

Mnoharozměrové adaptivní řízení nelineárních systémů

Multivariable Adaptive Control Of Nonlinear Systems

Bc. Adam Krhovják

Diplomová práce
2013



Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky
akademický rok: 2012/2013

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Bc. Adam Krhovják**
Osobní číslo: **A11422**
Studijní program: **N3902 Inženýrská informatika**
Studijní obor: **Automatické řízení a informatika**
Forma studia: **prezenční**

Téma práce: **Mnoharozměrové adaptivní řízení nelineárních systémů**

Zásady pro vypracování:

1. Uvedte obecný stavový popis mnoharozměrového nelineárního systému (MNS) a jeho základní vlastnosti včetně podmínky stability.
2. Uvedte stavový popis mnoharozměrového lineárního systému (MLS), postup při linearizaci nelineárního modelu.
3. Popište přechod od stavového k vstupně výstupnímu (externímu) popisu MLS.
4. Pojednejte o možnostech identifikace parametrů externího lineárního modelu MNS.
5. Řešte problém syntézy řízení MLS v okruhu polynomiálních matic.
6. Navrhněte schéma adaptivního řízení MNS.
7. Ověřte navržený algoritmus řízení na modelu spojených nádrží na kapalinu.

Rozsah diplomové práce:

Rozsah příloh:

Forma zpracování diplomové práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

1. DOSTÁL, Petr a Radek MATUŠŮ. Stavová a algebraická teorie řízení. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2010, 90 s. ISBN 978-80-7318-991-4.
2. BISHOP, Robert H a Richard C DORF. Modern Control Systems. 8th ed. Menlo Park: Addison Wesley, 1998, 855 s. ISBN 0201326779.
3. ROSENWASSER, Efim a Bernhard P LAMPE. Multivariable computer-controlled systems: a transfer function approach. London: Springer, 2006, xvii, 478 s. ISBN 1846284317.
4. HAVLENA, Vladimír a Jan ŠTECHA. Moderní teorie řízení. dotisk 1. vyd. Praha: ČVUT, 1996, 291 s., 40 obr. ISBN 8001010767.
5. SKOGESTAD, Sigurd a Ian POSTLETHWAITE. Multivariable feedback control: analysis and design. 2nd ed. Chichester, England: John Wiley, 2005, xiv, 574 s. ISBN 0470011688.
6. ŠTECHA, Jan a Vladimír HAVLENA. Teorie dynamických systémů. 2. vyd. Praha: ČVUT, 1999, 248 s., 70 obr. ISBN 8001019713.
7. DOSTÁL, Petr, Vladimír BOBÁL a František GAZDOŠ. Adaptive control of a MIMO process by two feedback controllers. The 6th Asian Control Conference ASCC 2006, Bali, Indonesia, 2006, 540-546.
8. BOBÁL, Vladimír. Adaptivní a prediktivní řízení. 1. vyd. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2008, 134 s. ISBN 978-80-7318-662-3.

Vedoucí diplomové práce:

prof. Ing. Petr Dostál, CSc.

Ústav řízení procesů

Datum zadání diplomové práce:

24. února 2013

Termín odevzdání diplomové práce:

11. června 2013

Ve Zlíně dne 24. února 2013

prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.
děkan



prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.
ředitel ústavu

ABSTRAKT

Diplomová práce pojednává o spojitém adaptivním řízení mnoharozměrového nelineárního systému. Nelineární model systému je aproximován vhodným spojitým externím lineárním modelem, jehož parametry jsou odhadovány dvěma různými přístupy. První způsob rozebírá odhadování parametrů prostřednictvím externího delta modelu. V druhém případě jsou hledané parametry získávány použitím přímé metody. K průběžné identifikaci parametrů regresního ARX modelu je využito metody nejmenších čtverců, metody nejmenších čtverců. Výsledné regulátory uvažované konfigurace se dvěma zpětnovazebními regulátory jsou odvozeny použitím polynomiální metody řízení. Mnoharozměrové adaptivní řízení je ověřováno na modelu nálevkovitých zásobníků na kapalinu zapojených do série.

Klíčová slova: adaptivní řízení, nelineární systém, rekurzivní identifikace, polynomiální metoda, spojené zásobníky na kapalinu, simulační prostředí

ABSTRACT

The thesis deals with continuous-time adaptive control of multivariable nonlinear system. A nonlinear model of the system is approximated by an appropriate continuous external linear model whose parameters are estimated by two different approaches. The first method discusses estimation of parameters via an external delta model. In a further case, direct method is used to achieve parameters of the model. Regression model called ARX was considered in recursive identification based on the least squares method. The resulting controllers, which figure in control configuration with two degrees of freedom, are derived by using a polynomial method. Multivariable adaptive control is verified by a model of two funnel liquid tanks in series.

Keywords: adaptive control, nonlinear system, recursive identification, polynomial method, liquid tanks in series, simulation software

Rád bych na tomto místě poděkoval panu prof. Ing. Petru Dostálovi, Csc., za nekonečnou trpělivost, kterou věnoval odpovědím na mé otázky, za podnětné a cenné rady, které mi vždy ukázaly směr, kudy pokračovat.

Prohlašuji, že

- beru na vědomí, že odevzdáním diplomové/bakalářské práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb. o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších právních předpisů, bez ohledu na výsledek obhajoby;
- beru na vědomí, že diplomová/bakalářská práce bude uložena v elektronické podobě v univerzitním informačním systému dostupná k prezenčnímu nahlédnutí, že jeden výtisk diplomové/bakalářské práce bude uložen v příruční knihovně Fakulty aplikované informatiky Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně a jeden výtisk bude uložen u vedoucího práce;
- byl/a jsem seznámen/a s tím, že na moji diplomovou/bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších právních předpisů, zejm. § 35 odst. 3;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 1 autorského zákona má UTB ve Zlíně právo na uzavření licenční smlouvy o užití školního díla v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 2 a 3 autorského zákona mohu užít své dílo – diplomovou/bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití jen s předchozím písemným souhlasem Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše);
- beru na vědomí, že pokud bylo k vypracování diplomové/bakalářské práce využito softwaru poskytnutého Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně nebo jinými subjekty pouze ke studijním a výzkumným účelům (tedy pouze k nekomerčnímu využití), nelze výsledky diplomové/bakalářské práce využít ke komerčním účelům;
- beru na vědomí, že pokud je výstupem diplomové/bakalářské práce jakýkoliv softwarový produkt, považují se za součást práce rovněž i zdrojové kódy, popř. soubory, ze kterých se projekt skládá. Neodevzdání této součásti může být důvodem k neobhájení práce.

Prohlašuji,

- že jsem na diplomové práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval. V případě publikace výsledků budu uveden jako spoluautor.
- že odevzdaná verze diplomové práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG jsou totožné.

Ve Zlíně

.....
podpis diplomanta

OBSAH

ÚVOD.....	9
I TEORETICKÁ ČÁST	10
1 STAVOVÝ POPIS.....	11
1.1 Nelineární dynamický systém.....	11
1.1.1 Typické nelineární jevy	13
1.1.2 Analýza stability nelineárních systémů	14
1.2 Lineární dynamický systém	15
1.3 Linearizace Taylorovým rozvojem	17
2 VNĚJŠÍ POPIS MNOHAROZMĚROVÉHO SYSTÉMU	22
2.1 Určení přenosové matice ze stavového popisu	22
2.2 Mnohazarozměrový systém v polynomiálních maticových zlomcích	24
2.2.1 Polynomiální matice.....	24
2.2.2 Polynomiální maticové zlomky	26
3 IDENTIFIKACE MNOHAROZMĚROVÉHO SYSTÉMU	29
3.1 Externí lineární model	29
3.1.1 Přímá metoda	31
3.2 Externí delta model	33
3.2.1 Odhad parametrů delta modelu	34
3.3 Rekurzivní identifikace metodou nejmenších čtverců	35
3.3.1 Exponenciální zapomínání dat	37
3.3.2 Adaptivní směrové zapomínání dat.....	38
4 SYNTÉZA ŘÍZENÍ V OKRUHU POLYNOMIÁLNÍCH MATIC.....	40
4.1 1 DOF konfigurace systému řízení	41
4.2 2 DOF konfigurace systému řízení	46
II PRAKTICKÁ ČÁST	49
5 MODEL SPOJENÝCH ZÁSOBNÍKŮ NA KAPALINU.....	50
5.1 Konstrukce matematického modelu	51
5.2 Koncept adaptivního řízení	56
5.3 Simulační výsledky	60
6 APLIKAČNÍ PROSTŘEDÍ.....	67
6.1 Primární ovládání.....	68
6.1.1 Pokročilé možnosti identifikace	69
6.2 Zpracování dat	70
ZÁVĚR	72
ZÁVĚR V ANGLIČTINĚ.....	73
SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY.....	74

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK	76
SEZNAM OBRÁZKŮ	77
SEZNAM PŘÍLOH.....	78

ÚVOD

Řízení široké škály technologických procesů si nevystačí pouze s jednou žádanou, jednou regulovanou a jednou akční veličinou, případně jednou měřitelnou poruchovou veličinou. Tyto procesy vyžadují nezávisle řídit více výstupních veličin. Řízené soustavy pak obsahují více akčních, regulovaných i poruchových veličin. Procesy s minimálně jedním výstupem a více než jedním vstupem označujeme jako mnohazměrové a právě na ně je úsilí zaměřeno.

Mnoho technologických procesů, jakými jsou zásobníky na kapalinu, reaktory a destilační kolony vykazuje nelineární vlastnosti, a proto se klasické regulátory s pevně danou strukturou i parametry jen obtížně vyrovnávají se změnami parametrů procesu. Východiskem, pro řízení takového druhu procesu, může být nasazení adaptivního řízení ve spojení s vhodně zvoleným spojitým externím lineárním modelem, jehož parametry průběžně odhadujeme, takže v každém kroku řízení se získané odhady parametrů upotřebí pro aktualizaci parametrů mnohazměrového regulátoru. Uvedené napovídá, že základním předpokladem efektivního řízení je tedy korektní odhad parametrů externího lineárního modelu pro již předem vybranou strukturu.

Identifikační část se opírá o dva odlišné přístupy, jejichž aplikace vede na získání parametrů externího lineárního modelu. První způsob využívá filtrovaných veličin vstupních a výstupních signálů, druhý pak odpovídající δ -model řízeného procesu s obdobnou strukturou, jakou má model spojitý. Použití obou metod vede na určitý typ regresní rovnice, jež využívá identifikační procedura, která nese klasickou metodu nejmenších čtverců, metodu nejmenších čtverců s exponenciálním zapomínáním a adaptivním směrovým zapomínáním.

Teorie je soustředěna na adaptivní řízení mnohazměrového nelineárního procesu, při použití náhradního externího lineárního modelu a konfiguraci řízení se jedním, potažmo dvěma stupni volnosti. Syntéza je založena na maticovém a polynomiálním přístupu. V praktické části je uvedený přístup verifikován, za použití vlastního simulačního softwaru, na nelineárním procesu se dvěma vstupy a dvěma výstupy, jež představují nálevkovité zásobníky na kapalinu zapojené do série.

I. TEORETICKÁ ČÁST

1 STAVOVÝ POPIS

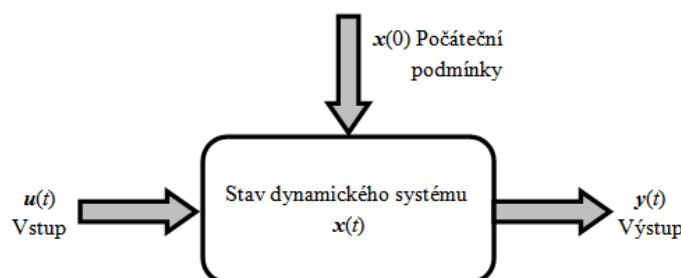
Ve chvíli, kdy inženýři analyzují a navrhují nelineární dynamický systém, ať už v elektrických obvodech, mechanických systémech, řídicích systémech, případně jiných inženýrských disciplínách, jsou nuceni absorbovat a strávit široké spektrum informací, neboť ten, na rozdíl od lineárního systému, pojme popis podstatně obecnější, a tudíž vyžadující náročnější matematický aparát, a proto lineární systémy a s nimi související prostředky jejich analýzy či syntézy nelze zavrhnout. Z toho důvodu, bude pro své systematické matematické metody lineární popis určitým kompromisem. Jinak řečeno, ústředním postupem, zde prezentovaným, bude paradoxně se nelinearit zbavit. Prvotní pozornost proto věnujeme obecnému stavovému popisu nelineárního systému a teprve poté se zaměříme na jeho speciální tvar, odpovídající stavovému popisu lineárního systému.

1.1 Nelineární dynamický systém

Pojednejme dle [8] a [11] o dynamickém systému, znázorněném na Obr. 1, který je popsán konečným počtem provázaných obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ \dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)\end{aligned}$$

kde \dot{x}_i označuje derivaci x_i vzhledem k časové proměnné t a u_1, u_2, \dots, u_m jsou specifické vstupní proměnné. Proměnné x_1, x_2, \dots, x_n nazýváme stavové proměnné, představující paměť, kterou dynamický systém nabyt v minulosti.



Obr. 1: Dynamický systém

Výše uvedený zápis však není příliš častý, místo něj obvykle používáme vektorové notace, sjednocující uvedenou soustavu diferenciálních do kompaktnější formy. Stanovme

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}, \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} f_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ f_2(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{bmatrix}$$

a přepíšme soustavu n diferenciálních rovnic do jedné n -dimenzionální vektorové diferenciální rovnice prvního řádu

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (1.1)$$

Rovnici (1.1) nazýváme stavovou rovnicí nelineárního mnoharozměrového systému s \mathbf{x} jako vektorem stavu a \mathbf{u} jako vektorem vstupních veličin.

V některých případech přidružujeme k (1.1) další rovnici

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (1.2)$$

která definuje r -dimenzionální výstupní vektor, obsahující ty proměnné, jež jsou středem našeho zájmu z hlediska analýzy dynamického systému. Takovými proměnnými jsou proměnné, které mohou být fyzikálně měřeny nebo proměnné, u kterých požadujeme, aby se chovaly specifickým způsobem.

Rovnici (1.2) nazýváme rovnicí výstupu a (1.1) společně s (1.2) zastřešuje stavový popis spojitého mnoharozměrového nelineárního systému, kde $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ a $\mathbf{h}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ jsou nelineární vektorové funkce.

Předpokládáme-li, že funkce $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ a ani funkce $\mathbf{h}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ nezávisí explicitně na čase t , získáváme speciální případ (1.1) a (1.2), jako

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (1.3)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (1.4)$$

o němž mluvíme jako o časově invariantním systému či také autonomním systému. Tato nezávislost znamená, že chování systémů závisí výhradně na jeho vlastní struktuře, která je stálá a ničím vnějším neovlivňovaná. V případě, že (1.4) nezávisí ani na momentálních hodnotách \mathbf{u} , splňuje systém silnou fyzikální podmínku realizovatelnosti, v opačném případě hovoříme o slabé podmínce fyzikální realizovatelnosti.

Dříve, než přejdeme ke stavovému popisu mnohazměrového lineárního systému, se stručně zmíníme o některých jevech, které u lineárních systémů nemohou nastat.

1.1.1 Typické nelineární jevy

Přejdeme-li od lineárního systému k nelineárnímu, jsme nuceni čelit více obtížným situacím. Princip superpozice, na němž je založena analýza lineárních systémů, dále neplatí a analytické nástroje si vyžadují pokročilejší matematický aparát. Existují totiž typické jevy, podrobněji [5], [8], ke kterým může docházet pouze za přítomnosti nelinearity, a z toho důvodu pak nemůže být jejich chování popsáno nebo předvídáno lineárními modely. Mezi tyto jevy řadíme:

- *Únik v konečném čase*: Stav nelineárního systému může jít do nekonečna v konečném čase, což nemůžeme říct o systémech lineárních, vzhledem k tomu, že jejich řešení je vždy kombinací exponenciálních a harmonických funkcí a případně mocnin času. Stav nestabilního lineárního systému má řešení unikající do nekonečna, ovšem asymptoticky, tj. přibližuje-li se čas nekonečnu. Ukázkou nelineárního systému, jehož trajektorie jde do nekonečna v konečném čase, je

$$\dot{x} = x^2, \quad x(0) = x_0 > 0, \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t} \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow 1/x_0} x(t) = \infty$$

- *Mnohonásobné izolované rovnovážné stavy*: Lineární systém může mít pouze jeden izolovaný rovnovážný stav, tj. může mít pouze jeden ustálený stav pracovního bodu, jež zaujímá stav systému nezávisle na počátečním stavu. Naproti tomu nelineární systém může mít více než jeden izolovaný rovnovážný bod. Stav systému tedy může konvergovat k jednomu z několika ustálených pracovních bodů, což je dáno počátečním stavem systému.
- *Limitní cykly*: K tomu, aby lineární časově invariantní systém oscilloval, musí splňovat, že vlastní čísla budou ležet na imaginární ose komplexní roviny, což je prakticky nemožné splnit při výskytu poruchy a i v případě, že se nám to podaří, bude amplituda oscilací vždy záviset na počátečním stavu. Nelineární systémy mohou oscilovat s pevnou amplitudou a frekvencí bez ohledu na počáteční stav. Tento typ oscilace je znám jako limitní cykly.

- *Chaos*: Nelineární systém může mít komplikovanější ustálené chování, které necharakterizují ekvilibria, periodické oscilace a ani skoro-periodické oscilace. Takové chování obvykle označujeme jako chaos.
- *Bifurkace*: Změnou parametrů se mohou měnit kvalitativní rysy nelineárních systémů. Typickým příkladem je vznik nových ekvilibrií a změna jejich stability.
- *Subharmonické, harmonické nebo téměř periodické oscilace*: Je-li stabilní lineární systém buzen periodickým signálem na vstupu, získáváme na výstupu signál o identické frekvenci. Budíme-li ovšem tímto signálem nelineární systém, získáme na výstupu signál, který osciluje s frekvencí v násobcích nebo dílech vstupní frekvence. Systém může také na výstupu vytvářet téměř periodické oscilace.

1.1.2 Analýza stability nelineárních systémů

Teorie stability hraje ústřední roli v teorii systémů a pochopitelně i inženýrských disciplínách. Existují různé typy stabilit [5], které vykrystalizovaly v průběhu studia dynamických systémů. V tomto krátkém pojednání bude teorie soustředěna na stabilitu rovnovážných bodů, ve smyslu ruského matematika Lyapunova. Rovnovážný bod je stabilní, jestliže všechna řešení, začínající v dostatečné blízkosti bodu, také v jeho blízkosti zůstanou, přičemž čímž blíže tyto řešení začnou, tím blíže rovnovážnému bodu také zůstanou, v opačném případě je bod nestabilní. Požadujeme-li navíc tzv. asymptotickou stabilitu, znamená to, že všechna řešení začínající v blízkosti bodu, nezůstanou pouze v jeho blízkosti, ale konvergují se vzrůstajícím časem právě k tomuto rovnovážnému bodu.

Uvažme následující mnohazměrový autonomní systém

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (1.5)$$

přičemž předpokládejme některý jeho rovnovážný bod, který je dán jako

$$\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = 0 \quad (1.6)$$

Naším cílem je charakterizovat stabilitu $\bar{\mathbf{x}}$. Pro zjednodušení uveďme případ, kdy je rovnovážný bod umístěn do počátku $\bar{\mathbf{x}} = 0$. Tím ovšem nedochází ke ztrátě obecnosti, neboť libovolný rovnovážný bod, lze vhodnou záměnou proměnných přenést do počátku. Předpokládejme, že $\bar{\mathbf{x}} \neq 0$ a dále $\mathcal{G} = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}$. Pak pro derivaci \mathcal{G} platí

$$\dot{\mathcal{G}} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathcal{G} + \bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{g}(\mathcal{G}), \text{ kde } \mathbf{g}(0) = 0, \quad (1.7)$$

takže zavedením nové proměnné ϑ , má systém rovnovážný bod v počátku, a proto můžeme vždy předpokládat, že $f(\mathbf{x})$ splňuje $f(0) = 0$ a tím pádem i vyšetřovat stabilitu počátku $\mathbf{x} = 0$.

Odtud rovnovážný bod $\mathbf{x} = 0$ systému (1.5) nazveme stabilní, platí-li

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, takové, že

$$\|\mathbf{x}(0)\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0, \quad (1.8)$$

a asymptoticky stabilní v případě, že platí (1.8) a δ můžeme zvolit jako

$$\|\mathbf{x}(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = 0 \quad (1.9)$$

Znamená to, že pouhá konvergence k rovnovážnému bodu ještě nemusí znamenat asymptotickou stabilitu, je k tomu totiž, dle uvedené definice, zapotřebí také Lyapunovské stability, z čehož vyvozujeme, že asymptotická stabilita je vždy silnější vlastností, než Lyapunovská.

1.2 Lineární dynamický systém

Stav spojitého lineárního mnohazměrového systému [1] je popsán soustavou lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu. Tyto diferenciální rovnice mohou být zapsány v obecném tvaru jako

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \cdots + b_{1m}u_m \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + b_{2m}u_m \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + b_{nm}u_m \end{aligned},$$

kde stejně jako v případě nelineárního systému je $\dot{x}_i = dx/dt$ s nezávisle proměnnou t .

Uvedený zápis soustavy souběžných diferenciálních rovnic může být přepsán v kompaktnější maticové formě

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

Z předchozí podkapitoly, která pojednávala o nelineárním dynamickém systému, si připomeňme, že sloupcový vektor

$$\mathbf{x}^T = [x_1, x_2, \dots, x_n],$$

nazýváme vektorem stavových veličin a vektor

$$\mathbf{u}^T = [u_1, u_2, \dots, u_m]$$

je vektorem vstupních veličin.

Na základě toho, získá stavová diferenciální rovnice (1.1) speciální tvar, který můžeme představit v kompaktní notaci

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} \quad (1.10)$$

Výstup lineárního systému ve vztahu ke stavovým proměnným a vstupním signálům je popsán tzv. výstupní rovnicí (1.2), kterou v případě lineárního systému přepíšeme jako

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}, \quad (1.11)$$

kde $\mathbf{y}^T = [y_1, y_2, \dots, y_r]$ zastupuje množinu výstupních signálů vyjádřenou ve formě sloupcového vektoru a kde matice

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \text{ vystupuje jako matice systému o rozměrech } n \times n,$$

$$\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & & \cdots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}, \text{ reprezentuje matici vstupu o rozměrech } n \times m,$$

$$\mathbf{C}(t) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & & \cdots & \\ c_{r1} & c_{r2} & \cdots & c_{rn} \end{bmatrix}, \text{ představuje váhovou matici stavu o rozměrech } r \times n \text{ a}$$

konečně

$$\mathbf{D}(t) = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\ \vdots & & \cdots & \\ d_{r1} & d_{r2} & \cdots & d_{rm} \end{bmatrix}, \text{ je váhová matice vstupu s rozměry } r \times m.$$

Stejně tak, jako jsme v případě nelineárního systému pojednali o časově invariantním systému (1.3) a (1.4), který byl podmíněn nezávislostí pravých stran rovnic explicitně na čase t , můžeme i nyní tvrdit, že pokud pravá strana rovnic (1.10) a (1.11) bude na čase nezávislá, přesněji pokud všechny prvky matic \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} budou v čase neproměnné, tj. matice budou maticemi konstant, nazveme systém lineárním časově invariantním. Bude-li navíc (1.11) závislá pouze na stavových veličinách, z čehož vyplývá, že \mathbf{D} bude nulová matice, bude systém splňovat i silnou podmínku fyzikální realizovatelnosti. Stavový model (1.10) a (1.11) pak přejde do tvaru

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}, \quad (1.12)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} \quad (1.13)$$

1.3 Linearizace Taylorovým rozvojem

Vzhledem k účinným matematickým nástrojům, známým pro lineární systémy, bude prvním krokem analýzy nelineárního systému, v případě, že je to možné, pokus o jeho linearizaci v nějakém pracovním bodě, což je běžná a užitečná praxe. Není tedy pochyb, že pokud je to možné, měli bychom linearizaci, jak uvádí [11], použít, a proto nyní uvedeme způsob linearizace, obecně nelineárního systému, za použití Taylorova rozvoje [8].

Uvažujme funkci $f(x)$ jedné proměnné x a předpokládejme, že \bar{x} je takový bod, pro který platí $f(\bar{x}) = 0$. V tomto případě bod \bar{x} nazýváme rovnovážným bodem systému

$$\dot{x} = f(x), \quad (1.14)$$

poněvadž platí $\dot{x} = 0$ pro $x = \bar{x}$. Připomeňme si, že Taylorův rozvoj $f(x)$, kolem bodu \bar{x} je dán ve tvaru

$$f(x) = f(\bar{x}) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=\bar{x}} (x - \bar{x}) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x=\bar{x}} (x - \bar{x})^2 + \frac{1}{6} \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_{x=\bar{x}} (x - \bar{x})^3 + \cdots, \quad (1.15)$$

který přepíšeme jako

$$f(x) = f(\bar{x}) + \underbrace{\frac{df}{dx}}_a \bigg|_{x=\bar{x}} (x - \bar{x}) + \text{členy vyšších řádů.} \quad (1.16)$$

Všimněme si, že pro x dostatečně blízké \bar{x} , řada (1.16) rychle konverguje a členy vyšších řádů můžeme zanedbat, čímž získáme aproximační tvar v podobě

$$f(x) = f(\bar{x}) + a(x - \bar{x}) \quad (1.17)$$

Vzhledem k tomu, že $f(\bar{x}) = 0$, může být nelineární diferenciální rovnice kolem rovnovážného bodu aproximována

$$\dot{x} = a(x - \bar{x}) \quad (1.18)$$

Pro úplnost linearizace je zapotřebí zavést odchylkový stav $\delta x = x - \bar{x}$, a za předpokladu, že $\delta \dot{x} = \dot{x}$ přejde (1.18) na linearizovaný model

$$\delta \dot{x} = a \delta x \quad (1.19)$$

Na tomto místě je vhodné poznamenat, že linearizovaný model je platný pouze v blízkém okolí rovnovážného bodu. Jak blízko, závisí samozřejmě na tom výraznosti nelinearity funkce

Přechod na funkce s více stavů a vstupy

Přechod na funkce, obsahující více stavových a vstupních veličin má velmi blízko výše uvedené proceduře. Předpokládejme vývoj stavu x_i daný jako

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m), \quad (1.20)$$

pro nějakou obecnou funkcí f_i . Dále předpokládejme, že rovnovážný bod je dán $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m$, takže

$$f_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m) = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (1.21)$$

Stojí za povšimnutí, že rovnovážný bod je bodem, ve kterém jsou všechny funkce f_i rovny nule, čili všechny stavy systému se ustálí právě okamžikem dosažení tohoto rovnovážného bodu. Linearizace funkce v rovnovážném bodě je pak dána jako

$$\delta f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m) \approx \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \bigg|_{x_j=\bar{x}_j} (x_j - \bar{x}_j) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \bigg|_{u_j=\bar{u}_j} (u_j - \bar{u}_j) \quad (1.22)$$

Definujeme-li odchylkové veličiny, ve smyslu odchylek od stavů a vstupů, obdobně jako v (1.19)

$$\delta x_j = x_j - \bar{x}_j \text{ (pro } 1 \leq j \leq n \text{)}, \quad (1.23)$$

$$\delta u_j = u_j - \bar{u}_j \text{ (pro } 1 \leq j \leq m \text{)}, \quad (1.24)$$

je linearizovaná dynamika stavu \dot{x}_i dána jako

$$\delta \dot{x}_i = \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{x_j=\bar{x}_j} \delta x_j + \sum_{j=1}^m \left. \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right|_{u_j=\bar{u}_j} \delta u_j \quad (1.25)$$

Nyní již nebrání nic tomu, abychom uvedenou rovnici (1.25) zapsali v kompaktnější maticové formě jako

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}}}_{\mathbf{A}} \delta \mathbf{x} + \underbrace{\left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}}}_{\mathbf{B}} \delta \mathbf{u} \quad (1.26)$$

Poznamenejme, že prvky matic \mathbf{A} a \mathbf{B} jsou v daném pracovním bodě konstantní, avšak s přechodem do jiného ustáleného stavu, se mění a s ohledem na (1.26) jsou definovány jako

$$\mathbf{A}|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}}, \quad \mathbf{B}|_{\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}} \quad (1.27)$$

Předpokládáme-li nyní, že již pracujeme s linearizovaným systémem, vypustíme pro přehlednost symbol δ a získáme stavovou rovnici linearizovaného modelu

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} \mathbf{x} + \mathbf{B}|_{\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}} \mathbf{u} \quad (1.28)$$

Odkážme se ještě na místo zavedení nových dynamických proměnných (1.23) a (1.24). Je zřejmé, že tímto zavedením, jsou počáteční podmínky nulové, takže $\mathbf{x}(0) = 0$, což usnadňuje způsob při získávání obrazu originální reálné funkce prostřednictvím Laplaceovy transformace. Je nutné mít na paměti, že zavedením odchylkového modelu popisujeme vztah mezi odchylkami od jistého pracovního bodu, a tedy význam nulových počátečních podmínek má fyzikálně jiný charakter, než na jaký jsme zvyklí u modelu absolutního. V tomto případě, nejsou nulové počáteční podmínky známkou toho, že

spojené zásobníky na kapalinu, které budou předmětem dalšího zájmu, jsou prázdné nebo do nich nic nepřitéká.

Jak zmiňuje [8], může se stát, že i výstupní rovnice vykazuje známky nelinearity tzv. výstup systému je obecně dán jako (1.4). V tomto případě je postup naprosto identický s výše uvedeným postupem. Definujeme výstup y_i časově invariantního systému jako

$$y_i = h_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m), \quad (1.29)$$

daný obecnou funkcí h_i . Linearizace funkce v pracovním bodě $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m$, je za předpokladu diferencovatelnosti nelineární funkce h_i , při zanedbání vyšších členů dána

$$h_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m) \approx h_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m) + \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \right|_{x_j=\bar{x}_j} (x_j - \bar{x}_j) + \sum_{j=1}^m \left. \frac{\partial h_i}{\partial u_j} \right|_{u_j=\bar{u}_j} (u_j - \bar{u}_j) \quad (1.30)$$

S využitím odchylkových veličin (1.23), (1.24) je linearizovaný výstup, při vynechání argumentu, ve tvaru

$$\delta y_i = \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \right|_{x_j=\bar{x}_j} \delta x_j + \sum_{j=1}^m \left. \frac{\partial h_i}{\partial u_j} \right|_{u_j=\bar{u}_j} \delta u_j \quad (1.31)$$

a rozšíření (1.31) pro $i \leq 1 \leq r$, zapíšeme již ve vektorovém tvaru, analogickém s (1.26) jako

$$\delta \mathbf{y} = \underbrace{\left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}}}_{\mathbf{C}} \delta \mathbf{x} + \underbrace{\left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}}}_{\mathbf{D}} \delta \mathbf{u}, \quad (1.32)$$

čím jsme odvodili linearizovanou výstupní rovnici, bez uvedení δ , ve tvaru

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} \mathbf{x} + \mathbf{B}|_{\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}} \mathbf{u}. \quad (1.33)$$

Prvky matic \mathbf{C} , \mathbf{D} , jsou obdobně jako prvky matic \mathbf{A} , \mathbf{B} stavové rovnice, fixovány polohou pracovního bodu. Dodejme však, že je-li vztah mezi výstupem, stavem a vstupem předem lineární, jsou váhová matice stavu a váhová matice vstupu, maticemi konstant nezávislými na poloze pracovního bodu.

Speciálním případem stavové rovnice je situace, kdy se existence nelineární vazby omezuje na vztah mezi stavovými veličinami, zatímco závislost levé strany rovnice na vstupních veličinách je lineární. Pak je jasné, že poloha pracovního bodu bude ovlivňovat pouze prvky matice systému, zatímco prvky matice vstupu budou konstanty.

Stejně tak, jako jsme provedli linearizaci v okolí pracovního bodu, jež představoval ustálený stav, můžeme tuto linearizaci provést i v okolí, které bude náležet libovolnému aktuálnímu stavu s prvky matic závislými právě na tomto momentálním stavu. Této skutečnosti hojně využijeme, neboť umožňuje nahradit nelineární model, lineárním modelem časově variantního systému, což oceníme v kombinaci s metodami adaptivního řízení. Na závěr kapitoly poznamenejme, že zatímco o stabilitě nelineárního systému rozhodovala tzv. Jacobiho matice [5] ve tvaru

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad (1.34)$$

je z hlediska linearizovaného modelu stabilita uložena v matici systému

$$\mathbf{A}|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} & \dots & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} & \dots & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \right|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \right|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} & \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \right|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} & \dots & \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} \end{bmatrix}, \quad (1.35)$$

jejíž vlastní čísla musí náležet levé části komplexní roviny.

2 VNĚJŠÍ POPIS MNOHAROZMĚROVÉHO SYSTÉMU

V této fázi je již jasný význam stavového popisu, a proto bude předmětem našeho dalšího zájmu, z pohledu budoucího návrhu řízení, popis vnější [8], [10], jehož základním rysem je fakt, že se nezajímá o to, co v systému skutečně probíhá, ale pouze o relaci mezi vstupem a výstupem. Nabízí se tedy otázka, zda existuje vzájemná spojitost mezi vnitřním a vnějším popisem. Z toho důvodu bude prezentován jednoznačný směr převodu, při němž pro systém, daný stavový popisem, odvodíme matici přenosových funkcí, ve které jsou uloženy vzájemné kombinace vstupů a výstupů. Ta nemusí být z hlediska mnohazměrových systémů k popisu nejvýhodnější a jako přijatelnější se jeví vnější popis systému pomocí polynomiálních matic [12].

2.1 Určení přenosové matice ze stavového popisu

Od chvíle, kdy umíme úspěšně získat lineární model (v blízkém okolí rovnovážného bodu) z obecně modelu nelineárního, se zaměříme na stavový popis mnohazměrového lineárního časově invariantního systému, daného prostřednictvím stavové a výstupní rovnice jako

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^r \quad (2.1)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (2.2)$$

Vzhledem k tomu, že tento model představuje lineární systém, se ptáme, v jakém vztahu jsou matice \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} k přenosové matici systému. Pro pochopení využijeme Laplaceovu transformaci [15], kterou aplikujeme na výše uvedený stavový popis (2.1), (2.2).

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s), \quad (2.3)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) \quad (2.4)$$

Poznamenejme, že $\mathbf{x}(0)$ zahrnuje počáteční podmínky všech stavových veličin tzv. $x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)$. Po drobné úpravě (2.3), můžeme $\mathbf{X}(s)$ vyjádřit jako

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \Leftrightarrow \mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s), \quad (2.5)$$

s jednotkovou maticí \mathbf{I} , o rozměrech $n \times n$. Substitucí (2.5) do výstupní rovnice (2.4), získáme pro $\mathbf{Y}(s)$ vztah

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s), \quad (2.6)$$

čímž je dána přenosová matice stavového modelu (2.1), (2.2) jako

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (2.7)$$

o rozměrech $r \times m$.

Je dobře známo, že inverze $(sI - A)^{-1}$ ve (2.7) se dá vyjádřit jako podíl adjungované matice a jejího determinantu, potom

$$G(s) = C \frac{1}{\det(sI - A)} \text{adj}(sI - A)B + D \quad (2.8)$$

Dělitel $\det(sI - A) = a(s)$ představuje tzv. charakteristický polynom, jehož kořeny udávají póly systému a jsou identické s vlastními čísly matice A . Je účelné poznamenat, že systém je interně i externě stabilní tehdy, leží-li kořeny tohoto polynomu v levé části komplexní roviny.

Doplňme však ještě, že jmenovatele dílčích přenosů matice G , nemusí nutně obsahovat všechny póly charakteristického polynomu. Jak správně ukazuje [5], mohou totiž existovat společné prvky matice $C \text{adj}(sI - A)B$ a $\det(sI - A)$, čímž dojde k vykrácení těchto společných činitelů. Uvedené napovídá, že řád přenosové matice n_G , bude menší nebo roven řádu systému n , tedy

$$n_G \leq n \quad (2.9)$$

Z hlediska posuzování stability systému je tedy nutné vycházet nikoliv z pólů přenosové matice, nýbrž z pólů systému. Pokud by byly skutečně některé z pólů nestabilní, daná záměna by měla za následek vnitřní nestabilitu systému.

Vnější popis je tedy reprezentován maticí přenosových funkcí

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \cdots & G_{1m}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \cdots & G_{2m}(s) \\ \vdots & & \cdots & \\ G_{r1}(s) & G_{r2}(s) & \cdots & G_{rm}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{g_{11}(s)}{a(s)} & \frac{g_{12}(s)}{a(s)} & \cdots & \frac{g_{1m}(s)}{a(s)} \\ \frac{g_{21}(s)}{a(s)} & \frac{g_{22}(s)}{a(s)} & \cdots & \frac{g_{2m}(s)}{a(s)} \\ \vdots & & \cdots & \\ \frac{g_{r1}(s)}{a(s)} & \frac{g_{r2}(s)}{a(s)} & \cdots & \frac{g_{rm}(s)}{a(s)} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

V předchozí kapitole, spojené se stavovým popisem, byla zmíněna souvislost mezi váhovou maticí vstupu D a ryzostí systému. Tato souvislost právě vyniká na uvedeném výkladu, neboť uvědomíme-li si, že bychom museli k libovolnému dílčímu výrazu matice $\text{Cadj}(sI - A)B$ navíc zahrnout odpovídající nenulový prvek matice D , byl by výsledný číselník dílčího přenosu totožného stupně jako $a(s)$ a daný přenos by nebyl striktně ryzí. Nabyté poznatky, jejichž kompletní popis lze dohledat [8], můžeme zakončit konstatováním, že budou-li všechny dílčí přenosy ve (2.10) striktně ryzí, bude systém splňovat silnou podmínku fyzikální realizovatelnosti. Bude-li však minimálně jeden z dílčích přenosů nestriktně ryzí, bude systém splňovat slabou podmínku fyzikální realizovatelnosti.

2.2 Mnoharozměrový systém v polynomiálních maticových zlomcích

Systémy s více vstupy a výstupy [13] obecně označované jako mnoharozměrové, lze popsat prostřednictvím vnitřního, stavového popisu [1], který se formálně neliší od popisu systému s jednou vstupní a jednou výstupní veličinou. S výkladem předchozí kapitoly jsme si zároveň uvedli jednoznačný způsob převodu, udávající spojitost mezi stavovým a vnitřním modelem, který charakterizuje matice přenosových funkcí, popisující vztah mezi vstupním a výstupním vektorem lineárního systému. Ke stávajícím dvěma způsobům popisu mnoharozměrového systému připojíme ještě popis prostřednictvím polynomiálních matic, jejichž teorii bohatě zpracovává [12] a ukážeme, že obdobně jako byl u jednorozměrových systémů dán přenos systému racionální funkcí, lze i ve vícerozměrové interpretaci vyjádřit přenosovou racionální matici jako maticový zlomek [10]. Než k tomu dospějeme, bude nutné uvést nejelementárnější pojmy spojené s teorií polynomiálních matic.

2.2.1 Polynomiální matice

Polynomiální maticí $A(s)$ budeme v souladu s [8] rozumět matici ve tvaru

$$A(s) = \begin{bmatrix} a_{11}(s) & a_{12}(s) & \cdots & a_{1m}(s) \\ a_{21}(s) & a_{22}(s) & \cdots & a_{2m}(s) \\ \vdots & & \cdots & \\ a_{r1}(s) & a_{r2}(s) & \cdots & a_{rm}(s) \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

kde všechny její prvky jsou polynomy v okruhu polynomů $\mathfrak{R}[s]$. Množinu těchto polynomiálních matic označíme $\mathfrak{R}^m[s]$.

Vyberme nyní libovolný prvek polynomiální matice (2.11) a označme jej $a_{ij}(s)$. Protože $a_{ij}(s) \in \mathfrak{R}[s]$, může být vyjádřen jako

$$a_{ij}(s) = a_{ij0} + a_{ij1}s + \dots + a_{ijn_j}s^{n_j} \quad (2.12)$$

Reálnou polynomiální maticí nazveme matici, budou-li koeficienty a_{ijk} pro $\forall i \in \{1, 2, \dots, r\}$, $\forall j \in \{1, 2, \dots, m\}$ a $\forall k \in \{1, 2, \dots, n_{ij}\}$ reálné. S ohledem na publikované v [12], lze definovat základní vlastnosti a pravidla polynomiálních matic:

- Jakákoliv polynomiální matice $A(s) \in \mathfrak{R}^m[s]$ může být vyjádřena ve formě

$$A(s) = A_0 + A_1s + \dots + A_{n-1}s^{n-1} + A_ns^n \quad (2.13)$$

kde A_i , ($i = 0, \dots, n$) jsou matice konstant. Jestliže matice A_n není nulová, pak n nazýváme stupeň polynomiální matice $A(s)$ a budeme jej značit $\deg A(s)$.

- Polynomiální matice je singulární, jestliže $r \neq m$ nebo $\det A(s) = 0$ v případě, že $r = m$. Platí-li pro determinant polynomiální matice (2.13) $\det A(s) \neq 0$, pak nazýváme matici $A(s)$, maticí nesingulární.
- Nechť je dána nesingulární čtvercová matice

$$A(s) \in \mathfrak{R}^{rr}[s] \quad (2.14)$$

Z ní utvořme matici A_{hr} nahrazením polynomu s nejvyšší mocninou v každém řádku, jednotkou a polynomům s nižšími mocninami přiřaďme nuly. Je-li $\det A_{hr} \neq 0$, nazýváme polynomiální matici $A(s)$ řádkově redukovanou.

- Jestliže vytvoříme matici A_{hc} z (2.14) tak, že v každém sloupci nahradíme polynom s nejvyšším stupněm jednotkou a polynomy s nižšími mocninami substituujeme nulami. Bude-li pak $\det A_{hc} \neq 0$, je polynomiální matice (2.14) sloupcově redukovaná. Sloupcově redukovaná matice může být získána z řádkově redukované matice prostým transponováním.

2.2.2 Polynomiální maticové zlomky

Při úvaze nulových počátečních podmínek (2.3), upravme (2.6) s využitím přenosové matice (2.7) jako

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{\tilde{G}(s)}{a(s)} \quad (2.15)$$

Zavedeme-li označení $B_L(s) = \tilde{G}(s)$ a $A_L(s) = a(s)I$, kde I představuje jednotkovou matici o rozměrech $r \times r$, je možné vyjádřit přenosovou matici (2.10) prostřednictvím levého maticového zlomku jako

$$G(s) = A_L^{-1}(s)B_L(s), \quad (2.16)$$

s polynomiálními maticemi $A_L \in \mathfrak{R}^{rr}[s]$ a $B_L(s) \in \mathfrak{R}^m[s]$

Přenosovou matici však můžeme vystihnout také pomocí pravého maticového zlomku. Označíme-li $B_R(s) = \tilde{G}(s)$ a $A_R(s) = a(s)I$, kde jednotková matice I , je rozměru $m \times m$, formulujeme ekvivalentní zápis pro (2.15) ve tvaru

$$G(s) = B_R(s)A_R^{-1}(s), \quad (2.17)$$

s polynomiálními maticemi $A_R \in \mathfrak{R}^{mm}[s]$ a $B_L(s) \in \mathfrak{R}^m[s]$

Nahradíme-li v rovnici (2.15) přenosovou matici levým maticovým zlomkem získáme rovnici popisující vztah mezi vstupem a výstupem jako

$$Y(s) = A_L^{-1}(s)B_L(s)U(s) \Leftrightarrow Y(s)A_L(s) = B_L(s)U(s), \quad (2.18)$$

analogicky pro pravý maticový zlomek

$$Y(s) = B_R(s)A_R^{-1}(s)U(s), \quad (2.19)$$

Dodejme, že je-li přenos systému dán zápisem levého maticového zlomku (2.16), je možné ihned získat jeho interpretaci v časové oblasti, prostřednictvím diferenciálních rovnic. Protože převod není jednosměrný, jsme schopni zpětně, z popisu v časové oblasti, přejít k popisu systému v levém polynomiálním maticovém zlomku.

Formulace přenosové matice v podobě maticového zlomku není jediná. Jednoduše lze ukázat, že pro libovolnou matici, jejíž determinant je konstanta, tzv. unimodulární matici platí

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{B}_R(s) \mathbf{U} \mathbf{U}^{-1} \mathbf{A}_R^{-T}(s) = [\mathbf{B}_R(s) \mathbf{U}] [\mathbf{A}_R(s) \mathbf{U}]^{-1} = \mathbf{B}_{RI}(s) \mathbf{A}_{RI}^{-T}(s), \quad (2.20)$$

dokonce namísto unimodulární matice můžeme použít i libovolnou polynomiální matici. Je zřejmé, že ze všech těchto realizací, bude pozornost směřována na tvar maticového zlomku, který je nejjednodušší. K tomu dospějeme, budou-li matice \mathbf{A} , \mathbf{B} , bez ohledu na index, nesoudělné. Nalezneme-li mezi všemi pravými děliteli matic $\mathbf{A}_R(s)$ a $\mathbf{B}_R(s)$ takový pravý dělitel \mathbf{R} , který je největší, můžeme psát přenosovou matici, obdobně jako tomu bylo u (2.20), ve tvaru

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{B}_R(s) \mathbf{R}(s) [\mathbf{A}_R(s) \mathbf{R}(s)]^{-1} = \mathbf{B}_{RI}(s) \mathbf{A}_{RI}^{-T}(s), \quad (2.21)$$

a říkáme, že matice \mathbf{A}_{RI} , \mathbf{B}_{RI} jsou zprava nesoudělné a maticový zlomek je zprava nereducovatelný. Obdobnou proceduru, jako výše, můžeme obdobně odvodit i pro levý maticový zlomek. Platí totiž

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{A}_L^{-T}(s) \mathbf{B}_L(s) = [\mathbf{U} \mathbf{A}_L(s)]^{-1} [\mathbf{U} \mathbf{B}_L(s)] = \mathbf{A}_{LI}^{-T}(s) \mathbf{B}_{LI}(s) \quad (2.22)$$

a také

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{A}_L^{-T}(s) \mathbf{B}_L(s) = [\mathbf{L}(s) \mathbf{A}_L(s)]^{-1} \mathbf{L}(s) \mathbf{B}_L(s) = \mathbf{A}_{LI}^{-T}(s) \mathbf{B}_{LI}(s) \quad (2.23)$$

V tomto případě jsou \mathbf{A}_{LI} , \mathbf{B}_{LI} zleva nesoudělné a maticový zlomek je zleva nereducovatelný.

V začátcích kapitoly jsme poznali, jaký vztah má matice \mathbf{D} stavového popisu (2.1) a (2.2) k ryzosti přenosové matice (2.10). Jakým způsobem ale poznat, že přenosová matice je ryzí, je-li dána formou maticového zlomku? Stejně tak by mohla vyvstat otázka, a co stabilita? Proto se v závěru podkapitoly zaměříme na několik klíčových pravidel [8], [10], mající vztah k předchozím otázkám.

- Nechť je dána přenosová matice ve tvaru (2.16) s polynomiálními maticemi $\mathbf{A}_L(s)$, $\mathbf{B}_L(s)$ zleva nesoudělnými a matice $\mathbf{A}_L(s)$ je navíc řádkově redukovaná. Zavedeme-li označení $r_i \mathbf{A}_L(s)$ resp. $r_i \mathbf{B}_L(s)$ pro maximální stupeň polynomu na odpovídajícím i -tém řádku matice $\mathbf{A}_L(s)$ resp. matice $\mathbf{B}_L(s)$ a platí-li podmínka

$$r_i \mathbf{B}_L(s) < r_i \mathbf{A}_L(s) \text{ (pro } 1 \leq i \leq r), \quad (2.24)$$

říkáme, že přenos (2.16) je striktně ryzí. V případě, že je splněna pouze neostrá nerovnost, je přenos pouze ryzí.

- Nechť je dána přenosová matice ve tvaru (2.17) s polynomiálními maticemi $\mathbf{A}_R(s)$, $\mathbf{B}_R(s)$ zprava nesoudělnými a matice $\mathbf{A}_R(s)$ je navíc sloupcově redukováná. Zavedeme-li označení $c_j \mathbf{A}_R(s)$ resp. $c_j \mathbf{B}_R(s)$ pro maximální stupeň polynomu na odpovídajícím j -tému sloupci matice $\mathbf{A}_R(s)$ resp. matice $\mathbf{B}_R(s)$ a platí-li podmínka

$$c_j \mathbf{B}_R(s) < c_j \mathbf{A}_R(s) \text{ (pro } 1 \leq j \leq m), \quad (2.25)$$

Říkáme, že přenos (2.17) je striktně ryzí. V případě, že je splněna pouze neostrá nerovnost, je přenos pouze ryzí.

- Rozepsáním inverze matice $\mathbf{A}_L(s)$ v (2.16) prostředním podílu adjungované matice s jejím determinantem, přejde rovnice na tvar

$$\mathbf{G}(s) = \frac{1}{\det \mathbf{A}_L(s)} \text{adj} \mathbf{A}_L(s) \mathbf{B}_L(s). \quad (2.26)$$

Náleží-li všechny kořeny polynomu $\det \mathbf{A}_L(s)$, představující póly přenosové matice $\mathbf{G}(s)$, levé části komplexní roviny, říkáme, že systém je BIBO stabilní (Omezený vstup generuje omezený výstup).

- Máme-li dánu přenosovou matici ve formě pravého maticového zlomku (2.17), je obdobně systém BIBO stabilní tehdy, jestliže kořeny polynomu $\det \mathbf{A}_R(s)$ v rovnici

$$\mathbf{G}(s) = \frac{1}{\det \mathbf{A}_R(s)} \mathbf{B}_R(s) \text{adj} \mathbf{A}_R(s), \quad (2.27)$$

budou spadat do levé části komplexní roviny.

3 IDENTIFIKACE MNOHAROZMĚROVÉHO SYSTÉMU

Je nezbytné poznat a pochopit objekt dříve, než se s ním pustíme do samotné manipulace. Nazveme-li formálně tento objekt systémem, můžeme jej poznat prostřednictvím modelovacích a identifikačních technik [4], které nám pomáhají rozvíjet znalosti o daném systému. Jsou také základním předpokladem pro mnohé postupy, spadající svým charakterem do inženýrské a technologické praxe a zvláště důležitou roli pak hrají v oblasti automatického řízení. Samotné modelování je již rozsáhlá oblast, bohatá na celou škálu známých metod, založených na nejrůznějších principech. Mezi nimi je velmi oblíbené modelování fyzikálních systémů, založené na aplikaci základních fyzikálních zákonů. Právě zmíněná aplikace si dává za cíl v co nejširším významu postihnout jevy, v daném systému probíhající, skrze obecný matematický model, a tím pádem poskytnout klíčové parametry, které mají být stanoveny na základě druhé zmíněné techniky, v procesu identifikace. Nástroj, který si ukážeme za účelem identifikace mnohazarozměrového systému bude využívat tzv. spojitého externího lineárního modelu [6], [7], jehož parametry jsme však nuceni, z programového hlediska, odhadovat v diskrétním čase, což přibližuje [9]. Tento rozpor vyřešíme zavedením tzv. delta modelu [6], [14], paralelně vedle možnosti identifikace pomocí přímé metody [16]. Oba uvedené přístupy, v kombinaci s rekurzivní identifikační metodou nejmenších čtverců [3], [4], kterou upřesníme v závěru kapitoly, zastřešují celkové pojednání, jímž dospějeme k odhadům parametrů mnohazarozměrového systému.

3.1 Externí lineární model

Definujme operátor σ daný jako

$$\sigma = d/dt \quad (3.1)$$

Spojitým externím lineárním modelem potom budeme rozumět vektorovou diferenciální rovnici

$$\mathbf{A}(\sigma)\mathbf{y}(t) = \mathbf{B}(\sigma)\mathbf{u}(t), \quad (3.2)$$

kde $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^r$ představuje vektor výstupních veličin, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ vystupuje jako vektor vstupních veličin. Matice $\mathbf{A}(\sigma)$ resp. matice $\mathbf{B}(\sigma)$ je polynomiální matice v $\mathbb{R}^r[\sigma]$ resp.

$\Re^m[\sigma]$. Přejdeme-li k popisu v oblasti komplexní proměnné s , prostřednictvím Laplaceovy transformace, dospějeme k rovnici

$$\mathbf{A}(s)\mathbf{Y}(s) = \mathbf{B}(s)\mathbf{U}(s) + \mathbf{o}_1(s), \quad (3.3)$$

jež je velmi podobná (2.18). Rozdíl vzhledem ke (2.18), reprezentuje nenulový vektor počátečních podmínek $\mathbf{o}_1(s)$. Matice $\mathbf{A}(s) \in \Re^{rr}[s]$ $\mathbf{B}(s) \in \Re^{rm}[s]$, vystupují jako zleva nesoudělné polynomiální matice (2.11). Na základě obsahu předchozí kapitoly je víc než evidentní, že jsou dány ve tvaru

$$\mathbf{A}(s) = \begin{bmatrix} a_{11}(s) & \cdots & a_{1j}(s) & \cdots & a_{1r}(s) \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{i1}(s) & \cdots & a_{ij}(s) & \cdots & a_{ir}(s) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{r1}(s) & \cdots & a_{rj}(s) & \cdots & a_{rr}(s) \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

$$\mathbf{B}(s) = \begin{bmatrix} b_{11}(s) & \cdots & b_{1j}(s) & \cdots & b_{1m}(s) \\ \vdots & & \vdots & & \\ b_{i1}(s) & \cdots & b_{ij}(s) & \cdots & b_{im}(s) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{r1}(s) & \cdots & b_{rj}(s) & \cdots & b_{rm}(s) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Libovolný prvek $a_{ij}(s) \in \Re[s]$ polynomiální matice $\mathbf{A}(s)$ chápeme ve smyslu (2.12), jako

$$a_{ij}(s) = a_{n_{ij},ij} s^{n_{ij}} + a_{n_{ij}-1,ij} s^{n_{ij}-1} + \cdots + a_{1,ij} s + a_{0,ij} = \sum_{k=0}^{n_{ij}} a_{kij} s^k, \quad (3.6)$$

kde $i = 1, \dots, r$ a $j = 1, \dots, r$.

Pro libovolný prvek $b_{ij}(s) \in \Re[s]$ polynomiální matice $\mathbf{B}(s)$ můžeme obdobně psát

$$b_{ij}(s) = b_{m_{ij},ij} s^{m_{ij}} + b_{m_{ij}-1,ij} s^{m_{ij}-1} + \cdots + b_{1,ij} s + b_{0,ij} = \sum_{k=0}^{m_{ij}} b_{kij} s^k, \quad (3.7)$$

kde nyní $i = 1, \dots, r$ a $j = 1, \dots, m$.

Pro některé další účely předpokládejme striktně ryzí přenos systému daný ve formě levého maticového zlomku (2.23)

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{A}^{-1}(s)\mathbf{B}(s) \quad (3.8)$$

a dále, že polynomy s nejvyšší mocninou v každém řádku polynomiální matice $A(s)$, leží na její diagonále a krom toho navíc, jsou tyto polynomy monické.

3.1.1 Přímá metoda

Uvažme nejprve vektorovou diferenciální rovnici (3.2) a zavedme vektory filtrovaných veličin ve smyslu

$$C(\sigma)u_f(t) = u(t), \quad (3.9)$$

$$C(\sigma)y_f(t) = y(t), \quad (3.10)$$

kde u_f resp. y_f je vektor filtrované vstupní resp. výstupní veličiny a $C(\sigma)$ vystupuje jako stabilní polynomiální matice, splňující podmínku

$$\deg C(\sigma) \geq \deg A(\sigma), \quad (3.11)$$

Laplaceova transformace pro originály (3.9) a (3.10) vede na obrazy

$$C(s)U_f(s) = U(s) + o_2(s), \quad (3.12)$$

$$C(s)Y_f(s) = Y(s) + o_3(s), \quad (3.13)$$

kde $o_2(s)$, $o_3(s)$ reprezentují vektory počátečních podmínek.

Dosazením (3.12) a (3.13) do (3.3), získáme vztah

$$A(s)C(s)Y_f(s) = B(s)C(s)U_f(s) + o(s), \quad (3.14)$$

Popisující vztah mezi vektorem filtrované vstupní a výstupní veličiny. Je zjevné, že vektor $o(s)$ je vyjádřený jako

$$o(s) = o_1(s) - B(s)o_2(s) + A(s)o_3(s) \quad (3.15)$$

Předpokládáme-li matici $C(s)$ jako diagonální, vyjádřenou ve formě

$$C(s) = c(s)I, \quad (3.16)$$

kde I , je jednotková matice a $c(s)$ monický polynom. Přejde (3.14) popisující vztah mezi filtrovanými veličinami na rovnici

$$A(s)Y_f(s) = B(s)U_f(s) + \zeta(s) \quad (3.17)$$

Dodejme ještě, že $\zeta(s)$ reprezentuje vektor racionálních funkcí, vyjadřující rozdíl mezi počátečními podmínkami filtrovaných a nefiltrovaných veličin s ohledem k uvažovanému rovnovážnému bodu.

Zpětnou konverzí do časové oblasti bude (3.17) dána jako

$$\mathbf{A}(\sigma)\mathbf{y}_f(t) = \mathbf{B}(\sigma)\mathbf{u}_f(t) \quad (3.18)$$

Vybereme-li libovolný i -tý řádek (3.18), můžeme lehce ukázat, že jej vystihuje

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n_{i1}} a_{j,i1} y_{1f}^{(j)} + \dots + \sum_{j=0}^{n_{ir}} a_{j,ir} y_{rf}^{(j)} = \\ = \sum_{j=0}^{m_{i1}} b_{j,i1} u_{1f}^{(j)} + \dots + \sum_{j=0}^{m_{im}} b_{j,im} u_{mf}^{(j)} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Všimněme si, že v (3.19) není záměrně uveden argument filtrované vstupní a výstupní veličiny. Je nutné mít totiž na paměti, že filtrované hodnoty a jim odpovídající derivace, jsou vzorkovány průchodem filtrů (3.9), (3.10) v určitých diskrétních časových okamžicích. Zavedením diskrétního času $t_k = kT_s$ pro $k = 1, 2, \dots$ a vzorkovací periodu T_s definujeme regresní vektor

$$\begin{aligned} \Phi_i^T(t_k) = [-y_{1f}(t_k), \dots, -y_{1f}^{(n_{i1})}(t_k), \dots \\ -y_{if}(t_k), \dots, -y_{if}^{(n_{ir}-1)}(t_k), \dots, -y_{rf}(t_k), \dots, -y_{rf}^{(n_{ir})}(t_k), \\ u_{1f}(t_k), \dots, u_{1f}^{(m_{i1})}(t_k), \dots, u_{mf}(t_k), \dots, u_{mf}^{(m_{im})}(t_k)] \end{aligned} \quad (3.20)$$

a jemu odpovídající vektor parametrů i -tého řádku

$$\begin{aligned} \Theta_i^T = [a_{0,i1}, \dots, a_{n_{i1},i1}, \dots, a_{0,ii}, \dots, a_{n_{ir}-1,ii}, \dots \\ a_{0,ri}, \dots, a_{n_{ir},ri}, b_{0,i1}, \dots, b_{m_{i1},i1}, \dots, b_{0,im}, \dots, b_{m_{im},im}] \end{aligned} \quad (3.21)$$

Uvedenými vztahy (3.20) a (3.21) jsme se dotkli identifikační procedury, jejíž možnosti budou předmětem dalšího výkladu. Než tomu tak bude, předběhneme a ukažme si ještě, že uvedené parametry i -tého řádku (3.21), lze poté v diskrétním čase odhadovat prostřednictvím regresního ARX modelu

$$y_{if}^{(n_{ir})}(t_k) = \Theta_i^T(t_k) \Phi_i(t_k) + \varepsilon_i(t_k), \quad (3.22)$$

kde $\varepsilon_i(t_k)$ reprezentuje náhodnou, neměřitelnou složku.

3.2 Externí delta model

Nechť operátor δ je definovaný jako

$$\delta = \frac{q-1}{T_0}, \quad (3.23)$$

kde T_0 je perioda vzorkování a q vystupuje jako dopředný operátor posuvu definovaný ve smyslu

$$qy(k) = y(k+1) \quad (3.24)$$

Z definice operátoru posuvu je evidentní, že platí

$$\delta y(k) = \frac{y(k+1) - y(k)}{T_0} \quad (3.25)$$

Všimněme si, že zavedení alternativního diskrétního modelu, obecně zvaného delta, umožňuje formulovat konvergenci diskrétních popisů systémů ke spojitým interpretacím se zkracující se periodou vzorkování, takže operátor δ aproximuje derivaci a tedy

$$\lim_{T_0 \rightarrow 0} \delta = \frac{d}{dt} \quad (3.26)$$

S ohledem na výklad je zjevné, že externí delta model můžeme podle (3.2) definovat jako

$$\mathbf{A}'(\delta)\mathbf{y}(t') = \mathbf{B}'(\delta)\mathbf{u}(t'), \quad (3.27)$$

přičemž argument t' je diskrétní čas a matice $\mathbf{A}'(\delta) \in \mathfrak{R}^{rr}[\delta]$ a matice $\mathbf{B}'(\delta) \in \mathfrak{R}^{rr}[\delta]$ jsou polynomiální matice s identickou strukturou jako (3.4), (3.5) ve tvaru

$$\mathbf{A}'(\delta) = \begin{bmatrix} a'_{11}(\delta) & \cdots & a'_{1j}(\delta) & \cdots & a'_{1r}(\delta) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1}(\delta) & \cdots & a'_{ij}(\delta) & \cdots & a'_{ir}(\delta) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a'_{r1}(\delta) & \cdots & a'_{rj}(\delta) & \cdots & a'_{rr}(\delta) \end{bmatrix}, \quad (3.28)$$

$$\mathbf{B}'(\delta) = \begin{bmatrix} b'_{11}(\delta) & \cdots & b'_{1j}(\delta) & \cdots & b'_{1m}(\delta) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b'_{i1}(\delta) & \cdots & b'_{ij}(\delta) & \cdots & b'_{im}(\delta) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b'_{r1}(\delta) & \cdots & b'_{rj}(\delta) & \cdots & b'_{rm}(\delta) \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Pro libovolný prvek $a'_{ij}(s) \in \mathfrak{R}[\delta]$ polynomiální matice $A'(\delta)$ platí

$$a'_{ij}(\delta) = a'_{n_{ij},ij} \delta^{n_{ij}} + a'_{n_{ij}-1,ij} \delta^{n_{ij}-1} + \dots + a'_{1,ij} \delta + a'_{0,ij} = \sum_{k=0}^{n_{ij}} a'_{kij} \delta^k, \quad (3.30)$$

kde $i = 1, \dots, r$ a $j = 1, \dots, r$.

Libovolný prvek polynomiální matice $B'(\delta)$ označený $b'_{ij}(s) \in \mathfrak{R}[\delta]$, můžeme vyjádřit jako

$$b'_{ij}(\delta) = b'_{m_{ij},ij} \delta^{m_{ij}} + b'_{m_{ij}-1,ij} \delta^{m_{ij}-1} + \dots + b'_{1,ij} \delta + b'_{0,ij} = \sum_{k=0}^{m_{ij}} b'_{kij} \delta^k, \quad (3.29)$$

pro $i = 1, \dots, r$ a $j = 1, \dots, m$.

Obdobně předpokládáme, že polynomy s nejvyšší mocninou n_{ii} v každém řádku polynomiální matice $A'(\delta)$, se nacházejí na její hlavní diagonále a jsou monické, tedy s jednotkovým koeficientem u nejvyšší mocniny.

Zavedením substituce pro diskrétní čas $t' = k_0 - n_{ii}$, jsme schopni odvodit rovnici vystihující i -tý řádek vektorové rovnice (3.13)

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n_{i1}} a'_{j,i1} \delta^j y_1(k_0 - n_{ii}) + \dots + \sum_{j=0}^{n_{ir}} a'_{j,ir} \delta^j y_r(k_0 - n_{ii}) = \\ = \sum_{j=0}^{m_{i1}} b'_{j,i1} \delta^j u_1(k_0 - n_{ii}) + \dots + \sum_{j=0}^{m_{im}} b'_{j,im} \delta^j u_m(k_0 - n_{ii}) \end{aligned}, \quad (3.30)$$

kde pro veličiny (3.30) v oblasti delta platí

$$\delta^{n_{ij}} y_i(k_0 - n_{ii}) = \sum_p \frac{(-1)^p}{T_0^{n_{ij}}} \binom{n_{ij}}{p} y_i(k_0 - n_{ii} + n_{ij} - p), \quad (3.31)$$

$$\delta^{m_{ik}} u_k(k_0 - n_{ii}) = \sum_p \frac{(-1)^p}{T_0^{m_{ik}}} \binom{m_{ik}}{p} u_k(k_0 - n_{ii} + m_{ik} - p) \quad (3.32)$$

3.2.1 Odhad parametrů delta modelu

Parametry δ -modelu, uvedeného v předcházejícím výkladu, lze odhadovat přímo z navzorkovaných veličin, bez nutnosti filtrace, neboť bylo ukázáno, že podle [4] tyto parametry konvergují ke spojitým interpretacím pro dostatečně malou periodu vzorkování,

ve srovnání s dynamikou řízeného procesu. Vycházíme-li z předpokladu, že každá výstupní veličina figuruje jako výstupní signál samostatného subsystému, jsme schopni identifikovat, v paralelně běžící proceduře, každý subsystém samostatně prostřednictvím vztahů, používajících se k identifikaci systémů jednorozměrových.

Je pochopitelné, že v každém okamžiku máme k dispozici aktuální hodnotu výstupní veličiny i -tého řádku $y_i(k_0)$, která je obsažena výhradně na levé straně rovnice (3.31).

Zavedeme-li označení

$$\varphi_{i,y_i}^j = \delta^j y_i(k_0 - n_{ii}), \quad \varphi_{i,u_k}^j = \delta^j u_k(k_0 - n_{ii}), \quad (3.33)$$

je vektor dat i -tého řádku roven

$$\begin{aligned} \Phi_{\delta i}^T = & [-\varphi_{i,y_1}^0, \dots, -\varphi_{i,y_1}^{n_{i1}}, \dots, -\varphi_{i,y_i}^0, \dots, -\varphi_{i,y_i}^{n_{ii}-1}, \dots, -\varphi_{i,y_r}^0, \dots, -\varphi_{i,y_r}^{n_{ir}}, \dots \\ & \varphi_{i,u_1}^0, \dots, \varphi_{i,u_1}^{m_{i1}}, \dots, \varphi_{i,u_m}^0, \dots, \varphi_{i,u_m}^{m_{im}}] \end{aligned} \quad (3.34)$$

a vektor parametrů, totožný s (3.21), vystihuje

$$\begin{aligned} \Theta_i^T = & [a'_{0,i1}, \dots, a'_{n_{i1},i1}, \dots, a'_{0,ii}, \dots, a'_{n_{ii}-1,ii}, \dots \\ & a'_{0,ri}, \dots, a'_{n_{ir},ri}, b'_{0,i1}, \dots, b'_{m_{i1},i1}, \dots, b'_{0,im}, \dots, b'_{m_{im},im}] \end{aligned} \quad (3.35)$$

Pro úplnost výkladu dodejme, že hledané parametry je poté možno odhadovat prostřednictvím dynamického, diskrétního ARX modelu (3.22) ve formě

$$\varphi_{i,y_i}^{n_{ii}} = \Theta_i^T \Phi_{\delta i} + \varepsilon_i(k_0) \quad (3.36)$$

3.3 Rekurzivní identifikace metodou nejmenších čtverců

Z hlediska měnících se parametrů vyšetřovaného objektu, je nezbytnou a nepostradatelnou součástí, v návrhu adaptivního řízení [3], průběžný identifikační algoritmus, jehož smyslem je upotřebit nově nabyté hodnoty výhradně pro korekci stávajících odhadů parametrů. Z tohoto úhlu pohledu se uvedený algoritmus jeví jako efektivní, bez větších nároků na paměťovou režii vzhledem k tomu, že jsme schopni monitorovat změny parametrů procesu v reálném čase.

Definujme lineární jednorozměrový stochastický model, popsany regresním modelem ARX [4], jehož modifikovaný zápis byl již uveden v (3.22), (3.36) jako

$$y(k) = \Theta^T(k) \Phi(k-1) + \varepsilon(k), \quad (3.37)$$

kde $\boldsymbol{\theta}^T(k)$ představuje vektor odhadovaných parametrů, $\boldsymbol{\Phi}(k)$ je vektor dat (regresor) a $\varepsilon(k)$ vyjadřuje neměřitelnou náhodnou složku.

Cílem je tedy rekurzivně, v každém kroku, prostřednictvím nově naměřených hodnot veličin, odhadovat doposud neznámé parametry, obsažené vektorem $\boldsymbol{\theta}$.

Uvědomíme-li si význam chyby predikce, vyjádřeného jako

$$e_s(k) = y(k) - \underbrace{\boldsymbol{\theta}^T(k)\boldsymbol{\Phi}(k)}_{\hat{y}(k)} = [1 \quad -\boldsymbol{\theta}^T(k)] \begin{bmatrix} y(k) \\ \boldsymbol{\Phi}(k) \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

bude předmětem snažení najít takový vektor $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, minimalizující kritérium

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{p=0}^k [y(p) - \boldsymbol{\theta}^T(p)\boldsymbol{\Phi}(p)]^2 = \sum_{p=0}^k e_s^2(p), \quad (3.39)$$

vyjadřující součet odchylek mezi predikovanou a skutečnou hodnotou pozorované veličiny.

Výsledkem minimalizace výše uvedeného kritéria vzniknou vztahy, jejichž úpravami [4] dospějeme ke konečným rovnicím (3.40), (3.42), přímo aplikovatelným v algoritmu metody nejmenších čtverců.

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) + \frac{\mathbf{C}(k-1)\boldsymbol{\Phi}(k)}{1 + \xi(k)} [y(k) - \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)\boldsymbol{\Phi}(k)], \quad (3.40)$$

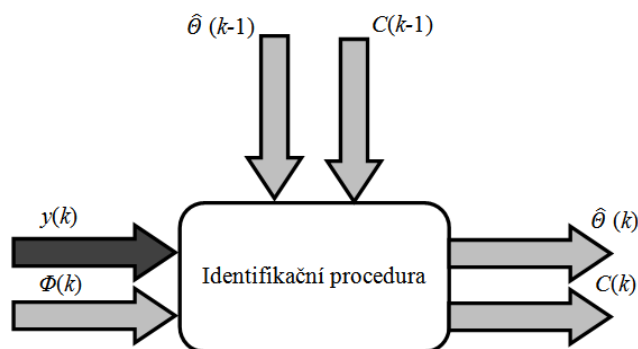
kde výraz

$$\xi(k) = \boldsymbol{\Phi}^T(k)\mathbf{C}(k-1)\boldsymbol{\Phi}(k), \quad (3.41)$$

představuje pomocnou skalární veličinu a pro čtvercovou kovarianční matici platí aktualizací rovnice

$$\mathbf{C}(k) = \mathbf{C}(k-1) - \frac{\mathbf{C}(k-1)\boldsymbol{\Phi}(k)\boldsymbol{\Phi}^T(k)\mathbf{C}(k-1)}{1 + \xi(k)}, \quad (3.42)$$

čímž celou identifikační proceduru znázorněnou na Obr. 2, můžeme, v každé periodě vzorkování, s nápomocí uvedených vztahů vystihnout v několika hlavních krocích.



Obr. 2: Princip rekurzivní identifikace metodou nejmenších čtverců

Algoritmus rekurzivní metody nejmenších čtverců

1. Inicializace vektoru parametrů $\hat{\boldsymbol{\theta}}(0)$ a diagonály kovarianční matice $\mathbf{C}(0)$.
2. Rekurzivní výpočet odhadů parametrů podle (3.40).
3. Rekurzivní výpočet kovarianční matice podle (3.42).

Z hlediska obecného použití, které je předmětem diskuze [3], se uvedený přístup nejeví jako nejvhodnější, neboť v mnoha případech nesou aktuálnější data větší míru informace, a tak vystihují dynamické chování systému lépe, než data starší. Vzpomeňme si, že hlavním rysem časově variantního systému je vývoj parametrů s časem. Proto má smysl si v identifikační proceduře stanovit váhy, jež by starší data potlačovala a zároveň data nová, popisující aktuální dynamiku lépe, zvýhodňovala. Za tímto účelem vážení byly odvozeny účinnější algoritmy [4], z nichž některé vzápětí uvedeme.

3.3.1 Exponenciální zapomínání dat

Jednou z technik, která klade důraz na uvedený způsob přisuzování menších resp. větších váhových koeficientů starším resp. novějším datům, je metoda exponenciálního zapomínání. Minimalizační kvadratické kritérium (3.39) potom modifikujeme na tvar

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{p=0}^k \varphi^{2(k-p)} [y(p) - \boldsymbol{\theta}^T(p) \boldsymbol{\Phi}(p)]^2 = \sum_{p=0}^k \varphi^{2(k-p)} e_s^2(p), \quad (3.43)$$

kde $0 < \varphi^2 < 1$ je faktor exponenciálního zapomínání. Je-li hodnota rovna jedné, mají všechna data stejnou váhu a algoritmus přechází na prostou metodu nejmenších čtverců.

To je vhodné v případě, jsou-li parametry systému konstantní hodnoty. Dochází-li však ke zmíněnému vývoji parametrů, je nežádoucí volit hodnotu faktoru blízko horní hranici, neboť zpomalujeme reakce na rychlé změny parametrů.

Výsledné vztahy, ke kterým vede minimalizace kvadratického kritéria (3.43) získávají tvar

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) + \frac{\mathbf{C}(k-1)\boldsymbol{\Phi}(k)}{\varphi^2 + \xi(k)}[y(k) - \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)\boldsymbol{\Phi}(k)], \quad (3.44)$$

$$\mathbf{C}(k) = \frac{1}{\varphi^2} \left[\mathbf{C}(k-1) - \frac{\mathbf{C}(k-1)\boldsymbol{\Phi}(k)\boldsymbol{\Phi}^T(k)\mathbf{C}(k-1)}{\varphi^2 + \xi(k)} \right] \quad (3.45)$$

3.3.2 Adaptivní směrové zapomínání dat

Nedostatkem exponenciálního zapomínání je fakt, že konstantní faktor způsobuje útlum doposud nahromaděné informace o parametrech vektoru $\boldsymbol{\theta}(k)$, a proto se jeví výhodné uplatňovat exponenciální zapomínání pouze na složku, nesoucí novou informaci. V případě, že pomocná skalární veličina $\xi(k)$ splňuje podmínku

$$\xi(k) > 0, \quad (3.46)$$

pak čtvercovou kovarianční matici vystihuje aktualizací rovnice

$$\mathbf{C}(k) = \mathbf{C}(k-1) - \frac{\mathbf{C}(k-1)\boldsymbol{\Phi}(k)\boldsymbol{\Phi}^T(k)\mathbf{C}(k-1)}{\varepsilon^{-1}(k) + \xi(k)}, \quad (3.47)$$

přičemž

$$\varepsilon(k) = \varphi(k) - \frac{1 - \varphi(k)}{\xi(k)}, \quad (3.48)$$

kde $\varphi(k)$ je nyní faktor adaptivního směrového zapomínání.

Nevyhovuje-li podmínka (3.46) ve významu

$$\xi(k) = 0, \quad (3.49)$$

je kovariační matice ponechána beze změny, takže

$$\mathbf{C}(k) = \mathbf{C}(k-1) \quad (3.50)$$

Aktualizace adaptivního směrového zapomínání je provedena prostřednictvím rovnic

$$\varphi(k) = \left\{ 1 + (1 + \rho) [\ln(1 + \xi(k))] + \left[\frac{(\nu(k) + 1)\eta(k)}{1 + \xi(k) + \eta(k)} - 1 \right] \frac{\xi(k)}{1 + \xi(k)} \right\}^{-1}, \quad (3.51)$$

kde

$$\eta(k) = \frac{[y(k) - \hat{\Theta}(k-1)\Phi(k)]^2}{\lambda(k)}, \quad (3.52)$$

$$\nu(k) = \varphi(k-1)[\nu(k) + 1], \quad (3.53)$$

$$\lambda(k) = \varphi(k-1) \left[\lambda(k-1) + \frac{[y(k) - \hat{\Theta}(k-1)\Phi(k)]^2}{1 + \xi(k)} \right], \quad (3.54)$$

tvoří pomocné proměnné, nutné z hlediska výpočtu (3.51). Vrátime-li se k uvedené algoritnické struktuře metody nejmenších čtverců a inicializačnímu bodu, je nutné si uvědomit, význam apriorní informace pro volbu počátečních podmínek, které jsou v případě adaptivního směrového zapomínání rozšířeny o další skalární proměnné (3.51), (3.53), (3.54). Jak uvádí [3], [4] je zapotřebí zahájit identifikaci takovým způsobem, aby počáteční podmínky byly co nejvěrnějším obrazem apriorní informace, jež i malá, může kladně ovlivnit identifikaci, a tím pádem vést k efektivnějšímu adaptivnímu řízení.

4 SYNTÉZA ŘÍZENÍ V OKRUHU POLYNOMIÁLNÍCH MATIC

Raná teorie řízení, rozvíjená a uplatňovaná během a po druhé světové válce, si zakládala, téměř výhradně na technice přenosové funkce. Matematický aparát, potřebný pro tyto účely, byl dán Laplaceovou, Fourierovou a později také Z-transformací. Nezbytné techniky, související s přenosovými funkcemi, bylo snadné pochopit a aplikovat, alespoň co se týká jednorozměrových systémů. Navíc blízká vazba k experimentálním metodám, založeným na měření frekvenční charakteristiky, z ní učinila velmi sympatický nástroj pro okruh lidí, zápolícími s praktickými problémy v oblasti řízení.

V následující době vykrystalo několik pokusů, jež si kladly za cíl zobecnit jednorozměrovou přenosovou funkci z hlediska širšího použití pro mnohazměrové systémy. Vzniklá mnohazměrová přenosová funkce, která se objevila jako výsledek těchto pokusů, však nevzbudila v tomto čase velkou pozornost zejména kvůli nově vzniklému „stavovému přístupu“, jež se stal univerzálním nástrojem pro řešení celé řady problémů v oblasti řízení.

Během rozmachu stavového přístupu však stále existovala skupina lidí, jak se můžeme dočíst v [2], která s uvedeným přístupem nebyla spokojena a tak dala vzniknout práci, která navazovala na snahy, vedoucí k zobecnění původní přenosové funkce. Jako výsledek usilovné práce výše zmíněných cílů, se objevila polynomiální teorie řízení, jejímiž základními stavebními kameny jsou polynomy a polynomiální matice, kterým byla věnována pozornost ve 2. kapitole, a tudíž bude hlavním účelem současné kapitoly ukázat její přednosti pro řešení problémů týkajících se lineárních, časově invariantních mnohazměrových systémů, kde jsou ovšem na rozdíl od jednorozměrných systémů nahrazeny příslušné operace s polynomy, operacemi v okruhu polynomiálních matic.

Jak dále uvádí [8], poskytuje oproti klasickým metodám, nejen způsob výpočtu parametrů, ale také konkrétní vhodnou strukturu, jež byla z pohledu konvenčního přístupu a priori daná. Otázka syntézy se tedy přenesla do sféry numerických metod řešení algebraických rovnic, což vede k vysokému stupni abstrakce a ztrátě transparentnosti fyzikálního pohledu na řešený systém. Nicméně, její široká použitelnost pro řízení systémů s neminimální fází, integračními vlastnostmi, nestabilní a také pro jiné referenční signály než skokové, z ní činí výkonný nástroj teorie automatického řízení.

Obecné požadavky na vlastnosti systému řízení

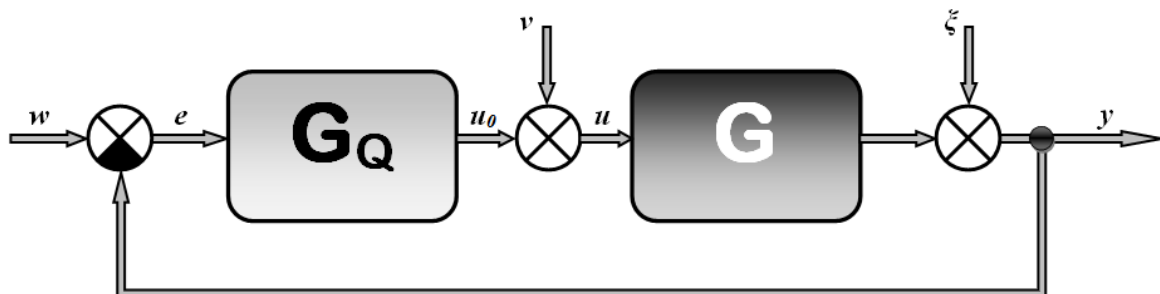
Ve snaze aplikovat polynomiální metodu vycházíme z obecně známých požadavků [10] na vlastnosti systému řízení:

- Stabilita systému řízení
- Vnitřní ryzost systému řízení
- Asymptotické sledování referenčního signálu
- Úplná kompenzace poruchy působící v systému řízení

Vedle dalších aspektů, jako je požadovaná kvalita regulace, se výše uvedené požadavky vzápětí promítnou v další části výkladu, jež uvádí dvě základní konfigurace systému řízení.

4.1 1 DOF konfigurace systému řízení

Uvažujme 1 DOF konfiguraci systému řízení, mnohazměrového regulačního obvodu, přebíranou z [8], tedy konfiguraci s jedním zpětnovazebním regulátorem, kterou zachycuje Obr. 3.



Obr. 3: Systém řízení s jedním stupněm volnosti – konfigurace 1 DOF

kde

$\mathbf{y}^T = [y_1, y_2, \dots, y_r]$ reprezentuje vektor výstupních veličin,

$\mathbf{u}^T = [u_1, u_2, \dots, u_m]$ reprezentuje vektor akčních veličin,

$\mathbf{w}^T = [w_1, w_2, \dots, w_r]$ reprezentuje vektor referenčních veličin,

$\mathbf{v}^T = [v_1, v_2, \dots, v_m]$ reprezentuje vektor poruchových veličin na vstupu systému,

$\boldsymbol{\xi}^T = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r]$ reprezentuje vektor poruchových veličin na výstupu systému.

Předpokládejme přenos systému (2.21) resp. (2.23) zprava resp. zleva neredukovatelného polynomiálního maticového zlomku ve tvaru

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{A}_L^{-1}(s)\mathbf{B}_L(s) = \mathbf{B}_R(s)\mathbf{A}_R^{-1}(s), \quad (4.1)$$

kde na (4.1) klademe některé z požadavků, jež byly uvedeny v předchozí kapitole. Jedním z nich je ryzost přenosové matice.

Jak referenční signály, tak i poruchové veličiny působící na vstupu i na výstupu řízeného mnohazměrového systému usuzujeme z kategorie deterministických funkcí, jejichž obraz lze vyjádřit formou podílu polynomů.

Zavedeme-li funkci splňující uvedený předpoklad jako $\kappa(t)$, můžeme pro odpovídající obraz psát

$$K(s) = \frac{h(s)}{f(s)}, \quad (4.2)$$

přičemž platí podmínka $\deg f(s) > \deg h(s)$.

Na základě této analogie, můžeme jednotlivé vybrané vektory, figurující v konfiguraci řízení, vyjádřit jako

$$\mathbf{w}^T(s) = \left[\frac{h_{w1}(s)}{f_{w1}(s)}, \frac{h_{w2}(s)}{f_{w2}(s)}, \dots, \frac{h_{wr}(s)}{f_{wr}(s)} \right], \quad (4.3)$$

$$\mathbf{v}^T(s) = \left[\frac{h_{v1}(s)}{f_{v1}(s)}, \frac{h_{v2}(s)}{f_{v2}(s)}, \dots, \frac{h_{vm}(s)}{f_{vm}(s)} \right], \quad (4.4)$$

$$\boldsymbol{\xi}^T(s) = \left[\frac{h_{\xi1}(s)}{f_{\xi1}(s)}, \frac{h_{\xi2}(s)}{f_{\xi2}(s)}, \dots, \frac{h_{\xi r}(s)}{f_{\xi r}(s)} \right], \quad (4.5)$$

nebo také ve formě

$$\mathbf{w}(s) = \mathbf{F}_w^{-1}(s)\mathbf{h}_w(s), \quad \mathbf{v}(s) = \mathbf{F}_v^{-1}(s)\mathbf{h}_v(s), \quad \boldsymbol{\xi}(s) = \mathbf{F}_\xi^{-1}(s)\mathbf{h}_\xi(s), \quad (4.6)$$

přičemž

$$\mathbf{F}_w(s) \in \mathfrak{R}^{rr}[s], \quad \mathbf{F}_v(s) \in \mathfrak{R}^{mm}[s], \quad \mathbf{F}_\xi(s) \in \mathfrak{R}^{rr}[s], \quad (4.7)$$

chápeme jako diagonální polynomiální matice ve tvaru

$$\mathbf{F}(s) = \begin{bmatrix} f_{11}(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_{22}(s) & \cdots & 0 \\ \vdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & f_{\mu\mu}(s) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(s) \in \mathfrak{R}^{\mu\mu}[s] \quad (4.8)$$

a

$$\mathbf{h}_w^T(s) = [\tilde{h}_{w1}(s), \dots, \tilde{h}_{wr}(s)], \mathbf{h}_v^T(s) = [\tilde{h}_{v1}(s), \dots, \tilde{h}_{vm}(s)], \mathbf{h}_\xi^T(s) = [\tilde{h}_{\xi1}(s), \dots, \tilde{h}_{\xi r}(s)], \quad (4.9)$$

vystupují jako vektory polynomů.

Obdobně jako ve (4.1) předpokládejme přenosovou matici zpětnovazebního regulátoru ve formě zleva resp. zprava neredukovatelného polynomiálního maticového zlomku jako

$$\mathbf{G}_Q(s) = \mathbf{P}_L^{-1}(s)\mathbf{Q}_L(s) = \mathbf{Q}_R(s)\mathbf{P}_R^{-1}(s), \quad (4.10)$$

s polynomiálními maticemi $\mathbf{P}_L(s) \in \mathfrak{R}^{mm}[s]$, $\mathbf{Q}_L(s) \in \mathfrak{R}^{mr}[s]$, resp. $\mathbf{P}_R(s) \in \mathfrak{R}^{rr}[s]$, $\mathbf{Q}_R(s) \in \mathfrak{R}^{mr}[s]$ zleva resp. zprava nesoudělnými.

K dosažení polynomiálních matic v (4.10) je zapotřebí nejprve analyzovat základní signály [15], obsažené v systému řízení. Za tímto účelem vyjdeme z tvaru zleva neredukovatelného maticového zlomku, jak pro přenosovou matici systému, tak pro přenosovou matici regulátoru a pro signály, uvedené konfigurace řízení bude platit

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{A}_L^{-1}(s)\mathbf{B}_L(s)\mathbf{u}(s) + \boldsymbol{\xi}(s), \quad (4.11)$$

$$\mathbf{u}(s) = \mathbf{u}_0(s) + \mathbf{v}(s), \quad (4.12)$$

$$\mathbf{u}_0(s) = \mathbf{P}_L^{-1}(s)\mathbf{Q}_L(s)\mathbf{e}(s), \quad (4.13)$$

$$\mathbf{e}(s) = \mathbf{w}(s) - \mathbf{y}(s) \quad (4.14)$$

a postupným dosazením (4.12), (4.13), (4.14) do (4.11) získáme pro výstupní vektor

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{A}_L^{-1}(s)\mathbf{B}_L(s)\{\mathbf{P}_L^{-1}(s)\mathbf{Q}_L(s)[\mathbf{w}(s) - \mathbf{y}(s)] + \mathbf{v}(s)\} + \boldsymbol{\xi}(s), \quad (4.15)$$

jehož úprava vede, již bez uvedení argumentu komplexní proměnné s , na vztah

$$[\mathbf{I} + \mathbf{A}_L^{-1}\mathbf{B}_L\mathbf{P}_L^{-1}\mathbf{Q}_L]\mathbf{y}(s) = \mathbf{A}_L^{-1}\mathbf{B}_L\mathbf{P}_L^{-1}\mathbf{Q}_L(s)\mathbf{w}(s) + \mathbf{A}_L^{-1}\mathbf{B}_L\mathbf{v}(s) + \boldsymbol{\xi}(s), \quad (4.16)$$

kde \mathbf{I} je jednotková matice $r \times r$.

Pro další úpravy, jak udává [8], je nezbytným dalším krokem v (4.16), nahradit zleva nesoudělný maticový zlomek zpětnovazebního regulátoru jeho ekvivalentním pravým zápisem

$$[I + A_L^T B_L Q_R P_R^T] y(s) = A_L^T B_L Q_R P_R^T w(s) + A_L^T B_L v(s) + \xi(s), \quad (4.17)$$

což nám umožní vytknutí polynomiálních matic A_L^T , P_R^T na levé straně rovnice (4.17) jako

$$A_L^T [A_L P_R + B_L Q_R] P_R^T y(s) = A_L^T B_L Q_R P_R^T w(s) + A_L^T B_L v(s) + \xi(s), \quad (4.18)$$

kde pro výraz $A_L P_R + B_L Q_R$ zavedeme substituci

$$D = A_L P_R + B_L Q_R, \quad (4.19)$$

přičemž levá strana označuje polynomiální matici $D \in \mathfrak{R}^{mm}[s]$.

Tímto zavedením pak pro jednotlivé signály (4.11) – (4.14), systému řízení platí vztahy

$$y(s) = [I - P_R D^{-1} A_L] w(s) + P_R D^{-1} [B_L v(s) + A_L^T \xi(s)], \quad (4.20)$$

$$u(s) = Q_R D^{-1} A_L [w(s) - \xi(s)] + [I - Q_R D^{-1} B_L] v(s), \quad (4.21)$$

$$u_0(s) = Q_R D^{-1} \{A_L [w(s) - \xi(s)] - B_L v(s)\}, \quad (4.22)$$

$$e(s) = P_R D^{-1} \{A_L [w(s) - \xi(s)] - B_L v(s)\}, \quad (4.23)$$

kde jednotková matice (4.20) je dimenze $r \times r$ a jednotková matice, obsažená v (4.21) je dimenze $m \times m$.

Je zřejmé, že všechny signály (4.20) – (4.23) obsahují inverzní matici D^{-1} , kterou lze vyjádřit podílem adjungované matice a jejího determinantu, což znamená, že prvky vektorů jednotlivých obrazů obsahují ve svých jmenovatelích polynom, který je totožný s determinantom polynomiální matice D a nazýváme jej charakteristickým polynomem [15] mnohazměrového systému řízení. Proto budou-li kořeny tohoto charakteristického polynomu náležet levé oblasti komplexní roviny, bude systém řízení stabilní. To znamená, že stabilizující regulátor je dán řešením maticové diofantické rovnice

$$A_L P_R + B_L Q_R = D, \quad (4.24)$$

s volitelnou stabilní, polynomiální maticí D , na pravé straně podmínkové rovnice.

Protože požadujeme vedle ryzosti přenosové matice také ryzost regulátoru a tedy vnitřní ryzost systému řízení, je nutné, aby stupně polynomů ve sloupcích matic splňovaly podmínku (2.25).

Pro splnění požadavku asymptotického sledování a úplné kompenzace poruchy musí regulační odchylka splňovat podmínku

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = \lim_{s \rightarrow 0} \|se(s)\|, \quad (4.25)$$

která bude platit, podaří-li se eliminovat všechny jmenovatele, obsažené ve vektorech referenčního signálu i poruchy (4.3) – (4.5). To bude zajištěno pouze v případě, jestliže polynomiální matici zpětnovazebního regulátoru \mathbf{P}_R lze vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{P}_R(s) = \mathbf{F}(s) \tilde{\mathbf{P}}_R(s), \quad (4.26)$$

přičemž matice $\mathbf{F}(s)$ je diagonální matice ve tvaru

$$\mathbf{F}(s) = f(s) \mathbf{I}, \quad (4.27)$$

s jednotkovou maticí \mathbf{I} o rozměru $r \times r$.

Polynom $f(s)$ obsažený na hlavní diagonále tedy představuje nejmenší společný násobek všech prvků matic (4.7).

Tím uvedená podmínková rovnice (4.27) přejde na tvar

$$\mathbf{A}_L \mathbf{F} \tilde{\mathbf{P}}_R + \mathbf{B}_L \mathbf{Q}_R = \mathbf{D}, \quad (4.28)$$

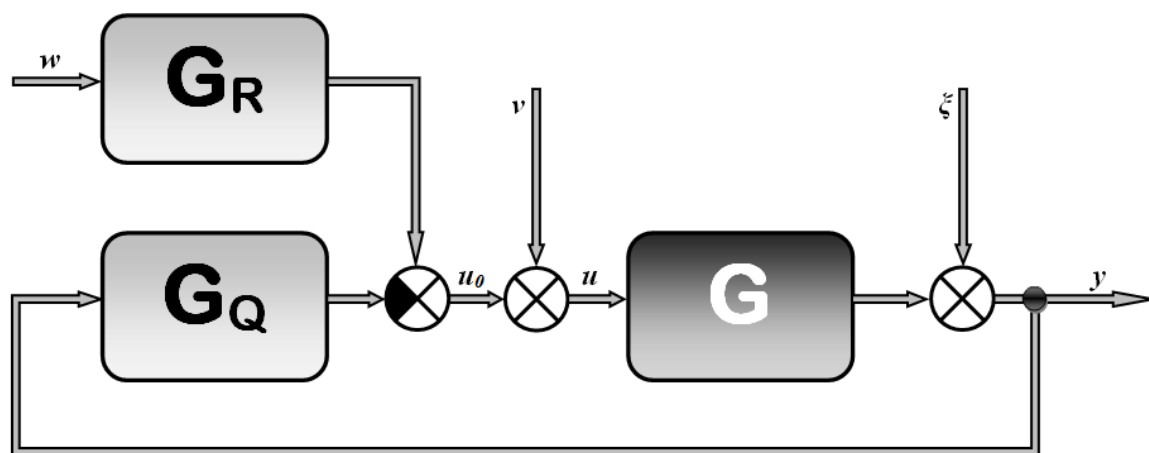
a výsledný zpětnovazební regulátor bude dán

$$\mathbf{G}_Q(s) = \mathbf{Q}_R (\mathbf{F} \tilde{\mathbf{P}}_R)^{-1}, \quad (4.29)$$

Pochopitelně je možné k výsledným vztahům a rovnicím dospět i obráceně, tzv. že systém řízení popisuje zprava neredukovatelný maticový zlomek a regulátor je dán ve formě zleva neredukovatelného maticového zlomku. Obdobným způsobem bychom dospěli ke stejným závěrům, jež byly uvedeny. Vzhledem ke zmíněné podobnosti nebude tato varianta detailněji analyzována a kompletní odvození lze dohledat v [8].

4.2 2 DOF konfigurace systému řízení

Mnohé problémy řízení, diskutované [13] vyžadují použití více než jednoho stupně volnosti. Z toho důvodu, je uvažovaný zpětnovazební regulátor, řízený regulační odchylkou, vypuštěn a namísto něj, je systém kontrolován dvojicí regulátorů, z nichž ani jeden není řízen regulační odchylkou ve smyslu 1 DOF konfigurace. Obecné schéma klasického systému řízení se dvěma stupni volnosti [8], je znázorněno na Obr. 4.



Obr. 4: Systém řízení se dvěma stupni volnosti – konfigurace 2 DOF

Vzhledem k tomu, že i na tuto konfiguraci klademe stejné požadavky, a protože platí identické předpoklady splnění těchto požadavků jako v případě konfigurace 1DOF, bude snahou detailněji analyzovat jednotlivé signály systému řízení a celkově objasnit pohled na konečné tvary obou regulátorů ve vztahu k vysloveným cílům.

Přímovazební regulátor, řízený vektorem referenčního signálu i zpětnovazební regulátor, řízený vektorem výstupní veličiny, uvažujme ve formě zprava neredukovatelného maticového zlomku, tedy platí.

$$\mathbf{G}_Q(s) = \mathbf{Q}_R(s) \mathbf{P}_R^{-1}(s), \quad (4.30)$$

$$\mathbf{G}_R(s) = \mathbf{R}_R(s) \mathbf{P}_R^{-1}(s), \quad (4.31)$$

kde $\mathbf{R}_R(s) \in \mathfrak{R}^{mr}[s]$ je polynomiální matice.

Ke konkrétním formám regulátorů, uvažované konfigurace řízení, opět dospějeme analýzou elementárních signálů, jež jsou dány

$$y(s) = A_L^{-1} B_L u(s) + \xi(s), \quad (4.32)$$

$$u(s) = u_0(s) + v(s), \quad (4.33)$$

$$u_0(s) = R_R P_R^{-1} w(s) - Q_R P_R^{-1} y(s), \quad (4.34)$$

Vyjádřením (4.32) s využitím (4.33) a (4.34) dospějeme ke vztahu

$$A_L^{-1} [A_L P_R + B_L Q_R] P_R^{-1} y(s) = A_L^{-1} B_L R_R P_R^{-1} w(s) + A_L^{-1} B_L v(s) + \xi(s), \quad (4.35)$$

který obsahuje na levé straně stejný výraz jako (4.18), a proto s ohledem na využití substituce (4.19) mohou být jednotlivé signály systému řízení vyjádřeny jako

$$y(s) = P_R D^{-1} B_L R_R P_R^{-1} w(s) + P_R D^{-1} [B_L v(s) + A_L \xi(s)], \quad (4.36)$$

$$u(s) = [I - Q_R D^{-1} B_L] [R_R P_R^{-1} w(s) + v(s)] - Q_R D^{-1} A_L \xi(s), \quad (4.37)$$

$$u_0(s) = [I - Q_R D^{-1} B_L] R_R P_R^{-1} w(s) - Q_R D^{-1} [B_L v(s) + A_L \xi(s)], \quad (4.38)$$

$$e(s) = P_R D^{-1} [D - B_L R_R] P_R^{-1} w(s) - P_R D^{-1} [B_L v(s) + A_L \xi(s)], \quad (4.39)$$

S ohledem na skutečnosti, že všechny signály systému řízení obsahují zmíněnou inverzi, bude stabilita systému dána zpětnovazebním regulátorem získaným prostřednictvím (4.19)

K předpokladu ryzosti přenosové matice a zpětnovazebního regulátoru je nyní nezbytné přidat i podmínku ryzosti regulátoru přímovazebního.

Rozdíl oproti 1 DOF konfigurace řízení, spočívá ve splnění podmínky asymptotického sledování a kompenzace poruchy. Vyjdeme-li z vyjádření vektoru regulační odchylky (4.39), budou veškeré poruchy do systému vstupující kompenzovány, je-li možné formulovat polynomiální matici P_R , obdobně jako v (4.26) ve tvaru

$$P_R(s) = F_1(s) \tilde{P}_R(s), \quad (4.39)$$

s diagonální polynomiální maticí $F_1(s)$, vyjádřenou součinem

$$F_1(s) = f_1(s) I, \quad (4.40)$$

kde I , je jednotková matice rozměru $r \times r$.

Aby byla současně splněna i podmínka asymptotického sledování referenčního signálu, musí existovat taková diagonální polynomiální matice, jež by byla schopna eliminovat veškeré jmenovatele obsažené ve vektoru referenčního signálu. Označíme-li tuto matici

$$\mathbf{F}_2(s) = f_2(s)\mathbf{I}, \quad (4.41)$$

s polynomem $f_2(s)$ na hlavní diagonále a jednotkovou maticí o rozměrech $r \times r$, musí pro výraz $\mathbf{D} - \mathbf{B}_L \mathbf{R}_R$ platit

$$\mathbf{D} - \mathbf{B}_L \mathbf{R}_R = \mathbf{T} \mathbf{F}_2, \quad (4.42)$$

o neznámé polynomiální matici \mathbf{R}_R a \mathbf{T} , která se přímo na konečném tvaru regulátoru nepodílí, z hlediska výpočtu je však nutná.

Uvedeným výkladem směřujeme k závěru, že klíč pro dosažení formulovaných požadavků, leží v řešení dvojice maticových diofantických rovnic

$$\mathbf{A}_L \mathbf{F} \tilde{\mathbf{P}}_R + \mathbf{B}_L \mathbf{Q}_R = \mathbf{D}, \quad (4.43)$$

$$\mathbf{T} \mathbf{F}_2 + \mathbf{B}_L \mathbf{R}_R = \mathbf{D}, \quad (4.44)$$

odkrývající přímovazební a zpětnovazební část regulátoru

$$\mathbf{G}_Q(s) = \mathbf{Q}_R (\mathbf{F}_1 \tilde{\mathbf{P}}_R)^{-1}, \quad (4.45)$$

$$\mathbf{G}_R(s) = \mathbf{R}_R (\mathbf{F}_1 \tilde{\mathbf{P}}_R)^{-1}, \quad (4.46)$$

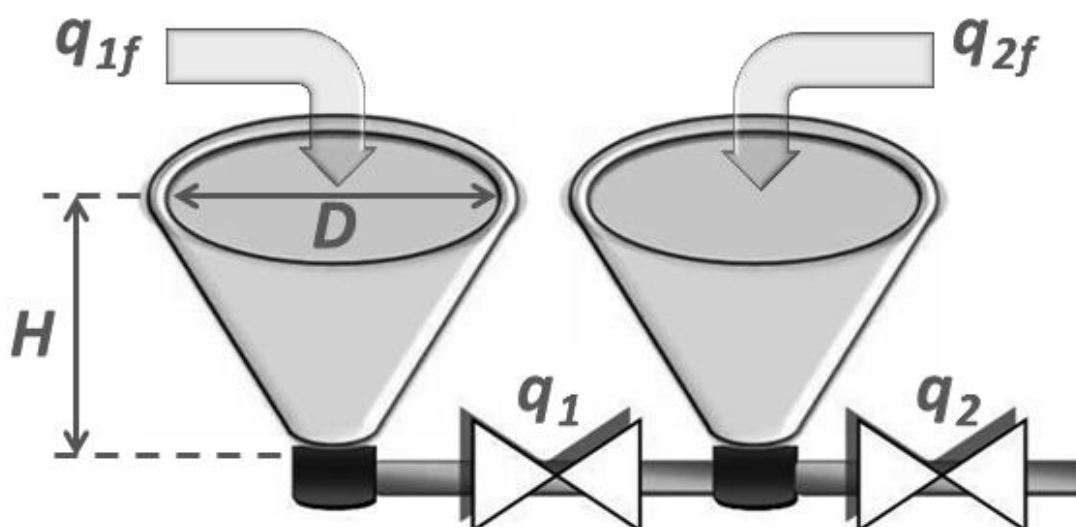
Konfrontujme získaný zpětnovazební regulátor (4.45) s jeho obdobou dosaženou v předchozí konfiguraci řízení. (4.29). Vzhledem ke skutečnosti, že (4.40) nepokrývá jmenovatele obsažené ve vektoru referenčního signálu $\mathbf{w}(s)$, jeví se použití dvou stupňů volnosti výhodnější pro jednoduchost dílčích regulátorů, v případě, že jmenovatele uvedených signálů (4.3) – (4.5) obsahují rozdílné polynomy.

Na závěr kapitoly dodejme, že jsme doposud nevyřešili problém určení stupňů polynomů v hledaných polynomiálních maticích \mathbf{Q}_R resp. \mathbf{R}_R , $\tilde{\mathbf{P}}_R$ a \mathbf{D} . Je známo [10], že za pomoci sloupcových resp. řádkových operací lze tyto polynomy získat. Ovšem uvedený způsob se pro praktické použití jeví komplikovaným a zdlouhavým. Proto se k jednotlivým stupňům, z hlediska reálného použití, hodí přistupovat na základě řešitelnosti polynomiálních rovnic, kde počet neznámých koeficientů musí korespondovat s počtem rovnic, za současného dodržení podmínky ryzosti regulátorů, což dokládají konkrétní aplikace [8].

II. PRAKTICKÁ ČÁST

5 MODEL SPOJENÝCH ZÁSOBNÍKŮ NA KAPALINU

V předchozí části výkladu jsme rozvinuli poměrně pokročilé techniky, související s analýzou mnohazměrových systémů, jež vyústily v komplexní návrh řízení, zakládající se na vstupně-výstupních vztazích. Aby uvedený aparát plně vynikl, je zapotřebí pro něj nalézt konkrétní podobu, jež by byla dobrým ilustrativním příkladem pro jeho verifikaci. Tímto příkladem, který nás bude provázet v dalších kapitolách, jsou nálevkovité, spojené zásobníky na kapalinu v sérii, znázorněné na Obr. 5.



Obr. 5: Spojené zásobníky na kapalinu

Pochopit a řídit takovýto komplexní systém si vyžaduje získat kvantitativní matematický model, a proto další část snažení bude nejprve směřovat k analýze vztahů mezi systémovými proměnnými, jež posuzovaný dynamický model, užitím matematicko-fyzikálních zákonů, vystihují. Z praktického hlediska však takto odvozený model do návrhu řízení, pro své rozsáhlé nelinearity, přímo nevstupuje, a tak na závěr, v souladu s uvedeným teoretickým aparátem, uvedeme odpovídající náhradní lineární model, který vystihuje jeho chování v okolí určitého pracovního bodu a na němž bude syntéza realizována. Shrňme-li tedy výše uvedené aspekty, dává si kapitola za cíl:

- Definovat systém a jeho součásti
- Formulovat matematický model a nezbytné předpoklady
- Sepsat diferenciální rovnice popisující model
- Navrhnout koncept adaptivního řízení s využitím odpovídajícího lineárního modelu

5.1 Konstrukce matematického modelu

V úvodní části kapitoly jsme si vytyčili průřez výkladem, který nyní zahájíme otázkou konstrukce matematického modelu systému [4], zmíněných nálevkovitých zásobníků na kapalinu, o kterých předpokládáme, že mají dna umístěna ve stejné výšce a dále, že oba zásobníky jsou otevřené a působící tlak plynu je konstantní. V rámci dalšího zjednodušení klademe požadavek na geometrický tvar podélného řezu subsystému jedné nálevky, v podobě rovnoramenného trojúhelníku, příčný řez pak tvoří kružnice. Dříve, než přejdeme k samotnému odvozování je zapotřebí si vysvětlit význam jednotlivých veličin Obr. 5. Nehledě na dolní indexy, představuje q objemové průtoky kapaliny vstupující resp. vystupující z jednotlivých zásobníků, h jsou pak aktuální výšky hladin a konečně D resp., H vystupují jako konstantní parametry, popisující horní průměr resp. výšku zásobníku.

Pro oba zásobníky sestavíme rovnici bilance hmoty, obecně danou jako

$$\text{VSTUP} = \text{VÝSTUP} + \text{AKUMULACE},$$

přičemž vstupem máme na mysli přítok kapaliny do zásobníku, výstup značí odtok kapaliny a akumulace ztělesňuje změnu hmoty kapaliny za čas, takže platí

$$\frac{dm}{dt} = c(q_f - q), \quad (5.1)$$

přičemž

$$dm = cdV, \quad (5.2)$$

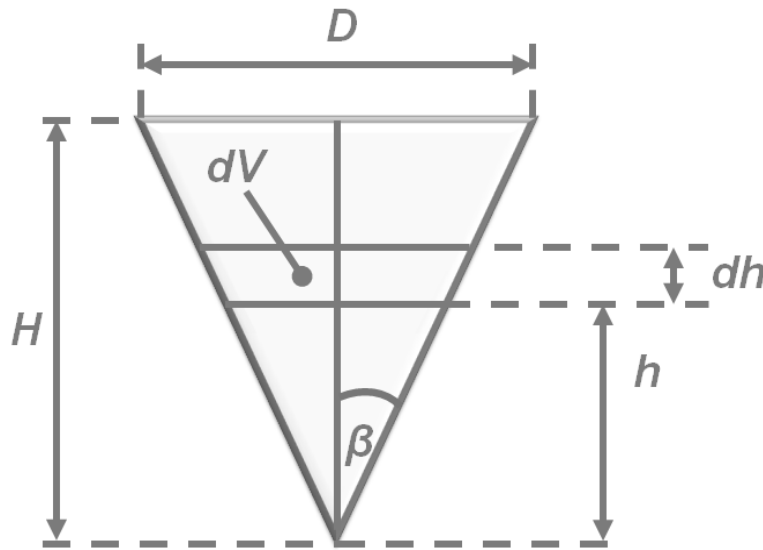
kde c vyjadřuje objemovou koncentraci a dV změnu objemu kapaliny v zásobníku.

Z geometrického hlediska, jež znázorňuje Obr. 6, je zřejmé, že změna objemu (5.2) a s ní související změna hmoty je závislá na ploše příčného řezu, která je ovšem funkcí výšky hladiny. Abychom úspěšně pokořili tuto nesnáz, vyjdeme z úhlu β , který svírá rameno s výškou zásobníku, odtud

$$\tan \beta = \frac{D}{2H}, \quad (5.3)$$

což znamená, že plocha a potažmo (5.2) jsou svázané s aktuální výškou hladiny prostřednictvím

$$dm = c\pi \frac{D^2}{4H^2} h^2 dh. \quad (5.4)$$



Obr. 6: Podélný řez nálevkovitým zásobníkem

Po dosazení do výchozí bilanční rovnice (5.1) a formální úpravou získáme rovnici

$$\pi \frac{D^2}{4H^2} h^2 \frac{dh}{dt} = q_f - q, \quad (5.5)$$

s jejíž pomocí je systém spojených zásobníků popsán dvojicí diferenciálních rovnic

$$\pi \frac{D^2}{4H^2} h_1^2 \frac{dh_1}{dt} + q_1 = q_{1f}, \quad (5.6)$$

$$\pi \frac{D^2}{4H^2} h_2^2 \frac{dh_2}{dt} - q_1 + q_2 = q_{2f}, \quad (5.7)$$

o počátečních podmínkách $h_1(0) = \bar{h}_1$ a $h_2(0) = \bar{h}_2$.

Obecně platí, že průtok kapaliny skrze regulační ventil je funkcí odmocniny tlakové ztráty na tělese ventilu. Protože se jedná o hydrostatické tlaky, lze prostřednictvím tlakové ztráty vyjádřit průtoky z jednotlivých zásobníků jako

$$q_1 = k_1 \sqrt{|h_1 - h_2|}, \quad (5.8)$$

$$q_2 = k_2 \sqrt{h_2}, \quad (5.9)$$

kde k_1 a k_2 jsou konstanty jednotlivých ventilů.

Dodejme, že převyšuje-li hladina h_2 výšku hladiny h_2 , bude hydrostatický tlak v pravém zásobníku vyšší a bude platit rovnost

$$q_1 = -q_1. \quad (5.10)$$

Vzhledem k existenci nelineárních vazeb, objevujících se jak při určování průřezné plochy, tak při stanovování průtoků skrze ventily, hovoříme o mnohazměrovém nelineárním systému, daném dvojicí zmíněných nelineárních rovnic (5.6) a (5.7)

Linearizovaný matematický model

Protože se jedná o nelineární rovnice, bude snahou je linearizovat v okolí ustáleného stavu, kdy se jednotlivé výšky hladin nemění, tzv., že příslušné derivace hladin výšky jsou podle času nulové. Potom z rovnic (5.6) a (5.7) plyne

$$\bar{q}_1 = \bar{q}_{1f}, \quad (5.11)$$

$$\bar{q}_2 - \bar{q}_1 = \bar{q}_{2f}, \quad (5.12)$$

což jsou rovnice reprezentující chování spojených zásobníků v ustáleném stavu. Protože jednotlivé zásobníky obsahují na výstupu regulační ventil, existuje závislost výšky hladiny a odtokového objemového průtoku, což je dáno rovnicemi (5.8), (5.9), takže v ustáleném stavu platí

$$\bar{q}_1 = \bar{q}_{1f} = k_1 \sqrt{\bar{h}_1 - \bar{h}_2}, \quad (5.13)$$

$$\bar{q}_2 = \bar{q}_{1f} + \bar{q}_{2f} = k_2 \sqrt{\bar{h}_2}, \quad (5.14)$$

přičemž pro ustálený stav předpokládáme, že $\bar{h}_1 > \bar{h}_2$.

S ohledem na linearizaci, uvedenou v teoretické části práce, zavedme odchylky jednotlivých veličin od hodnot v ustáleném stavu jako

$$\begin{aligned} x_p &= \Delta h_p = h_p - \bar{h}_p, \\ u_p &= \Delta q_{pf} = q_{pf} - \bar{q}_{pf}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

pro $p = 1, 2$.

Osamocení derivací v rovnicích (5.6) a (5.7), vede na tvar

$$f_1 = \frac{dh_1}{dt} = \frac{4H^2}{\pi D^2 h_1^2} (q_{1f} - q_1), \quad (5.16)$$

$$f_2 = \frac{dh_2}{dt} = \frac{4H^2}{\pi D^2 h_2^2} (q_{2f} + q_1 - q_2), \quad (5.17)$$

takže nahrazením funkce f_1 resp. f_2 prvními dvěma členy Taylorova rozvoje v okolí ustáleného stavu, získáme konečné vztahy, představující jednotlivé prvky matic \mathbf{A} , \mathbf{B} , stavového modelu, tedy

$$a_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial h_1} = -\frac{4H^2}{\pi D^2} \left\{ 2 \frac{\bar{q}_1}{\bar{h}_1^3} + \frac{1}{\bar{h}_1^4} \left[\frac{\bar{q}_1}{2(\bar{h}_1 - \bar{h}_2)} \bar{h}_1^2 - 2\bar{q}_1 \bar{h}_1 \right] \right\}, \quad (5.18)$$

$$a_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial h_2} = \frac{2H^2}{\pi D^2 \bar{h}_1^2} \left(\frac{\bar{q}_1}{\bar{h}_1 - \bar{h}_2} \right), \quad (5.19)$$

$$a_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial h_1} = \frac{2H^2}{\pi D^2 \bar{h}_2^2} \left(\frac{\bar{q}_1}{\bar{h}_1 - \bar{h}_2} \right), \quad (5.20)$$

$$a_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial h_2} = -\frac{4H^2}{\pi D^2} \left\{ 2 \frac{\bar{q}_{2f}}{\bar{h}_2^3} + \frac{1}{\bar{h}_1^4} \left[\frac{\bar{q}_1}{2(\bar{h}_1 - \bar{h}_2)} \bar{h}_2^2 + 2\bar{q}_1 \bar{h}_2 \right] - \frac{3\bar{q}_2}{2\bar{h}_2^3} \right\}, \quad (5.21)$$

$$b_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial q_{1f}} = \frac{4H^2}{\pi D^2 \bar{h}_1^2}, \quad (5.22)$$

$$b_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial q_{2f}} = 0, \quad (5.23)$$

$$b_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial q_{1f}} = 0, \quad (5.24)$$

$$b_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial q_{2f}} = \frac{4H^2}{\pi D^2 \bar{h}_2^2}, \quad (5.25)$$

a odtud pro linearizovaný matematický model můžeme psát

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad (5.26)$$

kde jednotlivé prvky matic představují (5.18) – (5.25).

Výpočet přenosové matice a tvar polynomiálních matic

Z praktického hlediska potřebujeme měřit jednotlivé výšky hladin, což znamená, že pro výstup platí

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad (5.27)$$

takže váhová matice stavu je dána jako

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

a váhová matice vstupu je nulová.

K vnějšimu popisu přejdeme s využitím vztahu (2.7) jako

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

a označíme-li determinant inverzní matice (5.29) jako,

$$\mathbf{G}(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^2 - (a_{11} + a_{22})s + (a_{11}a_{22}) - (a_{12}a_{21}) = s + a_1s + a_0, \quad (5.30)$$

získáme přenosovou matici ve tvaru

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{b_{11}(s - a_{22})}{s + a_1s + a_0} & \frac{a_{12}b_{22}}{s + a_1s + a_0} \\ \frac{a_{21}b_{11}}{s + a_1s + a_0} & \frac{b_{22}(s - a_{11})}{s + a_1s + a_0} \end{bmatrix}. \quad (5.31)$$

Je zřejmé, že polynomiální matice zleva neredukovatelného maticového zlomku, externího lineárního modelu, zvolené na základě uvedeného výkladu jako

$$\mathbf{A}(s) = \begin{bmatrix} s + a_{01} & a_{02} \\ a_{03} & s + a_{04} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}(s) = \begin{bmatrix} b_{01} & 0 \\ 0 & b_{04} \end{bmatrix}, \quad (5.32)$$

jsou odhadovány s využitím vstupně – výstupních veličin prostřednictvím přímé metody, kterou charakterizují dvě paralelní identifikační rovnice

$$\dot{y}_{1f}(t_k) = b_{01}u_{1f}(t_k) - a_{01}y_{1f}(t_k) - a_{02}y_{2f}(t_k) + \varepsilon_1(t_k), \quad (5.33)$$

$$\dot{y}_{2f}(t_k) = b_{04}u_{1f}(t_k) - a_{03}y_{1f}(t_k) - a_{04}y_{2f}(t_k) + \varepsilon_2(t_k), \quad (5.34)$$

jejichž filtrované veličiny byly dosaženy filtrací

$$\dot{y}_{1f} + c_0 y_{1f} = y_{1f}, \quad \dot{y}_{2f} + c_0 y_{2f} = y_{2f}, \quad (5.35)$$

$$\dot{u}_{1f} + c_0 u_{1f} = u_{1f}, \quad \dot{u}_{2f} + c_0 u_{2f} = u_{2f}, \quad (5.36)$$

nebo strategie delta modelu, založeného na identické struktuře polynomiálních matic (5.32) ve tvaru

$$\mathbf{A}'(\delta) = \begin{bmatrix} \delta + a'_{01} & a'_{02} \\ a'_{03} & \delta + a'_{04} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}'(\delta) = \begin{bmatrix} b'_{01} & 0 \\ 0 & b'_{04} \end{bmatrix}, \quad (5.37)$$

získáváme regresní rovnice

$$\delta y_1(k_0 - 1) = b'_{01} u_1(k_0 - 1) - a'_{01} y_1(k_0 - 1) - a'_{02} y_2(k_0 - 1) + \varepsilon_1(k_0), \quad (5.38)$$

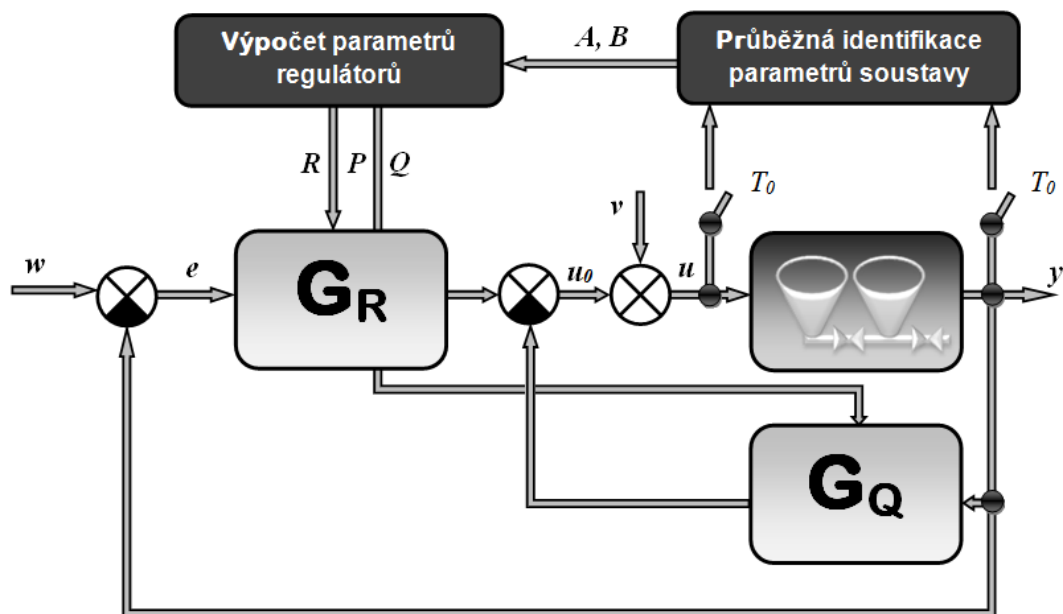
$$\delta y_2(k_0 - 1) = b'_{04} u_1(k_0 - 1) - a'_{03} y_1(k_0 - 1) - a'_{04} y_2(k_0 - 1) + \varepsilon_2(k_0), \quad (5.39)$$

jež jsou stejně jako (5.33) a (5.34) nezbytnou součástí z hlediska spojitého návrhu řízení mnohazměrového adaptivního regulátoru, odvozeného aplikací polynomiální metody, která bude středem zájmu další části kapitoly.

5.2 Koncept adaptivního řízení

Uvažujme systém řízení [6] se dvěma zpětnovazebními regulátory zachycený na Obr. 7, který zároveň objasňuje princip samočinně se nastavujícího regulátoru. Je evidentní, že jeho vnitřní struktura, sestávající z algoritmu průběžné identifikace a vlastní syntézy řízení, lze shrnout do následujícího postupu:

- V daném kroku řízení považujeme parametry modelu procesu (5.32) a priori známé.
- Na tento předpoklad naváže zvolená strategie řízení, založená na polynomiálním přístupu, jejímž výstupem bude potřebný vektor akčního zásahu $\mathbf{u}(k)$.
- Získaný akční zásah se podílí na výpočtu nového vzorku vektoru výstupní veličiny a společně s ním pak vstupuje do bloku, kde se provede další identifikační krok s využitím (5.33) – (5.36) resp. (5.38), (5.39), pomocí rekurzivního identifikačního algoritmu a celý postup se opakuje.



Obr. 7: Schéma adaptivní regulace

Omezíme-li se nyní výhradně jen na syntézu, jejímž cílem je zabezpečit požadované výšky hladin v zásobnících, bude zapotřebí opět vyjít z analýzy základních veličin konfigurace řízení. Nejdříve však ukažme, že prvky vektorů referenčního signálu a poruchy budeme pro jednoduchost uvažovat jako skokové funkce, tzv.

$$\mathbf{w}^T(s) = \left[\frac{w_{10}}{s}, \frac{w_{20}}{s} \right]; \quad \mathbf{v}^T(s) = \left[\frac{v_{10}}{s}, \frac{v_{20}}{s} \right], \quad (5.40)$$

kde w_{i0}, v_{i0} pro $i = 1, 2$ jsou konstanty.

Přenosové funkce zpětnovazebních regulátorů, vyjádřené ve formě zprava neredukovatelných maticových zlomků předpokládáme ve tvaru (4.30), (4.31).

Všimněme si však, že ačkoliv využíváme dva stupně volnosti, je schéma na Obr. 7 v rozdílném uspořádání, než klasická konfigurace 2 DOF, zachycená na Obr. 4, a proto budou nutné jisté modifikace vztahů mezi jednotlivými veličinami systému řízení ve smyslu

$$\mathbf{u}_0(s) = \mathbf{R}\mathbf{P}^{-1} [\mathbf{w}(s) - \mathbf{y}(s)] - \mathbf{Q}\mathbf{P}^{-1} \mathbf{y}(s), \quad (5.42)$$

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{P}\mathbf{D}^{-1} [\mathbf{B}\mathbf{R}\mathbf{P}^{-1} \mathbf{w}(s) + \mathbf{B}\mathbf{v}(s)], \quad (5.43)$$

$$\mathbf{e}(s) = \mathbf{P}\mathbf{D}^{-1} [(\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{B}\mathbf{Q})\mathbf{P}^{-1} \mathbf{w}(s) - \mathbf{B}\mathbf{v}(s)], \quad (5.44)$$

přičemž matice \mathbf{D} je nyní zastoupena výrazem

$$\mathbf{D} = \mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{B}(\mathbf{R} + \mathbf{Q}), \quad (5.45)$$

který nám zároveň s (5.44) postačuje k tomu, abychom mohli definovat podmínky pro splnění základních požadavků kladených na systém řízení.

S využitím (5.44) zjišťujeme, že asymptotické sledování a současně kompenzace poruchy, jež představují skokové funkce, budou eliminovány v případě, že polynomiální matice zpětnovazebních regulátorů vyjádříme

$$\mathbf{P}(s) = s\tilde{\mathbf{P}}(s), \quad (5.46)$$

$$\mathbf{Q}(s) = s\tilde{\mathbf{Q}}(s). \quad (5.47)$$

Rovnice (5.45) je současně podmínkou stability, a protože obecně platí, že jejím řešením, získáme pouze dvě neznámé polynomiální matice, je zapotřebí zvolit substituci

$$\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{B}\mathbf{T} = \mathbf{D}, \quad (5.48)$$

takže pojítka, mezi polynomiální maticemi \mathbf{R} , \mathbf{Q} tvoří váhová matice \mathbf{F} , kterou je z praktického pohledu návrhu výhodné zvolit jako diagonální, což znamená, že pro uvedený model platí

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & 0 \\ 0 & \gamma_{12} \end{bmatrix}. \quad (5.49)$$

Zbývá vyřešit otázku konkrétní volby matic regulátorů, zabezpečujících výšky hladin v zásobnících. Protože přenosová matice systému je ryzí a my požadujeme vnitřní ryzost systému řízení, je nutné, aby i regulátor byl ryzí, odtud hledané matice (5.48)

$$\mathbf{P}(s) = s\tilde{\mathbf{P}}(s) = \begin{bmatrix} sP_{01} & sP_{02} \\ sP_{03} & sP_{04} \end{bmatrix}, \quad (5.50)$$

$$\mathbf{T}(s) = \begin{bmatrix} t_{11}s + t_{01} & t_{12}s + t_{02} \\ t_{13}s + t_{03} & t_{14}s + t_{04} \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

a vyplývá, že v rámci řešení maticové diofantické rovnice je nutné nalézt celkem dvanáct neznámých koeficientů, a tak postačí, zvolíme-li stabilní polynomiální matici pravé strany diofantické rovnice ve tvaru

$$\mathbf{D}(s) = \begin{bmatrix} (s + \alpha_1)^2 & 0 \\ 0 & (s + \alpha_2)^2 \end{bmatrix}. \quad (5.52)$$

Dosadíme-li konkrétní tvary (5.32), (5.50), (5.51) a (5.52) do (5.48) získáme

$$\begin{bmatrix} s + a_{01} & a_{02} \\ a_{03} & s + a_{04} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s p_{01} & s p_{02} \\ s p_{03} & s p_{04} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{01} & 0 \\ 0 & b_{04} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11}s + t_{01} & t_{12}s + t_{02} \\ t_{13}s + t_{03} & t_{14}s + t_{04} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (s + \alpha_1)^2 & 0 \\ 0 & (s + \alpha_2)^2 \end{bmatrix}. \quad (5.53)$$

Primárním roznásobením levé strany a umocněním prvků pravé strany rovnice, obdržíme

$$\begin{aligned} (s + a_{01})s p_{01} + a_{02}s p_{03} + b_{01}(t_{11}s + t_{01}) &= s^2 + 2\alpha_1 + \alpha_1^2 \\ (s + a_{01})s p_{02} + a_{02}s p_{04} + b_{01}(t_{12}s + t_{02}) &= 0 \\ a_{03}s p_{01} + (s + a_{04})s p_{03} + b_{04}(t_{13}s + t_{03}) &= 0 \\ a_{03}s p_{02} + (s + a_{04})s p_{04} + b_{04}(t_{14}s + t_{04}) &= s^2 + 2\alpha_2 + \alpha_2^2 \end{aligned} \quad (5.54)$$

a pomocí metody neurčitých koeficientů získáme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} p_{01} &= 1; a_{01}p_{01} + a_{02}p_{03} + b_{01}t_{11} = 2\alpha_1; b_{01}t_{01} = \alpha_1^2 \\ p_{02} &= 0; a_{01}p_{02} + a_{02}p_{04} + b_{01}t_{12} = 0; b_{01}t_{02} = 0 \\ p_{03} &= 0; a_{03}p_{01} + a_{04}p_{03} + b_{04}t_{13} = 0; b_{04}t_{03} = 0 \\ p_{04} &= 1; a_{03}p_{02} + a_{04}p_{04} + b_{04}t_{14} = 2\alpha_2; b_{04}t_{04} = \alpha_2^2 \end{aligned}, \quad (5.55)$$

které odpovídá kompaktní maticová forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{01} & 0 & a_{02} & 0 & b_{01} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{01} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{01} & 0 & a_{02} & 0 & 0 & b_{01} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{01} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{03} & 0 & a_{04} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{04} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{04} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{03} & 0 & a_{04} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{04} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{04} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{01} \\ p_{02} \\ p_{03} \\ p_{04} \\ t_{11} \\ t_{01} \\ t_{12} \\ t_{02} \\ t_{13} \\ t_{03} \\ t_{14} \\ t_{04} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2\alpha_1 \\ \alpha_1^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2\alpha_2 \\ \alpha_2^2 \end{bmatrix}, \quad (5.56)$$

s řešením

$$\begin{aligned}
p_{01} &= p_{04} = 1; & p_{02} &= p_{03} = 0 \\
t_{11} &= \frac{1}{b_{01}}(2\alpha_1 - a_{01}); & t_{01} &= \frac{\alpha_1^2}{b_{01}} \\
t_{12} &= -\frac{a_{02}}{b_{01}}; & t_{02} &= 0 \\
t_{13} &= -\frac{a_{03}}{b_{04}}; & t_{03} &= 0 \\
t_{14} &= \frac{1}{b_{04}}(2\alpha_2 - a_{04}); & t_{04} &= \frac{\alpha_2^2}{b_{04}}
\end{aligned} \tag{5.57}$$

a tedy máme vše potřebné pro formulování tvarů jednotlivých polynomiálních matic regulátorů.

$$\mathbf{G}_Q(s) = \tilde{\mathbf{Q}}(s)[\tilde{\mathbf{P}}(s)]^{-1} = \begin{bmatrix} (1-\gamma_{11})t_{11} & (1-\gamma_{11})t_{12} \\ (1-\gamma_{12})t_{13} & (1-\gamma_{12})t_{14} \end{bmatrix}, \tag{5.58}$$

$$\mathbf{G}_R(s) = \mathbf{R}(s)[s\tilde{\mathbf{P}}(s)]^{-1} = \begin{bmatrix} \gamma_{11}t_{11} + \frac{t_{01}}{s} & \gamma_{11}t_{12} \\ \gamma_{12}t_{13} & \gamma_{12}t_{11} + \frac{t_{04}}{s} \end{bmatrix}, \tag{5.59}$$

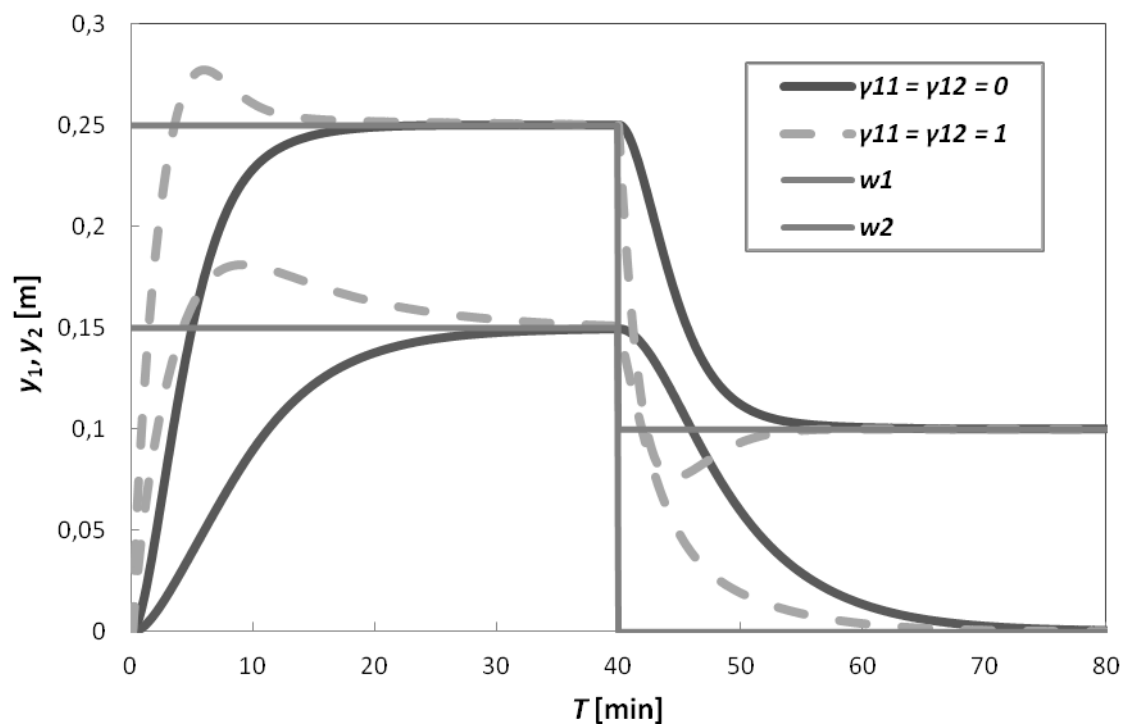
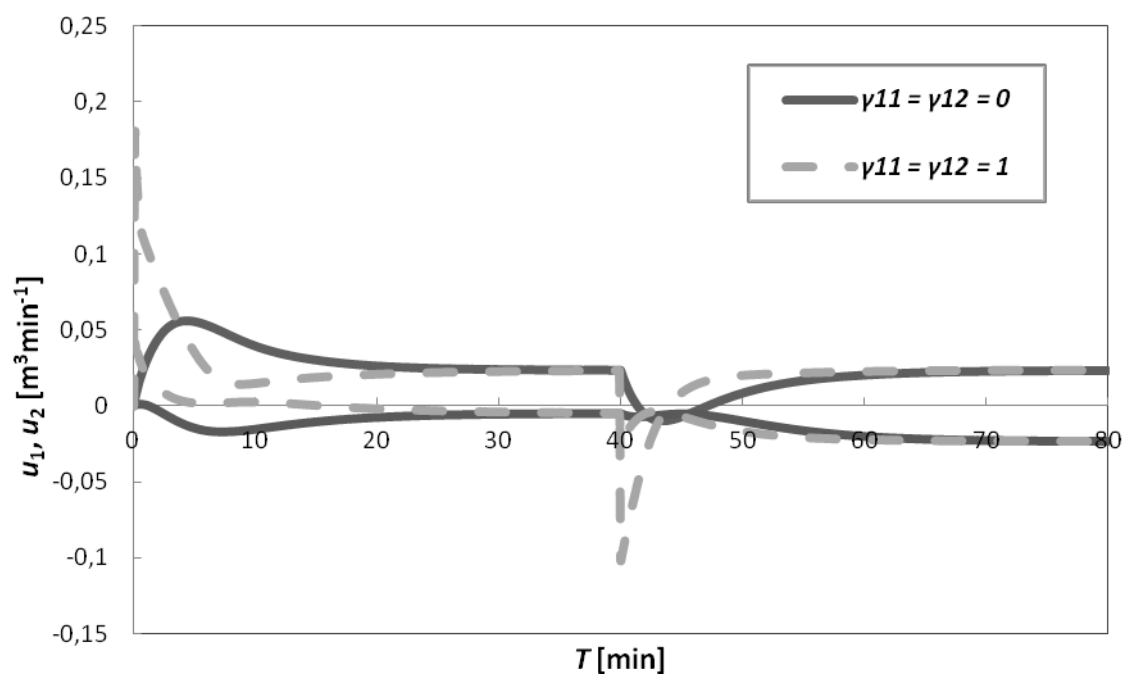
Na první pohled nemusí být zřejmé, proč se váhové koeficienty neuplatňují také u absolutních členů, obsažených na hlavní diagonále (5.59). Proto na závěr poznamenejme, že tento fakt vychází ze zavedení substituce \mathbf{T} za součet polynomiálních matic v (5.45), neboť prvky \mathbf{Q} pro splnění podmínky asymptotického sledování neobsahují absolutní členy, jsou si koeficienty nulového stupně polynomu matic \mathbf{T} a \mathbf{R} rovny.

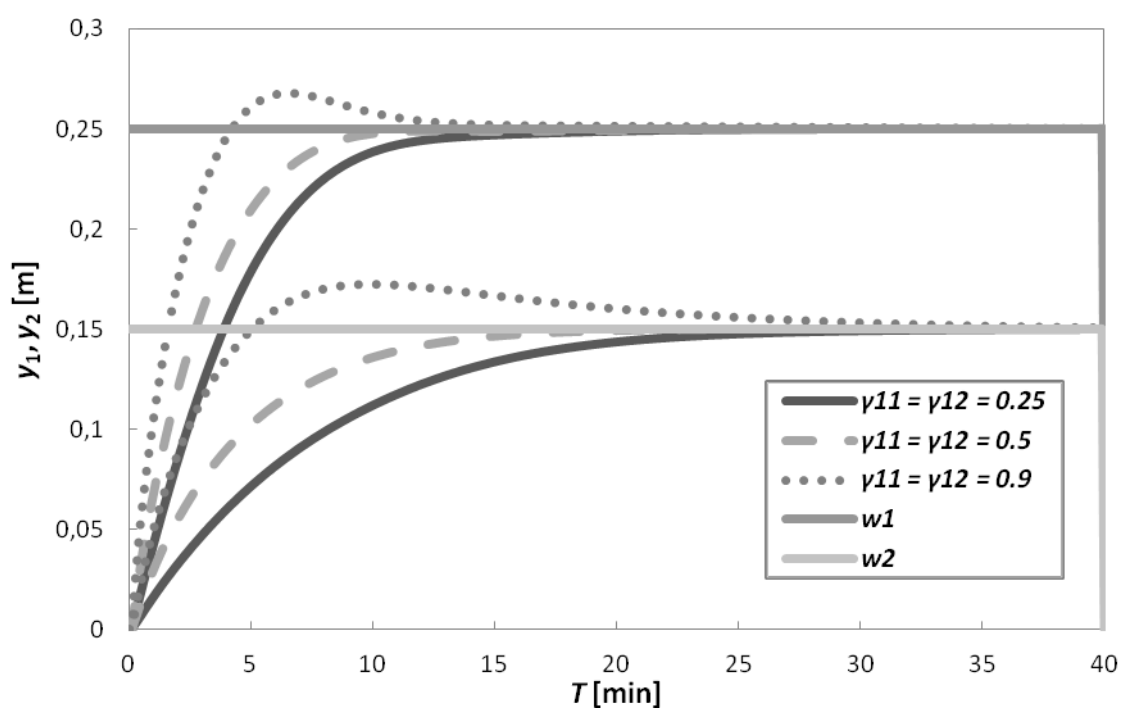
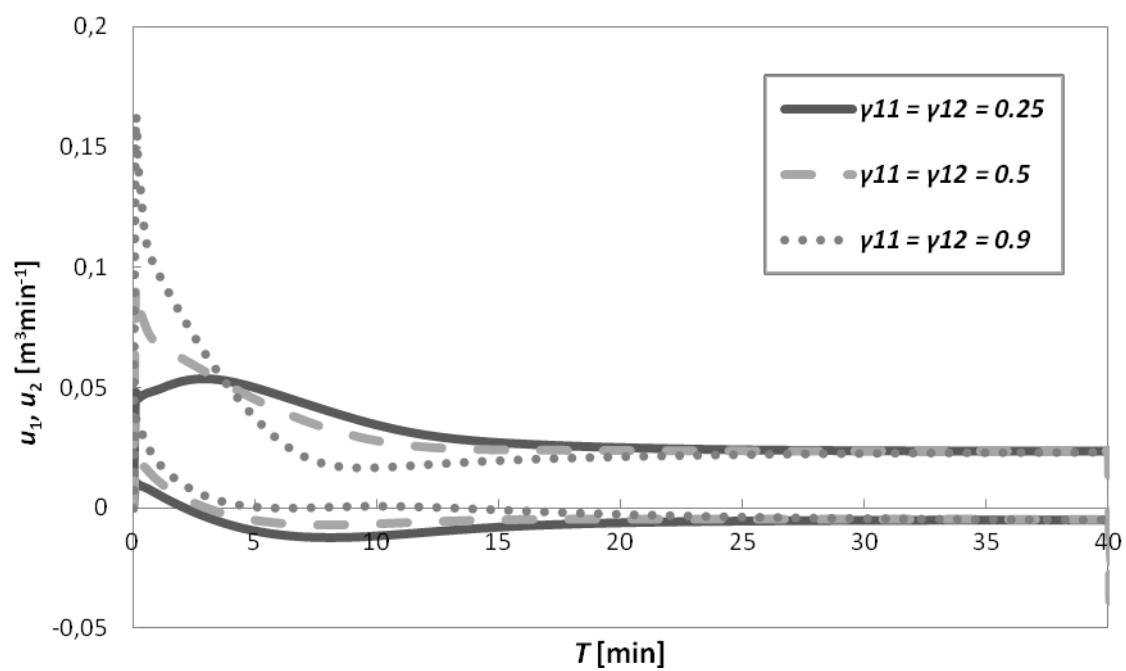
5.3 Simulační výsledky

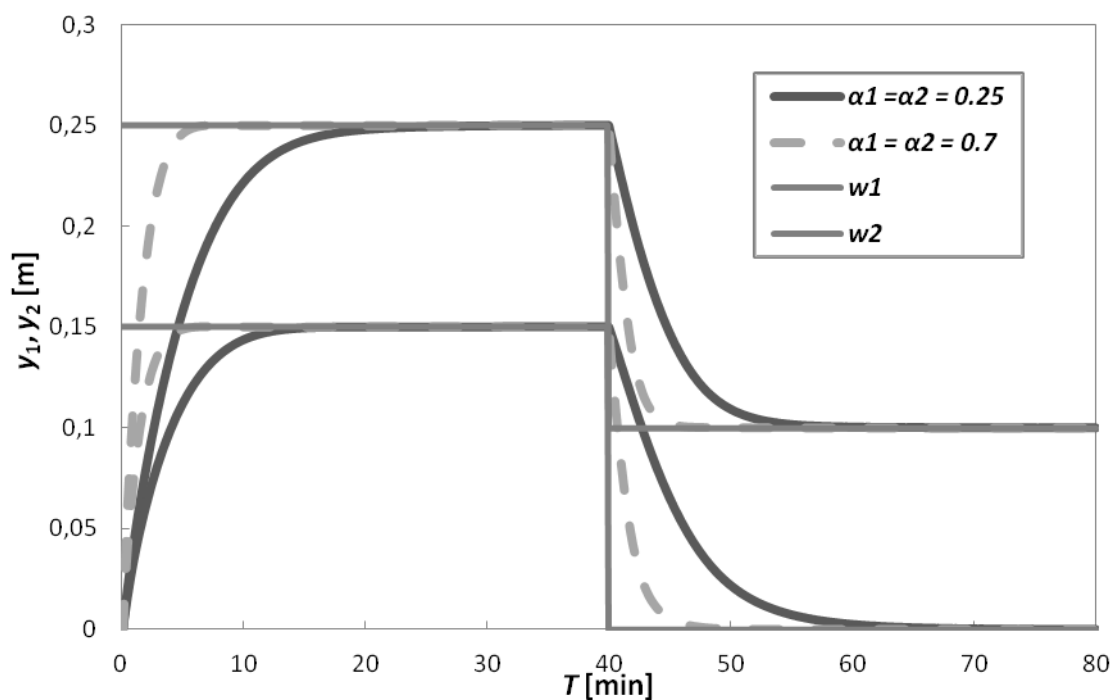
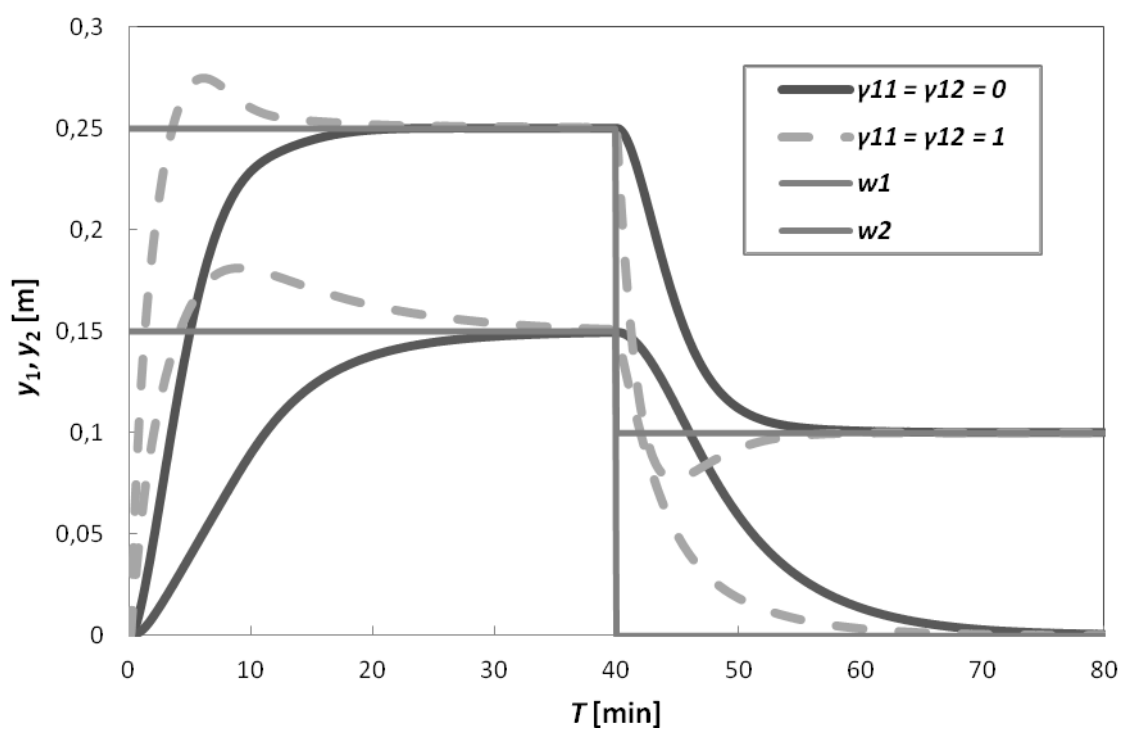
Simulace jsou v mnoha směrech užitečné. Lze prozkoumat situace, které by bylo obtížné nebo dokonce nemožné provádět z praktického hlediska. Na stejném principu je postaveno i řízení spojených zásobníků na kapalinu. Prostřednictvím vloženého řídicího zákona můžeme nahlédnout na chování systému, které je ve své podstatě dynamické, a proto je nejprve nutné zvážit počáteční podmínky. Veškeré, níže prezentované, simulační průběhy, vzorkované o periodě $T_0 = 0.1 \text{ min}$, vycházejí z ustáleného stavu pracovního bodu $\bar{h}_1 = 1.8 \text{ m}$, $\bar{h}_2 = 1.4 \text{ m}$, $\bar{q}_{1f} = 0.2 \text{ m}^3/\text{min}$, $\bar{q}_{2f} = 0.15 \text{ m}^3/\text{min}$. Aby však byla inicializační data kompletní, je nutné modelu vdechnout geometrické parametry a

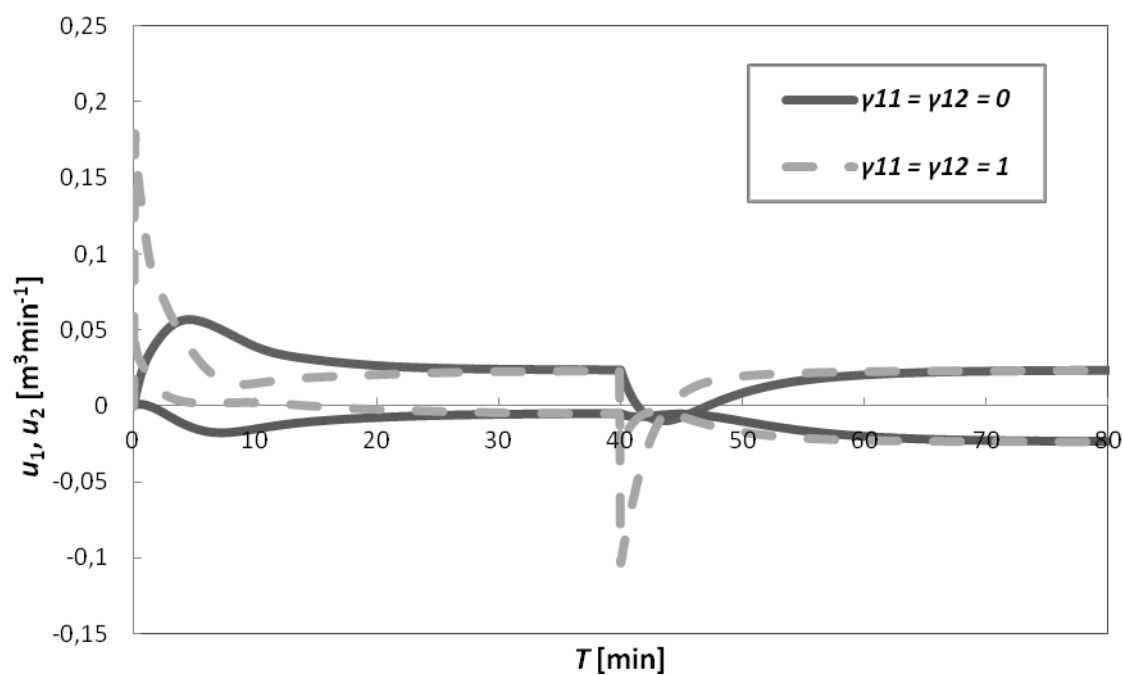
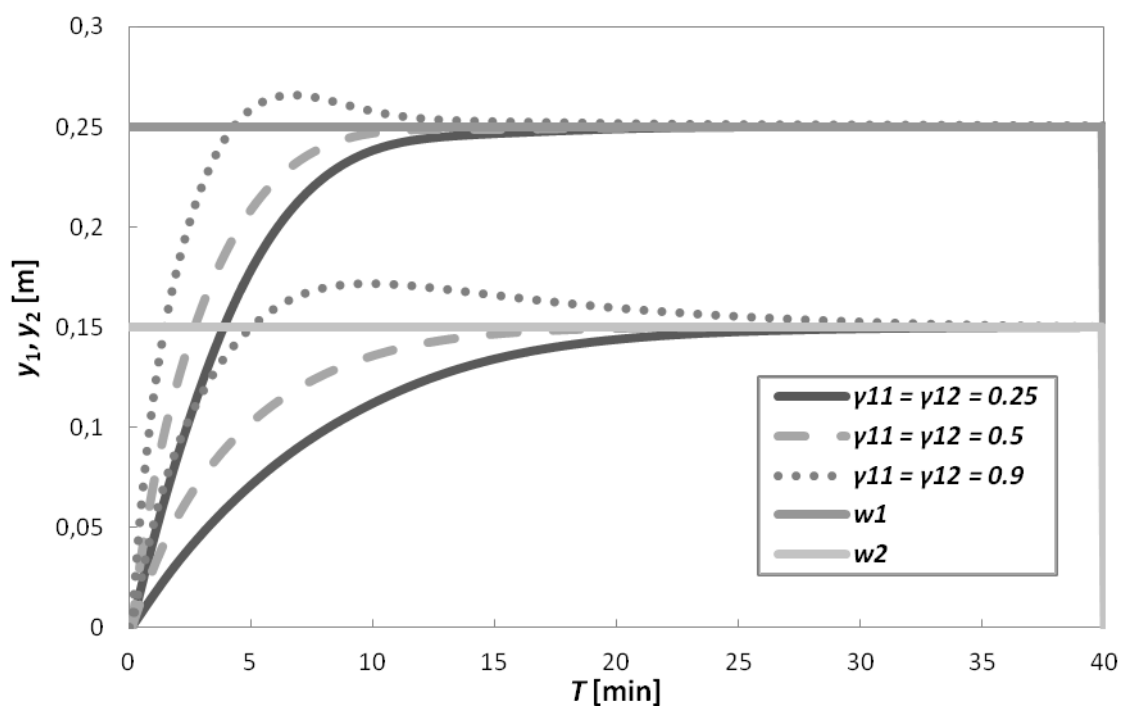
charakteristiky ventilů v podobě konstant $D = 1.5 \text{ m}$, $H = 2.5 \text{ m}$, $k_1 = 0.32 \text{ m}^{\frac{5}{2}}/\text{min}$, $k_2 = 0.3 \text{ m}^{\frac{5}{2}}/\text{min}$.

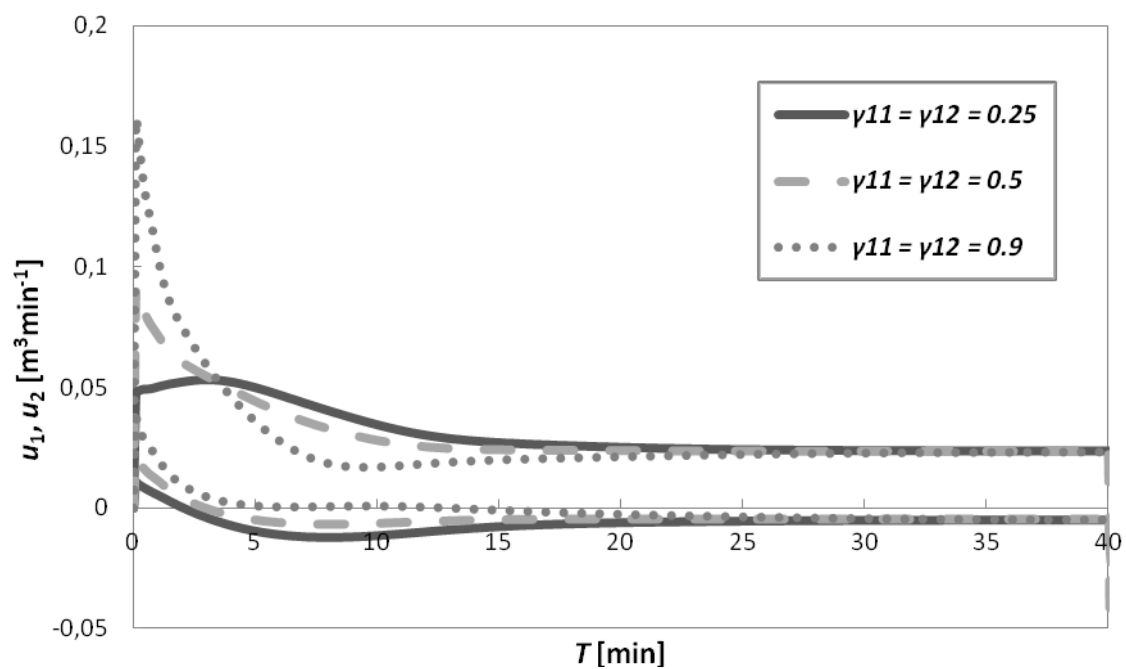
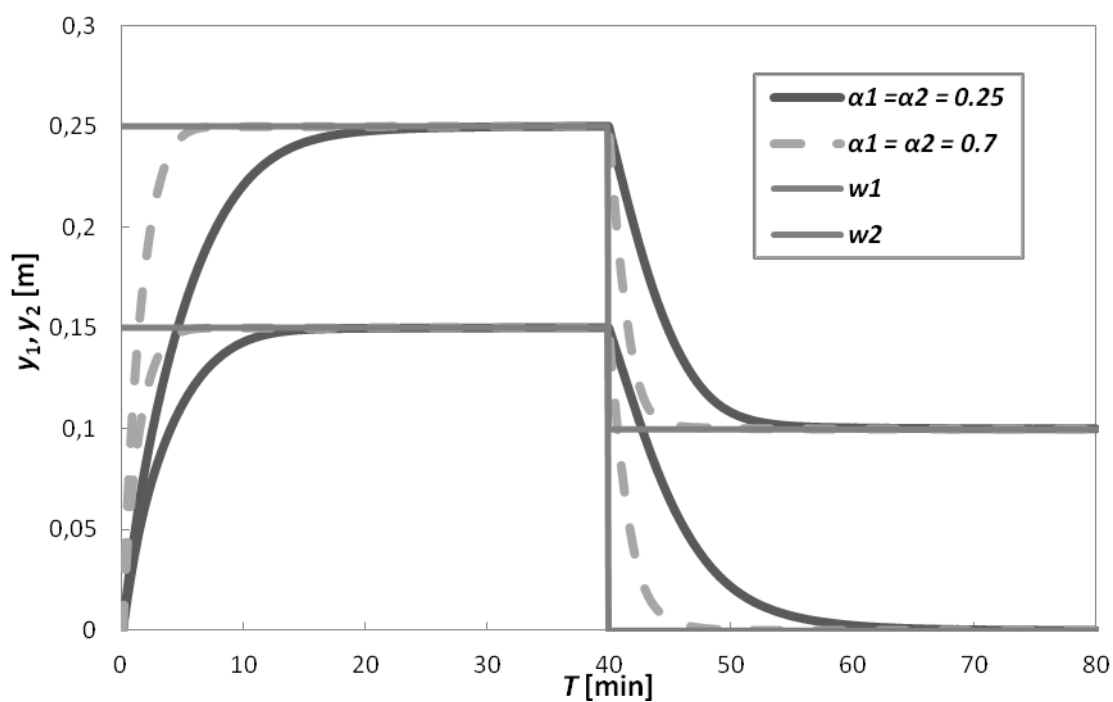
Dosažené simulační výsledky lze kategorizovat do dvou základních skupin. První série průběhů využívá k syntéze rekurzivně odhadované parametry δ -modelu, zatímco druhé fázi návrhu řízení, předchází průběžná identifikace spojitého modelu, s využitím filtrace vstupně – výstupních veličin. Jak v prvním, tak ve druhém případě je vždy simulováno chování pro skokové referenční veličiny $w_1(t) = 0.25 \text{ m}$ a $w_2(t) = 0.15 \text{ m}$ ($0 \text{ min} \leq t < 40 \text{ min}$). Vyjma průběhů, znázorněných na Obr. 10, Obr. 11 resp. Obr. 15, Obr. 16, které jasně dokládají vliv koeficientů γ_{11} , γ_{12} váhové matice \mathbf{F} na průběh regulačního pochodu, jsou referenční veličiny rozšířeny o další skok $w_1(t) = 0.1 \text{ m}$, $w_2(t) = 0 \text{ m}$ ($40 \text{ min} \leq t \leq 80 \text{ min}$). Mezní případy váhových koeficientů vystihuje Obr. 8 a Obr. 13, které odrážejí dopad na chování řízených veličin z hlediska použití čisté 1 DOF resp. 2 DOF konfigurace. Neustálé zvyšování hodnot vah směrem k jedné, urychluje regulační pochod, při snížené stabilitě odezvy a zároveň jsou také kladeny vyšší nároky na rychlé změny akčních veličin, jak dokazují průběhy, uvedené na Obr. 11 a Obr. 16. Dalším významným rysem, který však vyplývá ze samotného návrhu regulátoru, je skutečnost, že zatímco volbou α_1 , α_2 ovlivňujeme obě řízené veličiny současně, můžeme změnou vah podstatně ovlivnit jeden samostatný řízený výstup. Předem si však vůbec řekněme, jaký způsobem ovlivňuje chování systému zmíněná volba pólů, pravé strany maticové diofantické rovnice, α_1 , α_2 . Jak vystihuje Obr. 12 a Obr. 17, nastavení menších hodnot vede k situaci, že systém déle dotahuje referenční hodnoty, než v případě výše položených pólů. K tomu, aby výklad podával skutečné vysvětlení, je nutné stávající část doplnit o některé pádné rysy, související se strukturou samotných regulátorů. Ty jsou návrhem dány jako P resp. PI. Znamená to, že regulátor odečte měřenou hodnotu hladiny od požadované a vynásobí ji proporcionální složkou, což znamená, že bude-li tento rozdíl velký, bude zároveň velký výkon čerpadel přivádějící kapalinu do zásobníků. Jednoduše to znamená, že čím vyšší hodnotu P resp. I zvolíme, tím více zvyšujeme rychlost odezvy. Protože na hodnotě P resp. I složky se podílí jak váhové koeficienty, tak volitelné póly pravé strany rovnice, existuje mezi nimi přímá souvislost v návaznosti na uvedený komentář k regulačním pochodům.

Simulace s využitím delta modeluObr. 8: Delta model – průběhy řízených výstupních veličin ($\alpha_1=0.4$, $\alpha_2=0.2$)Obr. 9: Delta model – průběhy akčních veličin ($\alpha_1=0.4$, $\alpha_2=0.2$)

Obr. 10: Delta model – řízené veličiny pro různé váhy Γ ($\alpha_1=0.4, \alpha_2=0.2$)Obr. 11: Delta model – akční veličiny pro různé váhy Γ ($\alpha_1=0.4, \alpha_2=0.2$)

Obr. 12: Delta model – průběhy řízených výstupních veličin ($\gamma_{11}=0.5, \gamma_{12}=0.5$)*Simulace s využitím filtrace proměnných*Obr. 13: Spojitý model – průběhy řízených výstupních veličin ($\alpha_1=0.4, \alpha_2=0.2$)

Obr. 14: Spojitý model – průběhy akčních veličin ($\alpha_1=0.4$, $\alpha_2=0.2$)Obr. 15: Spojitý model – řízené veličiny pro různé váhy Γ ($\alpha_1=0.4$, $\alpha_2=0.2$)

Obr. 16: Spojitý model – akční veličiny pro různé váhy Γ ($\alpha_1=0.4$, $\alpha_2=0.2$)Obr. 17: Spojitý model – průběhy řízených výstupních veličin ($\gamma_{11}=0.5$, $\gamma_{12}=0.5$)

6 APLIKAČNÍ PROSTŘEDÍ

Závěr předchozí kapitoly byl ilustrován celou škálou simulačních příkladů, odrážejících řízení hladin zásobníků, a proto nezbyvá než uvést a představit pomůcku, prostřednictvím které, byly uvedené pochody dosaženy. Tímto podpůrným prostředkem je simulační program s názvem „LT simulator“, zachycený na Obr. 18. Jedná se o interaktivní simulační prostředí, závislé na operační platformě Windows, umožňující dokonalé seznámení se s modelem spojených zásobníků na kapalinu v sérii, neboť implementuje všechny doposud probraný aparát.



Obr. 18: Simulační aplikace LT simulator

Proto hlavním cílem kapitoly bude nastítnit možnosti uživatelské roviny, bez jakékoliv návaznosti na samotný programový kód, neboť bychom dalece překročili primární účel, za kterým byla kapitola sestavena. První část pozornosti tak bude upřena na základní způsob práce v hlavním okně, při níž si zároveň osvojíme i veškeré ovládací prvky. Tyto základní možnosti budou poté rozšířeny v další části, jež klíčovou strukturu obohacují o pokročilé způsoby identifikace a na závěr kapitoly ukážeme způsob, jak nasimulované hodnoty přenášet ven a dále zpracovávat ve známých programech, jakými jsou Excel, Origin a mnohé další.

6.1 Primární ovládání

Po spuštění aplikace se před námi na obrazovce objeví grafická interpretace, znázorněná na Obr. 19, jež uvádí orientaci ovládacích prvků na ploše formuláře. Pro získání konkrétní představy o tom, jakým způsobem simulační pochod docílit, je nezbytným prvotním krokem ukázat smysl a funkcionalitu základních objektů, které lze kategorizovat do celkem sedmi základních tříd:

- Blok 1: Reprezentuje simulační resp. uzavírací tlačítko aplikace. Vzhledem k tomu, že je aplikace ihned po spuštění implicitně inicializována, lze provádět simulace přímým kliknutím na oválný objekt, zastoupený šipkovým obrázkem, situovaným v levé části bloku. Protože je však simulace nastavena v režimu identifikace, tedy ve stavu, kdy změnou vstupních průtoků sledujeme odezvy výšek hladin, docílíme pouze chování charakteristické pro ustálený stav.
- Blok 2: Má přímou vazbu k následujícímu bloku, neboť skrze něj, je prostřednictvím výběrových polí možné určovat aktuálně vykreslované průběhy v podobě odchylek a skutečných či žádaných hladin.
- Blok 3: Představuje 2D vizualizační oblast pro zobrazování právě probíhající simulace, ať už se jedná o prosté buzení systému či komplexní řízení.
- Blok 4: Za podmínky zvolení identifikačního režimu, je možné sledovat vliv vstupních průtoků na výšky hladin, prostřednictvím dvou posuvných manipulačních prvků, zastupujících jednotlivé přítoky do zásobníků. Textová pole, figurující jako póly pravé strany diofantické rovnice a koeficienty váhové matice, se uplatňují v případě volby řídicího režimu.
- Blok 5: Identifikační část, ve které lze různým přepínáním dosáhnout mimo klasické metody nejmenších čtverců, také její modifikace, které je možné kombinovat s metodou filtrace proměnných či strategií delta modelu.
- Blok 6: Sekvenční pole, udávající svým obsahem tvar požadovaných charakteristik v čase.
- Blok 7: Zastřešuje aplikační menu, v jehož rámci je možné vedle sekvenčního pole udávat simulační dobu, periodu vzorkování a zároveň rozšiřuje oblast identifikace o inicializační možnosti.



Obr. 19: Rozvržení pracovní plochy aplikace

6.1.1 Pokročilé možnosti identifikace

V rámci teoretické kapitoly, zaměřené na problematiku identifikace mnohazměrového systému byla diskutována otázka apriorní informace pro volbu počátečních podmínek, tedy podmínek, jež mohou pozitivním způsobem ovlivnit start adaptivního řízení. Z programového hlediska, je možné tuto apriorní informaci měnit v záložce identifikace. Po jejím rozbalení, znázorněném na Obr. 20, je zřejmé, jakým způsobem. Poklepání na každou položku vyvolává dialogové okno, jehož součástí jsou editovatelná textová pole, charakteristická pro uvedený typ identifikačního zapomínání. Krom toho, jsou identifikační možnosti rozšířeny o volbu konstanty filtru, která se však uplatňuje pouze z hlediska přímé metody. Poslední součást identifikačního menu ovlivňuje počáteční odhady parametrů modelu procesu, což znamená, že měníme-li konkrétní hodnoty obsažené v textových položkách za jiné, měníme tím vlastně prvky matic linearizovaného modelu. Inicializační procedurou jsou všechny, výše zmíněné prvky naladěny na určité hodnoty a není potřeba je měnit, nechceme-li experimentovat s jejich vlivem na samotnou kvalitu regulace, kterou se spíše hodí posuzovat z pohledu volby parametrů v návrhu řízení. Poznamenejme však, že v rámci identifikační volby režimu je možné posuzovat a

porovnávat dopad těchto parametrů na výsledné identifikované parametry modelu nejen prostřednictvím implementovaných způsobů identifikace, ale také deterministických metod, a ačkoliv ty překračují možnosti simulačního prostředí, ukážeme si vzápětí způsob, jak lze získaná data dále interpretovat.



Obr. 20: Listování v identifikační záložce

6.2 Zpracování dat

Jednou z nejběžnějších činností doprovázející simulační aplikace je export dat, Exportní funkce je velmi oblíbeným pomocníkem všude tam, kde si uživatel přeje dále zpracovávat data po svém, formou individuálních grafů a tabulek, čímž jsou možnosti takřka neomezené. Z toho důvodu bylo do aplikace nutné zakomponovat exportní možnosti a zároveň nalézt kompromis, aby aplikace dále „nerostla“ na paměti. Bezpochyby nejznámějším tabulkovým programem, určeným pro zpracování velkého množství dat, je Excel, a proto bylo cílem nalézt co nejjednodušší vazbu mezi ním a daty, obsaženými v simulaci. Tímto mezičlánkem je tzv. csv soubor, jehož obsah je možné importovat do listu Excelu. Zmíněný způsob importu zachycuje Obr. 21.,



Obr. 21: Proces exportu dat do prostředí Microsoft Excel

kteří nám dává konkrétní představu o přenesených výsledcích, nicméně nepřibližuje metodiku, kterou lze přejít od jedné obrazovky ke druhé, čímž vyvstává otázka, co se skrývá za šipkami. Tu lze odkrýt v těchto krocích:

- Po ukončení simulačního pochodu vybereme z místní nabídky záložku s názvem *Simulations*, ve které zvolíme poslední položku *Data export*, čímž vyvoláme dialog, do jehož textového pole je možné zadat název souboru, jež má předvolené jméno *export.csv*.
- Potvrzením dialogového okna dojde k uložení nasimulovaných dat v podadresáři *Export*, který je součástí hlavního adresáře celé aplikace, bez ohledu na umístění spustitelného souboru aplikace v rámci souborového systému.
- V této chvíli je již práce záležitostí výhradně Excelu, jež nabízí ve své široké paletě možností také tzv. *import z textu*. Po jeho zvolení vybereme jako oddělovač mezeru, čímž se data promítnou do aktuálního listu a je možné je dále přenášet či graficky zpracovávat.

ZÁVĚR

Je-li pravdou, že matematika je jazykem, kterým dal Bůh světu podobu, stanovil si jistě za cíl jej vytvořit tak, aby nebylo snadné jeho pochopení, a proto do téměř všech přírodních dynamických procesů vnesl prvky nelinearity. Protože je však lidské snažení a chápání takřka neomezené, vytvořilo ústupek z nouze v podobě linearizace. Z dnešního úhlu pohledu - počítačové doby, nečiní řešení nelineárních diferenciálních rovnic potíže, do doby kdy je chceme ovlivňovat, což představuje filozofii a hlavní myšlenku práce. Působit na mnohazměrový nelineární systém tak, abychom docílili požadovaného chování. Nabídlo se tedy využít prostou myšlenku linearizace a od ní odrazit prezentovanou strategii polynomiálního přístupu. Za tímto cílem bylo zapotřebí vyřešit otázku způsobu identifikace alternativního modelu s časově proměnnými parametry, což vedlo k přirozené snaze navrhnout takový řídicí algoritmus, který by byl schopen se přizpůsobit novému pracovnímu bodu.

Jedno latinské úsloví říká „*acta non verba*“, což v doslovném překladu znamená „*činy, ne slova*“. Zní to možná trochu pateticky, ale s nutnou dávkou nadsázky, je právě konkrétní fyzikální model, reprezentovaný soustavou spojených zásobníků na kapalinu oním prvkem, který dal celému výkladu řád a smysl, a na jehož chování byl veškerý teoretický aparát verifikován. Model, který na sebe postupně nabaloval jednotlivé aspekty, směřující k adaptivnímu řízení, byl z programového hlediska snadno algoritmizovatelný, čímž se těžiště práce přeneslo do výpočetní roviny, která připravila půdu pro vytvoření simulační aplikace, jež je celkovým završením snahy o to, nejen něco sepsat, ale zároveň i obohatit nabyté poznatky o komplexní přenositelné prostředí, mající přímou vazbu k celé uvažované konfiguraci řízení.

ZÁVĚR V ANGLIČTINĚ

If it is true that mathematics is the language that God introduced to give the world form, it is obvious, he intended to make it in such a way, which was not easy to understand and so almost all natural dynamic processes we meet, refer to the nonlinear phenomena. However, because of almost unlimited human effort and insight, the principle of linearization was formed as a tool of need. From today's point of view - computer age helps us not to make trouble to find a solution of nonlinear differential equations any more, but the problem comes when we want to control them, which is the main idea and philosophy of the thesis. Control the multivariable nonlinear system in such a way we could achieve the desired behavior. Since the simple idea of linearization was born, we could take advantage of its tool and open presented strategy of polynomial approach. Ambitiously pursue this objective it was necessary to resolve the question of how to identify an alternative model with time-varying parameters, which brings us to idea such a control design algorithm, which would be powerful enough to adapt the new operating point.

One Latin proverb says "*acta non verba*", which could be literally translated as "deeds, not words." It might sounds a little pathetically, but with the necessary amount of exaggeration, it is just a particular physical model, an object, which was represented by two liquid tanks in series that gave the whole thing together, and whose behavior was used to verify designed theoretical tool. The model, which was gradually developed to achieve individual aspect, leading to an adaptive control, was even simply algorithmizable from the programming point of view, thus the focus of the work moved into the computational plane, which paved the way to create a simulation application, that is the culmination of overall efforts not to only write something, but also enrich the acquired knowledge by complex platform-depended environment, which have a direct relationship to the considered control configuration.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] BISHOP, Robert H a Richard C DORF. *Modern Control Systems*. 8th ed. Menlo Park: Addison Wesley, 1998, 855 s. ISBN 0201326779.
- [2] BLOMBERG, Hans a Raimo YLINEN. *Algebraic theory for multivariable linear systems*. New York: Academic Press, 1983, 360 s. ISBN 01-210-7150-2.
- [3] BOBÁL, Vladimír. *Adaptivní a prediktivní řízení*. 1. vyd. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2008, 134 s. ISBN 978-80-7318-662-3.
- [4] BOBÁL, Vladimír. *Identifikace systémů*. Vyd. 1. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2009, 128 s. ISBN 978-80-7318-888-7.
- [5] ČELIKOVSKÝ, Sergej. *Nelineární systémy*. Vyd. 1. V Praze: Nakladatelství ČVUT, 2006, 212 s. ISBN 80-010-3435-6.
- [6] DOSTÁL, Petr, Vladimír BOBÁL a František GAZDOŠ. (May 19-21, 2003). *Continuous-time adaptive control of MIMO nonlinear process using delta model parameter estimation*. In: Proceedings of the IASTED International Conference on Circuits, Signals and Systems. Mexico, Cancun, s. 23-28.
- [7] DOSTÁL, Petr, Vladimír BOBÁL a František GAZDOŠ. *Adaptive control of a MIMO process by two feedback controllers*. The 6th Asian Control Conference ASCC 2006, Bali, Indonesia, 2006, 540-546.
- [8] DOSTÁL, Petr a Radek MATUŠŮ. *Stavová a algebraická teorie řízení*. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2010, 90 s. ISBN 978-80-7318-991-4.
- [9] GARNIER, Hugues a Liuping WANG. *Identification of continuous-time models from sampled data*. London: Springer, 2008, 411 s. ISBN 978-1-84800-160-2.
- [10] HAVLENA, Vladimír a Jan ŠTECHA. *Moderní teorie řízení*. dotisk 1. vyd. Praha: ČVUT, 1996, 291 s., 40 obr. ISBN 8001010767.
- [11] KHALIL, Hassan. *Nonlinear systems*. 3rd ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2002, 750 s. ISBN 01-306-7389-7.
- [12] ROSENWASSER, Efim a Bernhard P LAMPE. *Multivariable computer-controlled systems: a transfer function approach*. London: Springer, 2006, 478 s. ISBN 1846284317.

- [13] SKOGESTAD, Sigurd a Ian POSTLETHWAITE. *Multivariable feedback control: analysis and design*. 2nd ed. Chichester, England: John Wiley, 2005, 574 s. ISBN 0470011688.
- [14] STERICKER, D. L., SINHA, N. K., *Identification of continuous-time systems from samples of input-output data using the delta-operator*, Control-Theory and Advanced Technology, 9, 1993, 113-125.
- [15] ŠTECHA, Jan a Vladimír HAVLENA. *Teorie dynamických systémů*. 2. vyd. Praha: ČVUT, 1999, 248 s., 70 obr. ISBN 8001019713.
- [16] WAHLBERG, Bo. *On the identification of continuous time dynamical systems*. In Proc. 1988 IFAC symposium on Identification and Parameter Estimation, Beijing, China, 1988.

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

$(\cdot)^T$	Transponování matice či vektoru.
$\Re[s]$	Okruh polynomů v komplexní proměnné s
$\Re^{rm}[s]$	Množina reálných polynomiálních matic typu $r \times m$.
\dot{x}	Derivace podle časové proměnné.
\bar{x}	Rovnovážný stav.
$\mathbf{x}^T = [x_1, x_2, \dots, x_n]$	Sloupcový vektor n -prvků.
$\mathbf{u}^T = [u_1, u_2, \dots, u_m]$	Sloupcový vektor m -prvků.
$A(s)$	Polynomiální matice v s .
$a_{ij}(s)$	Prvek polynomiální matice.
a_{ijk}	Koeficient polynomu.

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr. 1: Dynamický systém.....	11
Obr. 2: Princip rekurzivní identifikace metodou nejmenších čtverců	37
Obr. 3: Systém řízení s jedním stupněm volnosti – konfigurace 1 DOF	41
Obr. 4: Systém řízení se dvěma stupni volnosti – konfigurace 2 DOF.....	46
Obr. 5: Spojené zásobníky na kapalinu.....	50
Obr. 6: Podélný řez nálevkovitým zásobníkem	52
Obr. 7: Schéma adaptivní regulace	57
Obr. 8: Delta model – průběhy řízených výstupních veličin ($\alpha_1=0.4$, $\alpha_2=0.2$).....	62
Obr. 9: Delta model – průběhy akčních veličin ($\alpha_1=0.4$, $\alpha_2=0.2$)	62
Obr. 10: Delta model – řízené veličiny pro různé váhy Γ ($\alpha_1=0.4$, $\alpha_2=0.2$).....	63
Obr. 11: Delta model – akční veličiny pro různé váhy Γ ($\alpha_1=0.4$, $\alpha_2=0.2$).....	63
Obr. 12: Delta model – průběhy řízených výstupních veličin ($\gamma_{11}=0.5$, $\gamma_{12}=0.5$).....	64
Obr. 13: Spojitý model – průběhy řízených výstupních veličin ($\alpha_1=0.4$, $\alpha_2=0.2$).....	64
Obr. 14: Spojitý model – průběhy akčních veličin ($\alpha_1=0.4$, $\alpha_2=0.2$)	65
Obr. 15: Spojitý model – řízené veličiny pro různé váhy Γ ($\alpha_1=0.4$, $\alpha_2=0.2$).....	65
Obr. 16: Spojitý model – akční veličiny pro různé váhy Γ ($\alpha_1=0.4$, $\alpha_2=0.2$).....	66
Obr. 17: Spojitý model – průběhy řízených výstupních veličin ($\gamma_{11}=0.5$, $\gamma_{12}=0.5$)	66
Obr. 18: Simulační aplikace LT simulator.....	67
Obr. 19: Rozvržení pracovní plochy aplikace.....	69
Obr. 20: Listování v identifikační záložce.....	70
Obr. 21: Proces exportu dat do prostředí Microsoft Excel	71

SEZNAM PŘÍLOH

PŘÍLOHA P I: ZDROJOVÝ KÓD SIMULAČNÍHO PROSTŘEDÍ

PŘÍLOHA P I: ZDROJOVÝ KÓD SIMULAČNÍHO PROSTŘEDÍ

Tato příloha zahrnuje veškerý programový kód vytvořené simulační aplikace – projekt a současně také, vedle konfiguračních souborů, spustitelný soubor, pro jehož plnou funkčnost je nutná instalace, volně stažitelného frameworku .NET. Vzhledem k programové rozsáhlosti, je zdrojový kód k dispozici pouze na přiloženém CD.