{x}(0)$  a vektoru vstupních veličin  $\mathbf{u}(t)=1$  obsahuje výstupní rovnice matici přechodových funkcí dílčích přenosů systému, resp. pro systém s jedním vstupem a jedním výstupem přechodovou funkci systému.

## 5.4 Vlastnosti systémů

### 5.4.1 Řiditelnost a dosažitelnost

Pokud existuje vstupní signál  $u(t)$  a konečný časový interval  $\langle 0; t_1 \rangle$ , za který je možné převést systém z nenulového počátečního stavu do nulového stavu v čase  $t_1$ , považujeme LDSDS za říditelný. [1, s. 91]

Pokud existuje vstupní signál  $u(t)$  a konečný časový interval  $\langle 0; t_1 \rangle$ , za který je možné převést systém z nulového počátečního stavu do nenulového stavu v čase  $t_1$ , považujeme LDSDS za dosažitelný. [1, s. 91]

Pro LDSDS platí totožnost říditelnost  $\equiv$  dosažitelnost. [1, s. 91]

K ověření říditelnosti, resp. dosažitelnosti slouží kritérium říditelnosti. Pokud matice říditelnosti

$$\mathbf{P}_c = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (38)$$

kde  $n$  je rozměr stavového prostoru, má plnou hodnotu, LDSDS je říditelný. Podle uvedené definice musí pro jednorozměrné (SISO) systémy platit  $\det \mathbf{P}_c \neq 0$ . [1, s. 91, 92]

### 5.4.2 Pozorovatelnost a rekonstruovatelnost

Pokud lze z průběhu výstupní veličiny  $y(t)$  (z průběhu budoucích hodnot) pozorovat všechny stavové veličiny, považujeme LDSDS za pozorovatelný. [1, s. 92]

Pokud lze z průběhu výstupní veličiny  $y(t)$  (z průběhu minulých hodnot) rekonstruovat všechny stavové veličiny, považujeme LDSDS za rekonstruovatelný. [1, s. 92]



Pro LSDS platí totožnost pozorovatelnost  $\equiv$  rekonstruovatelnost. [1, s. 92]

K ověření pozorovatelnosti, resp. rekonstruovatelnosti slouží kritérium pozorovatelnosti. Pokud matice pozorovatelnosti

$$\mathbf{P}_o = [\mathbf{C} \quad \mathbf{CA} \quad \dots \quad \mathbf{CA}^{n-1}]^T \quad (39)$$

kde  $n$  je rozměr stavového prostoru, má plnou hodnotu, LSDS je pozorovatelný. Podle uvedené definice musí pro jednorozměrné (SISO) systémy platit  $\det \mathbf{P}_o \neq 0$ . [1, s. 92]

## 5.5 Transformace stavů

Různou volbou stavových proměnných můžeme získat různé tvary stavového popisu systému. Pokud chceme přejít z jednoho tvaru stavového popisu na jiný tvar, využijeme tzv. transformace stavů. [6, s. 37]

Při této úloze se vychází z lineární transformace

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{Q}\mathbf{v}(t) \quad (40)$$

kde  $\mathbf{x}(t)$  je vektor stavových proměnných ve vektorovém prostoru s euklidovskou bází,  $\mathbf{Q}$  je transformační matice (nová báze),  $\mathbf{v}(t)$  je vektor nových souřadnic v nové bázi. [7, s. 8]

Transformační rovnici (40) aplikujeme na stavovou rovnici (30) a výstupní rovnici (31). Po úpravě obdržíme vztahy pro převod matic z jednoho tvaru stavového popisu do jiného tvaru stavového popisu ve tvaru

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} \quad (41)$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B} \quad (42)$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{Q} \quad (43)$$

$$\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{D} \quad (44)$$

dle [6, s. 37].

Dalším typem úlohy je hledání transformační matice  $\mathbf{Q}$  mezi dvěma tvary stavového popisu. Tento typ úlohy využívá matice říditelnosti, resp. matice pozorovatelnosti. Transformační matice se pak určí podle vztahu

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P}_c \overline{\mathbf{P}_c}^{-1} = \mathbf{P}_o^{-1} \overline{\mathbf{P}_o} \quad (45)$$

kde  $\mathbf{P}_c$ ,  $\mathbf{P}_o$  jsou matice říditelnosti a pozorovatelnosti jednoho tvaru stavového popisu,  $\overline{\mathbf{P}_c}$ ,  $\overline{\mathbf{P}_o}$  jsou matice říditelnosti a pozorovatelnosti jiného tvaru stavového popisu. [6, s. 38, 39]

## 6 DIOFANTICKÉ ROVNICE

### 6.1 Okruh

Pod pojmem okruh rozumíme neprázdnou množinu  $\Omega$ , ve které lze sčítat (odčítat) a násobit pomocí komutativních, asociativních a distributivních zákonů. Pokud lze v této množině i dělit, jedná se o těleso  $T$ . [8, s. 2]

#### 6.1.1 Dělitelnost v okruhu

Pro dělitelnost v okruhu můžeme psát:

- a)  $a$  dělí  $b \Leftrightarrow \exists d \in \Omega, b = ad$
- b)  $d$  dělí  $a$  i  $b \Leftrightarrow a = a_0d, b = b_0d$
- c)  $d$  je největší společný dělitel  $a$  a  $b \Leftrightarrow d$  je dělitelné každým dělitelem  $a$  a  $b$
- d) prvek  $x \in \Omega$ , ke kterému existuje inverzní prvek v  $\Omega$ , se nazývá jednotkou
- e) krátké dělení:  $a/b = p$  zb.  $d \Leftrightarrow a = bp + d$ , dlouhé dělení:  $a/b \in T$

dle [1, s. 57].

### 6.2 Největší společný dělitel

Pro libovolné prvky  $a, b \in \Omega$  existuje jejich největší společný dělitel (NSD). Pokud je největší společný dělitel  $a$  a  $b$  roven 1, prvky  $a$  a  $b$  jsou nesoudělné. [8, s. 2]

#### 6.2.1 Největší společný dělitel v okruhu celých čísel

V okruhu celých čísel jde o dělitelnosti rozhodnout rozkladem na prvočinitele. Platí, že  $b$  dělí  $a$ , jestliže prvočinitele  $b$  jsou i prvočinitele  $a$ . NSD je pak součinem společných prvočinitelů. Dále můžeme využít Euklidův algoritmus, resp. zobecněný Euklidův algoritmus. [1, s. 57]

#### 6.2.2 Největší společný dělitel v okruhu polynomů

V okruhu polynomů je dělitelnost řešena přes kořeny polynomů. [1, s. 57]

Pokud uvažujeme prvky  $a$  a  $b$  v okruhu polynomů, o dělitelnosti můžeme rozhodnout:

a) rozložením polynomů na součin kořenových činitelů

b) pomocí zobecněného Euklidova algoritmu

dle [8, s. 2].

### 6.3 Diofantická rovnice

Diofantickou rovnicí rozumíme rovnici definovanou na množině označované jako okruh.

Taková rovnice je uvažována ve tvaru

$$ax + by = c \quad (46)$$

kde  $a$ ,  $b$ ,  $c$  jsou známé a  $x$ ,  $y$  hledané prvky. [8, s. 8]

Diofantická rovnice má v daném okruhu řešení, jestliže největší společný dělitel prvků  $a$  a  $b$ , které jsou definovány v daném okruhu, dělí  $c$ . [8, s. 8]

Jestliže největší společný dělitel  $a$  a  $b$  dělí  $c$ , rovnice (46) má nekonečně mnoho řešení v obecném tvaru

$$x = x_0 + \frac{b}{\text{NSD}(a,b)} t \quad (47)$$

$$y = y_0 - \frac{a}{\text{NSD}(a,b)} t \quad (48)$$

kde  $x_0$ ,  $y_0$  je partikulární řešení,  $t$  je libovolný prvek daného okruhu. [8, s. 8]

#### 6.3.1 Řešení diofantických rovnic v okruhu polynomů

a) metoda neurčitých koeficientů

Sestavení diofantické rovnice předchází volba stupňů polynomů např. podle vztahů

$$\deg y = \deg a - 1 \quad (49)$$

$$\deg a + \deg b > \deg c \Rightarrow \deg x = \deg b - 1 \quad (50)$$

$$\deg a + \deg b \leq \deg c \Rightarrow \deg x = \deg c - \deg a \quad (51)$$

dle [9, s. 42].

Dosažením zvolených stupňů polynomů dle rovnic (49) a (50), resp. (51) do diofantické rovnice a následným rozepsáním po složkách získáme soustavu algebraických rovnic, jejímž řešením získáme koeficienty hledaných polynomů. [9, s. 42]

b) zobecněný Euklidův algoritmus

## 6.4 Zobecněný Euklidův algoritmus

Zobecněný Euklidův algoritmus zobecňuje Euklidův algoritmus hledání největšího společného dělitele dvou celých čísel. Cílem je obdržet pomocí řádkových (sloupcových) úprav řešení diofantické rovnice, nebo největší společný dělitel prvků  $a$  a  $b$ . [9, s. 42]

Dále uvažujme případ řádkových úprav. Principem je sestavení matice ve tvaru

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{array} \right]$$

kde  $a$ ,  $b$  jsou prvky okruhu.

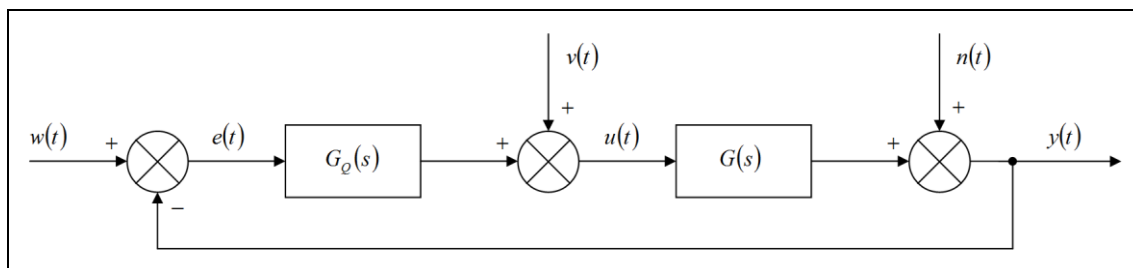
V případě hledání  $\text{NSD}(a, b)$  provádíme řádkové úpravy s cílem dosažení 0 na jednom z řádků pravé části matice.  $\text{NSD}(a, b)$  je pak poslední nenulový řádek.

V případě hledání řešení diofantické rovnice  $ax + by = c$  provádíme řádkové úpravy s cílem dosažení pravé strany zadané diofantické rovnice na jednom z řádků pravé části matice. Řešení diofantické rovnice pak odečteme z řádku matice, jehož pravá část je rovna pravé straně diofantické rovnice.

## 7 POLYNOMIÁLNÍ METODA NÁVRHU REGULÁTORŮ

### 7.1 1DOF systém řízení

Systém řízení s jedním stupněm volnosti (1DOF) je znázorněn na obrázku (Obr. 1).



Obr. 1. Systém řízení s jedním stupněm volnosti - konfigurace 1DOF [8, s. 16]

Dle obrázku (Obr. 1) představuje  $w(t)$  žádanou veličinu,  $e(t)$  regulační odchylku,  $u(t)$  akční veličinu,  $y(t)$  výstupní veličinu,  $v(t)$  poruchu na vstupu regulované soustavy,  $n(t)$  poruchu na výstupu regulované soustavy,  $G_Q(s)$  přenos regulátoru,  $G(s)$  přenos regulované soustavy. [8, s. 15, 16]

#### 7.1.1 Požadavky na kvalitu řízení

##### a) Stabilita obvodu

Stabilita je zajištěna řešením diofantické rovnice

$$a(s)p(s) + b(s)q(s) = d(s) \quad (52)$$

kde  $b(s)$ ,  $a(s)$  jsou čítelel a jmenovatele přenosu řízeného objektu (je uvažován ryzí přenos řízeného objektu, tedy  $\deg b(s) \leq \deg a(s)$ ),  $q(s)$ ,  $p(s)$  jsou čítelel a jmenovatele přenosu zpětnovazebního regulátoru,  $d(s)$  je stabilní polynom. [8, s. 17]

##### b) Asymptotické sledování žádané hodnoty a kompenzace poruch

Zajištěno, pokud polynom  $p(s)$  v rovnici (52) je tvaru

$$p(s) = \tilde{p}(s)f(s) \quad (53)$$

kde  $\tilde{p}(s)$  je polynom, jehož stupeň se určí dle rovnice (57),  $f(s)$  je polynom, který je nejmenším společným násobkem (NSN) jmenovatelů přenosu žádané hodnoty  $f_w(s)$ ,

poruchy na vstupu do řízené soustavy  $f_v(s)$  a poruchy na výstupu řízené soustavy  $f_n(s)$ , tedy

$$f(s) = \text{NSN}(f_w(s), f_v(s), f_n(s)) \quad (54)$$

dle [8, s. 17, 18].

c) Vnitřní ryzost systému

Zajištěno, pokud

$$\deg q(s) \leq \deg p(s) \quad (55)$$

dle [8, s. 17].

### 7.1.2 Volba stupňů polynomů

$$\deg q(s) = \deg a(s) + \deg f(s) - 1 \quad (56)$$

$$\deg \tilde{p}(s) \geq \deg a(s) - 1 \quad (57)$$

$$\deg d(s) \geq 2 \deg a(s) + \deg f(s) - 1 \quad (58)$$

dle [8, s. 17].

### 7.1.3 Výpočet parametrů regulátoru

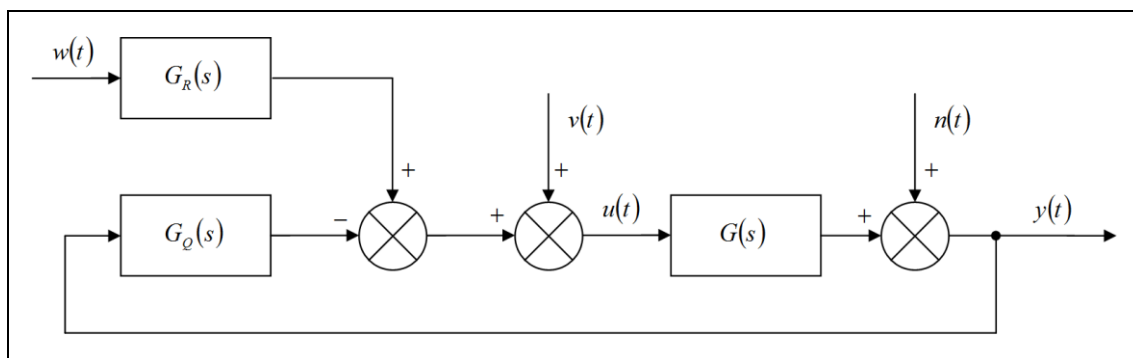
Parametry zpětnovazebního regulátoru  $G_Q(s)$  se určí pomocí metody neurčitých koeficientů z diofantické rovnice (52). Řešením se získá přenos regulátoru ve tvaru

$$G_Q(s) = \frac{q(s)}{p(s)} = \frac{q(s)}{f(s)\tilde{p}(s)} \quad (59)$$

dle [8, s. 18].

## 7.2 2DOF systém řízení

Systém řízení se dvěma stupni volnosti (2DOF) je znázorněn na obrázku (Obr. 2).



Obr. 2. Systém řízení se dvěma stupni volnosti - konfigurace 2DOF [8, s. 23]

Dle obrázku (Obr. 2) představuje  $w(t)$  žádanou veličinu,  $u(t)$  akční veličinu,  $y(t)$  výstupní veličinu,  $v(t)$  poruchu na vstupu regulované soustavy,  $n(t)$  poruchu na výstupu regulované soustavy,  $G_Q(s)$  přenos zpětnovazební části regulátoru,  $G_R(s)$  přenos přímovazební části regulátoru,  $G(s)$  přenos regulované soustavy. [8, s. 15, 23]

### 7.2.1 Požadavky na kvalitu řízení

#### a) Stabilita systému

Stabilita je zajištěna řešením diofantické rovnice

$$a(s)p(s) + b(s)q(s) = d(s) \quad (60)$$

kde  $b(s)$ ,  $a(s)$  jsou čítelel a jmenovatel přenosu řízeného objektu (je uvažován ryzí přenos řízeného objektu, tedy  $\deg b(s) \leq \deg a(s)$ ),  $q(s)$  je čítelel přenosu zpětnovazebního regulátoru,  $p(s)$  je jmenovatel přenosu přímovazebního, resp. zpětnovazebního regulátoru,  $d(s)$  je stabilní polynom. [8, s. 24]

#### b) Asymptotické sledování žádané hodnoty

Zajištěno řešením diofantické rovnice

$$f_w(s)t(s) + b(s)r(s) = d(s) \quad (61)$$

kde  $f_w(s)$  je jmenovatel přenosu žádané hodnoty,  $t(s)$  je neznámy polynom, který je nutný pro výpočet, ale do přenosu regulátoru nevstupuje,  $b(s)$  je čítelel přenosu řízeného objektu,  $r(s)$  je čítelel přenosu přímovazebního regulátoru,  $d(s)$  je stabilní polynom. [8, s. 25]



## c) Kompenzace poruch

Zajištěno, pokud polynom  $p(s)$  v rovnici (60) je tvaru

$$p(s) = \tilde{p}(s)f_2(s) \quad (62)$$

kde  $\tilde{p}(s)$  je polynom, jehož stupeň se určí dle rovnice (68),  $f_2(s)$  je polynom, který je nejmenším společným násobkem (NSN) jmenovatelů přenosů poruchy na vstupu do řízené soustavy  $f_v(s)$  a poruchy na výstupu řízené soustavy  $f_n(s)$ , tedy

$$f_2(s) = \text{NSN}(f_v(s), f_n(s)) \quad (63)$$

dle [8, s. 25].

## d) Vnitřní ryzost systému

Zajištěno, pokud

$$\deg q(s) \leq \deg p(s) \quad (64)$$

$$\deg r(s) \leq \deg p(s) \quad (65)$$

dle [8, s. 24].

**7.2.2 Volba stupňů polynomů**

$$k \geq \deg f_w(s) - \deg f_2(s) - \deg a(s), \quad k < 0 \Rightarrow k = 0 \quad (66)$$

$$\deg q(s) = \deg a(s) + \deg f_2(s) - 1 \quad (67)$$

$$\deg \tilde{p}(s) \geq \deg a(s) - 1 + k \quad (68)$$

$$\deg r(s) \geq \deg f_w(s) - 1 \quad (69)$$

$$\deg d(s) \geq 2\deg a(s) + \deg f_2(s) - 1 + k \quad (70)$$

$$\deg t(s) = \deg d(s) - \deg f_w(s) \quad (71)$$

dle [8, s. 25, 26].

### 7.2.3 Výpočet parametrů regulátoru

Parametry zpětnovazebního regulátoru  $G_Q(s)$  a přímovazebního regulátoru  $G_R(s)$  se určí pomocí metody neurčitých koeficientů z diofantické rovnice (60) a (61). Řešením se získá přenos zpětnovazební části regulátoru ve tvaru

$$G_Q(s) = \frac{q(s)}{p(s)} = \frac{q(s)}{f_2(s)\tilde{p}(s)} \quad (72)$$

a přenos přímovazební části regulátoru ve tvaru

$$G_R(s) = \frac{r(s)}{p(s)} = \frac{r(s)}{f_2(s)\tilde{p}(s)} \quad (73)$$

dle [8, s. 25, 26].

## 8 MNOHOROZMĚRNÉ SYSTÉMY

### 8.1 Obecný popis mnohorozměrných systémů

Mnohorozměrné systémy (MIMO) jsou systémy, kde se vyskytuje více vstupních a výstupních veličin, obecně  $m$  vstupních a  $l$  výstupních veličin. Tyto veličiny jsou mezi sebou provázány a každý vstup může obecně ovlivňovat kterýkoli výstup. [1, s. 69]

MIMO regulační obvod lze popsat pomocí přenosových matic, které vyjadřují vztah mezi vstupními a výstupními veličinami obvodu. Takový regulační obvod má pak stejnou strukturu jako jednorozměrný regulační obvod (SISO). [10, s. 1]

Pokud uvažujeme systém se dvěma vstupy a dvěma výstupy (TITO) s dynamikou prvního řádu, takový systém můžeme popsat soustavou diferenciálních rovnic ve tvaru

$$y_1'(t) + a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t) = b_1 u_1(t) + b_2 u_2(t) \quad (74)$$

$$a_3 y_1(t) + y_2'(t) + a_4 y_2(t) = b_3 u_1(t) + b_4 u_2(t) \quad (75)$$

kde  $a_i$ ,  $b_i$  jsou konstanty,  $y_1(t)$  je 1. výstupní veličina,  $y_2(t)$  je 2. výstupní veličina,  $u_1(t)$  je 1. vstupní veličina,  $u_2(t)$  je 2. vstupní veličina. [1, s. 69]

Aplikací Laplaceovy transformace na rovnice (74), (75) a následnou úpravou do maticového tvaru získáme

$$\begin{bmatrix} s + a_1 & a_2 \\ a_3 & s + a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} \quad (76)$$

tedy obecně

$$\mathbf{A}(s)\mathbf{Y}(s) = \mathbf{B}(s)\mathbf{U}(s) \quad (77)$$

dle [1, s. 70].

#### 8.1.1 Přenosová matice, levý a pravý maticový zlomek

Přenosová matice má obecný tvar

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \cdots & G_{1m}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \cdots & G_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{l1}(s) & G_{l2}(s) & \cdots & G_{lm}(s) \end{bmatrix} \quad (78)$$

kde jednotlivé prvky této matice vyjadřují dílčí přenosy mezi vstupy a výstupy systému. [1, s. 70]

Levý a pravý maticový zlomek (levý a pravý maticový přenos) jsou dány vztahem

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{A}_L^{-1}(s) \mathbf{B}_L(s) = \mathbf{B}_P(s) \mathbf{A}_P^{-1}(s) \quad (79)$$

dle [1, s. 70].

### 8.1.2 Stabilita mnohorozměrného systému

Stabilita mnohorozměrného systému je určena determinantem  $\det \mathbf{A}_L(s)$ , resp.  $\det \mathbf{A}_P(s)$ . MIMO systém je stabilní, jestliže  $\det \mathbf{A}_L(s)$ , resp.  $\det \mathbf{A}_P(s)$  je stabilní polynom, tedy jeho kořeny leží v levé části komplexní roviny. Pro  $\det \mathbf{A}_L(s)$  a  $\det \mathbf{A}_P(s)$  platí, že tyto polynomy mají stejné kořeny, ale mohou se lišit o nějaký skalární násobek. [10, s. 4]

## 8.2 Řešení maticových diofantických rovnic

Obecně může být maticová diofantická rovnice ve třech tvarech:

a) pravostranná

Pravostranná maticová diofantická rovnice je řešitelná pomocí sloupcových úprav. Jde o rovnici ve tvaru

$$\mathbf{A}_L(s) \mathbf{X}_P(s) + \mathbf{B}_L(s) \mathbf{Y}_P(s) = \mathbf{C}(s) \quad (80)$$

$$\left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_L(s) & \mathbf{B}_L(s) \\ \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{array} \right] \xrightarrow[\text{úpravy}]{\text{sloupcové}} \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{C}(s) & \mathbf{0} \\ \mathbf{X}_P(s) & -\mathbf{B}_P(s) \\ \mathbf{Y}_P(s) & \mathbf{A}_P(s) \end{array} \right] \quad (81)$$

dle [10, s. 14].

b) levostranná

Levostranná maticová diofantická rovnice je řešitelná pomocí řádkových úprav. Jde o rovnici ve tvaru

$$\mathbf{X}_L(s)\mathbf{A}_P(s) + \mathbf{Y}_L(s)\mathbf{B}_P(s) = \mathbf{C}(s) \quad (82)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_P(s) & \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_P(s) & \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{řádkové úpravy}} \begin{bmatrix} \mathbf{C}(s) & \mathbf{X}_L(s) & \mathbf{Y}_L(s) \\ \mathbf{0} & -\mathbf{B}_L(s) & \mathbf{A}_L(s) \end{bmatrix} \quad (83)$$

dle [10, s. 14].

c) oboustranná

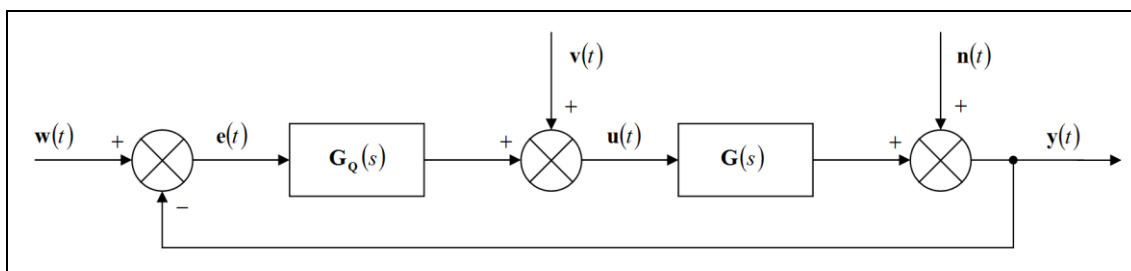
Oboustranná (bilaterální) maticová diofantická rovnice není řešitelná. Jde o rovnici ve tvaru

$$\mathbf{A}_L(s)\mathbf{X}_P(s) + \mathbf{Y}_L(s)\mathbf{B}_P(s) = \mathbf{C}(s) \quad (84)$$

dle [10, s. 14].

### 8.3 Řízení mnohorozměrných systémů

Mnohorozměrný regulační obvod s jedním stupněm volnosti (1DOF) je znázorněn na obrázku (Obr. 3).



Obr. 3. Mnohorozměrný regulační obvod - 1DOF konfigurace systému řízení [10, s. 10]

Dle obrázku (Obr. 3) představuje  $\mathbf{w}(t)$  vektor žádaných veličin,  $\mathbf{u}(t)$  vektor akčních veličin,  $\mathbf{y}(t)$  vektor výstupních veličin,  $\mathbf{v}(t)$  vektor poruchových veličin na vstupu regulované soustavy,  $\mathbf{n}(t)$  vektor poruchových veličin na výstupu regulované soustavy,  $\mathbf{G}_Q(s)$  maticový přenos regulátoru,  $\mathbf{G}(s)$  maticový přenos regulované soustavy. [10, s. 10, 11]

### 8.3.1 Požadavky na kvalitu řízení

#### a) Stabilita systému

Stabilita je dána řešením maticové diofantické rovnice

$$\mathbf{A}_L(s)\mathbf{P}_P(s) + \mathbf{B}_L(s)\mathbf{Q}_P(s) = \mathbf{D}(s) \quad (85)$$

kde  $\mathbf{P}_P(s)$ ,  $\mathbf{Q}_P(s)$  jsou matice zpětnovazebního regulátoru,  $\mathbf{D}(s)$  je diagonální matice, jejíž prvky jsou polynomy řádu  $\deg d_i = 2 \deg \mathbf{A}$ , tedy dvojnásobek nejvyššího stupně polynomu v matici  $\mathbf{A}$ . Pokud uvažujeme násobné póly, polynomy  $d_i$  budou ve tvaru  $(s + m_i)^{\deg d_i}$ , kde  $-m_i$  jsou volené póly. [10, s. 13]

#### b) Asymptotické sledování žádané hodnoty a kompenzace poruch

Zajištěno, pokud pro matici  $\mathbf{P}_P(s)$  v rovnici (85) platí

$$\mathbf{P}_P(s) = \mathbf{F}(s)\mathbf{P}_{P0}(s) \quad (86)$$

kde  $\mathbf{F}(s)$  je diagonální matice, jejíž prvky jsou nejmenší společné násobky matic  $\mathbf{F}_w(s)$ ,  $\mathbf{F}_v(s)$  a  $\mathbf{F}_n(s)$ , neboli nejmenší společné násobky jmenovatelů dílčích obrazů žádané hodnoty a poruch na vstupu a výstupu regulované soustavy. [9, s. 54]

Přenos maticového zpětnovazebního regulátoru je pak dán vztahem

$$\mathbf{G}_Q(s) = \mathbf{Q}_P(s)\mathbf{P}_P^{-1}(s) = \mathbf{Q}_P(s)(\mathbf{F}(s)\mathbf{P}_{P0}(s))^{-1} \quad (87)$$

dle [10, s. 13, 17].

K vyřešení maticové diofantické rovnice (85) využijeme sloupcových úprav. Matice  $\mathbf{Q}_P(s)$  a  $\mathbf{P}_{P0}(s)$  nutné pro sestavení zpětnovazebního regulátoru dle rovnice (87) získáme řešením rovnice

$$\mathbf{A}_L(s)\mathbf{F}(s)\mathbf{P}_{P0}(s) + \mathbf{B}_L(s)\mathbf{Q}_P(s) = \mathbf{D}(s) \quad (88)$$

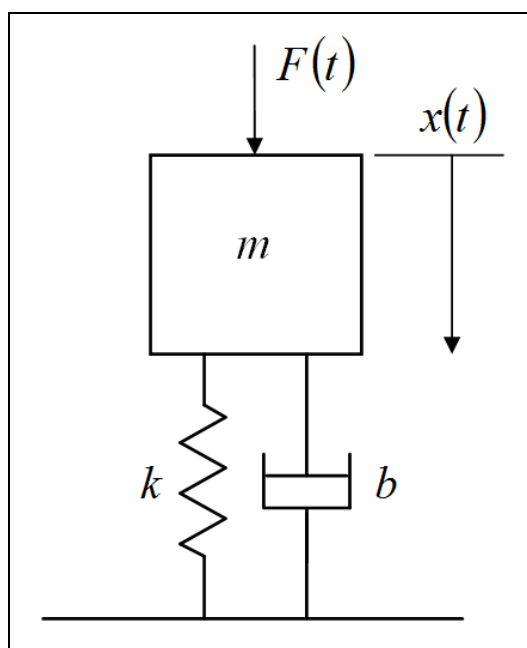
$$\left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_L(s)\mathbf{F}(s) & \mathbf{B}_L(s) \\ \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{array} \right] \xrightarrow{\text{sloupcové úpravy}} \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{D}(s) & \mathbf{0} \\ \mathbf{P}_{P0}(s) & -\mathbf{B}_P(s) \\ \mathbf{Q}_P(s) & -\mathbf{A}_P(s) \end{array} \right] \quad (89)$$

dle [10, s. 16].

## 9 POPIS VYBRANÝCH MODELŮ SPOJITÝCH DYNAMICKÝCH SYSTÉMŮ

### 9.1 Mechanický oscilátor

Mechanický oscilátor znázorněný na obrázku (Obr. 4) je tvořen tělesem, které vykonává pohyb v jedné ose. Těleso o hmotnosti  $m$  je spojeno s pevnou podložkou pružinou s tuhostí  $k$  a tlumičem se součinitelem útlumu  $b$ . [11, s. 20]



Obr. 4. Mechanický oscilátor [11, s. 20]

Pokud na model mechanického oscilátoru aplikujeme druhý Newtonův pohybový zákon, získáme pohybovou rovnici

$$ma(t) = mx''(t) = \sum_i F_i \quad (90)$$

kde síly  $F_i$  jsou

$$F_k(t) = kx(t) \quad (91)$$

$$F_b(t) = bx'(t) \quad (92)$$

$$F_G = mg \quad (93)$$

a vnější síla  $F(t)$ . [11, s. 20, 21]

Dosazením vnější síly  $F(t)$  a působících sil dle rovnic (91), (92) a (93) do rovnice (90) s uvažováním směru působení získáme

$$mx''(t) + bx'(t) + kx(t) = F_G + F(t) \quad (94)$$

dle [11, s. 21].

Pokud nepůsobí vnější síla  $F(t)$ , bude působit pouze tíhová síla  $F_G$ , která způsobí stlačení pružiny a posunutí tělesa do rovnovážného stavu. Pokud provedeme posun souřadnicového systému do rovnovážného stavu a zavedeme nový souřadnicový systém  $y$ , získáme stejnou pohybovou rovnici jako v původním souřadnicovém systému, ale již nemusíme uvažovat působení tíhové síly. Za těchto předpokladů přejde rovnice (94) do tvaru

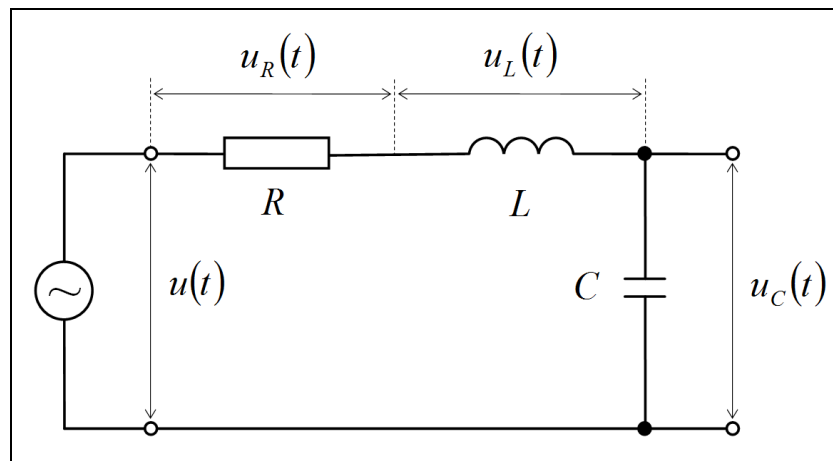
$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = F(t) \quad (95)$$

dle [11, s. 21, 22].

## 9.2 Sériový obvod RLC

Sériový obvod RLC je tvořen sériovým spojením rezistoru s odporem  $R$ , cívky s indukčností  $L$  a kondenzátoru s kapacitou  $C$ . Celý obvod je připojen ke zdroji střídavého napětí. Schéma obvodu je uvedeno na obrázku (Obr. 5), kde význam značení je následující:  $u(t)$  je okamžitá hodnota napětí zdroje,  $u_R(t)$  je okamžitá hodnota napětí na rezistoru,  $u_L(t)$  je okamžitá hodnota napětí na cívce,  $u_C(t)$  je okamžitá hodnota napětí na kondenzátoru. Uvažujme, že vstupní veličinou je okamžitá hodnota napětí zdroje  $u(t)$  a výstupní veličinou je hodnota napětí na kondenzátoru  $u_C(t)$ .





Obr. 5. Sériový obvod RLC [12, s. 119]

Aplikací II. Kirchhoffova zákona na obvod dle obrázku (Obr. 5) získáme vztah

$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) \quad (96)$$

kde okamžitá hodnota napětí na rezistoru je

$$u_R(t) = Ri(t) \quad (97)$$

okamžitá hodnota napětí na cívce je

$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (98)$$

a okamžitá hodnota napětí na kondenzátoru je

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau \quad (99)$$

dle [12, s. 101-104].

Dosazením vztahů uvedených v rovnicích (97), (98) a (99) do rovnice (96) obdržíme rovnici ve tvaru

$$u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau \quad (100)$$

dle [12, s. 120].

Pro získání přenosové funkce  $G(s) = \frac{U_c(s)}{U(s)}$  aplikujeme na rovnici (100) Laplaceovu transformaci, kdy uvažujeme nulové počáteční podmínky. Rovnice (100) přejde do tvaru

$$U(s) = RI(s) + LsI(s) + \frac{1}{C} \frac{1}{s} I(s) \quad (101)$$

Na rovnici (99) taktéž aplikujeme Laplaceovu transformaci, uvažujeme nulové počáteční podmínky. Rovnice (99) přejde do tvaru

$$U_c(s) = \frac{1}{C} \frac{1}{s} I(s) \quad (102)$$

Pokud z rovnice (102) vyjádříme  $I(s)$  a provedeme dosazení do rovnice (101), získáme po úpravě přenos systému ve tvaru

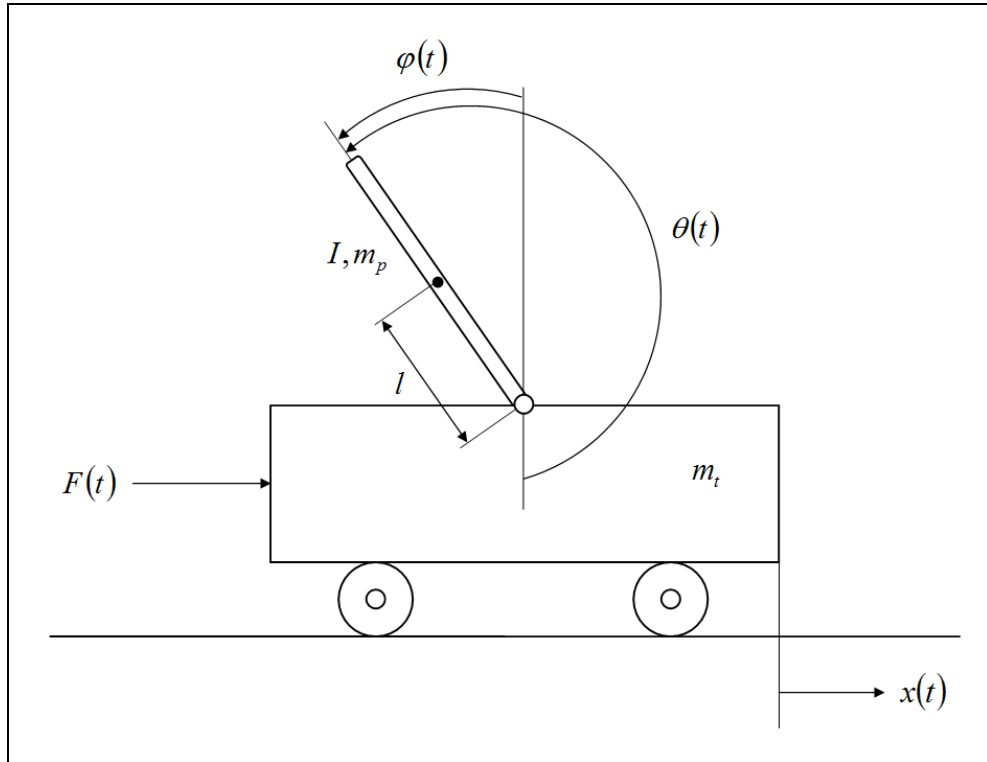
$$\begin{aligned} U(s) &= R s C U_c(s) + L s^2 C U_c(s) + U_c(s) \\ U(s) &= (R s C + L s^2 C + 1) U_c(s) \\ \frac{U_c(s)}{U(s)} = G(s) &= \frac{1}{L C s^2 + R C s + 1} = \frac{\frac{1}{L C}}{s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{L C}} \end{aligned} \quad (103)$$

který odpovídá diferenciální rovnici

$$u_c''(t) + \frac{R}{L} u_c'(t) + \frac{1}{L C} u_c(t) = \frac{1}{L C} u(t) \quad (104)$$

### 9.3 Inverzní kyvadlo na vozíku

Na obrázku (Obr. 6) je znázorněn model inverzního kyvadla, které je připevněno k vozíku. Na vozík působí síla  $F(t)$ , která uvádí vozík do pohybu, což vede k vychýlení kyvadla z rovnovážné polohy. Hmotnost vozíku je  $m_t$ , hmotnost kyvadla je  $m_p$ ,  $l$  je vzdálenost těžiště kyvadla,  $I$  je moment setrvačnosti a  $\theta(t)$ , resp.  $\varphi(t)$  je úhel vychýlení kyvadla. Pro jednoduchost zanedbáváme třecí sílu, která působí proti síle  $F(t)$ . [13, s. 57-59]



Obr. 6. Inverzní kyvadlo na vozíku [13, s. 57]

Pro model inverzního kyvadla na vozíku dle obrázku (Obr. 6) platí (při zanedbání třecí síly) nelineární diferenciální rovnice

$$(I + m_p l^2) \theta''(t) + m_p g l \sin \theta(t) = -m_p l x''(t) \cos \theta(t) \quad (105)$$

$$(m_t + m_p) x''(t) + m_p l \theta''(t) \cos \theta(t) - m_p l \theta'(t)^2 \sin \theta(t) = F(t) \quad (106)$$

které popisují pohyb vozíku s inverzním kyvadlem. [13, s. 59]

Pro úhel  $\theta(t)$  platí  $\theta(t) = \pi + \varphi(t)$ . Pokud uvažujeme malý úhel vychýlení, můžeme provést linearizaci rovnice (105) a (106). Za tohoto předpokladu platí

$$\cos \theta(t) \cong -1 \quad (107)$$

$$\sin \theta(t) \cong -\varphi(t) \quad (108)$$

$$\theta'(t)^2 \cong 0 \quad (109)$$

dle [13, s. 59].

Dosazením rovnic (107), (108) a (109) do rovnic (105) a (106) získáme

$$(I + m_p l^2) \varphi''(t) - m_p g l \varphi(t) = m_p l x''(t) \quad (110)$$

$$(m_t + m_p) x''(t) - m_p l \varphi''(t) = F(t) \quad (111)$$

Pro získání přenosové funkce  $G(s) = \frac{\Phi(s)}{F(s)}$  provedeme Laplaceovu transformaci rovnice (110) a (111), kdy při uvažování nulových počátečních podmínek získáme

$$(I + m_p l^2) s^2 \Phi(s) - m_p g l \Phi(s) = m_p l s^2 X(s) \quad (112)$$

$$(m_t + m_p) s^2 X(s) - m_p l s^2 \Phi(s) = F(s) \quad (113)$$

Z rovnice (113) vyjádříme  $X(s)$ , tedy

$$X(s) = \frac{m_p l s^2 \Phi(s) + F(s)}{(m_t + m_p) s^2} \quad (114)$$

Rovnici (114) dosadíme do rovnice (112) a následnou úpravou přejdeme do konečného tvaru přenosové funkce

$$\begin{aligned} (I + m_p l^2) s^2 \Phi(s) - m_p g l \Phi(s) &= m_p l s^2 \frac{m_p l s^2 \Phi(s) + F(s)}{(m_t + m_p) s^2} \\ (I + m_p l^2) s^2 \Phi(s) - m_p g l \Phi(s) &= \frac{m_p^2 l^2 s^2 \Phi(s) + m_p l F(s)}{(m_t + m_p)} \\ (m_t + m_p) (I + m_p l^2) s^2 \Phi(s) - (m_t + m_p) m_p g l \Phi(s) &= m_p^2 l^2 s^2 \Phi(s) + m_p l F(s) \\ \Phi(s) [(m_t + m_p) (I + m_p l^2) s^2 - (m_t + m_p) m_p g l - m_p^2 l^2 s^2] &= m_p l F(s) \\ \frac{m_p l}{[(m_t + m_p) (I + m_p l^2) - m_p^2 l^2] s^2 - (m_t + m_p) m_p g l} &= \frac{\Phi(s)}{F(s)} = G(s) \end{aligned} \quad (115)$$

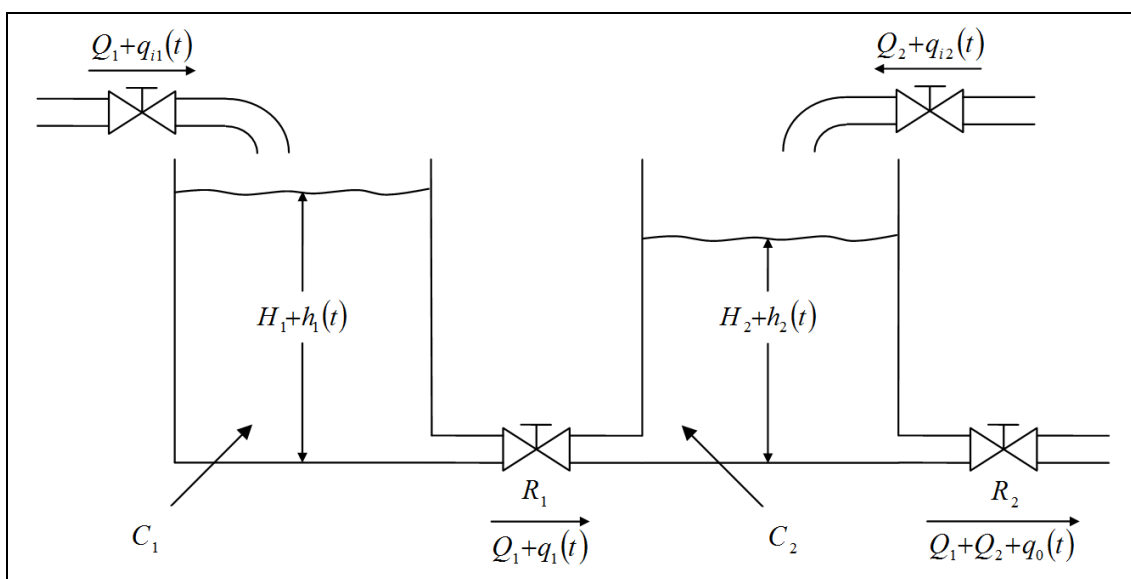
Z přenosu dle rovnice (115) je zřejmé, že se jedná o nestabilní systém, jelikož není splněna nutná podmínka stability.

Přenos dle rovnice (115) odpovídá diferenciální rovnici

$$[(m_t + m_p) (I + m_p l^2) - m_p^2 l^2] \varphi''(t) - (m_t + m_p) m_p g l \varphi(t) = m_p l F(t) \quad (116)$$

## 9.4 Systém hladin dvou nádrží s kapalinou

Systém hladin dvou nádrží s kapalinou je znázorněn na obrázku (Obr. 7). Tento systém je tvořen dvěma nádržemi s kapacitou  $C_1$  a  $C_2$ . Do těchto nádrží vedou potrubí, které přivádí kapalinu. Objemový průtok 1. a 2. přívodním potrubím je  $Q_1 + q_{i1}(t)$  a  $Q_2 + q_{i2}(t)$ , kde  $Q_1$  a  $Q_2$  jsou hodnoty průtoku v ustáleném stavu,  $q_{i1}(t)$  a  $q_{i2}(t)$  jsou odchylky (změny) průtoku. Výška hladiny 1. a 2. nádrže je  $H_1 + h_1(t)$  a  $H_2 + h_2(t)$ , kde  $H_1$  a  $H_2$  jsou výšky hladiny v ustáleném stavu,  $h_1(t)$  a  $h_2(t)$  jsou odchylky (změny) výšky hladiny. 1. a 2. nádrž spojuje potrubí s ventilem s odporem  $R_1$ . Objemový průtok potrubím mezi 1. a 2. nádrží je  $Q_1 + q_1(t)$ , kde  $q_1(t)$  je odchylka (změna) od ustálené hodnoty průtoku. Z 2. nádrže odtéká kapalina potrubím s ventilem s odporem  $R_2$ . Objemový průtok potrubím z 2. nádrže je  $Q_1 + Q_2 + q_0(t)$ , kde  $q_0(t)$  je odchylka (změna) od ustálené hodnoty průtoku. Uvažujme, že vstupy do systému jsou změny od ustálených průtoků  $q_{i1}(t)$  a  $q_{i2}(t)$ , výstupy jsou změny od ustálených výšek hladin  $h_1(t)$  a  $h_2(t)$ . [14, s. 360]



Obr. 7. Systém hladin dvou nádrží s kapalinou [14, s. 360]

Pro systém hladin dvou nádrží s kapalinou dle obrázku (Obr. 7) platí rovnice

$$C_1 dh_1(t) = (q_{i1}(t) - q_1(t)) dt \quad (117)$$

$$\frac{h_1(t) - h_2(t)}{R_1} = q_1(t) \quad (118)$$

$$C_2 dh_2(t) = (q_1(t) + q_{i2}(t) - q_0(t)) dt \quad (119)$$

$$\frac{h_2(t)}{R_2} = q_0(t) \quad (120)$$

dle [14, s. 360, 361].

Dosazením rovnice (118) do rovnice (117) získáme

$$\frac{dh_1(t)}{dt} = \frac{1}{C_1} \left( q_{i1}(t) - \frac{h_1(t) - h_2(t)}{R_1} \right) \quad (121)$$

dle [14, s. 361].

Dosazením rovnice (118) a (120) do rovnice (119) získáme

$$\frac{dh_2(t)}{dt} = \frac{1}{C_2} \left( \frac{h_1(t) - h_2(t)}{R_1} + q_{i2}(t) - \frac{h_2(t)}{R_2} \right) \quad (122)$$

dle [14, s. 361].

Rovnici (121) a (122) upravíme do tvaru

$$\frac{dh_1(t)}{dt} + \frac{1}{C_1 R_1} h_1(t) - \frac{1}{C_1 R_1} h_2(t) = \frac{q_{i1}(t)}{C_1} \quad (123)$$

$$-\frac{1}{C_2 R_1} h_1(t) + \frac{dh_2(t)}{dt} + \left( \frac{1}{C_2 R_1} + \frac{1}{C_2 R_2} \right) h_2(t) = \frac{q_{i2}(t)}{C_2} \quad (124)$$

dle [14, s. 361].

Pokud zavedeme vstupní proměnné jako  $u_1(t) = q_{i1}(t)$  a  $u_2(t) = q_{i2}(t)$ , výstupní proměnné jako  $y_1(t) = h_1(t)$  a  $y_2(t) = h_2(t)$ , rovnice (123) a (124) přejdou do tvaru

$$y_1'(t) + \frac{1}{C_1 R_1} y_1(t) - \frac{1}{C_1 R_1} y_2(t) = \frac{1}{C_1} u_1(t) \quad (125)$$

$$-\frac{1}{C_2 R_1} y_1(t) + y_2'(t) + \left( \frac{1}{C_2 R_1} + \frac{1}{C_2 R_2} \right) y_2(t) = \frac{1}{C_2} u_2(t) \quad (126)$$

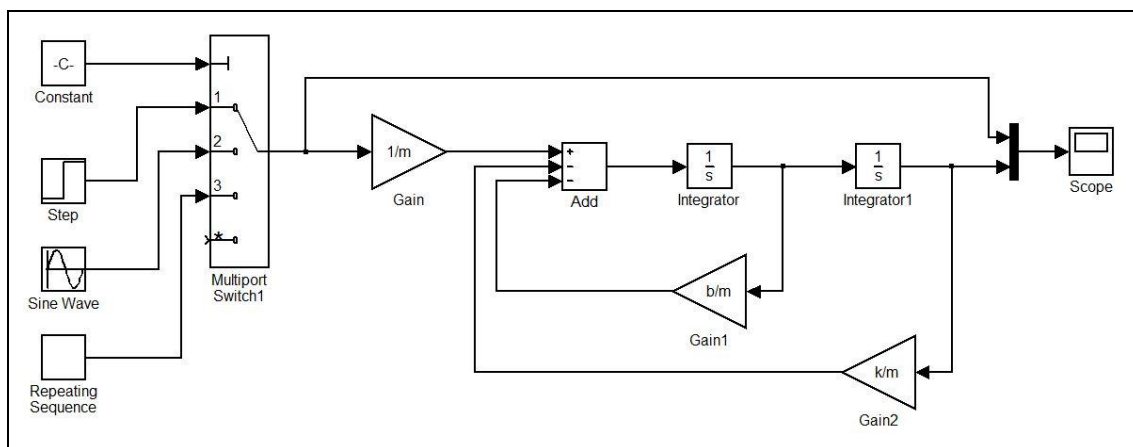
dle [14, s. 361].

## **II. PRAKTICKÁ ČÁST**

## 10 MODEL MECHANICKÉHO OSCILÁTORU

### 10.1 Simulační model

Ze získané diferenciální rovnice (95) můžeme snadno sestavit simulační model systému. K tvorbě simulačního modelu mechanického oscilátoru, který je zobrazen na obrázku (Obr. 8), byl využit program MATLAB/SIMULINK.



Obr. 8. Simulace mechanického oscilátoru

Tato jednoduchá simulace umožňuje pozorovat změny výchylky tělesa oscilátoru vlivem působení vnější síly  $F(t)$ , jejíž průběh je volitelný. Pro volbu průběhu vnější síly je zde na výběr skoková funkce, harmonická funkce nebo jiný nastavitelný průběh.

### 10.2 Výpočetní část

Jednotlivé výpočty budou uvedeny nejprve obecně, následně pro ověření pomocí programu MATLAB budou uvažovány parametry: hmotnost tělesa  $m = 2 \text{ kg}$ , tuhost pružiny  $k = 1 \text{ kg.s}^{-2}$ , součinitel útlumu  $b = 1 \text{ kg.s}^{-1}$ .

#### 10.2.1 Přenos systému

Pro určení přenosu systému aplikujeme Laplaceovu transformaci na rovnici (95), tedy

$$L\{my''(t) + by'(t) + ky(t)\} = L\{F(t)\} \quad (127)$$

Při uvažování nulových počátečních podmínek získáme rovnici



$$ms^2Y(s) + bsY(s) + kY(s) = F(s) \quad (128)$$

Přenos systému je tedy

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k} = \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}} \quad (129)$$

### 10.2.2 Nuly a póly přenosu

Póly přenosu (kořeny jmenovatele přenosu) určíme řešením kvadratické rovnice

$$ms^2 + bs + k = 0 \quad (130)$$

Obecně mohou nastat 3 případy:

a) 2 různé reálné kořeny

Pro  $b^2 - 4mk > 0$  jsou řešením rovnice (130) 2 různé reálné kořeny (póly) ve tvaru

$$p_1 = s_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m} \quad (131)$$

$$p_2 = s_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m} \quad (132)$$

b) komplexně sdružené kořeny

Pro  $b^2 - 4mk < 0$  jsou řešením rovnice (130) komplexně sdružené kořeny (póly) ve tvaru

$$p_1 = s_1 = \frac{-b + j\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m} = -\frac{b}{2m} + j\frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m} \quad (133)$$

$$p_2 = s_2 = \frac{-b - j\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m} = -\frac{b}{2m} - j\frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m} \quad (134)$$

c) dvojnásobný kořen

Pro  $b^2 - 4mk = 0$  je řešením rovnice (130) dvojnásobný kořen (pól) ve tvaru

$$p_1 = p_2 = s_1 = s_2 = -\frac{b}{2m} \quad (135)$$

Relativní řád (rozdíel mezi stupněm polynomu jmenovatele a stupněm polynomu čitatele) přenosu je 2. V tomto případě (nenulový relativní řád) doplníme nuly v komplexním nekonečnu dle [1, s. 18] tak, aby bylo splněno: počet nul = počet pólů. Nuly přenosu (kořeny čitatele přenosu) jsou tedy  $n_1 = n_2 = \infty$ .

Pro další výpočty budeme uvažovat případ b), tj. komplexně sdružené póly.

### 10.2.3 Přechodová funkce a přechodová charakteristika

Přechodovou funkci vypočteme dle rovnice

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} = L^{-1} \{H(s)\} \quad (136)$$

Pro přehlednost vypočteme  $H(s)$  samostatně, tedy

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{G(s)}{s} = \frac{\frac{1}{m}}{s \left( s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m} \right)} \\ &= \frac{\frac{1}{m}}{s \left[ s - \left( -\frac{b}{2m} + j \frac{\sqrt{b^2 - 4mk}}{2m} \right) \right] \left[ s - \left( -\frac{b}{2m} - j \frac{\sqrt{b^2 - 4mk}}{2m} \right) \right]} \end{aligned} \quad (137)$$

Dále můžeme využít např. větu o residuích

$$h(t) = \sum_{k=1}^n \text{res} [H(s)e^{st}]_{s=s_k} \quad (138)$$

kdy dosazením pólu systému přejdeme do tvaru

$$h(t) = \text{res} [H(s)e^0] + \text{res} \left[ H(s)e^{\left( -\frac{b}{2m} + j \frac{\sqrt{b^2 - 4mk}}{2m} \right)t} \right] + \text{res} \left[ H(s)e^{\left( -\frac{b}{2m} - j \frac{\sqrt{b^2 - 4mk}}{2m} \right)t} \right] \quad (139)$$

který po rozepsání přejde do tvaru

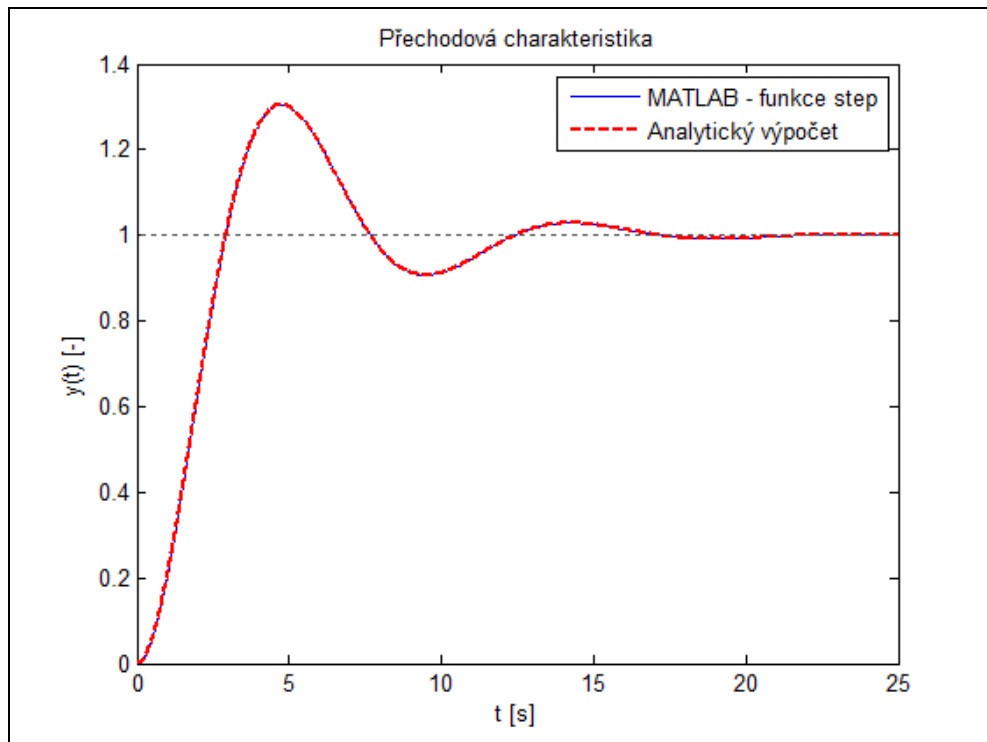
$$\begin{aligned}
 h(t) = & \lim_{s \rightarrow 0} [sH(s)e^{st}] + \lim_{s \rightarrow -\frac{b}{2m} + j\frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m}} \left\{ \left[ s - \left( -\frac{b}{2m} + j\frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m} \right) \right] H(s)e^{st} \right\} \\
 & + \lim_{s \rightarrow -\frac{b}{2m} - j\frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m}} \left\{ \left[ s - \left( -\frac{b}{2m} - j\frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m} \right) \right] H(s)e^{st} \right\}
 \end{aligned} \quad (140)$$

Z důvodu rozsáhlosti výpočtu přechodové funkce je tento výpočet uveden v příloze (P IV).

Výsledný tvar přechodové funkce je

$$\begin{aligned}
 h(t) = & \frac{4m}{b^2 + |b^2 - 4mk|} \left\{ 1 - e^{-\frac{b}{2m}t} \left[ \cos \left( \frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m} t \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{b}{\sqrt{|b^2 - 4mk|}} \sin \left( \frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m} t \right) \right] \right\}
 \end{aligned} \quad (141)$$

Pro ověření správnosti výsledku využijeme program MATLAB. Program MATLAB nabízí funkci *step* pro vykreslení přechodové charakteristiky ze zadaného přenosu.



Obr. 9. Přechodová charakteristika mechanického oscilátoru

### 10.2.4 Impulsní funkce a impulsní charakteristika

Impulsní funkci vypočteme dle vztahu

$$i(t) = L^{-1}\{G(s)\} \quad (142)$$

Zpětnou Laplaceovu transformaci přenosu  $G(s)$  můžeme vypočítat opět pomocí residuí, nebo s výhodou využít slovníku Laplaceovy transformace a přenos  $G(s)$  upravit na tvar

$$e^{-at} \sin(\omega t) = L^{-1}\left\{\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}\right\} \quad (143)$$

Pro převod přenosu  $G(s)$  na tvar dle rovnice (143) upravíme jmenovatel přenosu metodou úpravy na čtverec. Úpravou rovnice (129) získáme požadovaný tvar přenosu

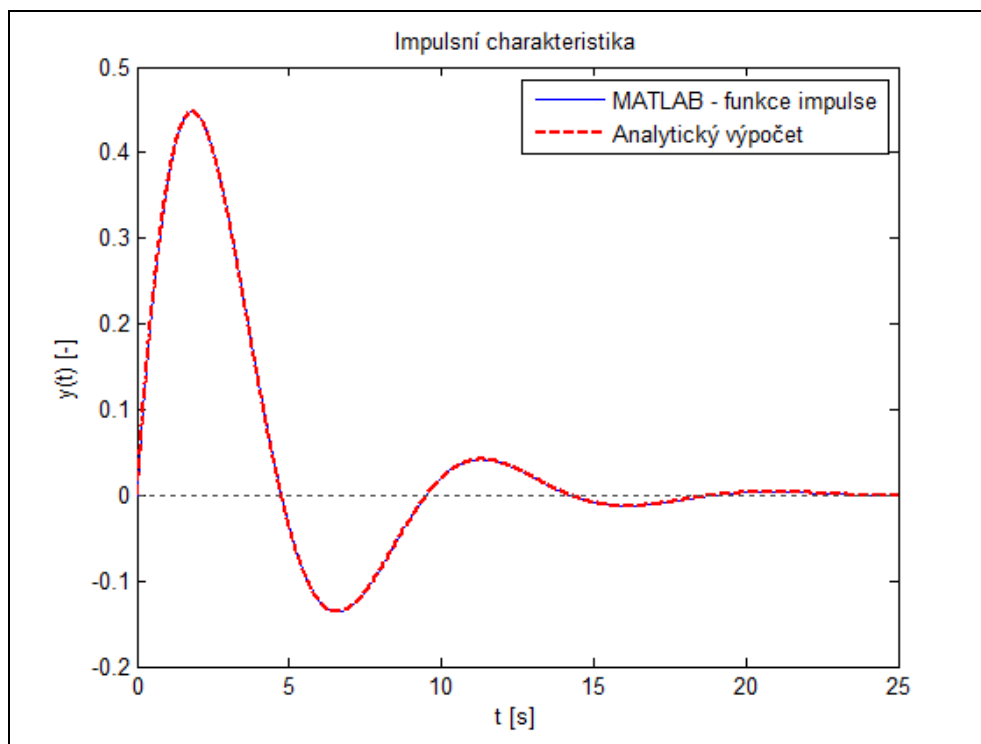
$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{\frac{1}{m}}{\left(s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{b^2}{4m^2}\right) - \frac{b^2}{4m^2} + \frac{k}{m}} = \frac{\frac{1}{m}}{\left(s + \frac{b}{2m}\right)^2 + \frac{4km - b^2}{4m^2}} \\ &= \frac{\frac{1}{m}}{\frac{\sqrt{4km - b^2}}{2m}} \frac{\frac{\sqrt{4km - b^2}}{2m}}{\frac{\sqrt{4km - b^2}}{2m} \left(s + \frac{b}{2m}\right)^2 + \frac{4km - b^2}{4m^2}} = \frac{2}{\sqrt{4km - b^2}} \frac{\frac{\sqrt{4km - b^2}}{2m}}{\left(s + \frac{b}{2m}\right)^2 + \frac{4km - b^2}{4m^2}} \quad (144) \end{aligned}$$

na který aplikujeme vzorec ze slovníku Laplaceovy transformace uvedený v rovnici (143).

Impulsní funkce má tedy tvar

$$i(t) = \frac{2}{\sqrt{4km - b^2}} e^{-\frac{b}{2m}t} \sin\left(\frac{\sqrt{4km - b^2}}{2m}t\right) \quad (145)$$

Pro ověření správnosti výsledku využijeme program MATLAB. Program MATLAB nabízí funkci *impulse* pro vykreslení impulsní charakteristiky ze zadaného přenosu.



Obr. 10. Impulsní charakteristika mechanického oscilátoru

### 10.2.5 Frekvenční přenos a frekvenční charakteristiky

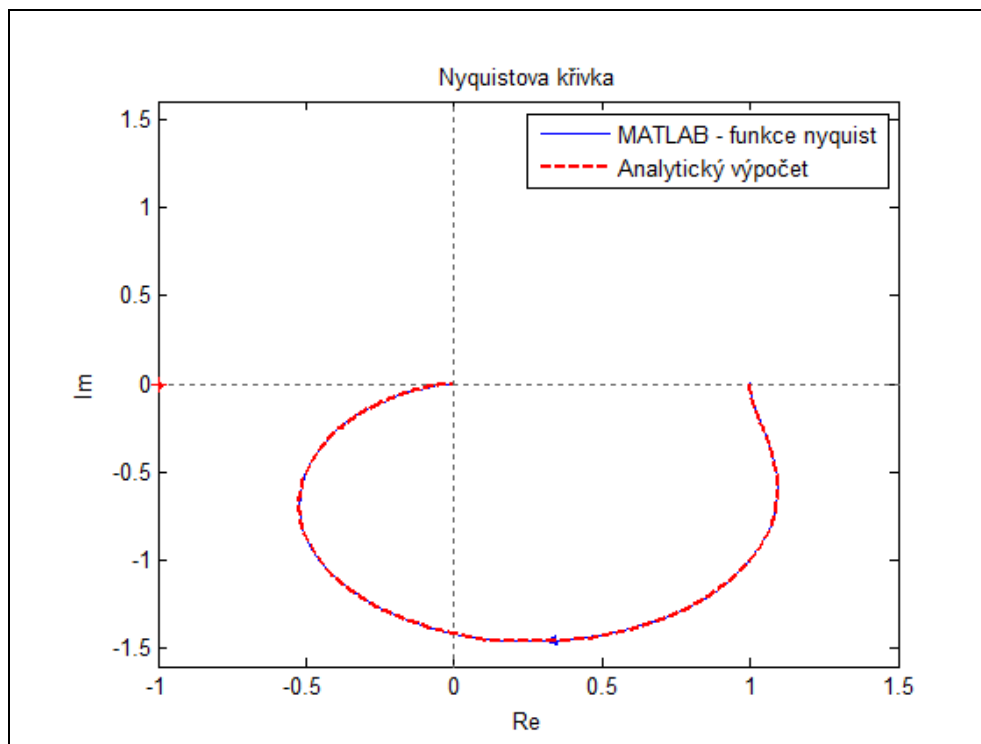
Frekvenční přenos získáme dosazením  $j\omega$  za komplexní proměnnou  $s$  v přenosu systému dle rovnice (129). Dosazením přejdeme do tvaru

$$G(j\omega) = G(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{\frac{1}{m}}{(j\omega)^2 + \frac{b}{m}j\omega + \frac{k}{m}} \quad (146)$$

Úpravou rovnice (146) získáme frekvenční přenos ve složkovém tvaru

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{\frac{1}{m}}{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) + j\left(\frac{b}{m}\omega\right)} \frac{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) - j\left(\frac{b}{m}\omega\right)}{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) - j\left(\frac{b}{m}\omega\right)} = \frac{\frac{1}{m}\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) - j\left(\frac{b}{m^2}\omega\right)}{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{b}{m}\omega\right)^2} \\ &= \frac{\frac{1}{m}\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)}{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{b}{m}\omega\right)^2} + j \frac{-\frac{b}{m^2}\omega}{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{b}{m}\omega\right)^2} \end{aligned} \quad (147)$$

Pro ověření správnosti výsledku využijeme program MATLAB. Program MATLAB nabízí funkci *nyquist* pro vykreslení amplitudově-fázové frekvenční charakteristiky (Nyquistovy křivky) ze zadaného přenosu.



Obr. 11. Amplitudově-fázová frekvenční charakteristika (Nyquistova křivka) mechanického oscilátoru

Frekvenční přenos v exponenciálním tvaru získáme určením amplitudy  $A(\omega)$  a fáze  $\varphi(\omega)$ . Amplitudu  $A(\omega)$  určíme dosazením reálné a imaginární části frekvenčního přenosu z rovnice (147) do rovnice

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \sqrt{[\operatorname{Re} G(j\omega)]^2 + [\operatorname{Im} G(j\omega)]^2} \quad (148)$$

čímž získáme

$$A(\omega) = \sqrt{\left[ \frac{\frac{1}{m} \left( \frac{k}{m} - \omega^2 \right)}{\left( \frac{k}{m} - \omega^2 \right)^2 + \left( \frac{b}{m} \omega \right)^2} \right]^2 + \left[ \frac{-\frac{b}{m^2} \omega}{\left( \frac{k}{m} - \omega^2 \right)^2 + \left( \frac{b}{m} \omega \right)^2} \right]^2} \quad (149)$$

Úpravou rovnice (149) získáme výsledný tvar amplitudy

$$\begin{aligned}
A(\omega) &= \sqrt{\frac{\left[\frac{1}{m}\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)\right]^2 + \left(-\frac{b}{m^2}\omega\right)^2}{\left[\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{b}{m}\omega\right)^2\right]^2}} \\
&= \frac{\sqrt{\left[\frac{1}{m}\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)\right]^2 + \left(-\frac{b}{m^2}\omega\right)^2}}{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{b}{m}\omega\right)^2} = \frac{1}{m} \frac{\sqrt{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{b}{m}\omega\right)^2}}{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{b}{m}\omega\right)^2} \\
&= \frac{1}{m \sqrt{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{b}{m}\omega\right)^2}} \tag{150}
\end{aligned}$$

Pro amplitudu v decibelech pak platí

$$A(\omega)[\text{dB}] = 20 \log A(\omega) = 20 \log \frac{1}{m \sqrt{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{b}{m}\omega\right)^2}} \tag{151}$$

Fázi  $\varphi(\omega)$  určíme dosazením reálné a imaginární části frekvenčního přenosu z rovnice (147) do rovnice

$$\varphi(\omega) = \arctg\left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}\right) \tag{152}$$

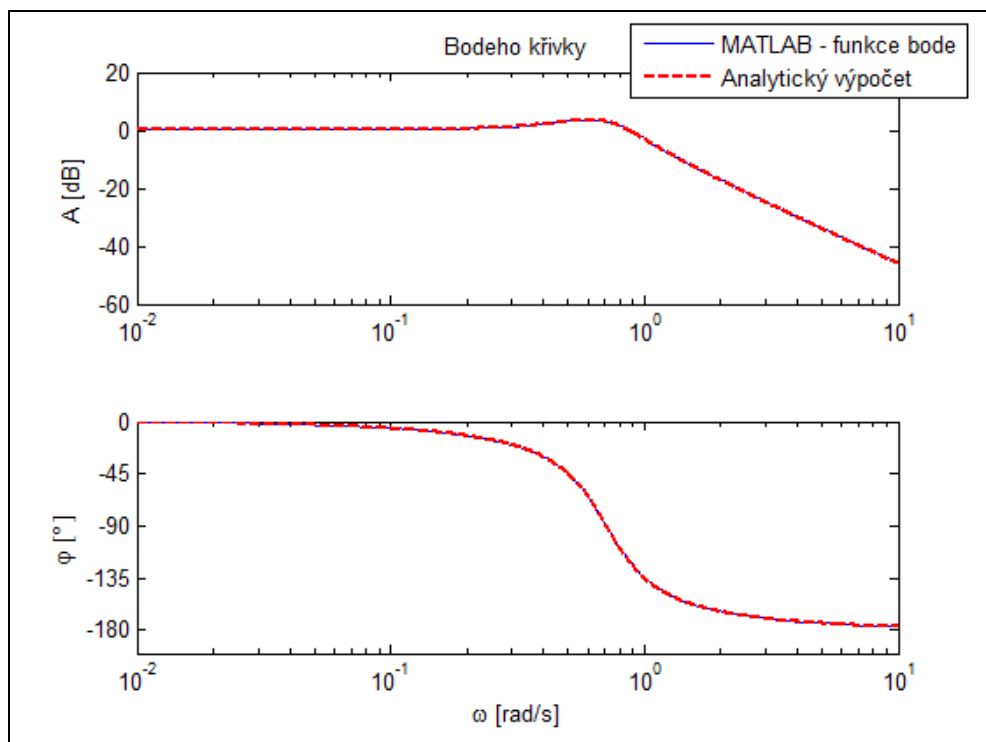
čímž získáme

$$\varphi(\omega) = \arctg\left(\frac{\frac{-\frac{b}{m^2}\omega}{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{b}{m}\omega\right)^2}}{\frac{\frac{1}{m}\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)}{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{b}{m}\omega\right)^2}}\right) \tag{153}$$

Úpravou rovnice (153) získáme výsledný tvar fáze

$$\varphi(\omega) = \arctg \left( \frac{-\frac{b}{m^2} \omega}{\frac{1}{m} \left( \frac{k}{m} - \omega^2 \right)} \right) = \arctg \left( \frac{-\frac{b}{m} \omega}{\frac{k}{m} - \omega^2} \right) \quad (154)$$

Pro ověření správnosti výsledků využijeme program MATLAB. Program MATLAB nabízí funkci *bode* pro vykreslení logaritmické amplitudové a logaritmické fázové frekvenční charakteristiky (Bodeho křivky) ze zadaného přenosu.



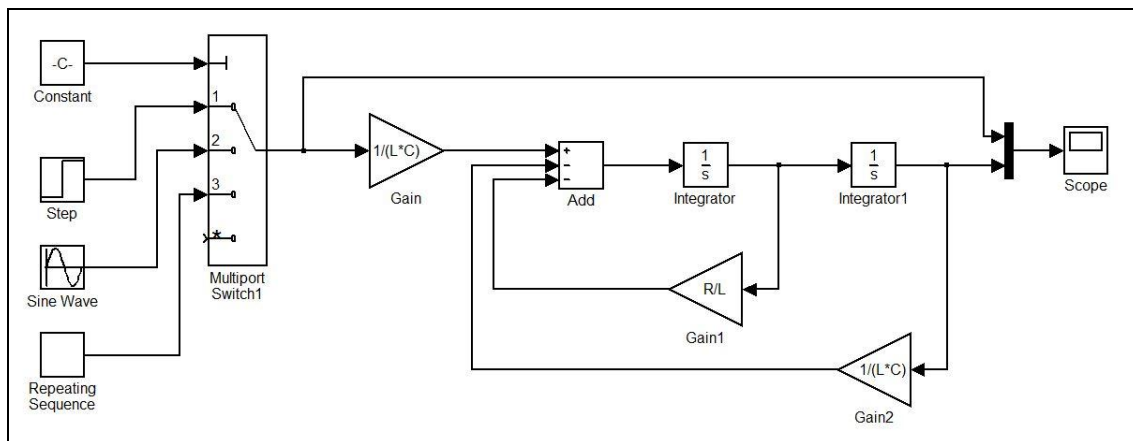
Obr. 12. Logaritmická amplitudová frekvenční charakteristika a logaritmická fázová frekvenční charakteristika (Bodeho křivky) mechanického oscilátoru



## 11 MODEL SÉRIOVÉHO OBVODU RLC

### 11.1 Simulační model

Ze získané diferenciální rovnice (104) můžeme snadno sestavit simulační model systému. K tvorbě simulačního modelu sériového obvodu RLC, který je zobrazen na obrázku (Obr. 13), byl využit program MATLAB/SIMULINK.



Obr. 13. Simulace sériového obvodu RLC

Tato jednoduchá simulace umožňuje pozorovat změny výstupního napětí  $u_c(t)$  (okamžitá hodnota napětí na kondenzátoru) vlivem působení vstupního napětí  $u(t)$  (okamžitá hodnota napětí zdroje), jehož průběh je volitelný. Pro volbu průběhu vstupního napětí je zde na výběr skoková funkce, harmonická funkce nebo jiný nastavitelný průběh.

### 11.2 Výpočetní část

Pro následující výpočty budou uvažovány 2 různé reálné póly systému. Za tohoto předpokladu musí být splněna podmínka

$$\frac{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}{2} > 0 \quad (155)$$

resp. úpravou

$$R^2 C > 4L \quad (156)$$

Při splnění podmínky dle nerovnice (156) jsou zaručeny 2 různé reálné póly přenosu uvedeného v rovnici (103).

### 11.2.1 Převod přenosu na stavový popis

Stavový (vnitřní) popis systému můžeme získat např. pomocí dále uvedených metod. Tyto metody se od sebe liší tvarem stavových matic, což je zřejmé ze získaných výsledků.

#### a) Přímá metoda

U přímé metody vycházíme z přenosu uvedeného v rovnici (103). Přenos upravíme do tvaru

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Y(s)}{Z(s)} \frac{Z(s)}{U(s)} \quad (157)$$

kde  $Z(s)$  je pomocná veličina. [6, s. 10, 11]

Úpravou přenosu  $G(s)$  dle rovnice (157) se přenos rozdělí na 2 části, kterým odpovídají 2 diferenciální rovnice ve tvaru

$$z''(t) + \frac{R}{L} z'(t) + \frac{1}{LC} z(t) = u(t) \quad (158)$$

$$y(t) = \frac{1}{LC} z(t) \quad (159)$$

Provedeme volbu stavových proměnných rovnice (158), tedy

$$x_1(t) = z(t) \quad (160)$$

$$x_2(t) = z'(t) \quad (161)$$

Pro derivace stavových proměnných platí

$$x_1'(t) = z'(t) = x_2(t) \quad (162)$$

$$x_2'(t) = z''(t) = u(t) - \frac{1}{LC} z(t) - \frac{R}{L} z'(t) = u(t) - \frac{1}{LC} x_1(t) - \frac{R}{L} x_2(t) \quad (163)$$

Pro výstupní veličinu platí

$$y(t) = \frac{1}{LC} x_1(t) \quad (164)$$

Nyní již známe vše potřebné pro sestavení stavového modelu. Dosazením rovnic (162), (163) a (164) do stavové a výstupní rovnice dle rovnice (30) a (31) získáme stavový popis systému ve tvaru

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (165)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{LC} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (166)$$

Program MATLAB poskytuje funkci *tf2ss* pro převod přenosu na stavový popis. Výsledkem pomocí programu MATLAB je stavový popis ve tvaru

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{LC} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (167)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{LC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (168)$$

Tento stavový popis se liší od stavového popisu získaného přímou metodou. Důvodem této odlišnosti je to, že program MATLAB používá tzv. inverzní metodu, kdy jsou zaváděny stavové proměnné od  $y^{(n-1)}(t)$  po  $y(t)$ .

#### b) Metoda postupné integrace

U metody postupné integrace vycházíme z diferenciální rovnice (104). U této metody zavádíme derivace stavových proměnných, tedy

$$u_c''(t) + \frac{R}{L} u_c'(t) + \underbrace{\frac{1}{LC} u_c(t) - \frac{1}{LC} u(t)}_{x_1'(t)} = 0 \quad (169)$$

Integrací rovnice (169) získáme rovnici

$$u_c'(t) + \underbrace{\frac{R}{L} u_c(t) + x_1(t)}_{x_2'(t)} = 0 \quad (170)$$

Následně zavedeme derivaci další stavové proměnné a provedeme integraci rovnice. Integrací rovnice (170) získáme rovnici

$$u_C(t) + x_2(t) = 0 \quad (171)$$

resp. úpravou

$$u_C(t) = -x_2(t) = y(t) \quad (172)$$

Dosazením rovnice (172) do zavedených derivací stavových proměnných získáme pro derivaci první stavové proměnné

$$x_1'(t) = -\frac{1}{LC} x_2(t) - \frac{1}{LC} u(t) \quad (173)$$

a pro derivaci druhé stavové proměnné

$$x_2'(t) = -\frac{R}{L} x_2(t) + x_1(t) \quad (174)$$

Nyní již známe vše potřebné pro sestavení stavového modelu. Dosazením rovnic (172), (173) a (174) do stavové a výstupní rovnice dle rovnice (30) a (31) získáme stavový popis systému ve tvaru

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{LC} \\ 1 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{LC} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (175)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (176)$$

### c) Jordanův kanonický tvar

V případě určení stavového popisu dle Jordanova kanonického tvaru vycházíme z přenosu uvedeného v rovnici (103). Nejprve určíme póly (kořeny jmenovatele) přenosu. Jmenovatelem přenosu je kvadratický člen, póly tedy určíme řešením kvadratické rovnice

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0 \quad (177)$$

jejíž kořeny jsou

$$s_{1,2} = \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}}{2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2 C - 4L}{4L^2 C}} \quad (178)$$

Přenos uvedený v rovnici (103) rozložíme na parciální zlomky, tedy

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{\frac{1}{LC}}{\left[ s - \left( -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}} \right) \right] \left[ s - \left( -\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}} \right) \right]} \\
 &= \frac{A_1}{s - \left( -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}} \right)} + \frac{A_2}{s - \left( -\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}} \right)} \quad (179)
 \end{aligned}$$

Pomocí Heavisideova rozvoje určíme koeficienty  $A_1$  a  $A_2$ , tedy

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \left\{ \left[ s - \left( -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}} \right) \right] G(s) \right\} = \left\{ \left[ s - \left( -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}} \right) \right] \right. \\
 &\quad \left. \frac{\frac{1}{LC}}{\left[ s - \left( -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}} \right) \right] \left[ s - \left( -\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}} \right) \right]} \right\} \\
 &\quad \left. \right\}_{s = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}}} \\
 &= \frac{\frac{1}{LC}}{\left[ -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}} - \left( -\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}} \right) \right]} = \frac{\frac{1}{LC}}{\sqrt{\frac{R^2C - 4L}{L^2C}}} \quad (180)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_2 &= \left\{ \left[ s - \left( -\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}} \right) \right] G(s) \right\} = \left\{ \left[ s - \left( -\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}} \right) \right] \right. \\
 &\quad \left. \frac{\frac{1}{LC}}{\left[ s - \left( -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}} \right) \right] \left[ s - \left( -\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}} \right) \right]} \right\} \\
 &\quad \left. \right\}_{s = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}}}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{LC} \left[ -\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}} - \left( -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}} \right) \right] = -\frac{\frac{1}{LC}}{\sqrt{\frac{R^2C - 4L}{L^2C}}} \quad (181)$$

Stavové veličiny  $x_1$  až  $x_n$  pak volíme tak, aby jejich obrazy odpovídaly vztahu

$$\frac{X_i(s)}{U(s)} = \frac{1}{s - p_i} \quad (182)$$

dle [7, s. 1].

Pro první stavovou veličinu platí

$$\frac{1}{s - \left( -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}} \right)} = \frac{X_1(s)}{U(s)} \quad (183)$$

Úpravou rovnice (183) přejdeme do tvaru

$$U(s) = X_1(s) \left[ s - \left( -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}} \right) \right] \quad (184)$$

Na rovnici (184) aplikujeme zpětnou Laplaceovu transformaci a vyjádříme derivaci první stavové proměnné, pro kterou platí

$$x_1'(t) = u(t) + \left( -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}} \right) x_1(t) \quad (185)$$

Pro druhou stavovou veličinu platí

$$\frac{1}{s - \left( -\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}} \right)} = \frac{X_2(s)}{U(s)} \quad (186)$$

Úpravou rovnice (186) přejdeme do tvaru

$$U(s) = X_2(s) \left[ s - \left( -\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}} \right) \right] \quad (187)$$

Na rovnici (187) aplikujeme zpětnou Laplaceovu transformaci a vyjádříme derivaci druhé stavové proměnné, pro kterou platí

$$x_2'(t) = u(t) + \left( -\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}} \right) x_2(t) \quad (188)$$

Výstupní veličinu  $y(t)$  pak určíme dle vztahu

$$y(t) = b_n u(t) + \sum_{i=1}^n A_i x_i(t) \quad (189)$$

dle [7, s. 1].

Koeficient  $b_n$  rovnice (189) je roven 0, což je zřejmé z rovnice (103), resp. (104).

Dosazením rovnic (180) a (181) do rovnice (189) získáme

$$y(t) = \frac{\frac{1}{LC}}{\sqrt{\frac{R^2C - 4L}{L^2C}}} x_1(t) - \frac{\frac{1}{LC}}{\sqrt{\frac{R^2C - 4L}{L^2C}}} x_2(t) \quad (190)$$

Nyní již známe vše potřebné pro sestavení stavového modelu. Dosazením rovnic (185), (188) a (190) do stavové a výstupní rovnice dle rovnice (30) a (31) získáme stavový popis systému ve tvaru

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}} & 0 \\ 0 & -\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (191)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \frac{\frac{1}{LC}}{\sqrt{\frac{R^2C - 4L}{L^2C}}} & -\frac{\frac{1}{LC}}{\sqrt{\frac{R^2C - 4L}{L^2C}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (192)$$

### 11.2.2 Převod stavového popisu na přenos

Uvažujme stavový popis získaný přímou metodou dle rovnice (165) a (166). Přenos systému získáme ze stavového popisu řešením rovnice

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \frac{1}{\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})} \mathbf{C} \text{adj}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (193)$$

Pro přehlednost rozdělíme výpočet rovnice (193) na několik částí, tedy

$$s\mathbf{E} - \mathbf{A} = s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{1}{LC} & s + \frac{R}{L} \end{bmatrix} \quad (194)$$

$$\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} \quad (195)$$

$$\text{adj}(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \left( s + \frac{R}{L} \right) & (-1)^{1+2} \frac{1}{LC} \\ (-1)^{2+1} (-1) & (-1)^{2+2} s \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} s + \frac{R}{L} & 1 \\ -\frac{1}{LC} & s \end{bmatrix} \quad (196)$$

Dosazením rovnice (195) a (196) a stavových matic dle rovnice (165) a (166) do rovnice (193) získáme přenos ve tvaru

$$\mathbf{G}(s) = \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + \frac{R}{L} & 1 \\ -\frac{1}{LC} & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} = G(s) \quad (197)$$

který odpovídá přenosu systému dle rovnice (103).

Pro převod stavového popisu na přenos můžeme taktéž využít program MATLAB, který poskytuje funkci *ss2tf*.

### 11.2.3 Řešení stavové rovnice

Pro řešení stavové rovnice budeme vycházet např. ze stavového popisu v Jordanově kanonickém tvaru dle rovnice (191) a (192).

Fundamentální matici  $\Phi(t)$  vypočteme dle vztahu

$$\Phi(t) = L^{-1} \left\{ [s\mathbf{E} - \mathbf{A}]^{-1} \right\} \quad (198)$$

kde

$$[s\mathbf{E} - \mathbf{A}]^{-1} = \frac{1}{\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})} \text{adj}(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) \quad (199)$$

Pro přehlednost bude výpočet inverzní matice rozdělen do více částí, tedy



$$\begin{aligned}
s\mathbf{E} - \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}} & 0 \\ 0 & -\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} s + \frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}} & 0 \\ 0 & s + \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}} \end{bmatrix} \quad (200)
\end{aligned}$$

$$\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} \quad (201)$$

$$\text{adj}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \left( s + \frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}} \right) & 0 \\ 0 & (-1)^{2+2} \left( s + \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}} \right) \end{bmatrix}^T \\
&= \begin{bmatrix} s + \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}} & 0 \\ 0 & s + \frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}} \end{bmatrix} \quad (202)
\end{aligned}$$

Dosazením rovnic (201) a (202) do rovnice (199) získáme

$$\begin{aligned}
[s\mathbf{E} - \mathbf{A}]^{-1} &= \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \begin{bmatrix} s + \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}} & 0 \\ 0 & s + \frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{s + \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s + \frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}}} \end{bmatrix} \quad (203)
\end{aligned}$$

Dosazením rovnice (203) do rovnice (198) a provedením zpětné Laplaceovy transformace s využitím slovníku Laplaceovy transformace získáme fundamentální matici ve tvaru

$$\begin{aligned}
\Phi(t) &= L^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{s + \frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2 C - 4L}{4L^2 C}}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s + \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2 C - 4L}{4L^2 C}}} \end{bmatrix} \right\} \\
&= \begin{bmatrix} e^{-\left(\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2 C - 4L}{4L^2 C}}\right)t} & 0 \\ 0 & e^{-\left(\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2 C - 4L}{4L^2 C}}\right)t} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{204}$$

Pro další výpočet uvažujme nulové počáteční podmínky, tedy  $\mathbf{x}(0)=0$ . Za tohoto předpokladu nebude ve výsledku stavové rovnice zahrnuto řešení homogenní rovnice. Pro vyřešení stavové rovnice bude tedy řešen pouze partikulární integrál ve tvaru

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t \Phi(t-\tau) \mathbf{B} u(\tau) d\tau \tag{205}$$

Dále uvažujme vstupní funkci ve tvaru  $u(t)=1$ . Za tohoto předpokladu bude řešení výstupní rovnice pro zadané počáteční podmínky stavu  $\mathbf{x}(0)$  odpovídat přechodové funkci systému. [6, s. 54]

Dosazením fundamentální matice  $\Phi(t)$  dle rovnice (204), matice buzení  $\mathbf{B}$  z rovnice (191) a uvažované vstupní funkce do rovnice (205) získáme

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-\left(\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2 C - 4L}{4L^2 C}}\right)(t-\tau)} & 0 \\ 0 & e^{-\left(\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2 C - 4L}{4L^2 C}}\right)(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau \\
&= \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-\left(\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2 C - 4L}{4L^2 C}}\right)(t-\tau)} \\ e^{-\left(\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2 C - 4L}{4L^2 C}}\right)(t-\tau)} \end{bmatrix} d\tau
\end{aligned} \tag{206}$$

Výpočet jednotlivých prvků vektoru je z důvodu rozsáhlosti výpočtu uveden v příloze (P V).

Vektor  $\mathbf{x}(t)$  je tedy ve tvaru

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1 - e^{-\left(\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}}\right)t}}{\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}}} \\ \frac{1 - e^{-\left(\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}}\right)t}}{\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}}} \end{bmatrix} \quad (207)$$

Výstupní rovnice je pak dána řešením rovnice

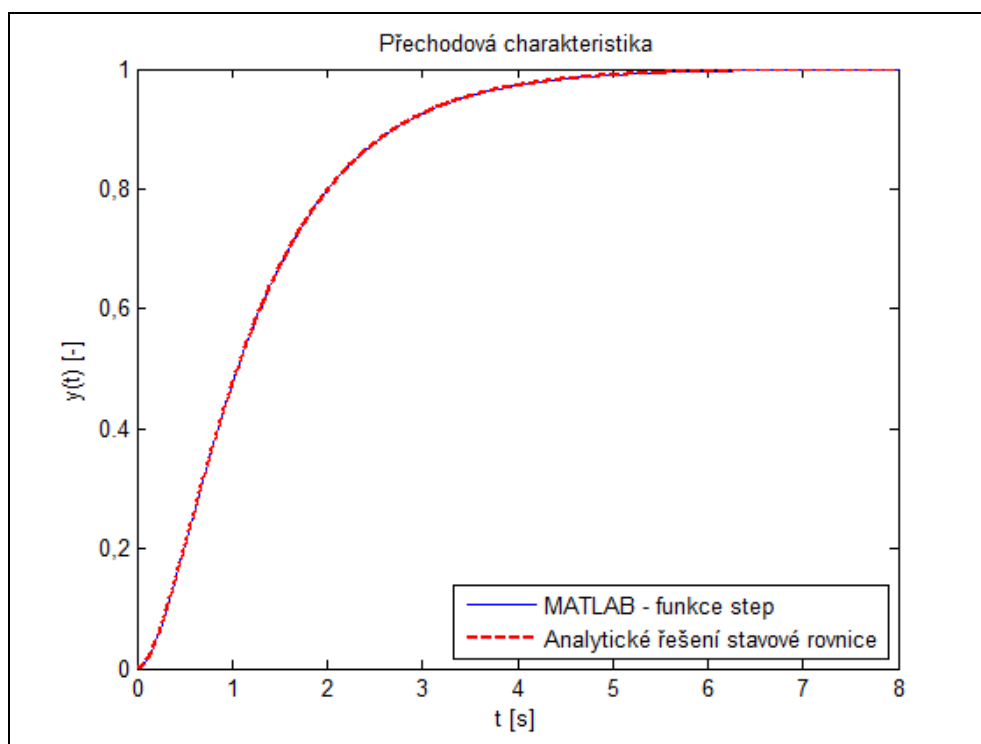
$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t) \quad (208)$$

která dosazením rovnice (207), matice  $\mathbf{C}$  a  $\mathbf{D}$  z rovnice (192), vstupní funkce  $u(t)$  a následnou úpravou přejde do tvaru

$$y(t) = 1 + \frac{1}{LC} \left[ -\frac{e^{-\left(\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}}\right)t}}{\sqrt{\frac{R^2C - 4L}{L^2C}}} + \frac{e^{-\left(\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}}\right)t}}{\sqrt{\frac{R^2C - 4L}{L^2C}}} \right] \quad (209)$$

Výpočet výstupní rovnice je z důvodu rozsáhlosti výpočtu uveden v příloze (P V).

Ověření, zda získaná výstupní rovnice  $y(t)$  skutečně odpovídá přechodové funkci systému, lze provést např. pomocí programu MATLAB grafickým znázorněním výstupní funkce  $y(t)$  s přechodovou charakteristikou pomocí funkce *step*. Toto grafické srovnání je uvedeno na obrázku (Obr. 14).



Obr. 14. Srovnání analytického řešení stavové rovnice pro vstupní funkci ve tvaru  $u(t) = 1$  a zadané počáteční podmínky stavu  $\mathbf{x}(0) = [0, 0]^T$  s přechodovou charakteristikou pomocí funkce step

#### 11.2.4 Řiditelnost a dosažitelnost

Pro ověření říditelnosti a dosažitelnosti sériového obvodu RLC budeme vycházet např. ze stavového popisu dle rovnice (165) a (166), tedy stavového popisu získaného přímou metodou. Pro ověření uvažujme parametry  $R, L, C > 0$ .

Nejprve vypočteme matici říditelnosti dle rovnice

$$\mathbf{P}_c = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (210)$$

Jelikož rozměr stavového prostoru je  $n = 2$ , rovnice (210) přejde do tvaru

$$\mathbf{P}_c = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}] \quad (211)$$

Dosazením matice  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  z rovnice (165) do rovnice (211) získáme

$$\mathbf{P}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \quad (212)$$

Jelikož hodnost matice řiditelnosti je 2, tedy hodnost matice řiditelnosti je rovna velikosti stavového prostoru, systém je řiditelný i dosažitelný.

Ověření lze provést taky výpočtem determinantu matice řiditelnosti a ověřením nenulovosti, tedy

$$\det \mathbf{P}_c = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} = -1 \neq 0 \quad (213)$$

### 11.2.5 Pozorovatelnost a rekonstruovatelnost

Pro ověření pozorovatelnosti a rekonstruovatelnosti sériového obvodu RLC budeme vycházet např. ze stavového popisu dle rovnice (165) a (166), tedy stavového popisu získaného přímou metodou. Pro ověření uvažujme parametry  $R, L, C > 0$ .

Nejprve vypočteme matici pozorovatelnosti dle rovnice

$$\mathbf{P}_o = [\mathbf{C} \quad \mathbf{CA} \quad \dots \quad \mathbf{CA}^{n-1}]^T \quad (214)$$

Jelikož rozměr stavového prostoru je  $n = 2$ , rovnice (214) přejde do tvaru

$$\mathbf{P}_o = [\mathbf{C} \quad \mathbf{CA}]^T \quad (215)$$

Dosazením matice  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{C}$  z rovnice (165) a (166) do rovnice (215) získáme

$$\mathbf{P}_o = \begin{bmatrix} \frac{1}{LC} & 0 \\ 0 & \frac{1}{LC} \end{bmatrix} \quad (216)$$

Jelikož hodnost matice pozorovatelnosti je 2, tedy hodnost matice pozorovatelnosti je rovna velikosti stavového prostoru, systém je pozorovatelný i rekonstruovatelný.

Ověření lze provést taky výpočtem determinantu matice pozorovatelnosti a ověřením nenulovosti, tedy

$$\det \mathbf{P}_o = \det \begin{bmatrix} \frac{1}{LC} & 0 \\ 0 & \frac{1}{LC} \end{bmatrix} = \frac{1}{(LC)^2} \neq 0 \quad (217)$$

### 11.2.6 Transformace stavů

Při transformaci stavů budeme vycházet např. ze stavového popisu dle rovnice (165) a (166), tedy stavového popisu získaného přímou metodou a např. stavového popisu dle rovnice (175) a (176), tedy stavového popisu získaného metodou postupné integrace.

Nejprve budeme uvažovat případ, kdy ze znalosti dvou tvarů stavových popisů (kterým odpovídá jeden přenos) budeme hledat transformační matici mezi těmito popisy. K určení transformační matice mezi dvěma tvary stavových popisů využijeme rovnici

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P}_c \overline{\mathbf{P}}_c^{-1} = \mathbf{P}_o^{-1} \overline{\mathbf{P}}_o \quad (218)$$

Vypočteme např. matici řiditelnosti  $\mathbf{P}_c$  stavového popisu získaného přímou metodou a matici řiditelnosti  $\overline{\mathbf{P}}_c$  stavového popisu získaného metodou postupné integrace. Jelikož je rozměr stavového prostoru  $n = 2$ , rovnice pro výpočet matice řiditelnosti přejde do tvaru

$$\mathbf{P}_c = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}] \quad (219)$$

Dosazením matice  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  z rovnice (165), resp. (175) získáme matici řiditelnosti ve tvaru

$$\mathbf{P}_c = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \quad (220)$$

$$\overline{\mathbf{P}}_c = [\overline{\mathbf{B}} \quad \overline{\mathbf{AB}}] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{LC} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{LC} \end{bmatrix} \quad (221)$$

Následně vypočteme inverzní matici k matici  $\overline{\mathbf{P}}_c$ , tedy

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{P}}_c^{-1} &= \frac{1}{\det \overline{\mathbf{P}}_c} \text{adj} \overline{\mathbf{P}}_c = (LC)^2 \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \left( -\frac{1}{LC} \right) & (-1)^{1+2} 0 \\ (-1)^{2+1} 0 & (-1)^{2+2} \left( -\frac{1}{LC} \right) \end{bmatrix}^T \\ &= (LC)^2 \begin{bmatrix} -\frac{1}{LC} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{LC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -LC & 0 \\ 0 & -LC \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (222)$$

Dosazením rovnice (220) a (222) do rovnice (218) a následnou úpravou získáme transformační matici ve tvaru

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -LC & 0 \\ 0 & -LC \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -LC \\ -LC & RC \end{bmatrix} \quad (223)$$

Pro ověření správnosti transformační matice  $\mathbf{Q}$  můžeme uvažovat druhý případ, tedy znalost transformační matice a stavového popisu a nalezení jiného tvaru stavového popisu. Jako známý stavový popis uvažujme např. stavový popis dle rovnice (165) a (166), tedy stavový popis získaný přímou metodou.

Pro výpočet matic nového stavového popisu využijeme rovnice (41), (42), (43) a (44). Nejprve vypočteme inverzní matici k transformační matici  $\mathbf{Q}$  dle rovnice (223), tedy

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^{-1} &= \frac{1}{\det \mathbf{Q}} \text{adj} \mathbf{Q} = \frac{1}{(LC)^2} \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} RC & (-1)^{1+2}(-LC) \\ (-1)^{2+1}(-LC) & (-1)^{2+2} 0 \end{bmatrix}^T \\ &= \frac{1}{(LC)^2} \begin{bmatrix} RC & LC \\ LC & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R}{L^2 C} & \frac{1}{LC} \\ \frac{1}{LC} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (224)$$

Dosazením matice  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  z rovnice (165), matice  $\mathbf{C}$  a  $\mathbf{D}$  z rovnice (166), rovnice (223) a (224) do rovnic (41), (42), (43) a (44) získáme matice nového tvaru stavového popisu ve tvaru

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}} &= \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{R}{L^2 C} & \frac{1}{LC} \\ \frac{1}{LC} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -LC \\ -LC & RC \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{R}{L^2 C} & \frac{1}{LC} \\ \frac{1}{LC} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{LC} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -LC \\ -LC & RC \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (225)$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{R}{L^2 C} & \frac{1}{LC} \\ \frac{1}{LC} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{LC} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (226)$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{CQ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ LC & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -LC \\ -LC & RC \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (227)$$

$$\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{D} = 0 \quad (228)$$

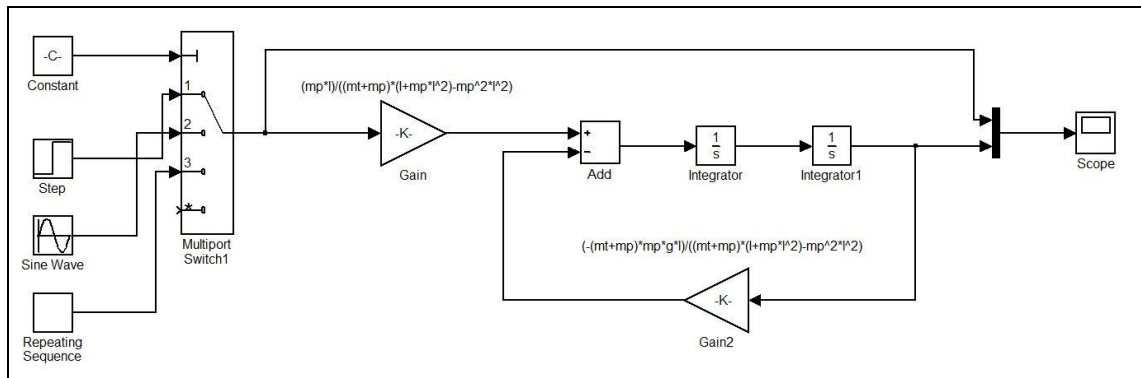
Je zřejmé, že získané matice dle rovnic (225), (226), (227) a (228) odpovídají maticím stavového popisu dle rovnice (175) a (176) získaného metodou postupné integrace.



## 12 MODEL INVERZNÍHO KYVADLA NA VOZÍKU

### 12.1 Simulační model

Ze získané diferenciální rovnice (116) můžeme již snadno sestavit simulační model systému. K tvorbě simulačního modelu inverzního kyvadla na vozíku, který je zobrazen na obrázku (Obr. 15), byl využit program MATLAB/SIMULINK.



Obr. 15. Simulace inverzního kyvadla na vozíku

Tato jednoduchá simulace umožňuje pozorovat změny výchylky  $\varphi(t)$  inverzního kyvadla na vozíku vlivem vnější síly  $F(t)$ , která působí na vozík a uvádí jej do pohybu. Průběh síly  $F(t)$  je volitelný. Pro volbu průběhu vnější síly je zde na výběr skoková funkce, harmonická funkce nebo jiný nastavitelný průběh.

### 12.2 Výpočetní část

Pro přenos dle rovnice (115) můžeme psát

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_0} \quad (229)$$

kde pro koeficienty přenosu platí

$$b_0 = m_p l \quad (230)$$

$$a_0 = -(m_t + m_p) m_p g l \quad (231)$$

$$a_2 = (m_t + m_p) (I + m_p l^2) - m_p^2 l^2 \quad (232)$$

### 12.2.1 Návrh regulátoru pomocí polynomiální syntézy pro 1DOF strukturu řízení

Hledáme regulátor, který zajišťuje stabilitu systému řízení, asymptotické sledování žádané hodnoty a kompenzaci poruch. Pro výpočet uvažujme, že vstupní veličinou regulačního obvodu bude pouze žádaná hodnota ve tvaru skokové funkce. Poruchy pro jednoduchost neuvažujeme. Za těchto předpokladů platí

$$w(t)=1, n(t)=v(t)=0 \rightarrow w(s)=\frac{1}{s}, n(s)=v(s)=1$$

Pro jmenovatele obrazu žádané veličiny, resp. poruch pak platí

$$f_w(s)=s, f_n(s)=f_v(s)=1$$

Pro polynom  $f(s)$  platí

$$f(s)=\text{NSN}(f_w(s), f_n(s), f_v(s))=\text{NSN}(s, 1, 1)=s \quad (233)$$

tedy stupeň polynomu  $f(s)$  je roven 1.

Dle doporučených stupňů polynomů platí

$$\deg q(s)=\deg a(s)+\deg f(s)-1=2+1-1=2$$

$$\deg \tilde{p}(s) \geq \deg a(s)-1=2-1=1$$

$$\deg d(s) \geq 2\deg a(s)+\deg f(s)-1=4+1-1=4$$

tedy

$$q(s)=q_2s^2+q_1s+q_0 \quad (234)$$

$$\tilde{p}(s)=\tilde{p}_1s+\tilde{p}_0 \quad (235)$$

$$p(s)=\tilde{p}(s)f(s)=p_1s^2+p_0s \quad (236)$$

$$d(s)=(s+m)^4 \quad (237)$$

Dosazením rovnic (230), (231), (232), (234), (236) a (237) do diofantické rovnice

$$a(s)p(s)+b(s)q(s)=d(s)$$

získáme

$$(a_2s^2 + a_0)(p_1s^2 + p_0s) + b_0(q_2s^2 + q_1s + q_0) = (s + m)^4 \quad (238)$$

Roznásobením rovnice (238) získáme

$$\begin{aligned} a_2p_1s^4 + a_2p_0s^3 + (a_0p_1 + b_0q_2)s^2 + (a_0p_0 + b_0q_1)s + b_0q_0 \\ = s^4 + 4s^3m + 6s^2m^2 + 4sm^3 + m^4 \end{aligned} \quad (239)$$

Porovnáním koeficientů rovnice (239) získáme

$$s^4: \quad a_2p_1 = 1$$

$$s^3: \quad a_2p_0 = 4m$$

$$s^2: \quad a_0p_1 + b_0q_2 = 6m^2$$

$$s^1: \quad a_0p_0 + b_0q_1 = 4m^3$$

$$s^0: \quad b_0q_0 = m^4$$

kde pro hledané koeficienty zpětnovazebního regulátoru platí

$$p_1 = \frac{1}{a_2} \quad (240)$$

$$p_0 = \frac{4m}{a_2} \quad (241)$$

$$q_2 = \frac{6m^2 - a_0p_1}{b_0} = \frac{6m^2 - \frac{a_0}{a_2}}{b_0} \quad (242)$$

$$q_1 = \frac{4m^3 - a_0p_0}{b_0} = \frac{4m\left(m^2 - \frac{a_0}{a_2}\right)}{b_0} \quad (243)$$

$$q_0 = \frac{m^4}{b_0} \quad (244)$$

Dosazením rovnic (240), (241), (242), (243) a (244) do vztahu pro přenos zpětnovazebního regulátoru získáme výsledný přenos zpětnovazebního regulátoru ve tvaru

$$\begin{aligned}
 G_Q(s) &= \frac{q(s)}{p(s)} = \frac{q_2 s^2 + q_1 s + q_0}{p_1 s^2 + p_0 s} = \frac{\frac{6m^2 - \frac{a_0}{a_2}}{a_2} s^2 + \frac{4m \left( m^2 - \frac{a_0}{a_2} \right)}{b_0} s + \frac{m^4}{b_0}}{\frac{1}{a_2} s^2 + \frac{4m}{a_2} s} \\
 &= \frac{a_2}{b_0} \frac{\left( 6m^2 - \frac{a_0}{a_2} \right) s^2 + 4m \left( m^2 - \frac{a_0}{a_2} \right) s + m^4}{s^2 + 4ms}
 \end{aligned} \tag{245}$$

kde

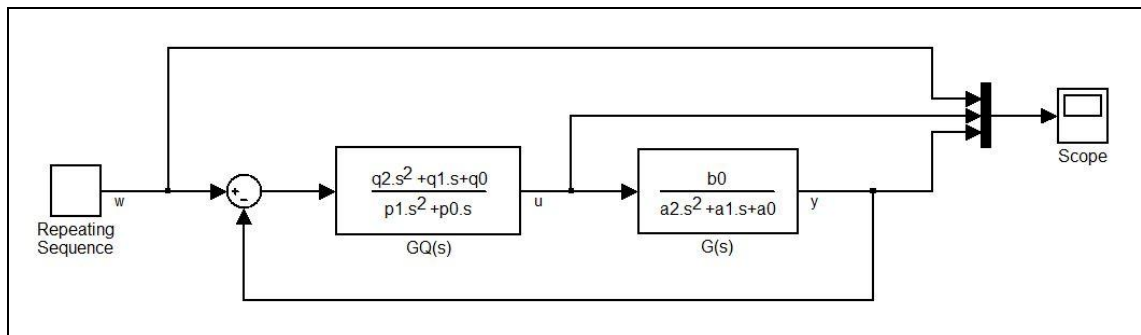
$$b_0 = m_p l$$

$$a_0 = -(m_t + m_p) m_p g l$$

$$a_2 = (m_t + m_p) (I + m_p l^2) - m_p^2 l^2$$

Pro ověření funkčnosti regulátoru využijeme program MATLAB/SIMULINK. Uvažujme následující parametry: hmotnost kyvadla  $m_p = 0,2$  kg, hmotnost vozíku  $m_t = 0,5$  kg, moment setrvačnosti  $I = 0,006$  kg.m<sup>2</sup>, gravitační zrychlení  $g = 9,8$  m.s<sup>-2</sup>, vzdálenost těžiště kyvadla  $l = 0,3$  m. V čase  $t = 1$  požadujeme skokovou změnu žádané veličiny  $w(t)$  (úhlu vychýlení kyvadla  $\varphi(t)$ ) z 0 rad na 0,05 rad ( $\approx 2,86^\circ$ ). V čase  $t = 10$  požadujeme skokovou změnu žádané veličiny  $w(t)$  (úhlu vychýlení kyvadla  $\varphi(t)$ ) z 0,05 rad na 0 rad. Funkci regulátoru budeme ověřovat pro různé hodnoty parametru  $m$ .

Sestavený model regulačního obvodu je zobrazen na obrázku (Obr. 16).



Obr. 16. Simulační obvod pro model inverzního kyvadla na vozíku s regulátorem pro 1DOF konfiguraci řízení

Grafické srovnání regulačních pochodů pro různé hodnoty parametru  $m$  je uvedeno v příloze (P VI). Z grafického srovnání je zřejmé, že regulátor funguje dle požadavků. Taktéž je zřejmé, že zvyšováním hodnoty parametru  $m$ , tedy vzdalováním pólu od hranice stability dochází ke zrychlení řízení, což odpovídá dle [1, s. 61].

### 12.2.2 Ověření stability regulačního obvodu

Na příkladu návrhu regulátoru pomocí polynomiální syntézy pro 1DOF strukturu řízení můžeme demonstrovat ověření stability výsledného regulačního obvodu.

Přenos otevřeného regulačního obvodu získáme dosazením rovnice (229) a (245) do rovnice

$$\begin{aligned}
 G_o(s) &= G_Q(s)G(s) \\
 &= \frac{b_0}{a_2s^2 + a_1s + a_0} \frac{a_2 \left(6m^2 - \frac{a_0}{a_2}\right)s^2 + 4m \left(m^2 - \frac{a_0}{a_2}\right)s + m^4}{s^2 + 4ms} \\
 &= \frac{a_2 \left(6m^2 - \frac{a_0}{a_2}\right)s^2 + 4ma_2 \left(m^2 - \frac{a_0}{a_2}\right)s + a_2m^4}{a_2s^4 + 4ma_2s^3 + a_0s^2 + 4ma_0s} \quad (246)
 \end{aligned}$$

Následně vypočteme přenos uzavřeného regulačního obvodu dosazením rovnice (246) do rovnice

$$\begin{aligned}
 &\frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} \\
 &= \frac{a_2 \left(6m^2 - \frac{a_0}{a_2}\right)s^2 + 4ma_2 \left(m^2 - \frac{a_0}{a_2}\right)s + a_2m^4}{a_2s^4 + 4ma_2s^3 + a_0s^2 + 4ma_0s} \\
 &= \frac{a_2s^4 + 4ma_2s^3 + \left[a_2 \left(6m^2 - \frac{a_0}{a_2}\right) + a_0\right]s^2 + 4m \left[a_2 \left(m^2 - \frac{a_0}{a_2}\right) + a_0\right]s + a_2m^4}{a_2s^4 + 4ma_2s^3 + a_0s^2 + 4ma_0s}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a_2 \left( 6m^2 - \frac{a_0}{a_2} \right) s^2 + 4ma_2 \left( m^2 - \frac{a_0}{a_2} \right) s + a_2 m^4}{a_2 s^4 + 4ma_2 s^3 + \left[ a_2 \left( 6m^2 - \frac{a_0}{a_2} \right) + a_0 \right] s^2 + 4m \left[ a_2 \left( m^2 - \frac{a_0}{a_2} \right) + a_0 \right] s + a_2 m^4} \\
&= \frac{\left( 6m^2 - \frac{a_0}{a_2} \right) s^2 + 4m \left( m^2 - \frac{a_0}{a_2} \right) s + m^4}{s^4 + 4ms^3 + 6m^2 s^2 + 4m^3 s + m^4} = \frac{\left( 6m^2 - \frac{a_0}{a_2} \right) s^2 + 4m \left( m^2 - \frac{a_0}{a_2} \right) s + m^4}{(s+m)^4} \quad (247)
\end{aligned}$$

Z přenosu uzavřeného regulačního obvodu dle rovnice (247) je zřejmé, že obvod je stabilní pro  $m > 0$ . Přestože je podmínka stability zřejmá, bude na tomto příkladu demonstrováno určení stability i pomocí kritérií stability.

a) Routh-Schurovo kritérium

Koeficienty jmenovatele přenosu uzavřeného regulačního obvodu dle rovnice (247) sepíšeme vedle sebe od nejvyšší po nejnižší mocninu a provedeme redukci. Dále dle schématu platí

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 4m & 6m^2 & 4m^3 & m^4 & \\
4m & 0 & 4m^3 & 0 & 0 & \left/ \cdot \left( -\frac{1}{4m} \right) \right. \\
\hline
0 & 4m & 5m^2 & 4m^3 & m^4 & \\
5m^2 & 0 & m^4 & 0 & & \left/ \cdot \left( -\frac{4}{5m} \right) \right. \\
\hline
0 & 5m^2 & \frac{16}{5}m^3 & m^4 & & 
\end{array} \quad (248)$$

Je zřejmé, že podmínky redukce jsou splněny pro  $m > 0$ . Pro  $m > 0$  je tedy uzavřený regulační obvod stabilní.

b) Hurwitzovo kritérium

Z koeficientů jmenovatele přenosu uzavřeného regulačního obvodu vytvoříme Hurwitzovu matici, tedy

$$\mathbf{H}_4 = \begin{bmatrix} 4m & 4m^3 & 0 & 0 \\ 1 & 6m^2 & m^4 & 0 \\ 0 & 4m & 4m^3 & 0 \\ 0 & 1 & 6m^2 & m^4 \end{bmatrix} \quad (249)$$

Určíme hlavní subdeterminanty Hurwitzovy matice a stanovíme podmínky jejich kladnosti, tedy

$$\det \mathbf{H}_1 = 4m \quad (250)$$

$$\det \mathbf{H}_2 = 24m^3 - 4m^3 = 20m^3 \quad (251)$$

$$\det \mathbf{H}_3 = 96m^6 - (16m^6 + 16m^6) = 64m^6 \quad (252)$$

$$\det \mathbf{H}_4 = (-1)^{4+4} m^4 \det \mathbf{H}_3 = 64m^{10} \quad (253)$$

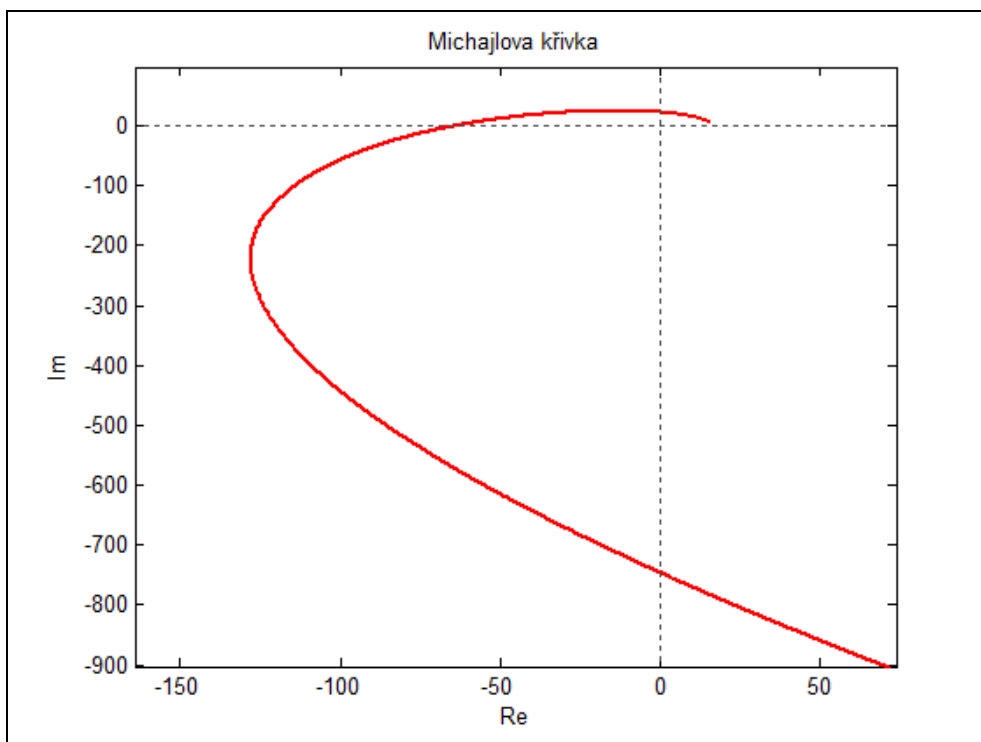
Z rovnic (250), (251), (252) a (253) je zřejmé, že kladnost hlavních subdeterminantů Hurwitzovy matice je splněna pro  $m > 0$ . Pro  $m > 0$  je tedy uzavřený regulační obvod stabilní.

#### c) Michajlovo-Leonhardovo kritérium

Dosazením  $j\omega$  za komplexní proměnnou  $s$  jmenovatele přenosu uzavřeného regulačního obvodu dle rovnice (247) získáme

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= (j\omega)^4 + 4m(j\omega)^3 + 6m^2(j\omega)^2 + 4m^3j\omega + m^4 \\ &= \omega^4 - j4m\omega^3 - 6m^2\omega^2 + j4m^3\omega + m^4 \end{aligned} \quad (254)$$

Grafickým znázorněním pro  $\omega$  od 0 do  $\infty$  získáme Michajlovu křivku. Průběh Michajlovovy křivky je znázorněn na obrázku (Obr. 17).



Obr. 17. Průběh Michajlovy křivky

Z průběhu Michajlovy křivky dle obrázku (Obr. 17) je zřejmé, že křivka začíná na kladné reálné ose a prochází kolem počátku komplexní roviny v kladném směru čtyřmi kvadranty, což odpovídá stupni jmenovatele přenosu uzavřeného regulačního obvodu. Uzavřený regulační obvod je tedy stabilní.

#### d) Nyquistovo kritérium

Pomocí Nyquistova kritéria ověříme stabilitu uzavřeného regulačního obvodu z přenosu otevřeného regulačního obvodu. Uvažujme následující parametry: hmotnost kyvadla  $m_p = 0,2 \text{ kg}$ , hmotnost vozíku  $m_t = 0,5 \text{ kg}$ , moment setrvačnosti  $I = 0,006 \text{ kg.m}^2$ , gravitační zrychlení  $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ , vzdálenost těžiště kyvadla  $l = 0,3 \text{ m}$ , parametr  $m = 2$ .

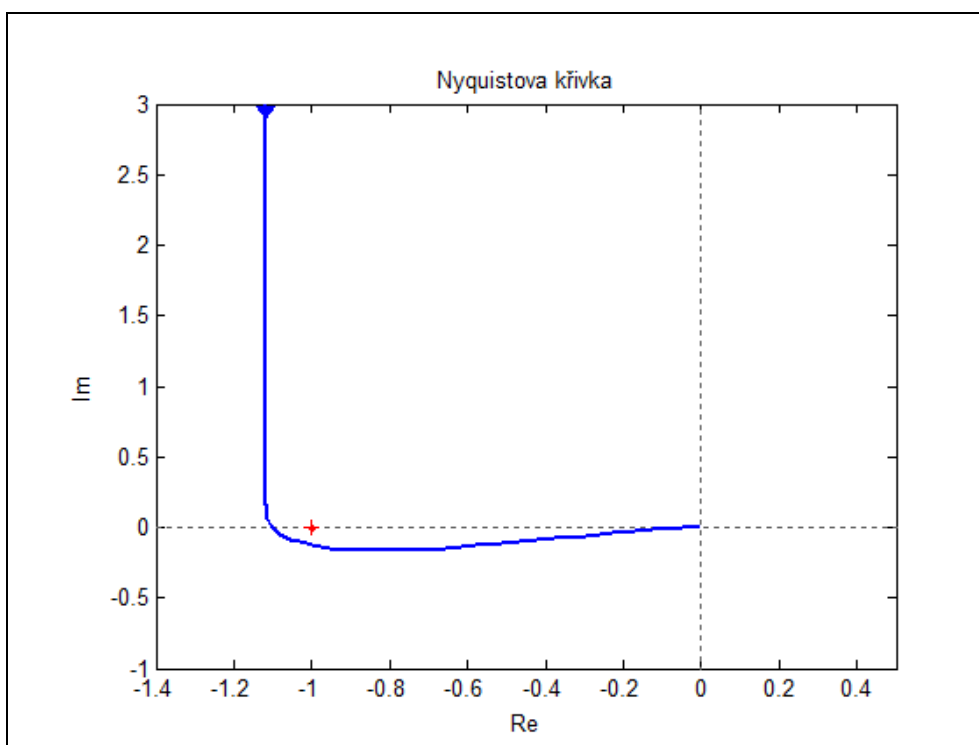
Kořeny jmenovatele přenosu (póly) uzavřeného regulačního obvodu pro zadané parametry

jsou  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = \frac{631}{113}$ ,  $p_3 = -\frac{631}{113}$ ,  $p_4 = -8$  (obecně  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = j\sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$ ,  $p_3 = -j\sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$ ,  $p_4 = -4m$ ).



Pro zadané parametry má tedy přenos uzavřeného regulačního obvodu jeden nestabilní pól ( $p_2$ ) a jeden pól na hranici stability ( $p_1$ ), který se pro Nyquistovo kritérium nepovažuje za nestabilní.

Průběh amplitudově-fázové frekvenční charakteristiky (Nyquistovy křivky) otevřeného regulačního obvodu je znázorněn na obrázku (Obr. 18).



Obr. 18. Průběh amplitudově-fázové frekvenční charakteristiky (Nyquistovy křivky) otevřeného regulačního obvodu

Z průběhu Nyquistovy křivky otevřeného regulačního obvodu dle obrázku (Obr. 18) je zřejmé, že křivka obíhá v komplexní rovině bod  $[-1; 0]$  právě jednou (za jeden oběh se považuje změna fáze o  $180^\circ$ ), což odpovídá počtu nestabilních pólů otevřeného regulačního obvodu. Uzavřený regulační obvod je tedy stabilní.

### 12.2.3 Návrh regulátoru pomocí polynomiální syntézy pro 2DOF strukturu řízení

Hledáme regulátor, který zajišťuje stabilitu systému řízení, asymptotické sledování žádané hodnoty a kompenzaci poruch. Pro výpočet uvažujeme, že vstupní veličinou regulačního obvodu bude pouze žádaná hodnota ve tvaru skokové funkce. Poruchy pro jednoduchost neuvažujeme. Za těchto předpokladů platí

$$w(t)=1, n(t)=v(t)=0 \rightarrow w(s)=\frac{1}{s}, n(s)=v(s)=1$$

Pro jmenovatele obrazu žádané veličiny, resp. poruch pak platí

$$f_w(s)=s, f_n(s)=f_v(s)=1$$

tedy stupeň polynomu  $f_w(s)$  je roven 1.

Pro polynom  $f_2(s)$  platí

$$f_2(s)=\text{NSN}(f_n(s), f_v(s))=\text{NSN}(1,1)=1 \quad (255)$$

tedy stupeň polynomu  $f_2(s)$  je roven 0.

Dle doporučených stupňů polynomů platí

$$k \geq \deg f_w(s) - \deg f_2(s) - \deg a(s) = 1 - 0 - 2 = -1, \quad k < 0 \Rightarrow k = 0$$

$$\deg q(s) = \deg a(s) + \deg f_2(s) - 1 = 2 - 0 - 1 = 1$$

$$\deg \tilde{p}(s) \geq \deg a(s) - 1 + k = 2 - 1 + 0 = 1$$

$$\deg r(s) \geq \deg f_w(s) - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$\deg d(s) \geq 2 \deg a(s) + \deg f_2(s) - 1 + k = 4 + 0 - 1 = 3$$

$$\deg t(s) = \deg d(s) - \deg f_w(s) = 3 - 1 = 2$$

tedy

$$q(s) = q_1 s + q_0 \quad (256)$$

$$\tilde{p}(s) = \tilde{p}_1 s + \tilde{p}_0 \quad (257)$$

$$p(s) = \tilde{p}(s) f_2(s) = p_1 s + p_0 \quad (258)$$

$$r(s) = r_0 \quad (259)$$

$$d(s) = (s + m)^3 \quad (260)$$

$$t(s) = t_2 s^2 + t_1 s + t_0 \quad (261)$$

Dosazením rovnic (230), (231), (232), (256), (258) a (260) do diofantické rovnice

$$a(s)p(s) + b(s)q(s) = d(s)$$

získáme

$$(a_2s^2 + a_0)(p_1s + p_0) + b_0(q_1s + q_0) = (s + m)^3 \quad (262)$$

Roznásobením rovnice (262) získáme

$$a_2p_1s^3 + a_2p_0s^2 + (a_0p_1 + b_0q_1)s + a_0p_0 + b_0q_0 = s^3 + 3s^2m + 3sm^2 + m^3 \quad (263)$$

Porovnáním koeficientů rovnice (263) získáme

$$s^3: \quad a_2p_1 = 1$$

$$s^2: \quad a_2p_0 = 3m$$

$$s^1: \quad a_0p_1 + b_0q_1 = 3m^2$$

$$s^0: \quad a_0p_0 + b_0q_0 = m^3$$

kde pro hledané koeficienty zpětnovazebního regulátoru platí

$$p_1 = \frac{1}{a_2} \quad (264)$$

$$p_0 = \frac{3m}{a_2} \quad (265)$$

$$q_1 = \frac{3m^2 - a_0p_1}{b_0} = \frac{3m^2 - \frac{a_0}{a_2}}{b_0} \quad (266)$$

$$q_0 = \frac{m^3 - a_0p_0}{b_0} = \frac{m\left(m^2 - \frac{3a_0}{a_2}\right)}{b_0} \quad (267)$$

Dosazením rovnic (264), (265), (266) a (267) do vztahu pro přenos zpětnovazebního regulátoru získáme výsledný přenos zpětnovazebního regulátoru ve tvaru

$$\begin{aligned}
 G_Q(s) &= \frac{q(s)}{p(s)} = \frac{q_1 s + q_0}{p_1 s + p_0} = \frac{\frac{3m^2 - \frac{a_0}{a_2}}{a_2} s + \frac{m \left( m^2 - \frac{3a_0}{a_2} \right)}{b_0}}{\frac{1}{a_2} s + \frac{3m}{a_2}} \\
 &= \frac{\frac{a_2}{b_0} \left( \left( 3m^2 - \frac{a_0}{a_2} \right) s + m \left( m^2 - \frac{3a_0}{a_2} \right) \right)}{s + 3m}
 \end{aligned} \tag{268}$$

kde

$$b_0 = m_p l$$

$$a_0 = -(m_t + m_p) m_p g l$$

$$a_2 = (m_t + m_p) (I + m_p l^2) - m_p^2 l^2$$

Dosazením rovnic (230), (259), (260) a (261) do diofantické rovnice

$$f_w(s)t(s) + b(s)r(s) = d(s) \tag{269}$$

získáme

$$s(t_2 s^2 + t_1 s + t_0) + b_0 r_0 = s^3 + 3s^2 m + 3sm^2 + m^3 \tag{270}$$

Jediným hledaným parametrem je parametr  $r_0$ , pro který porovnáním koeficientů platí

$$r_0 = \frac{m^3}{b_0} \tag{271}$$

Dosazením rovnic (264), (265) a (271) do vztahu pro přenos přímovazebního regulátoru získáme výsledný přenos přímovazebního regulátoru ve tvaru

$$G_R(s) = \frac{r(s)}{p(s)} = \frac{r_0}{p_1 s + p_0} = \frac{\frac{m^3}{b_0}}{\frac{1}{a_2} s + \frac{3m}{a_2}} \tag{272}$$

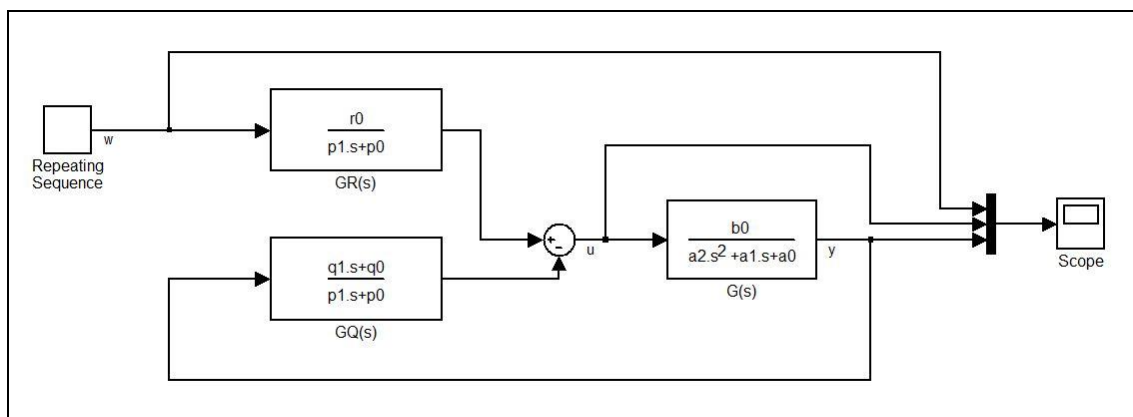
kde

$$b_0 = m_p l$$

$$a_2 = (m_t + m_p)(I + m_p l^2) - m_p^2 l^2$$

Pro ověření funkčnosti regulátoru využijeme program MATLAB/SIMULINK. Uvažujme následující parametry: hmotnost kyvadla  $m_p = 0,2 \text{ kg}$ , hmotnost vozíku  $m_t = 0,5 \text{ kg}$ , moment setrvačnosti  $I = 0,006 \text{ kg.m}^2$ , gravitační zrychlení  $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ , vzdálenost těžiště kyvadla  $l = 0,3 \text{ m}$ . V čase  $t = 1$  požadujeme skokovou změnu žádané veličiny  $w(t)$  (úhlu vychýlení kyvadla  $\varphi(t)$ ) z  $0 \text{ rad}$  na  $0,05 \text{ rad}$  ( $\approx 2,86^\circ$ ). V čase  $t = 10$  požadujeme skokovou změnu žádané veličiny  $w(t)$  (úhlu vychýlení kyvadla  $\varphi(t)$ ) z  $0,05 \text{ rad}$  na  $0 \text{ rad}$ . Funkci regulátoru budeme ověřovat pro různé hodnoty parametru  $m$ .

Sestavený model regulačního obvodu je zobrazen na obrázku (Obr. 19).



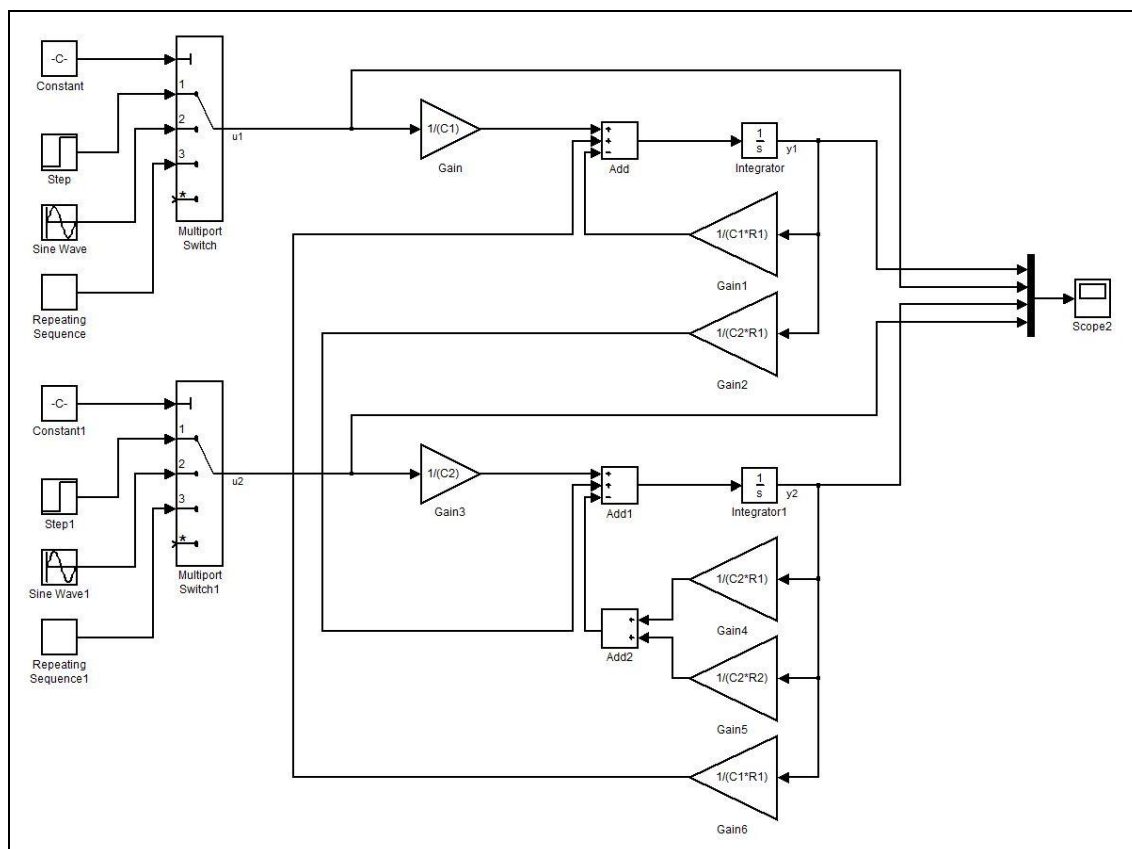
Obr. 19. Simulační obvod pro model inverzního kyvadla na vozíku s regulátorem pro 2DOF konfiguraci řízení

Grafické srovnání regulačních pochodů pro různé hodnoty parametru  $m$  je uvedeno v příloze (P VII). Z grafického srovnání je zřejmé, že regulátor funguje dle požadavků. Taktéž je zřejmé, že zvyšováním hodnoty parametru  $m$ , tedy vzdalováním pólu od hranice stability dochází ke zrychlení řízení, což odpovídá dle [1, s. 61].

## 13 MODEL SYSTÉMU HLADIN DVOU NÁDRŽÍ S KAPALINOU

### 13.1 Simulační model

Ze získané diferenciální rovnice (125) a (126) můžeme snadno sestavit simulační model systému. K tvorbě simulačního modelu systému hladin dvou nádrží s kapalinou, který je zobrazen na obrázku (Obr. 20), byl využit program MATLAB/SIMULINK.



Obr. 20. Simulace systému hladin dvou nádrží s kapalinou

Tato jednoduchá simulace umožňuje pozorovat změny výšky hladiny  $h_1(t)$  a  $h_2(t)$  1. a 2. nádrže vlivem změny objemového průtoku  $q_{i1}(t)$  a  $q_{i2}(t)$  přívodního potrubí do 1. a 2. nádrže. Průběh objemového průtoku  $q_{i1}(t)$  a  $q_{i2}(t)$  je nastavitelný. Pro volbu průběhu objemového průtoku  $q_{i1}(t)$  a  $q_{i2}(t)$  je zde na výběr skoková funkce, harmonická funkce nebo jiný nastavitelný průběh.

## 13.2 Výpočetní část

### 13.2.1 Maticový přenos (levý maticový zlomek)

Pokud provedeme Laplaceovu transformaci rovnice (125) a (126) při uvažování nulových počátečních podmínek, získáme rovnice ve tvaru

$$\left(s + \frac{1}{C_1 R_1}\right) Y_1(s) - \frac{1}{C_1 R_1} Y_2(s) = \frac{1}{C_1} U_1(s) \quad (273)$$

$$-\frac{1}{C_2 R_1} Y_1(s) + \left(s + \frac{1}{C_2 R_1} + \frac{1}{C_2 R_2}\right) Y_2(s) = \frac{1}{C_2} U_2(s) \quad (274)$$

které po přepsání do maticového tvaru přejdou do tvaru

$$\begin{bmatrix} s + \frac{1}{C_1 R_1} & -\frac{1}{C_1 R_1} \\ -\frac{1}{C_2 R_1} & s + \frac{1}{C_2 R_1} + \frac{1}{C_2 R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} \quad (275)$$

Maticový přenos (levý maticový zlomek) získáme řešením rovnice

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{A}_L^{-1}(s) \mathbf{B}_L(s) \quad (276)$$

kde

$$\mathbf{A}_L(s) = \begin{bmatrix} s + \frac{1}{C_1 R_1} & -\frac{1}{C_1 R_1} \\ -\frac{1}{C_2 R_1} & s + \frac{1}{C_2 R_1} + \frac{1}{C_2 R_2} \end{bmatrix} \quad (277)$$

$$\mathbf{B}_L(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} \end{bmatrix} \quad (278)$$

Inverzní matici  $\mathbf{A}_L^{-1}(s)$  vypočteme dle vztahu

$$\mathbf{A}_L^{-1}(s) = \frac{1}{\det \mathbf{A}_L(s)} \text{adj} \mathbf{A}_L(s) \quad (279)$$

kde

$$\begin{aligned}
\det \mathbf{A}_L(s) &= \left( s + \frac{1}{C_1 R_1} \right) \left( s + \frac{1}{C_2 R_1} + \frac{1}{C_2 R_2} \right) - \left( -\frac{1}{C_1 R_1} \right) \left( -\frac{1}{C_2 R_1} \right) \\
&= s^2 + \left( \frac{1}{C_1 R_1} + \frac{1}{C_2 R_1} + \frac{1}{C_2 R_2} \right) s + \frac{1}{C_1 R_1 C_2 R_2}
\end{aligned} \tag{280}$$

$$\begin{aligned}
\text{adj} \mathbf{A}_L(s) &= \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \left( s + \frac{1}{C_1 R_1} \right) & (-1)^{1+2} \left( -\frac{1}{C_1 R_1} \right) \\ (-1)^{2+1} \left( -\frac{1}{C_2 R_1} \right) & (-1)^{2+2} \left( s + \frac{1}{C_2 R_1} + \frac{1}{C_2 R_2} \right) \end{bmatrix}^T \\
&= \begin{bmatrix} s + \frac{1}{C_2 R_1} + \frac{1}{C_2 R_2} & \frac{1}{C_1 R_1} \\ \frac{1}{C_2 R_1} & s + \frac{1}{C_1 R_1} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{281}$$

Dosazením rovnice (280) a (281) do rovnice (279) získáme

$$\mathbf{A}_L^{-1}(s) = \frac{1}{s^2 + \left( \frac{1}{C_1 R_1} + \frac{1}{C_2 R_1} + \frac{1}{C_2 R_2} \right) s + \frac{1}{C_1 R_1 C_2 R_2}} \begin{bmatrix} s + \frac{1}{C_2 R_1} + \frac{1}{C_2 R_2} & \frac{1}{C_1 R_1} \\ \frac{1}{C_2 R_1} & s + \frac{1}{C_1 R_1} \end{bmatrix} \tag{282}$$

Maticový přenos (levý maticový zlomek) získáme dosazením rovnice (278) a (282) do rovnice (276). Tedy

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}(s) &= \frac{1}{s^2 + \left( \frac{1}{C_1 R_1} + \frac{1}{C_2 R_1} + \frac{1}{C_2 R_2} \right) s + \frac{1}{C_1 R_1 C_2 R_2}} \begin{bmatrix} s + \frac{1}{C_2 R_1} + \frac{1}{C_2 R_2} & \frac{1}{C_1 R_1} \\ \frac{1}{C_2 R_1} & s + \frac{1}{C_1 R_1} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} \end{bmatrix} &= \frac{1}{s^2 + \left( \frac{1}{C_1 R_1} + \frac{1}{C_2 R_1} + \frac{1}{C_2 R_2} \right) s + \frac{1}{C_1 R_1 C_2 R_2}} \\
&\begin{bmatrix} \left( s + \frac{1}{C_2 R_1} + \frac{1}{C_2 R_2} \right) \frac{1}{C_1} & \frac{1}{C_1 C_2 R_1} \\ \frac{1}{C_1 C_2 R_1} & \left( s + \frac{1}{C_1 R_1} \right) \frac{1}{C_1} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{283}$$



### 13.2.2 Převod levého maticového zlomku na pravý maticový zlomek

Pro převod levého maticového zlomku na pravý maticový zlomek využijeme sloupcových úprav dle schématu

$$\left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_L(s) & \mathbf{B}_L(s) \\ \hline \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{array} \right] \xrightarrow[\text{úpravy}]{\text{sloupcové}} \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{C}(s) & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{X}_P & -\mathbf{B}_P(s) \\ \mathbf{Y}_P & \mathbf{A}_P(s) \end{array} \right] \quad (284)$$

Jelikož hledáme pouze matice  $\mathbf{B}_P(s)$  a  $\mathbf{A}_P(s)$ , stačí splnit pouze pravou část schématu.

Dosazením rovnice (277) a (278) do schématu (284) a provedením sloupcových úprav získáme

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_L(s) & \mathbf{B}_L(s) \\ \hline \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{array} \right] \\ &= \left[ \begin{array}{cc|cc} s + \frac{1}{C_1 R_1} & -\frac{1}{C_1 R_1} & \frac{1}{C_1} & 0 \\ -\frac{1}{C_2 R_1} & s + \frac{1}{C_2 R_1} + \frac{1}{C_2 R_2} & 0 & \frac{1}{C_2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[\text{4. sl.} \times C_2]{\text{3. sl.} \times C_1} \\ & \left[ \begin{array}{cc|cc} s + \frac{1}{C_1 R_1} & -\frac{1}{C_1 R_1} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{C_2 R_1} & s + \frac{1}{C_2 R_1} + \frac{1}{C_2 R_2} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_2 \end{array} \right] \xrightarrow[\text{4. sl.} \times (-s) \text{ k 2. sl.}]{\text{3. sl.} \times (-s) \text{ k 1. sl.}} \end{aligned}$$

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} \frac{1}{C_1 R_1} & -\frac{1}{C_1 R_1} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{C_2 R_1} & \frac{1}{C_2 R_1} + \frac{1}{C_2 R_2} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -C_1 s & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & -C_2 s & 0 & C_2 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} 3. \text{ sl. } \times \frac{1}{C_1 R_1} \text{ k } 2. \text{ sl.} \\ 4. \text{ sl. } \times \frac{1}{C_2 R_1} \text{ k } 1. \text{ sl.} \end{array}}$$

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} \frac{1}{C_1 R_1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2 R_1} + \frac{1}{C_2 R_2} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -C_1 s & \frac{1}{R_1} & C_1 & 0 \\ \frac{1}{R_1} & -C_2 s & 0 & C_2 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} 3. \text{ sl. } \times \left(1 - \frac{1}{C_1 R_1}\right) \text{ k } 1. \text{ sl.} \\ 4. \text{ sl. } \times \left(1 - \frac{1}{C_2 R_1} - \frac{1}{C_2 R_2}\right) \text{ k } 2. \text{ sl.} \end{array}}$$

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -C_1 s + C_1 - \frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} & C_1 & 0 \\ \frac{1}{R_1} & -C_2 s + C_2 - \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} & 0 & C_2 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} 1. \text{ sl. } \times (-1) \text{ k } 3. \text{ sl.} \\ 2. \text{ sl. } \times (-1) \text{ k } 4. \text{ sl.} \end{array}}$$

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -C_1 s + C_1 - \frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} & C_1 s + \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} \\ \frac{1}{R_1} & -C_2 s + C_2 - \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_1} & C_2 s + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \end{array} \right] \quad (285)$$

Dle schématu (284) platí

$$\mathbf{B}_P(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (286)$$

$$\mathbf{A}_P(s) = \begin{bmatrix} C_1 s + \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_1} & C_2 s + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \quad (287)$$

### 13.2.3 Maticový přenos (pravý maticový zlomek)

Maticový přenos (pravý maticový zlomek) získáme řešením rovnice

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{B}_P(s) \mathbf{A}_P^{-1}(s) \quad (288)$$

Princip výpočtu je shodný s výpočtem levého maticového zlomku. Řešením rovnice (288) získáme pravý maticový zlomek, jehož tvar je shodný s tvarem levého maticového zlomku dle rovnice (283). Z důvodu rozsáhlosti výpočtu je důkaz této shody uveden v příloze (P VIII).

### 13.2.4 Stabilita systému

Pro určení stability mnohorozměrného systému vypočteme determinant matice  $\mathbf{A}_L(s)$ , resp.  $\mathbf{A}_P(s)$ . Uvažujme např. matici  $\mathbf{A}_P(s)$  dle rovnice (287), tedy

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A}_P(s) &= \det \begin{bmatrix} C_1 s + \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_1} & C_2 s + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} = C_1 C_2 s^2 + \left( \frac{C_1}{R_1} + \frac{C_1}{R_2} + \frac{C_2}{R_1} \right) s + \frac{1}{R_1 R_2} \\ &= C_1 C_2 s^2 + \left[ \frac{(C_1 + C_2) R_2 + C_1 R_1}{R_1 R_2} \right] s + \frac{1}{R_1 R_2} \end{aligned} \quad (289)$$

Pokud uvažujeme kapacity nádrží  $C_1, C_2 > 0$  a odpory ventilů  $R_1, R_2 > 0$ , je splněna nutná podmínka stability a systém je tedy stabilní.

### 13.2.5 Návrh maticového regulátoru

Při návrhu mnohorozměrného regulátoru požadujeme stabilitu systému, zajištění asymptotického sledování žádané hodnoty a kompenzaci poruch. Uvažujme, že vstupní veličinou do obvodu je pouze žádaná veličina ve tvaru skokové funkce. Pro jednoduchost neuvažujeme působení poruch.

Stabilita systému, asymptotické sledování žádané hodnoty a kompenzace poruch je zajištěna řešením rovnice

$$\mathbf{A}_L(s)\mathbf{F}(s)\mathbf{P}_{p0}(s) + \mathbf{B}_L(s)\mathbf{Q}_p(s) = \mathbf{D}(s) \quad (290)$$

kde

$$\mathbf{A}_L(s) = \begin{bmatrix} s + \frac{1}{C_1 R_1} & -\frac{1}{C_1 R_1} \\ -\frac{1}{C_2 R_1} & s + \frac{1}{C_2 R_1} + \frac{1}{C_2 R_2} \end{bmatrix} \quad (291)$$

$$\mathbf{B}_L(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} \end{bmatrix} \quad (292)$$

Jelikož uvažujeme působení pouze žádané hodnoty ve tvaru skokové funkce, matice  $\mathbf{F}(s)$  bude tedy ve tvaru

$$\mathbf{F}(s) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \quad (293)$$

Dále uvažujme obecně póly  $-m_1$ ,  $-m_2$  polynomů  $d_i$ , které se nachází na hlavní diagonále matice  $\mathbf{D}(s)$ .

Jelikož nejvyšší stupeň polynomu matice  $\mathbf{A}(s)$ , resp.  $\mathbf{A}_L(s)$  je 1, polynomy  $d_i$  budou stupně 2, tedy dvojnásobného stupně dle [8, s. 13]. Matice  $\mathbf{D}(s)$  bude tedy ve tvaru

$$\mathbf{D}(s) = \begin{bmatrix} (s + m_1)^2 & 0 \\ 0 & (s + m_2)^2 \end{bmatrix} \quad (294)$$

Matice  $\mathbf{Q}_p(s)$  a  $\mathbf{P}_{p0}(s)$  nutné pro sestavení zpětnovazebního regulátoru, jehož přenos je ve tvaru

$$\mathbf{G}_Q(s) = \mathbf{Q}_p(s)\mathbf{P}_p^{-1}(s) = \mathbf{Q}_p(s)(\mathbf{F}(s)\mathbf{P}_{p0}(s))^{-1} \quad (295)$$

získáme dosazením rovnice (291), (292) a (293) do schématu

$$\left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_L(s)\mathbf{F}(s) & \mathbf{B}_L(s) \\ \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{array} \right] \xrightarrow[\text{úpravy}]{\text{sloupcové}} \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{D}(s) & \mathbf{0} \\ \mathbf{P}_{P0}(s) & -\mathbf{B}_P(s) \\ \mathbf{Q}_P(s) & \mathbf{A}_P(s) \end{array} \right] \quad (296)$$

Jelikož hledáme pouze matice  $\mathbf{Q}_P(s)$  a  $\mathbf{P}_{P0}(s)$ , stačí splnit pouze levou část schématu.

Pomocí sloupcových úprav přejdeme do tvaru

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_L(s)\mathbf{F}(s) & \mathbf{B}_L(s) \\ \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{array} \right] \\ &= \left[ \begin{array}{cc|cc} s^2 + \frac{1}{C_1 R_1} s & -\frac{1}{C_1 R_1} s & \frac{1}{C_1} & 0 \\ -\frac{1}{C_2 R_1} s & s^2 + \left( \frac{1}{C_2 R_1} + \frac{1}{C_2 R_2} \right) s & 0 & \frac{1}{C_2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[4.\text{sl.} \times C_2]{3.\text{sl.} \times C_1} \\ & \left[ \begin{array}{cc|cc} s^2 + \frac{1}{C_1 R_1} s & -\frac{1}{C_1 R_1} s & 1 & 0 \\ -\frac{1}{C_2 R_1} s & s^2 + \left( \frac{1}{C_2 R_1} + \frac{1}{C_2 R_2} \right) s & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_2 \end{array} \right] \xrightarrow[4.\text{sl.} \times \frac{1}{C_2 R_1} \text{ k 1.sl.}]{3.\text{sl.} \times \frac{1}{C_1 R_1} \text{ k 2.sl.}} \\ & \left[ \begin{array}{cc|cc} s^2 + \frac{1}{C_1 R_1} s & 0 & 1 & 0 \\ 0 & s^2 + \left( \frac{1}{C_2 R_1} + \frac{1}{C_2 R_2} \right) s & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_1} s & C_1 & 0 \\ \frac{1}{R_1} s & 0 & 0 & C_2 \end{array} \right] \xrightarrow[2.\text{sl.}]{3.\text{sl.} \times \left[ \left( 2m_1 - \frac{1}{C_1 R_1} \right) s + m_1^2 \right] \text{ k 1.sl.}, \quad 4.\text{sl.} \times \left\{ \left[ 2m_2 - \left( \frac{1}{C_2 R_1} + \frac{1}{C_2 R_2} \right) \right] s + m_2^2 \right\}} \end{aligned}$$

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} s^2 + 2m_1s + m_1^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & s^2 + 2m_2s + m_2^2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ C_1 \left[ \left( 2m_1 - \frac{1}{C_1 R_1} \right) s + m_1^2 \right] & \frac{1}{R_1} s & C_1 & 0 \\ \frac{1}{R_1} s & C_2 \left\{ \left[ 2m_2 - \left( \frac{1}{C_2 R_1} + \frac{1}{C_2 R_2} \right) \right] s + m_2^2 \right\} & 0 & C_2 \end{array} \right] \quad (297)$$

Dle schématu (296) platí

$$\mathbf{P}_{p0}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (298)$$

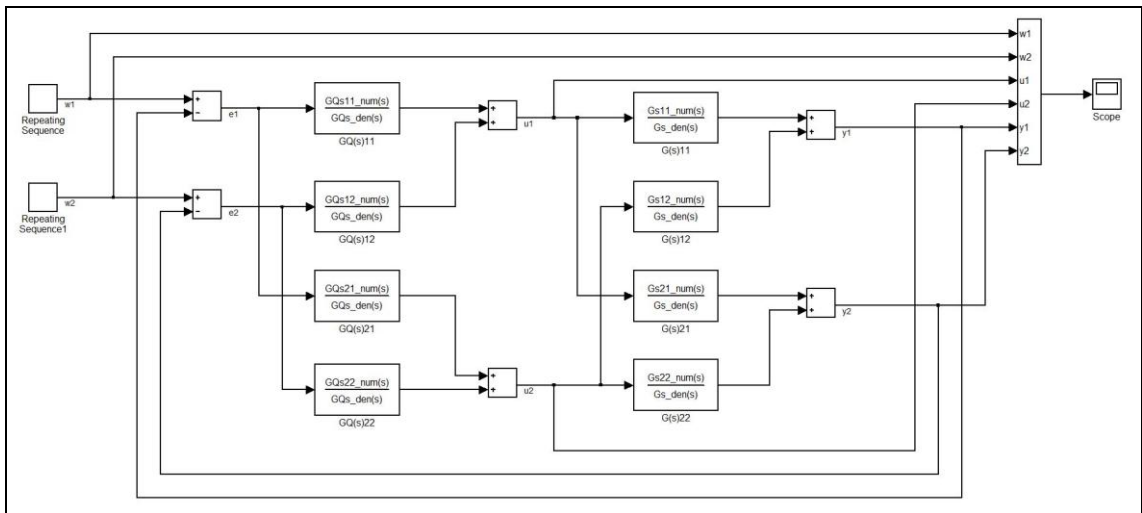
$$\mathbf{Q}_p(s) = \begin{bmatrix} C_1 \left[ \left( 2m_1 - \frac{1}{C_1 R_1} \right) s + m_1^2 \right] & \frac{1}{R_1} s \\ \frac{1}{R_1} s & C_2 \left\{ \left[ 2m_2 - \left( \frac{1}{C_2 R_1} + \frac{1}{C_2 R_2} \right) \right] s + m_2^2 \right\} \end{bmatrix} \quad (299)$$

Dosazením rovnic (293), (298) a (299) do rovnice (295) a následnou úpravou získáme výsledný přenos zpětnovazebního mnohorozměrného regulátoru ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_Q(s) &= \mathbf{Q}_p(s) (\mathbf{F}(s) \mathbf{P}_{p0}(s))^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} C_1 \left[ \left( 2m_1 - \frac{1}{C_1 R_1} \right) s + m_1^2 \right] & \frac{1}{R_1} s \\ \frac{1}{R_1} s & C_2 \left\{ \left[ 2m_2 - \left( \frac{1}{C_2 R_1} + \frac{1}{C_2 R_2} \right) \right] s + m_2^2 \right\} \end{bmatrix} \\ &\quad \left( \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} C_1 \left[ \left( 2m_1 - \frac{1}{C_1 R_1} \right) s + m_1^2 \right] & \frac{1}{R_1} s \\ \frac{1}{R_1} s & C_2 \left\{ \left[ 2m_2 - \left( \frac{1}{C_2 R_1} + \frac{1}{C_2 R_2} \right) \right] s + m_2^2 \right\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{C_1 \left[ \left( 2m_1 - \frac{1}{C_1 R_1} \right) s + m_1^2 \right]}{s} & \frac{1}{R_1} \\ \frac{1}{R_1} & \frac{C_2 \left\{ \left[ 2m_2 - \left( \frac{1}{C_2 R_1} + \frac{1}{C_2 R_2} \right) \right] s + m_2^2 \right\}}{s} \end{bmatrix} \quad (300)$$

Pro ověření funkčnosti regulátoru byl vytvořen simulační model v programu MATLAB/SIMULINK. Tento simulační model je zobrazen na obrázku (Obr. 21).



Obr. 21. Systém hladin dvou nádrží s mnohorozměrným regulátorem

Uvažujeme následující parametry: kapacita 1. nádrže  $C_1 = 0,04 \text{ m}^2$ , kapacita 2. nádrže  $C_2 = 0,02 \text{ m}^2$ , odpor ventilu mezi 1. a 2. nádrží  $R_1 = 0,3 \cdot 10^2 \text{ s.m}^2$ , odpor ventilu za 2. nádrží  $R_2 = 0,2 \cdot 10^4 \text{ s.m}^2$ . V čase  $t = 2$  požadujeme skokovou změnu žádané veličiny  $w_1(t)$  (výšky hladiny  $h_1(t)$ ) z 0 na 0,5 m. V čase  $t = 10$  požadujeme skokovou změnu žádané veličiny  $w_2(t)$  (výšky hladiny  $h_2(t)$ ) z 0 na 0,2 m. Funkci regulátoru budeme ověřovat pro různé hodnoty parametru  $m_1$  a  $m_2$ .

Grafické srovnání regulačních pochodů pro různé hodnoty parametru  $m_1$  a  $m_2$  je uvedeno v příloze (P IX). Z grafického srovnání je zřejmé, že regulátor funguje dle požadavků. Taktéž je zřejmé, že zvyšováním hodnoty parametru  $m_1$  a  $m_2$ , tedy vzdalováním pólů od hranice stability dochází ke zrychlení řízení, což odpovídá [1, s. 61].

Jelikož změna jedné žádané veličiny způsobuje změnu nejen vlastní výstupní veličiny, ale i druhého výstupu, jedná se o neautonomní systém. [1, s. 77]



## 14 SBÍRKA ÚLOH K SAMOSTATNÉMU PROCVIČOVÁNÍ

### 14.1 Úlohy k jednotlivým výpočetním metodám a postupům

- 1) Pomocí definičního vztahu Laplaceovy transformace určete Laplaceův obraz zadané funkce  $f(t)$ .

1.  $f(t) = 3$

2.  $f(t) = e^{-2t}$

3.  $f(t) = 2t$

4.  $f(t) = t^2$

5.  $f(t) = \sin(3t)$

6.  $f(t) = 1 + \frac{1}{3}t^3$

- 2) Najděte originál  $f(t)$  ze zadaného obrazu funkce  $F(s)$  pomocí zpětné Laplaceovy transformace

a) s využitím věty o residuích

b) rozkladem na parciální zlomky a využitím slovníku Laplaceovy transformace

1.  $F(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 3}$

2.  $F(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$

3.  $F(s) = \frac{s + 2}{(s + 3)(s + 4)}$

4.  $F(s) = \frac{2}{s(s + 1)^3}$

- 3) Najděte řešení zadané diferenciální rovnice s využitím přímé a zpětné Laplaceovy transformace.

1.  $y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = 1, y(0) = 0, y'(0) = 0$

2.  $y'(t) + 4y(t) = 2, y(0) = 1$

3.  $2y'(t) + 5y(t) = e^{-3t}, y(0) = 0$

- 4) Určete impulsní funkci  $i(t)$ , přechodovou funkci  $h(t)$  a počáteční a koncové hodnoty těchto funkcí ze zadané přenosové funkce  $G(s)$ .

1.  $G(s) = \frac{1}{s + 2}$

2.  $G(s) = \frac{3}{s^2 + 3s + 4}$

$$3. \quad G(s) = \frac{3}{s^2 + 6s + 6}$$

$$4. \quad G(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}$$

- 5) Určete frekvenční přenos  $G(j\omega)$  ve složkovém i exponenciálním tvaru ze zadané přenosové funkce  $G(s)$ . Dále určete počátek, konec a přibližný průběh amplitudově-fázové frekvenční charakteristiky (Nyquistovy křivky) v komplexní rovině.

$$1. \quad G(s) = \frac{2}{s+4}$$

$$2. \quad G(s) = \frac{1}{2s^2 + 2s + 1}$$

$$3. \quad G(s) = \frac{5}{1,5s^2 + 4s + 3}$$

$$4. \quad G(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}$$

- 6) Rozhodněte o stabilitě zadaného polynomu  $F(s)$  (nejprve ověřte, zda je splněna nutná podmínka stability) pomocí

- a) Routh-Schurova kritéria
- b) Hurwitzova kritéria
- c) Michajlova-Leonhardova kritéria

$$1. \quad F(s) = s^3 + 2s^2 + 3s + 4$$

$$2. \quad F(s) = 3s^4 + 5s^3 + 4s^2 + 2s + 1$$

$$3. \quad F(s) = 2s^5 + 3s^3 + 4s^2 + 4s + 1$$

$$4. \quad F(s) = 2s^5 + 4s^4 + 3s^3 + 2s^2 + 3s + 5$$

- 7) Pomocí Nyquistova kritéria stability rozhodněte, zda je uzavřený regulační obvod stabilní. Přenos otevřeného regulačního obvodu  $G_o(s) = G_R(s)G_S(s)$  určete ze znalosti přenosu regulátoru  $G_R(s)$  a přenosu regulované soustavy  $G_S(s)$ .

$$1. \quad G_R(s) = 2, \quad G_S(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$$

$$2. \quad G_R(s) = \frac{3}{s+2}, \quad G_S(s) = \frac{2}{s-1}$$

$$3. \quad G_R(s) = \frac{1}{3s+1}, \quad G_S(s) = \frac{2}{(s-2)(s-3)}$$

8) Určete vnější popis (přenos) systému ze zadaného vnitřního (stavového) popisu systému.

$$1. \quad \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$2. \quad \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \frac{5}{3} u(t)$$

$$3. \quad \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

9) Určete vnitřní (stavový) popis systému ze zadaného vnějšího popisu (přenosu) systému

a) přímou metodou

b) metodou postupné integrace

c) metodou Jordanova kanonického tvaru

$$1. \quad G(s) = \frac{1}{s+2}$$

$$2. \quad G(s) = \frac{2}{s^2 + 6s + 6}$$

$$3. \quad G(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}$$

$$4. \quad G(s) = \frac{s^2 - 3s + 5}{s^2 + 4s + 4}$$

10) Nalezněte fundamentální matici systému  $\Phi(t)$  a následně vyřešte

- homogenní stavovou rovnici (vstupní signál  $u(t)=0$ ) systému dle zadaného vnitřního (stavového) popisu a ověřte, že výstupní rovnice  $y(t)$  je pro počáteční podmínky stavu  $\mathbf{x}(0)=\mathbf{B}$  rovna impulsní funkci systému.
- nehomogenní stavovou rovnici systému dle zadaného vnitřního (stavového) popisu a ověřte, že výstupní rovnice  $y(t)$  je pro nulové počáteční podmínky stavu  $\mathbf{x}(0)$  a vstupní signál  $u(t)=1$  rovna přechodové funkci systému.

$$1. \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$2. \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 4 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 3u(t)$$

11) Ověřte říditelnost, dosažitelnost, pozorovatelnost a rekonstruovatelnost systému ze zadaného vnitřního (stavového) popisu.

$$1. \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$2. \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

12) Nalezněte transformační matici  $\mathbf{Q}$  mezi dvěma tvary vnitřního (stavového) popisu systému.

$$1. \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$2. \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

13) Nalezněte nový tvar vnitřního (stavového) popisu systému ze zadaného stavového popisu a transformační matice **Q**.

$$1. \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$2. \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

14) Nalezněte největší společný dělitel zadaných čísel, resp. polynomů pomocí zobecněného Euklidova algoritmu.

1.  $NSD(6, 27)$

2.  $NSD(34, 141)$

3.  $NSD(s+1, s+2)$

4.  $NSD(s^2 + 5s + 6, s+2)$

15) Řešte zadanou diofantickou rovnici

a) metodou neurčitých koeficientů

b) pomocí zobecněného Euklidova algoritmu

1.  $(s^2 + 5s + 6)x(s) + (s+1)y(s) = s+4$

2.  $(s^2 - 2s - 2)x(s) + (s+2)y(s) = 2s+2$

3.  $(3s^2 - 5s + 4)x(s) + (3s-1)y(s) = s^2 + 2s + 5$

16) Navrhněte regulátor pro 1DOF a 2DOF konfiguraci řízení, který zajišťuje stabilitu obvodu, asymptotické sledování žádané hodnoty a kompenzaci poruchy. Přenos řízené soustavy  $G(s)$  a veličiny (žádaná hodnota  $w(t)$ , porucha na vstupu do řízené soustavy  $v(t)$ , porucha na výstupu řízené soustavy  $n(t)$ ) vstupující do regulačního obvodu uvažujte dle zadání. Návrh proveďte pro 2 různé hodnoty  $m$  (násobného pólu  $-m$ ). Simulačně ověřte funkčnost navrženého regulátoru a srovnajte regulační pochody pro různé volby  $m$ .

1.  $G(s) = \frac{2}{3s+2}$ ,  $w(t)=1$ ,  $n(t)=v(t)=0$

2.  $G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 3}$ ,  $w(t)=n(t)=v(t)=1$

$$3. \quad G(s) = \frac{1}{s+3}, \quad w(t) = n(t) = v(t) = 1$$

17) Určete přenosovou matici  $\mathbf{G}(s) = \mathbf{A}_L^{-1}(s)\mathbf{B}_L(s)$  (levý maticový zlomek) systému, který je zadán soustavou lineárních diferenciálních rovnic. Uvažujte nulové počáteční podmínky. Dále rozhodněte o stabilitě systému.

$$1. \quad y_1'(t) + 2y_1(t) + y_2(t) = u_1(t) + 2u_2(t)$$

$$y_1(t) + y_2'(t) + 3y_2(t) = 3u_1(t) + 4u_2(t)$$

$$2. \quad 2y_1'(t) + y_1(t) + 3y_2(t) = -0,5u_1(t) + u_2(t)$$

$$2y_1(t) + y_2'(t) + 4y_2(t) = -2u_1(t) + 2u_2(t)$$

$$3. \quad y_1'(t) + 8y_1(t) + 5y_2(t) = 5u_1(t) + 6u_2(t)$$

$$7y_1(t) + y_2'(t) + 4y_2(t) = 9u_1(t) + 5u_2(t)$$

18) Nalezněte pravý maticový zlomek  $\mathbf{G}(s) = \mathbf{B}_P(s)\mathbf{A}_P^{-1}(s)$  systému ze zadaného levého maticového zlomku  $\mathbf{G}(s) = \mathbf{A}_L^{-1}(s)\mathbf{B}_L(s)$  systému.

$$1. \quad \mathbf{G}(s) = \mathbf{A}_L^{-1}(s)\mathbf{B}_L(s) = \begin{bmatrix} s+2 & 3 \\ 1 & s+4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$2. \quad \mathbf{G}(s) = \mathbf{A}_L^{-1}(s)\mathbf{B}_L(s) = \begin{bmatrix} s+3 & -2 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0,5 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$3. \quad \mathbf{G}(s) = \mathbf{A}_L^{-1}(s)\mathbf{B}_L(s) = \begin{bmatrix} s+2 & 3 \\ -3 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0,5 & 1 \\ 0,5 & 2 \end{bmatrix}$$

19) Řešte zadanou maticovou diofantickou rovnici.

$$1. \quad \begin{bmatrix} s+1 & 2 \\ 1 & s+3 \end{bmatrix} \mathbf{X}(s) + \begin{bmatrix} 0,5 & 1 \\ 0,5 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{Y}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2. \quad \mathbf{X}(s) \begin{bmatrix} s-2 & 4 \\ 3 & s+5 \end{bmatrix} + \mathbf{Y}(s) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$3. \quad \begin{bmatrix} 2s-3 & -1 \\ 3 & s-2 \end{bmatrix} \mathbf{X}(s) + \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{Y}(s) = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

20) Navrhnete dvourozměrný maticový regulátor, který zajišťuje stabilitu obvodu, asymptotické sledování žádané hodnoty a kompenzaci poruchy. Přenos řízené soustavy  $\mathbf{G}(s)$  a veličiny (žádané hodnoty  $w_1(t)$  a  $w_2(t)$ , poruchy na vstupu do řízené soustavy  $v_1(t)$  a  $v_2(t)$ , poruchy na výstupu řízené soustavy  $n_1(t)$  a  $n_2(t)$ ) vstupující do regulačního obvodu uvažujte dle zadání. Návrh proveďte pro 2 různé volby  $m_1$  a  $m_2$  (násobného pólu  $-m_1$  a  $-m_2$ ). Simulačně ověřte funkčnost navrženého regulátoru a srovnajte regulační pochody pro různé volby  $m_1$  a  $m_2$ .

$$1. \quad \mathbf{G}(s) = \mathbf{A}_L^{-1}(s) \mathbf{B}_L(s) = \begin{bmatrix} s+2 & 3 \\ 1 & s+4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$w_1(t) = w_2(t) = 1 \Rightarrow \mathbf{F}_w(s) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

$$v_1(t) = v_2(t) = n_1(t) = n_2(t) = 0 \Rightarrow \mathbf{F}_v(s) = \mathbf{F}_n(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2. \quad \mathbf{G}(s) = \mathbf{A}_L^{-1}(s) \mathbf{B}_L(s) = \begin{bmatrix} s-2 & 1 \\ 4 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$w_1(t) = w_2(t) = v_1(t) = v_2(t) = n_1(t) = n_2(t) = 1$$

$$\Rightarrow \mathbf{F}_w(s) = \mathbf{F}_v(s) = \mathbf{F}_n(s) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

## 14.2 Úlohy k jednotlivým modelům

### 14.2.1 Model mechanického oscilátoru

- 1) Mechanický oscilátor dle obrázku (Obr. 4) je tvořen tělesem o hmotnosti  $m = 2 \text{ kg}$ , tlumičem s koeficientem tlumení  $b = 2 \text{ kg.s}^{-1}$  a pružinou s tuhostí  $k = 4 \text{ kg.s}^{-1}$ . Těleso mechanického oscilátoru se nachází v rovnovážném stavu. V čase  $t = 0$  začne na těleso náhle působit síla  $F = 3 \text{ N}$ . Určete výchylku od rovnovážného stavu, ve které se těleso ustálí.
- 2) Mechanický oscilátor dle obrázku (Obr. 4) je tvořen tělesem o hmotnosti  $m = 1 \text{ kg}$ , tlumičem s koeficientem tlumení  $b = 3 \text{ kg.s}^{-1}$  a pružinou s tuhostí  $k = 2 \text{ kg.s}^{-1}$ .



Těleso mechanického oscilátoru se nachází v rovnovážném stavu. V čase  $t = 0$  je těleso posunuto o 0,2 m směrem dolů a následně uvolněno s počáteční rychlostí  $0,1 \text{ m.s}^{-1}$ , tedy  $x(0) = 0,2 \text{ m}$  a  $x'(0) = 0,1 \text{ m.s}^{-1}$ . Na těleso mechanického oscilátoru nepůsobí žádná vnější síla. Určete a následně znázorněte průběh polohy  $x(t)$  a rychlosti  $v(t) = x'(t)$  tělesa mechanického oscilátoru. Pro ověření správnosti výsledku můžete využít funkci *initial* programu MATLAB.

- 3) Určete vnější popis (přenos)  $G(s) = \frac{X(s)}{F(s)}$  mechanického oscilátoru dle obrázku

(Obr. 4). Následně určete vnitřní (stavový) popis pomocí 3 uvedených tvarů pro převod vnějšího popisu na vnitřní popis. Určete transformační matice mezi jednotlivými stavovými popisy. Uvažujte následující parametry: těleso o hmotnosti  $m = 1 \text{ kg}$ , tlumič s koeficientem tlumení  $b = 2 \text{ kg.s}^{-1}$ , pružina s tuhostí  $k = 3 \text{ kg.s}^{-1}$ .

#### 14.2.2 Model sériového obvodu RLC

- 1) Sériový obvod RLC dle obrázku (Obr. 5) je tvořen rezistorem s odporem  $R = 2 \Omega$ , cívkou s indukčností  $L = 1 \text{ H}$  a kondenzátorem s kapacitou  $C = \frac{1}{3} \text{ F}$ . V čase  $t = 0$  je k obvodu připojen zdroj napětí. Napětí zdroje je  $u(t) = U_0 \sin(\omega t)$ , kde  $U_0 = 2 \text{ V}$  a  $\omega = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ . Určete proud  $i(t)$  procházející obvodem. Pro řešení uvažujte nulové počáteční podmínky.

- 2) Sériový obvod RLC dle obrázku (Obr. 5) je tvořen rezistorem s odporem  $R = 2 \Omega$ , cívkou s indukčností  $L = 1 \cdot 10^{-3} \text{ H}$  a kondenzátorem s kapacitou  $C = 40 \cdot 10^{-12} \text{ F}$ .

Určete přenos systému  $G(s) = \frac{I(s)}{U(s)}$  a následně pomocí funkce *bode* programu

MATLAB zobrazte frekvenční charakteristiky v logaritmických souřadnicích (Bodeho křivky). Z logaritmické amplitudové frekvenční charakteristiky odečtěte rezonanční frekvenci a její hodnotu ověřte pomocí Thompsonova vztahu

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

Dále zobrazte frekvenční charakteristiky v logaritmických

souřadnicích i pro jiné hodnoty odporu  $R$  (např.  $R = 20 \Omega$  a  $R = 200 \Omega$ ) a pokuste

se vysvětlit vliv velikosti odporu  $R$  na maximum logaritmické amplitudové frekvenční charakteristiky.

- 3) Sériový obvod RLC dle obrázku (Obr. 5) je popsán vnitřním (stavovým) popisem

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

který odpovídá přenosu  $G(s) = \frac{I(s)}{U(s)}$ . Řešte homogenní stavovou rovnici (vstupní signál  $u(t)=0$ ) pro počáteční podmínky  $\mathbf{x}(0)=\mathbf{B}$ , tedy počáteční podmínky rovný matici buzení. Dokažte, že výstupní rovnice je pro vstupní signál  $u(t)=0$  a počáteční podmínky  $\mathbf{x}(0)=\mathbf{B}$  rovna impulsní funkci systému. Následně vyřešte nehomogenní stavovou rovnici, uvažujte vstupní signál  $u(t)=1$  a nulové počáteční podmínky. Dokažte, že výstupní rovnice je pro vstupní signál  $u(t)=1$  a nulové počáteční podmínky rovna přechodové funkci systému.

### 14.2.3 Model inverzního kyvadla na vozíku

- 1) Určete přenos  $G(s) = \frac{X(s)}{F(s)}$  inverzního kyvadla na vozíku dle obrázku (Obr. 6) a simulačně ověřte, jak se projeví průběh polohy vozíku při změně parametru  $m$  (násobného pólu  $-m$ ) při regulaci úhlu vychýlení kyvadla např. s regulátorem pro 1DOF konfiguraci řízení. Uvažujte následující parametry: hmotnost kyvadla  $m_p = 0,2 \text{ kg}$ , hmotnost vozíku  $m_t = 0,5 \text{ kg}$ , moment setrvačnosti  $I = 0,006 \text{ kg.m}^2$ , gravitační zrychlení  $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ , vzdálenost těžiště kyvadla  $l = 0,3 \text{ m}$ . Dále uvažujte skokovou změnu žádané hodnoty  $w(t)$  (výchyly kyvadla), poruchy zanedbávejte.
- 2) Určete stavový popis inverzního kyvadla na vozíku dle obrázku (Obr. 6) zavedením stavových proměnných  $x(t)$ ,  $\varphi(t)$  a jejich derivací  $x'(t)$ ,  $\varphi'(t)$ . Rozhodněte o říditelnosti, dosažitelnosti, pozorovatelnosti a rekonstruovatelnosti systému.

#### 14.2.4 Model systému hladin dvou nádrží s kapalinou

- 1) Určete stavový (vnitřní) popis systému dvou hladin nádrží s kapalinou dle obrázku (Obr. 7) zavedením stavových proměnných  $h_1(t)$  a  $h_2(t)$ , který následně převedte na vnější popis (přenos) systému. Parametry systému jsou: kapacita 1. nádrže  $C_1 = 1 \text{ m}^2$ , kapacita 2. nádrže  $C_2 = 2 \text{ m}^2$ , odpor ventilu mezi 1. a 2. nádrží  $R_1 = 10 \text{ s.m}^{-2}$ , odpor ventilu odtokového potrubí z 2. nádrže je  $R_2 = 5 \text{ s.m}^{-2}$ . Následně uvažujte: systém je v ustáleném stavu, tedy odchylky od ustálených hodnot průtoku a výšky hladiny  $q_{i1}(t)$ ,  $q_{i2}(t)$ ,  $h_1(t)$  a  $h_2(t)$  jsou rovny 0. V čase  $t = 0$  se na velmi krátký okamžik zvýší průtok přívodním potrubím do 2. nádrže. Zvýšení průtoku je velmi velké (uvažujte Diracovu funkci). Toto velmi velké zvýšení průtoku na velmi krátký časový okamžik způsobí náhlý vzrůst hladiny 2. nádrže, který je následován poklesem vlivem odtokového potrubí. Vzrůst hladiny 2. nádrže způsobí také vzrůst hladiny 1. nádrže. Určete čas  $t$ , kdy pro odchylky výšky hladiny od ustálených hodnot platí  $h_1(t) = h_2(t) \neq 0$ .
- 2) Uvažujte systém dvou nádrží s kapalinou dle obrázku (Obr. 7) s následujícími parametry: kapacita 1. nádrže  $C_1 = 2 \text{ m}^2$ , kapacita 2. nádrže  $C_2 = 3 \text{ m}^2$ , odpor ventilu mezi 1. a 2. nádrží  $R_1 = 0,1 \cdot 10^2 \text{ s.m}^{-2}$ , odpor ventilu odtokového potrubí z 2. nádrže je  $R_2 = 0,2 \cdot 10^2 \text{ s.m}^{-2}$ . Určete přenos systému a následně navrhnete mnohorozměrný regulátor, který zajišťuje stabilitu obvodu, asymptotické sledování žádané hodnoty a kompenzaci poruchy. Žádané hodnoty uvažujte ve tvaru lineární rampy ( $w_1(t) = w_2(t) = t$ ), poruchy uvažujte ve tvaru skokové funkce ( $v_1(t) = v_2(t) = n_1(t) = n_2(t) = 1$ ). Návrh regulátoru proveďte pro parametry  $m_1 = 1$  a  $m_2 = 2$ . Ověřte stabilitu výsledného regulačního obvodu.

## ZÁVĚR

Tato práce svým obsahem kopíruje náplň cvičení předmětu Teorie systémů, jenž je vyučován ve 3. ročníku bakalářského studia oboru Informační a řídicí technologie na Fakultě aplikované informatiky Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně.

V teoretické části práce je uvedeno shrnutí teorie k řešené problematice, jež je následně využito v praktické části k demonstraci výpočetních metod a postupů na vybraných modelech spojitých dynamických systémů. Celkem byly vybrány 4 modely systémů z různého odvětví (mechanický, elektrický a hydraulický systém) s cílem co nejnázorněji demonstrovat jednotlivé výpočetní metody a postupy. Součástí teoretické části je také popis vybraných modelů dynamických systémů, který je doplněn o matematické odvození a obrázky s vyznačením jednotlivých veličin a působících sil.

V praktické části je ke každému z modelů vytvořena simulace v programu MATLAB/SIMULINK umožňující měnit parametry daného systému a sledovat odezvu systému na různé volitelné vstupní signály. Pro snadné ovládání a nastavení simulací je ke každé simulaci vytvořen pomocný program. Následuje výpočetní část, ve které jsou na jednotlivých modelech systémů demonstrovány jednotlivé výpočetní metody a postupy nejprve obecně, následně dosazením zvolených parametrů. Jelikož je tato práce vytvářena jako studijní materiál, veškeré výpočty a odvození jsou uvedeny včetně všech kroků. V závěru praktické části je vytvořena sbírka neřešených úloh určená k samostudiu, jež obsahuje úlohy k procvičení jednotlivých výpočetních metod a postupů, ale také úlohy k jednotlivým modelům. Tyto úlohy byly vytvořeny tak, aby se jejich obtížnost postupně zvyšovala a v případě modelů zachytily charakteristickou vlastnost daného modelu. Součástí práce jsou dále programy a simulační modely vytvořené v prostředí MATLAB/SIMULINK. Tyto soubory jsou dostupné na přiloženém CD a mohou být využity například k demonstračním účelům při studiu, ale také jako pomůcka k vyřešení samostatných úkolů ve vytvořené sbírce.

## ZÁVĚR V ANGLIČTINĚ

This work replicates with its content filling tutorial of Systems Theory, which is taught in the 3rd year Bachelor's degree in Information and Control Technologies, Faculty of Applied Informatics at Tomas Bata University in Zlin.

In the theoretical part is mentioned a summary of the theory to solve problems, which is subsequently used in a practical part to demonstration of computational methods and procedures on selected models of continuous dynamic systems. Totally 4 models of systems were selected from different sectors (mechanical, electrical and hydraulic system) in order to most clearly demonstrate the individual computational methods and procedures. The theoretical part includes also a description of the selected models of dynamic systems which is complemented by mathematical derivation and pictures showing the various quantities and acting forces.

In the practical part is to each of the models created simulation in MATLAB/SIMULINK enabling changing parameters of the system and to monitor the response of the system to various optional input signals. For easy operation and setting of simulations is for each simulation created utility. The following is computational part in which are on the individual models of systems demonstrated individual computing methods and procedures in general first, then inserting the selected parameters. Since this work is designed as a study material, all calculations and derivation include all steps. In conclusion of the practical part is formed a collection of unsolved problems designed for self-study, which contains tasks to practice various computational methods and processes, but also the tasks to the individual models. These tasks were designed to gradually increase the difficulty and in case of the models captured the characteristic of the model. Part of this work are also programs and simulation models created in MATLAB/SIMULINK. These files are available on the attached CD and can be used for example for demonstration purposes in the study, but also as a tool to solve the separate tasks in the created collection.

## SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] PROKOP, Roman, Radek MATUŠŮ a Zdenka PROKOPOVÁ. *Teorie automatického řízení - lineární spojité dynamické systémy*. Vyd. 1. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, Fakulta aplikované informatiky, 2006, 102 s. ISBN 80-731-8369-2.
- [2] NAVRÁTIL, Pavel. *Automatizace - vybrané statě* [online]. Vyd. 1. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, Fakulta aplikované informatiky, 2011, 289 s. [cit. 2013-01-23]. ISBN 978-80-7318-935-8. Dostupné z: <http://dspace.k.utb.cz/handle/10563/18581>
- [3] [NAVRÁTIL, Pavel]. Laplaceova transformace. In: *Výuka na FAI* [online]. 2011-09-02, 10:52, 24 s., [cit. 2013-02-13]. Dostupné po přihlášení z: [http://vyuka.fai.utb.cz/file.php?file=%2F175%2FTeorie\\_systemu%2FMaterialy\\_Navratil.zip](http://vyuka.fai.utb.cz/file.php?file=%2F175%2FTeorie_systemu%2FMaterialy_Navratil.zip).
- [4] ŠVARC, Ivan. *Základy automatizace: Učební texty pro kombinovanou formu bakalářského studia* [online]. Brno, 2002, 102 s., [cit. 2013-02-13]. Dostupné z: <http://drogo.fme.vutbr.cz/opory/pdf/ZakladyAutomatizace.pdf>.
- [5] Stability lineárních spojitých dynamických systémů a kritéria stability. In: *Výuka na FAI* [online]. 15 s., [cit. 2013-02-18]. Dostupné po přihlášení z: [http://vyuka.fai.utb.cz/file.php?file=%2F175%2FTeorie\\_systemu%2FSTS\\_Stabilita\\_a\\_kriteria\\_stability.pdf](http://vyuka.fai.utb.cz/file.php?file=%2F175%2FTeorie_systemu%2FSTS_Stabilita_a_kriteria_stability.pdf).
- [6] [NAVRÁTIL, Pavel]. Popis systému ve stavovém prostoru. In: *Výuka na FAI* [online]. 2011-09-02, 10:52, 68 s., [cit. 2013-02-19]. Dostupné po přihlášení z: [http://vyuka.fai.utb.cz/file.php?file=%2F175%2FTeorie\\_systemu%2FMaterialy\\_Navratil.zip](http://vyuka.fai.utb.cz/file.php?file=%2F175%2FTeorie_systemu%2FMaterialy_Navratil.zip).
- [7] Jordanův kanonický tvar (JKT), transformace stavového popisu do JKT, využití JKT při řešení stavové rovnice. In: *Výuka na FAI* [online]. 15 s., [cit. 2013-02-19]. Dostupné po přihlášení z: [http://vyuka.fai.utb.cz/file.php?file=%2F175%2FTeorie\\_systemu%2FSTS\\_Jordanuv\\_kanonicky\\_tvar\\_Prevody\\_stavu.pdf](http://vyuka.fai.utb.cz/file.php?file=%2F175%2FTeorie_systemu%2FSTS_Jordanuv_kanonicky_tvar_Prevody_stavu.pdf).

- [8] [NAVRÁTIL, Pavel]. Vybrané části z algebraické teorie a její využití v automatizaci. In: *Výuka na FAI* [online]. 2011-09-12, 10:05, 40 s., [cit. 2013-02-25]. Dostupné po přihlášení z: [http://vyuka.fai.utb.cz/file.php?file=%2F175%2FTeorie\\_systemu%2FMaterialy\\_Navratil.zip](http://vyuka.fai.utb.cz/file.php?file=%2F175%2FTeorie_systemu%2FMaterialy_Navratil.zip).
- [9] PEKAŘ, Libor. Syllabus seminářů předmětu Teorie systémů. In: *Výuka na FAI* [online]. ver2010b, 61 s., [cit. 2013-02-25]. Dostupné po přihlášení z: [http://vyuka.fai.utb.cz/file.php?file=%2F175%2FTeorie\\_systemu%2FSyllabus\\_premetu\\_Teorie\\_systemu\\_ver2010b.pdf](http://vyuka.fai.utb.cz/file.php?file=%2F175%2FTeorie_systemu%2FSyllabus_premetu_Teorie_systemu_ver2010b.pdf).
- [10] [NAVRÁTIL, Pavel]. Mnohorozměrové regulační obvody. In: *Výuka na FAI* [online]. 2011-09-02, 10:52, 22 s., [cit. 2013-02-27]. Dostupné po přihlášení z: [http://vyuka.fai.utb.cz/file.php?file=%2F175%2FTeorie\\_systemu%2FMaterialy\\_Navratil.zip](http://vyuka.fai.utb.cz/file.php?file=%2F175%2FTeorie_systemu%2FMaterialy_Navratil.zip).
- [11] NOSKIEVIČ, Petr. *Modelování a identifikace systémů*. Vyd. 1. Ostrava: Montanex, 1999, iv, 276 s. ISBN 80-722-5030-2.
- [12] WOODS, Robert L. a Kent L. LAWRENCE. *Modeling and Simulation of Dynamic Systems*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1997, xx, 521 s. ISBN 01-333-7379-7.
- [13] FRANKLIN, Gene F., J. David POWELL a Abbas EMAMI-NAEINI. *Feedback Control of Dynamic Systems*. 5th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2006, xvii, 910 s. ISBN 01-314-9930-0.
- [14] OGATA, Katsuhiko. *System Dynamics*. 4th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2004, ix, 768 s. ISBN 01-314-2462-9.

## SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

### Seznam symbolů

<b>A</b>	matice systému
$A(\omega)$	amplituda frekvenčního přenosu
<b>B</b>	matice buzení
<b>C</b>	matice výstupní
<b>D</b>	matice převodu
<b>E</b>	jednotková matice
$F(s)$	obraz Laplaceovy transformace
$f(t)$	funkce reálné proměnné $t$
$G(j\omega)$	frekvenční přenos
$G(s)$	přenosová funkce
$h(t)$	přechodová funkce
$i(t)$	impulsní funkce
$j$	imaginární jednotka
$L$	operátor přímé Laplaceovy transformace
$L^{-1}$	operátor zpětné Laplaceovy transformace
$n_i$	nuly (kořeny čitatele) přenosu
<b>P<sub>c</sub></b>	matice říditelnosti
$p_i$	póly (kořeny jmenovatele) přenosu
<b>P<sub>o</sub></b>	matice pozorovatelnosti
<b>Q</b>	transformační matice
$s$	operátor komplexní proměnné
$t$	operátor času
$U(j\omega)$	Fourierův obraz vstupní veličiny



$U(s)$	Laplaceův obraz vstupní veličiny
$u(t)$	vstupní veličina
$\mathbf{u}(t)$	vektor vstupních veličin
$\mathbf{x}(t)$	vektor stavových proměnných
$Y(j\omega)$	Fourierův obraz výstupní veličiny
$Y(s)$	Laplaceův obraz výstupní veličiny
$y(t)$	výstupní veličina
$\mathbf{y}(t)$	vektor výstupních veličin
$\Phi(t)$	fundamentální matice systému
$\varphi(\omega)$	fáze frekvenčního přenosu
$\omega$	úhlová frekvence

Význam dalších symbolů je uveden přímo u jejich výskytu v textu.

### Seznam zkratek

1DOF	systém s jedním stupněm volnosti
2DOF	systém se dvěma stupni volnosti
deg	stupeň polynomu
Im	imaginární část
LSDS	lineární spojitý dynamický systém
MIMO	systém s více vstupy a více výstupy
NSD	největší společný dělitel
NSN	nejmenší společný násobek
Re	reálná část
SISO	systém s jedním vstupem a jedním výstupem

## SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr. 1.	Systém řízení s jedním stupněm volnosti - konfigurace 1DOF [8, s. 16] .....	30
Obr. 2.	Systém řízení se dvěma stupni volnosti - konfigurace 2DOF [8, s. 23] .....	32
Obr. 3.	Mnohorozměrný regulační obvod - 1DOF konfigurace systému řízení [10, s. 10] .....	37
Obr. 4.	Mechanický oscilátor [11, s. 20] .....	39
Obr. 5.	Sériový obvod RLC [12, s. 119] .....	41
Obr. 6.	Inverzní kyvadlo na vozíku [13, s. 57] .....	43
Obr. 7.	Systém hladin dvou nádrží s kapalinou [14, s. 360] .....	45
Obr. 8.	Simulace mechanického oscilátoru .....	48
Obr. 9.	Přechodová charakteristika mechanického oscilátoru .....	51
Obr. 10.	Impulsní charakteristika mechanického oscilátoru .....	53
Obr. 11.	Amplitudově-fázová frekvenční charakteristika (Nyquistova křivka) mechanického oscilátoru .....	54
Obr. 12.	Logaritmická amplitudová frekvenční charakteristika a logaritmická fázová frekvenční charakteristika (Bodeho křivky) mechanického oscilátoru .....	56
Obr. 13.	Simulace sériového obvodu RLC .....	57
Obr. 14.	Srovnání analytického řešení stavové rovnice pro vstupní funkci ve tvaru $u(t) = 1$ a zadané počáteční podmínky stavu $\mathbf{x}(0) = [0, 0]^T$ s přechodovou charakteristikou pomocí funkce step .....	68
Obr. 15.	Simulace inverzního kyvadla na vozíku .....	73
Obr. 16.	Simulační obvod pro model inverzního kyvadla na vozíku s regulátorem pro 1DOF konfiguraci řízení .....	76
Obr. 17.	Průběh Michajlovy křivky .....	80
Obr. 18.	Průběh amplitudově-fázové frekvenční charakteristiky (Nyquistovy křivky) otevřeného regulačního obvodu .....	81

---

Obr. 19. Simulační obvod pro model inverzního kyvadla na vozíku s regulátorem pro 2DOF konfiguraci řízení .....	85
Obr. 20. Simulace systému hladin dvou nádrží s kapalinou.....	86
Obr. 21. Systém hladin dvou nádrží s mnohorozměrným regulátorem .....	95

## SEZNAM PŘÍLOH

- P I      Slovník Laplaceovy transformace pro některé základní funkce
- P II     Kritéria stability
- P III    Metody pro převod přenosové funkce na stavový popis
- P IV    Výpočet přechodové funkce mechanického oscilátoru
- P V     Podrobné výpočty k řešení stavové rovnice sériového obvodu RLC
- P VI    Průběhy regulačních pochodů pro inverzní kyvadlo na vozíku s nastavením parametrů regulátoru pro 1DOF konfiguraci systému řízení
- P VII   Průběhy regulačních pochodů pro inverzní kyvadlo na vozíku s nastavením parametrů regulátoru pro 2DOF konfiguraci systému řízení
- P VIII   Výpočet maticového přenosu (pravý maticový zlomek)
- P IX    Průběhy regulačních pochodů pro systém dvou nádrží s kapalinou s mnohorozměrným regulátorem

Programy a simulační modely vytvořené v prostředí MATLAB/SIMULINK dostupné na přiloženém CD.

## PŘÍLOHA P I: SLOVNÍK LAPLACEOVY TRANSFORMACE PRO NĚKTERÉ ZÁKLADNÍ FUNKCE

	Originál $f(t)$	Obraz $F(s)$
1.	$\delta(t)$	1
2.	$\eta(t)$	$\frac{1}{s}$
3.	$t$	$\frac{1}{s^2}$
4.	$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5.	$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$
6.	$te^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
7.	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
8.	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
9.	$e^{-at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
10.	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
11.	$e^{-at} \cos(\omega t)$	$\frac{s}{(s+a)^2 + \omega^2}$

## PŘÍLOHA P II: KRITÉRIA STABILITY

### Routh-Schurovo kritérium

Koeficienty jmenovatele přenosu systému  $a_i$  sepíšeme vedle sebe od nejvyšší po nejnížší mocninu. Každý druhý koeficient zleva sepíšeme na nový řádek pod koeficient, který předchází sepisovanému koeficientu. Koeficienty na nově vytvořeném řádku vynásobíme podílem prvního a druhého koeficientu původního řádku vynásobeného číslem -1. Získané koeficienty přičteme ke koeficientům původního řádku, čímž vznikne nový řádek koeficientů, který je zredukován o první koeficient. Dále opakujeme postup dle schématu (301) až do posledních 3 koeficientů. [2, s. 152]

$$\begin{array}{cccccc}
 a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & \\
 a_{n-1} & 0 & a_{n-3} & 0 & \dots & \Bigg/ \left( -\frac{a_n}{a_{n-1}} \right) \\
 \hline
 0 & a_{n-1} & a_{n-2} - \frac{a_{n-3}a_n}{a_{n-1}} & a_{n-3} & \dots & \\
 \\
 & a_{n-2} - \frac{a_{n-3}a_n}{a_{n-1}} & 0 & \dots & \dots & \Bigg/ \left( -\frac{a_{n-1}}{a_{n-2} - \frac{a_{n-3}a_n}{a_{n-1}}} \right) \\
 \hline
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
 \hline
 & & & & & a_2, a_1, a_0 > 0
 \end{array} \quad (301)$$

Pokud jsou poslední 3 koeficienty redukce kladné, ukončíme výpočet se stanovením závěru, že jmenovatel přenosu systému má všechny kořeny ve stabilní oblasti (nutná podmínka se stává i podmínkou postačující) a systém je tedy stabilní. [2, s. 152]

Pokud se v některém řádku po redukci objeví záporný (nebo nulový) koeficient, ukončíme výpočet se stanovením závěru, že jmenovatel přenosu systému má nestabilní kořen a systém je tedy nestabilní. [2, s. 152]

### Hurwitzovo kritérium

Z koeficientů  $a_i$  jmenovatele přenosu systému vytvoříme Hurwitzovu matici

$$\mathbf{H}_n = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & a_0 \end{bmatrix} \quad (302)$$

dle [2, s. 153].

Následně vypočteme jednotlivé subdeterminanty Hurwitzovy matice dle rovnice (302) a ověříme jejich kladnost. Pokud jsou všechny hlavní subdeterminanty Hurwitzovy matice větší jak 0, daný polynom má všechny kořeny ve stabilní oblasti. [2, s. 154]

$n$ -tý subdeterminant, resp. determinant Hurwitzovy matice není třeba počítat, jelikož lze provést rozvinutí determinantu Hurwitzovy matice podle  $n$ -tého sloupce, tedy

$$\det \mathbf{H}_n = (-1)^{n+n} a_0 \det \mathbf{H}_{n-1} = a_0 \det \mathbf{H}_{n-1} \quad (303)$$

Z rovnice (303) je zřejmé, že kladnost  $n$ -tého subdeterminantu, resp. determinantu Hurwitzovy matice vyplývá z kladnosti koeficientu  $a_0$  (což je nutná podmínka stability).

### Michajlovo-Leonhardovo kritérium

O stabilitě systému rozhoduje průběh tzv. Michajlovy křivky, kterou získáme dosazením  $j\omega$  za komplexní proměnnou  $s$  jmenovatele přenosu systému a následným grafickým znázorněním pro  $\omega$  od 0 do  $\infty$ . [2, s. 155]

Pokud Michajlova křivka začíná na kladné reálné ose a prochází kolem počátku komplexní roviny v kladném směru tolika kvadranty, kolikátého stupně je jmenovatel přenosu, pak je systém stabilní. [2, s. 155]

### Nyquistovo kritérium

Pomocí Nyquistova kritéria můžeme určit stabilitu uzavřeného regulačního obvodu z přenosu otevřeného regulačního obvodu. [5, s. 11]

Pokud otevřený regulační obvod má  $k$  nestabilních pólů, uzavřený regulační obvod je stabilní, jestliže amplitudově-fázová frekvenční charakteristika (Nyquistova křivka)

otevřeného regulačního obvodu oběhne v komplexní rovině bod  $[-1; 0]$  právě  $k$ -krát. Za jeden oběh se považuje změna fáze o  $180^\circ$ , tedy  $\pi$ . [5, s. 12]

Průchod Nyquistovy křivky bodem  $[-1; 0]$  se za oběh nepovažuje. S tímto souvisí, že póly otevřeného regulačního obvodu ležící na hranici stability se pro toto kritérium nepovažují za nestabilní. [5, s. 12]

Jestliže je počet nestabilních pólů otevřeného regulačního obvodu roven 0, tedy  $k = 0$ , pro určení stability uzavřeného regulačního obvodu se používá zjednodušené Nyquistovo kritérium. Podle zjednodušeného Nyquistova kritéria je uzavřený regulační obvod stabilní, jestliže otevřený regulační obvod je stabilní a Nyquistova křivka otevřeného regulačního obvodu neobklopuje bod  $[-1; 0]$ . [5, s. 12]



## PŘÍLOHA P III: METODY PRO PŘEVOD PŘENOSOVÉ FUNKCE NA STAVOVÝ POPIS

### Přímá metoda

Pomocí přímé metody lze získat stavový popis systému, který má jednoduchou matici buzení **B**. [6, s. 10]

Uvažujme diferenciální rovnici

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) + \dots + b_0 u(t) \quad (304)$$

kde  $a_n$ ,  $b_m$  jsou konstanty,  $n$  je stupeň derivace výstupní veličiny,  $m$  je stupeň derivace vstupní veličiny (uvažujme obecně  $m = n$ ),  $y(t)$  je výstupní veličina,  $u(t)$  je vstupní veličina. [6, s. 10]

Na diferenciální rovnici aplikujeme Laplaceovu transformaci, kdy při uvažování nulových počátečních podmínek získáme přenos ve tvaru

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} \quad (305)$$

který upravíme do tvaru

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Y(s)}{Z(s)} \frac{Z(s)}{U(s)} \quad (306)$$

tedy rozdělíme přenos na 2 části, kde  $Z(s)$  je pomocná veličina. [6, s. 10]

První části přenosu odpovídá diferenciální rovnice

$$y(t) = b_n z^{(n)}(t) + b_{n-1} z^{(n-1)}(t) + \dots + b_0 z(t) \quad (307)$$

dle [6, s. 11].

První části přenosu odpovídá diferenciální rovnice

$$u(t) = a_n z^{(n)}(t) + a_{n-1} z^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 z(t) \quad (308)$$

dle [6, s. 11].

Následně provedeme volbu stavových proměnných dle rovnice (308)

$$x_1(t) = z(t)$$

$$x_2(t) = z'(t)$$

$$\vdots$$

$$x_n(t) = z^{(n-1)}(t)$$

pro jejichž derivace platí

$$x_1'(t) = z'(t) = x_2(t)$$

$$x_2'(t) = z''(t) = x_3(t)$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} x_n'(t) &= z^{(n)}(t) = \frac{1}{a_n} u(t) - \frac{a_0}{a_n} z(t) - \dots - \frac{a_{n-1}}{a_n} z^{(n-1)}(t) \\ &= \frac{1}{a_n} u(t) - \frac{a_0}{a_n} x_1(t) - \dots - \frac{a_{n-1}}{a_n} x_n(t) \end{aligned}$$

dle [6, s. 11].

Dosazením pomocné proměnné  $z(t)$  a  $n$  jejích derivací do rovnice (307) a následnou úpravou získáme výstupní rovnici ve tvaru

$$y(t) = \frac{a_n b_0 - b_n a_0}{a_n} x_1(t) + \dots + \frac{a_n b_{n-1} - b_n a_{n-1}}{a_n} x_n(t) + \frac{b_n}{a_n} u(t) \quad (309)$$

dle [6, s. 11].

Použitím přímé metody získáme stavový model ve tvaru

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}'(t) \\ x_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} u(t) \quad (310)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \frac{a_n b_0 - b_n a_0}{a_n} & \frac{a_n b_1 - b_n a_1}{a_n} & \dots & \frac{a_n b_{n-1} - b_n a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n \\ a_n \end{bmatrix} u(t) \quad (311)$$

dle [6, s. 11].

### Metoda postupné integrace

Pomocí metody postupné integrace lze získat stavový popis systému, který má jednoduchou výstupní matici **C**. Na rozdíl od metody postupné integrace budeme volit derivace stavových proměnných. [6, s. 20]

Uvažujme diferenciální rovnici dle rovnice (304). Rovnici (304) upravíme do tvaru dle rovnice (312) a zavedeme 1. derivaci stavové proměnné  $x_1'(t)$ . Tedy

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + \underbrace{a_0 y(t) - b_0 u(t)}_{x_1'(t)} = b_n u^{(n)}(t) + b_{n-1} u^{(n-1)}(t) + \dots + b_1 u'(t) \quad (312)$$

dle [6, s. 21].

Provedeme integraci rovnice (312) a zavedeme 1. derivaci stavové proměnné  $x_2'(t)$ . Tedy

$$a_n y^{(n-1)}(t) + a_{n-1} y^{(n-2)}(t) + \dots + \underbrace{a_1 y(t) - b_1 u(t) + x_1(t)}_{x_2'(t)} = b_n u^{(n-1)}(t) + b_{n-1} u^{(n-2)}(t) + \dots + b_2 u'(t) \quad (313)$$

dle [6, s. 21].

Dále pokračujeme až k zavedení 1. derivaci stavové proměnné  $x_n'(t)$ , tedy

$$a_n y'(t) + \underbrace{a_{n-1} y(t) - b_{n-1} u(t) + x_{n-1}(t)}_{x_n'(t)} = b_n u'(t) \quad (314)$$

kdy integrací rovnice (314) získáme

$$a_n y(t) + x_n(t) = b_n u(t)$$

$$y(t) = -\frac{1}{a_n} x_n(t) + \frac{b_n}{a_n} u(t) \quad (315)$$

dle [6, s. 21].

Následně sestavíme soustavu diferenciálních rovnic ze zavedených derivací stavových proměnných

$$\begin{aligned}
 x_1'(t) &= a_0 y(t) - b_0 u(t) = -\frac{a_0}{a_n} x_n(t) + \frac{a_0 b_n - a_n b_0}{a_n} u(t) \\
 x_2'(t) &= a_1 y(t) - b_1 u(t) + x_1(t) = -\frac{a_1}{a_n} x_n(t) + \frac{a_1 b_n - a_n b_1}{a_n} u(t) + x_1(t) \\
 &\vdots \\
 x_n'(t) &= a_{n-1} y(t) - b_{n-1} u(t) + x_{n-1}(t) = -\frac{a_{n-1}}{a_n} x_n(t) + \frac{a_{n-1} b_n - a_n b_{n-1}}{a_n} u(t) + x_{n-1}(t)
 \end{aligned}$$

dle [6, s. 21].

Použitím metody postupné integrace získáme stavový model ve tvaru

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}'(t) \\ x_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{a_0}{a_n} \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{a_1}{a_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & -\frac{a_{n-2}}{a_n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{a_n b_0 - b_n a_0}{a_n} \\ -\frac{a_n b_1 - b_n a_1}{a_n} \\ \vdots \\ -\frac{a_n b_{n-2} - b_n a_{n-2}}{a_n} \\ -\frac{a_n b_{n-1} - b_n a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} u(t) \quad (316)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n \\ a_n \end{bmatrix} u(t) \quad (317)$$

dle [6, s. 22].

### Jordanův kanonický tvar

Pomocí metody Jordanova kanonického tvaru lze získat stavový popis systému, který má matici systému  $\mathbf{A}$ , v případě nenásobných kořenů, tvořenou vlastními čísly (póly přenosové funkce) na hlavní diagonále. [6, s. 29]

Uvažujme diferenciální rovnici (304), ze které aplikací Laplaceovy transformace při uvažování nulových počátečních podmínek získáme přenos dle rovnice (305).

V případě nenásobných kořenů jmenovatele přenosu můžeme přenos dle rovnice (305) rozložit na parciální zlomky, tedy

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{s - p_i} + \frac{b_n}{a_n} \quad (318)$$

kde  $A_i$  jsou koeficienty Heavisideova rozvoje,  $p_i$  je  $i$ -tý pól,  $b_n$  je koeficient  $n$ -té mocniny čitatele přenosu,  $a_n$  je koeficient  $n$ -té mocniny jmenovatele přenosu. [6, s. 29]

Jednotlivé stavové proměnné  $x_i$  zvolíme např. podle vztahu

$$\begin{aligned} \frac{X_i(s)}{U(s)} &= \frac{1}{s - p_i} \\ U(s) &= X_i(s)(s - p_i) \\ x'_i(t) &= u(t) + p_i x_i(t) \end{aligned} \quad (319)$$

dle [6, s. 29].

Výstupní rovnice je pak ve tvaru

$$y(t) = \sum_{i=1}^n A_i x_i(t) + \frac{b_n}{a_n} u(t) \quad (320)$$

dle [6, s. 29].

Použitím metody Jordanova kanonického tvaru pro nenásobné kořeny jmenovatele přenosu systému získáme stavový model ve tvaru

$$\begin{bmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ \vdots \\ x'_{n-1}(t) \\ x'_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \vdots & \cdots & p_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (321)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n \\ a_n \end{bmatrix} u(t) \quad (322)$$

dle [6, s. 30].

V případě násobných kořenů jmenovatele přenosu můžeme přenos dle rovnice (305) vyjádřit ve tvaru

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_0}{a_n \prod_{i=1}^d (s - p_i)^{n_i}} \quad (323)$$

kde  $d$  je počet navzájem různých násobných pólů  $p_i$  s násobností  $n_i$ . [6, s. 30]

Rovnici (323) můžeme zapsat ve tvaru

$$G(s) = \sum_{j=1}^{n_1} \frac{A_{1j}}{(s - p_1)^{n_1-j+1}} + \sum_{j=1}^{n_2} \frac{A_{2j}}{(s - p_2)^{n_2-j+1}} + \dots + \sum_{j=1}^{n_d} \frac{A_{dj}}{(s - p_d)^{n_d-j+1}} \quad (324)$$

kde  $d$  je počet navzájem různých násobných pólů  $p_i$  s násobností  $n_i$ . [7, s. 2]

Uvažujme pouze jeden násobný pól  $p_1$ , ostatní póly budou řešeny obdobně. Pro pól  $p_1$  můžeme dle rovnice (324) psát

$$\sum_{j=1}^{n_1} \frac{A_{1j}}{(s - p_1)^{n_1-j+1}} = \frac{A_{11}}{(s - p_1)^{n_1}} + \frac{A_{12}}{(s - p_1)^{n_1-1}} + \dots + \frac{A_{1n_1}}{s - p_1} \quad (325)$$

dle [7, s. 2].

Pokud zavedeme  $n_1$ -tou stavovou proměnnou jako

$$\begin{aligned} \frac{1}{s - p_1} &= \frac{X_{n_1}(s)}{U(s)} \\ U(s) &= X_{n_1}(s)(s - p_1) \\ x'_{n_1}(t) &= u(t) + p_1 x_{n_1}(t) \end{aligned} \quad (326)$$

pak další stavovou proměnnou lze psát

$$\frac{1}{(s-p_1)^2} = \frac{1}{s-p_1} \frac{1}{s-p_1} = \frac{1}{s-p_1} \frac{X_{n_1}(s)}{U(s)} = \frac{X_{n_1-1}(s)}{U(s)}$$

$$X_{n_1}(s) = X_{n_1-1}(s)(s-p_1)$$

$$x'_{n_1-1}(t) = x_{n_1}(t) + p_1 x_{n_1-1}(t) \quad (327)$$

dle [7, s. 2].

Stejným způsobem pokračujeme v zavádění dalších stavových proměnných.

Pro přenos systému platí

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = A_{11} \frac{X_1(s)}{U(s)} + A_{12} \frac{X_2(s)}{U(s)} + \dots + A_{1n_1} \frac{X_{n_1}(s)}{U(s)} + \dots + A_{dn_d} \frac{X_n(s)}{U(s)} + \frac{b_n}{a_n} \quad (328)$$

tedy pro výstupní rovnici

$$y(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + \dots + A_{1n_1}x_{n_1}(t) + \dots + A_{dn_d}x_n(t) + \frac{b_n}{a_n}u(t) \quad (329)$$

dle [7, s. 2].

Použitím metody Jordanova kanonického tvaru pro násobné kořeny jmenovatele přenosu systému získáme stavový model ve tvaru

$$\begin{bmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ \vdots \\ x'_{n_1}(t) \\ \vdots \\ x'_{n-n_d+1}(t) \\ x'_{n-n_d+2}(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & p_1 \\ & & & \ddots \\ & & & & \ddots \\ & & & & & p_d & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & p_d & \ddots & 0 \\ & & & & & \vdots & 0 & \ddots & 1 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & p_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n_1}(t) \\ \vdots \\ x_{n-n_d+1}(t) \\ x_{n-n_d+2}(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (330)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n_1} & \cdots & A_{d1} & A_{d2} & \cdots & A_{dn_d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n_1}(t) \\ \vdots \\ x_{n-n_d+1}(t) \\ x_{n-n_d+2}(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n \\ a_n \end{bmatrix} u(t) \quad (331)$$

dle [6, s. 31].

Matice systému  $\mathbf{A}$  se skládá z tzv. Jordanových bloků umístěných v diagonále. Jednotlivé bloky odpovídají jednotlivým vlastním číslům a rozměr těchto bloků je roven násobnosti příslušného vlastního čísla. [6, s. 31]



## PŘÍLOHA P IV: VÝPOČET PŘECHODOVÉ FUNKCE MECHANICKÉHO OSCILÁTORU

$$\begin{aligned}
 h(t) &= L^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} = L^{-1} \{ H(s) \} = \sum_{k=1}^n \operatorname{res} [H(s)e^{st}]_{s=s_k} \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} [sH(s)e^{st}] + \lim_{s \rightarrow -\frac{b}{2m} + j\frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m}} \left\{ \left[ s - \left( -\frac{b}{2m} + j\frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m} \right) \right] H(s)e^{st} \right\} \\
 &\quad + \lim_{s \rightarrow -\frac{b}{2m} - j\frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m}} \left\{ \left[ s - \left( -\frac{b}{2m} - j\frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m} \right) \right] H(s)e^{st} \right\} \tag{332}
 \end{aligned}$$

kde

$$H(s) = \frac{\frac{1}{m}}{s \left[ s - \left( -\frac{b}{2m} + j\frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m} \right) \right] \left[ s - \left( -\frac{b}{2m} - j\frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m} \right) \right]}$$

Pro přehlednost budou jednotlivé limity vypočteny samostatně.

a) Výpočet  $\lim_{s \rightarrow 0} [sH(s)e^{st}]$

$$\begin{aligned}
 &\lim_{s \rightarrow 0} [sH(s)e^{st}] \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{s \frac{1}{m} e^{st}}{s \left[ s - \left( -\frac{b}{2m} + j\frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m} \right) \right] \left[ s - \left( -\frac{b}{2m} - j\frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m} \right) \right]} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{1}{m}}{\left( \frac{b}{2m} - j \frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m} \right) \left( \frac{b}{2m} + j \frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m} \right)} = \frac{\frac{1}{m}}{\frac{b^2}{4m^2} + \frac{|b^2 - 4mk|}{4m^2}} \\
&= \frac{4}{b^2 + |b^2 - 4mk|} \tag{333}
\end{aligned}$$

b) Výpočet

$$\begin{aligned}
&\lim_{s \rightarrow -\frac{b}{2m} + j \frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m}} \left\{ \left[ s - \left( -\frac{b}{2m} + j \frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m} \right) \right] H(s) e^{st} \right\} \\
&\lim_{s \rightarrow -\frac{b}{2m} + j \frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m}} \left\{ \left[ s - \left( -\frac{b}{2m} + j \frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m} \right) \right] H(s) e^{st} \right\} \\
&= \lim_{s \rightarrow -\frac{b}{2m} + j \frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m}} \left\{ \frac{\left[ s - \left( -\frac{b}{2m} + j \frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m} \right) \right] \frac{1}{m} e^{st}}{\left[ s \left[ s - \left( -\frac{b}{2m} + j \frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m} \right) \right] \left[ s - \left( -\frac{b}{2m} - j \frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m} \right) \right] \right]} \right\} \\
&= \frac{\frac{1}{m} e^{\left( -\frac{b}{2m} + j \frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m} \right) t}}{\left( -\frac{b}{2m} + j \frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m} \right) \left[ \left( -\frac{b}{2m} + j \frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m} \right) - \left( -\frac{b}{2m} - j \frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m} \right) \right]} \\
&= \frac{\frac{1}{m} e^{\left( -\frac{b}{2m} + j \frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m} \right) t}}{\left( -\frac{b}{2m} + j \frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m} \right) j \frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{m}} = \frac{\frac{1}{m} e^{\left( -\frac{b}{2m} + j \frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m} \right) t}}{-\frac{|b^2 - 4mk|}{2m^2} - j \frac{b \sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m^2}}
\end{aligned}$$

$$= -\frac{2me^{\left(-\frac{b}{2m} + j\frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m}\right)t}}{|b^2 - 4mk| + jb\sqrt{|b^2 - 4mk|}} \quad (334)$$

c) Výpočet

$$\lim_{s \rightarrow -\frac{b}{2m} - j\frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m}} \left\{ \left[ s - \left( -\frac{b}{2m} - j\frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m} \right) \right] H(s) e^{st} \right\}$$

$$\lim_{s \rightarrow -\frac{b}{2m} - j\frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m}} \left\{ \left[ s - \left( -\frac{b}{2m} - j\frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m} \right) \right] H(s) e^{st} \right\}$$

$$= \lim_{s \rightarrow -\frac{b}{2m} - j\frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m}} \left\{ \frac{\left[ s - \left( -\frac{b}{2m} - j\frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m} \right) \right] \frac{1}{m} e^{st}}{s \left[ s - \left( -\frac{b}{2m} + j\frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m} \right) \right] \left[ s - \left( -\frac{b}{2m} - j\frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m} \right) \right]} \right\}$$

$$= \frac{\frac{1}{m} e^{\left(-\frac{b}{2m} - j\frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m}\right)t}}{\left( -\frac{b}{2m} - j\frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m} \right) \left[ \left( -\frac{b}{2m} - j\frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m} \right) - \left( -\frac{b}{2m} + j\frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m} \right) \right]}$$

$$= \frac{\frac{1}{m} e^{\left(-\frac{b}{2m} - j\frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m}\right)t}}{\left( -\frac{b}{2m} - j\frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m} \right) \left( -j\frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{m} \right)} = \frac{\frac{1}{m} e^{\left(-\frac{b}{2m} - j\frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m}\right)t}}{-\frac{|b^2 - 4mk|}{2m^2} + j\frac{b\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m^2}}$$

$$= \frac{2me^{\left(-\frac{b}{2m} - j\frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m}\right)t}}{-|b^2 - 4mk| + jb\sqrt{|b^2 - 4mk|}} \quad (335)$$

Dosazením rovnic (333), (334) a (335) do rovnice (332) a následnou úpravou získáme

$$\begin{aligned}
h(t) &= \frac{4}{b^2 + |b^2 - 4mk|} - \frac{2me^{\left(-\frac{b}{2m} + j\frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m}\right)t}}{|b^2 - 4mk| + jb\sqrt{|b^2 - 4mk|}} + \frac{2me^{\left(-\frac{b}{2m} - j\frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m}\right)t}}{-|b^2 - 4mk| + jb\sqrt{|b^2 - 4mk|}} \\
&= \frac{4}{b^2 + |b^2 - 4mk|} - \frac{2me^{-\frac{b}{2m}t} e^{j\frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m}t}}{|b^2 - 4mk| + jb\sqrt{|b^2 - 4mk|}} + \frac{2me^{-\frac{b}{2m}t} e^{-j\frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m}t}}{-|b^2 - 4mk| + jb\sqrt{|b^2 - 4mk|}} \\
&= \frac{4}{b^2 + |b^2 - 4mk|} + 2me^{-\frac{b}{2m}t} \left[ -\frac{e^{j\frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m}t}}{|b^2 - 4mk| + jb\sqrt{|b^2 - 4mk|}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{e^{-j\frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m}t}}{-|b^2 - 4mk| + jb\sqrt{|b^2 - 4mk|}} \right] = \frac{4}{b^2 + |b^2 - 4mk|} \\
&\quad + 2me^{-\frac{b}{2m}t} \left[ \frac{-e^{j\frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m}t} \left( -|b^2 - 4mk| + jb\sqrt{|b^2 - 4mk|} \right)}{-|b^2 - 4mk|^2 - b^2|b^2 - 4mk|} \right. \\
&\quad \left. + \frac{e^{-j\frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m}t} \left( |b^2 - 4mk| + jb\sqrt{|b^2 - 4mk|} \right)}{-|b^2 - 4mk|^2 - b^2|b^2 - 4mk|} \right] = \frac{4}{b^2 + |b^2 - 4mk|} \\
&\quad - \frac{2me^{-\frac{b}{2m}t}}{|b^2 - 4mk|(|b^2 - 4mk| + b^2)} \left[ -e^{j\frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m}t} \left( -|b^2 - 4mk| \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + jb\sqrt{|b^2 - 4mk|} \right) + e^{-j\frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m}t} \left( |b^2 - 4mk| + jb\sqrt{|b^2 - 4mk|} \right) \right]
\end{aligned}$$

Aplikací Eulerova vztahu a následnou úpravou přejdeme do tvaru

$$\begin{aligned}
h(t) &= \frac{4}{b^2 + |b^2 - 4mk|} - \frac{2me^{-\frac{b}{2m}t}}{|b^2 - 4mk|(|b^2 - 4mk| + b^2)} \left\{ - \left[ \cos \left( \frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m} t \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + j \sin \left( \frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m} t \right) \right] \left( -|b^2 - 4mk| + jb\sqrt{|b^2 - 4mk|} \right) + \left[ \cos \left( \frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m} t \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - j \sin \left( \frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m} t \right) \right] \left( |b^2 - 4mk| + jb\sqrt{|b^2 - 4mk|} \right) \right\} = \frac{4}{b^2 + |b^2 - 4mk|} \\
&\quad - \frac{2me^{-\frac{b}{2m}t}}{|b^2 - 4mk|(|b^2 - 4mk| + b^2)} \left[ 2|b^2 - 4mk| \cos \left( \frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m} t \right) \right. \\
&\quad \left. + 2b\sqrt{|b^2 - 4mk|} \sin \left( \frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m} t \right) \right] = \frac{4}{b^2 + |b^2 - 4mk|} \\
&\quad - \frac{4me^{-\frac{b}{2m}t}}{|b^2 - 4mk| + b^2} \left[ \cos \left( \frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m} t \right) + \frac{b}{\sqrt{|b^2 - 4mk|}} \sin \left( \frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m} t \right) \right] \\
&= \frac{4m}{b^2 + |b^2 - 4mk|} \left\{ 1 - e^{-\frac{b}{2m}t} \left[ \cos \left( \frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m} t \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{b}{\sqrt{|b^2 - 4mk|}} \sin \left( \frac{\sqrt{|b^2 - 4mk|}}{2m} t \right) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{336}$$

## PŘÍLOHA P V: PODROBNÉ VÝPOČTY K ŘEŠENÍ STAVOVÉ ROVNICE SÉRIOVÉHO OBVODU RLC

a) Výpočet prvku  $x_1(t)$  vektoru  $\mathbf{x}(t)$

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= \int_0^t e^{-\left(\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}\right)(t-\tau)} d\tau = \int_0^t e^{-\left(\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}\right)t} e^{\left(\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}\right)\tau} d\tau \\
 &= e^{-\left(\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}\right)t} \int_0^t e^{\left(\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}\right)\tau} d\tau \\
 &= \frac{e^{-\left(\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}\right)t}}{\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}} \left[ e^{\left(\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}\right)\tau} \right]_0^t \\
 &= \frac{e^{-\left(\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}\right)t}}{\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}} \left( e^{\left(\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}\right)t} - 1 \right) \\
 &= \frac{1 - e^{-\left(\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}\right)t}}{\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}} \tag{337}
 \end{aligned}$$

b) Výpočet prvku  $x_2(t)$  vektoru  $\mathbf{x}(t)$

$$\begin{aligned}
 x_2(t) &= \int_0^t e^{-\left(\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}\right)(t-\tau)} d\tau = \int_0^t e^{-\left(\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}\right)t} e^{\left(\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}\right)\tau} d\tau \\
 &= e^{-\left(\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}\right)t} \int_0^t e^{\left(\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}\right)\tau} d\tau \\
 &= \frac{e^{-\left(\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}\right)t}}{\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}} \left[ e^{\left(\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}\right)\tau} \right]_0^t
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{-\left(\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}\right)t}}{\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}} \left( e^{\left(\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}\right)t} - 1 \right) \\
&= \frac{1 - e^{-\left(\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}\right)t}}{\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}}
\end{aligned} \tag{338}$$

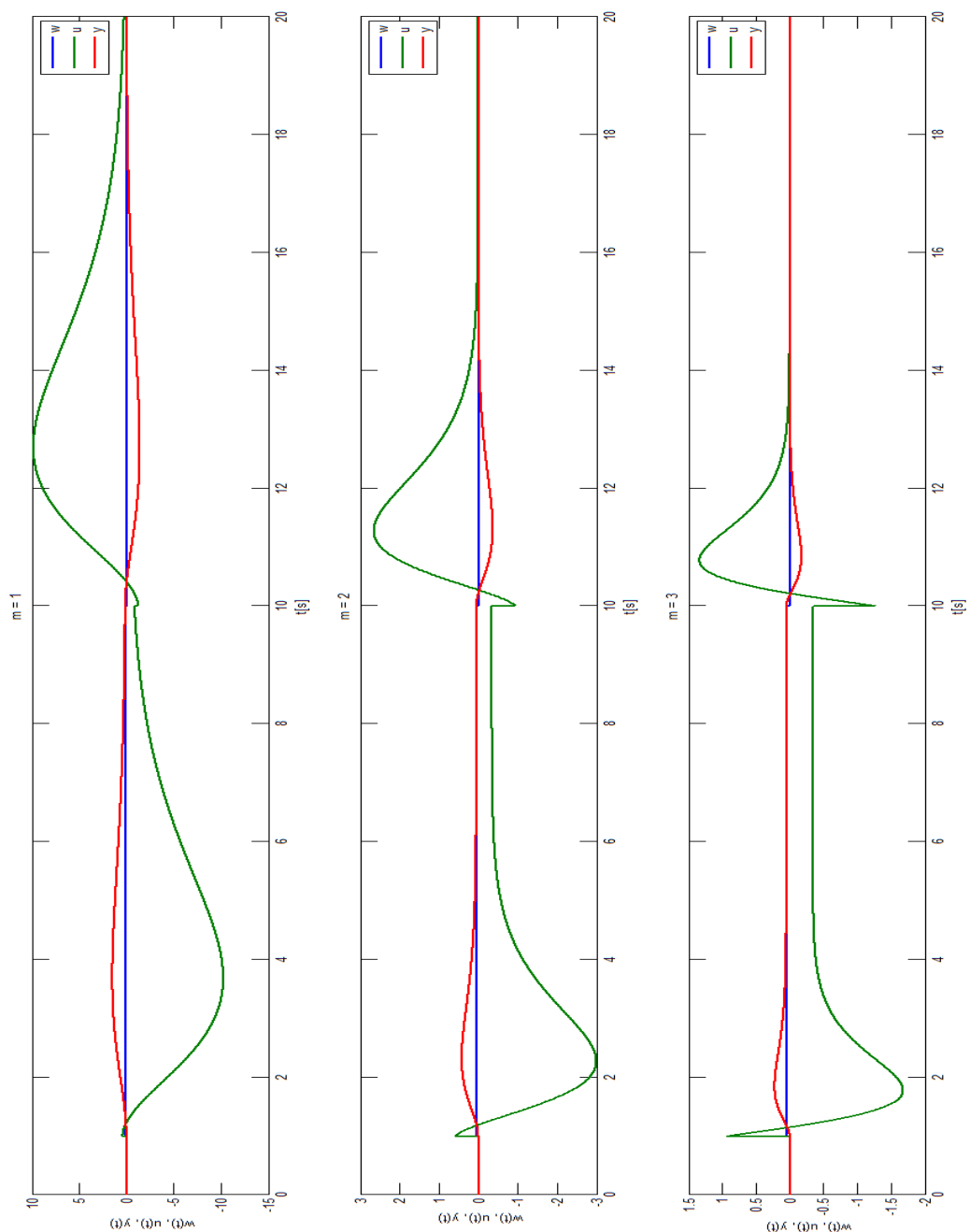
c) Výpočet výstupní rovnice  $y(t)$

$$\begin{aligned}
y(t) &= \left[ \frac{\frac{1}{LC}}{\sqrt{\frac{R^2C-4L}{L^2C}}} - \frac{\frac{1}{LC}}{\sqrt{\frac{R^2C-4L}{L^2C}}} \right] \begin{bmatrix} \frac{1 - e^{-\left(\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}\right)t}}{\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}} \\ \frac{1 - e^{-\left(\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}\right)t}}{\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}} \end{bmatrix} \\
&= \frac{\frac{1}{LC}}{\sqrt{\frac{R^2C-4L}{L^2C}}} \frac{1 - e^{-\left(\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}\right)t}}{\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}} - \frac{\frac{1}{LC}}{\sqrt{\frac{R^2C-4L}{L^2C}}} \frac{1 - e^{-\left(\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}\right)t}}{\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}} \\
&= \frac{\frac{1}{LC}}{\sqrt{\frac{R^2C-4L}{L^2C}}} \left[ \frac{1 - e^{-\left(\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}\right)t}}{\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}} - \frac{1 - e^{-\left(\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}\right)t}}{\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}} \right] \\
&= \frac{\frac{1}{LC}}{\sqrt{\frac{R^2C-4L}{L^2C}}} \left[ \frac{1}{\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}} - \frac{e^{-\left(\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}\right)t}}{\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}} \right]
\end{aligned}$$

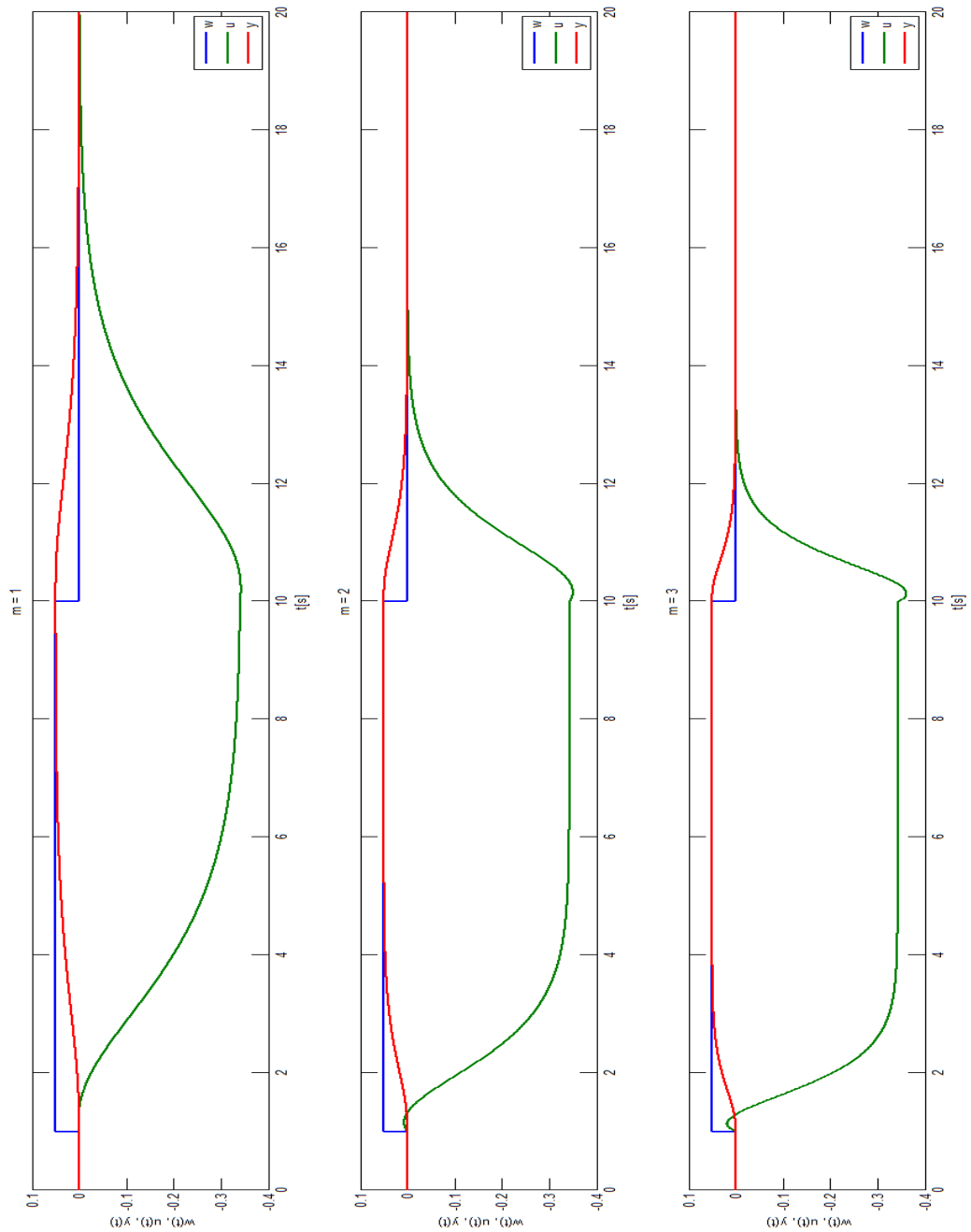
$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}} + \frac{e^{-\left(\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}\right)t}}{\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}} \Bigg] \\
& = \frac{\frac{1}{LC}}{\sqrt{\frac{R^2C-4L}{L^2C}}} \left[ \frac{\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}} - \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}}{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{R^2C-4L}{4L^2C}} \right. \\
& \quad \left. - \frac{e^{-\left(\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}\right)t}}{\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}} + \frac{e^{-\left(\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}\right)t}}{\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}} \right] \\
& = \frac{\frac{1}{LC}}{\sqrt{\frac{R^2C-4L}{L^2C}}} \left[ \frac{\sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}}{\frac{1}{LC}} - \frac{e^{-\left(\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}\right)t}}{\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}} + \frac{e^{-\left(\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}\right)t}}{\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}} \right. \\
& \quad \left. + \frac{e^{-\left(\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}\right)t}}{\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}} \right] \\
& = 1 + \frac{\frac{1}{LC}}{\sqrt{\frac{R^2C-4L}{L^2C}}} \left[ -\frac{e^{-\left(\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}\right)t}}{\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}} + \frac{e^{-\left(\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}\right)t}}{\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}} \right]
\end{aligned} \tag{339}$$



# **PŘÍLOHA P VI: PRŮBĚHY REGULAČNÍCH POCHODŮ PRO INVERZNÍ KYVADLO NA VOZÍKU S NASTAVENÍM PARAMETRŮ REGULÁTORU PRO 1DOF KONFIGURACI SYSTÉMU ŘÍZENÍ**



# **PŘÍLOHA P VII: PRŮBĚHY REGULAČNÍCH POCHODŮ PRO INVERZNÍ KYVADLO NA VOZÍKU S NASTAVENÍM PARAMETRŮ REGULÁTORU PRO 2DOF KONFIGURACI SYSTÉMU ŘÍZENÍ**



## PŘÍLOHA P VIII: VÝPOČET MATICOVÉHO PŘENOSU (PRAVÝ MATICOVÝ ZLOMEK)

Maticový přenos (pravý maticový zlomek) získáme řešením rovnice

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{B}_P(s) \mathbf{A}_P^{-1}(s) \quad (340)$$

kde

$$\mathbf{A}_P(s) = \begin{bmatrix} C_1 s + \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_1} & C_2 s + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \quad (341)$$

$$\mathbf{B}_P(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (342)$$

Inverzní matici  $\mathbf{A}_P^{-1}(s)$  vypočteme dle vztahu

$$\mathbf{A}_P^{-1}(s) = \frac{1}{\det \mathbf{A}_P(s)} \text{adj} \mathbf{A}_P(s) \quad (343)$$

kde

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A}_P(s) &= \left( C_1 s + \frac{1}{R_1} \right) \left( C_2 s + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \left( -\frac{1}{R_1} \right) \left( -\frac{1}{R_1} \right) \\ &= C_1 C_2 s^2 + \left( \frac{C_1}{R_1} + \frac{C_1}{R_2} + \frac{C_2}{R_1} \right) s + \frac{1}{R_1 R_2} \end{aligned} \quad (344)$$

$$\begin{aligned} \text{adj} \mathbf{A}_P(s) &= \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \left( C_2 s + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) & (-1)^{1+2} \left( -\frac{1}{R_1} \right) \\ (-1)^{2+1} \left( -\frac{1}{R_1} \right) & (-1)^{2+2} \left( C_1 s + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} C_2 s + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_1} \\ \frac{1}{R_1} & C_1 s + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (345)$$

Dosazením rovnice (344) a (345) do rovnice (343) získáme

$$\mathbf{A}_P^{-1}(s) = \frac{1}{C_1 C_2 s^2 + \left( \frac{C_1}{R_1} + \frac{C_1}{R_2} + \frac{C_2}{R_1} \right) s + \frac{1}{R_1 R_2}} \begin{bmatrix} C_2 s + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_1} \\ \frac{1}{R_1} & C_1 s + \frac{1}{R_1} \end{bmatrix} \quad (346)$$

Maticový přenos (pravý maticový zlomek) získáme dosazením rovnice (342) a (346) do rovnice (340), tedy

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(s) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{C_1 C_2 s^2 + \left( \frac{C_1}{R_1} + \frac{C_1}{R_2} + \frac{C_2}{R_1} \right) s + \frac{1}{R_1 R_2}} \begin{bmatrix} C_2 s + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_1} \\ \frac{1}{R_1} & C_1 s + \frac{1}{R_1} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{C_1 C_2 s^2 + \left( \frac{C_1}{R_1} + \frac{C_1}{R_2} + \frac{C_2}{R_1} \right) s + \frac{1}{R_1 R_2}} \begin{bmatrix} C_2 s + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_1} \\ \frac{1}{R_1} & C_1 s + \frac{1}{R_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1 C_2} \\ \frac{1}{C_1 C_2} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2 + \left( \frac{1}{C_1 R_1} + \frac{1}{C_2 R_1} + \frac{1}{C_2 R_2} \right) s + \frac{1}{C_1 R_1 C_2 R_2}} \begin{bmatrix} \left( s + \frac{1}{C_2 R_1} + \frac{1}{C_2 R_2} \right) \frac{1}{C_1} & \frac{1}{C_1 C_2 R_1} \\ \frac{1}{C_1 C_2 R_1} & \left( s + \frac{1}{C_1 R_1} \right) \frac{1}{C_1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (347)$$

# **PŘÍLOHA P IX: PRŮBĚHY REGULAČNÍCH POCHODŮ PRO SYSTÉM DVOU NÁDRŽÍ S KAPALINOU S MNOHOROZMĚRNÝM REGULÁTOREM**

