

Konstrukce přípravku pro demonstraci krutu

Petr Kolář



Vložit oficiální zadání bakalářské práce

Chtěl bych poděkovat panu Doc. Ing. Oldřichu Šubovi, Csc. za odborné vedení a cenné připomínky, které mi pomohly při psaní této práce. Dále bych rád poděkoval panu Ing. Jiřímu Šálkovi za pomoc při výrobě samotného přípravku

Souhlasím s tím, že s výsledky mé práce může být naloženo podle uvážení vedoucího bakalářské práce a ředitele ústavu. V případě publikace budu uveden jako spoluautor.

Prohlašuji, že jsem na celé bakalářské práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval.

Ve Zlíně, 03. 06. 2005

.....

podpis

RESUMÉ

Anotace česky

Základní část mé bakalářské práce tvoří teorie kroucení. V teoretické a studijní části jsem se zabýval studiem různých metod výpočtu základních veličin, které krut charakterizují. Zejména jsou to: Úhel pootočení, napětí, a deformaci. Jako deformační veličina se u tohoto typu namáhání projevuje úhel skroucení. Jednotlivé poznatky jsou shrnuty do třech základních kapitol: Kroucení přímých prutů kruhového průřezu, přibližné řešení kroucení tenkostěnných uzavřených průřezů a kroucení nekruhových průřezů.

Experimentální část mé práce se zakládá na konstrukci přípravku pro demonstraci krutu. Navrhl jsem (včetně technické dokumentace) dva typy přípravků na kroucení velkých a malých průřezů. Na základě teoretické a studijní části jsem sestavil několik typových úloh, jenž se dají pro danou problematiku použít.

Anotace ve světovém jazyce

Primary parts of my sub-degree course work compose theory torsion. In theoretical and study part I was engaged by study various methods of calculations primary dimension, which torsion characterize. Especially they are: angle of reverse, tension and deformation. As deformation dimension at this type stress is exhibiting angle twist. As individual knowable are totalize to three primary chapters. And it is: Torsion of direct of rod circular profile, approximate solutions thin-walled closed of profiles and torsion Para centric profiles.

Experimental part of my work is composing on construction of device for demonstration torsion. I draft (inclusive of technical documentation) two type on devices torsion big and small profiles. On the primary of theoretical and study part I set few typical problem, which I can issue for employment.

OBSAH

ÚVOD.....	6
1 TEORETICKÁ A STUDIJNÍ ČÁST	7
1.1 Kroucení přímých prutů kruhového průřezu	7
1.1.1 Definice prostého krutu	7
1.1.2 Namáhání prostým krutem	7
1.1.3 Napětí při prostém krutu.....	8
1.1.4 Výpočet úhlu zkroucení přímého prutu kruhového průřezu.....	13
1.1.5 Deformační práce při kroucení tyčí kruhových průřezů.....	14
1.2 Přibližné řešení kroucení tenkostěnných uzavřených průřezů.....	15
1.2.1 První Bredtův vzorec	15
1.2.2 Deformační práce při kroucení tyčí libovolných tenkostěnných průřezů.....	18
1.2.3 Druhý Bredtův vzorec	20
1.3 Kroucení nekruhových průřezů	21
1.3.1 Složky deformace a stav napjatosti prvku při kroucení.....	21
1.3.2 Základní rovnice kroucení	26
1.3.3 Funkce napětí.....	29
1.3.4 Plocha napětí	30
1.3.5 Hydrodynamická analogie.....	31
1.3.6 Membránová analogie	33
1.3.7 Výpočet napětí a deformace u prutů obdélníkového průřezu.....	34
2 STANOVENÍ CÍLŮ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE	37
3 EXPERIMENTÁLNÍ ČÁST.....	38
3.1 Konstrukce přípravku.....	38
3.1.1 Základní rám.....	38
3.1.2 Přípravek pro kroucení větších průřezů.....	39
3.1.3 Přípravek pro kroucení malých průřezů	42
3.2 Sestavení úloh pro měření.....	44
3.2.1 Úloha I. – Ověření lineární závislosti napětí na deformaci	44
3.2.2 Úloha II. – Aplikace Bredtových vzorců.....	46
3.2.3 Úloha III. – Kroucení obdélníkového průřezu.....	48
3.2.4 Úloha IV. – Porovnání tuhostí otevřeného a uzavřeného průřezu.....	49
3.3 Výpočet vzorových úloh se zvolenými zkušebními tělesy.....	51
3.3.1 Výpočet navržené úlohy I.....	51
ZÁVĚR.....	55
SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY	56
SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK.....	57
SEZNAM OBRÁZKŮ.....	59
SEZNAM TABULEK	60
SEZNAM PŘÍLOH.....	61

ÚVOD

Zkušenost ukazuje, že tělesa, se kterými se v technické praxi setkáváme, se vlivem působení vnějších zatěžovacích sil deformují. Tím samozřejmě vzniká v oněch tělesech tzv. vnitřní napětí a jejich látka mění své vlastnosti. Deformování tělesa je fyzikální jev značně složitý již při pozorování makrofyzikálních změn (pružné a plastické chování materiálu, ovlivňování elastických vlastností). Základní otázkou, která nás zajímá, je úplný kvalitativní a kvantitativní výklad všech dějů, probíhajících při deformování tělesa. Deformování těles je běžným jevem praxe a jeho zkoumání má veliký význam v různých technických a vědních oborech.

Jednotlivé druhy zatěžování vyžadují znalost těchto základních poznatků teorie pružnosti a pevnosti. Při studiu elementárních typů namáhání je téměř nezbytné si ověřit platnost vztahů a rovnic, které jsou odvozeny z prakticky prováděných experimentů. K tomuto účelu slouží jednoduché přípravky, které mohou do jisté míry simulovat zatěžování a následné přetváření materiálů nejrůznějších tvarů a vnitřního složení, používané ve výrobním průmyslu.

Při navrhování různých dílů a součástí musí konstruktér volit materiál a průřezové rozměry každého prvku tak, aby spolehlivě odolával působení vnějších sil. To ovšem v praxi znamená nejen zabezpečit jeho normální funkci a bezproblémovost při uvedení do činnosti ale rovněž posuzovat celý problém z ekonomického hlediska. Což bývá velmi častý problém, protože požadavky spolehlivosti a největší hospodárnosti si navzájem odporují. První vede zpravidla k zvětšení výdajů za materiál, druhý vyžaduje snížení těchto výloh.

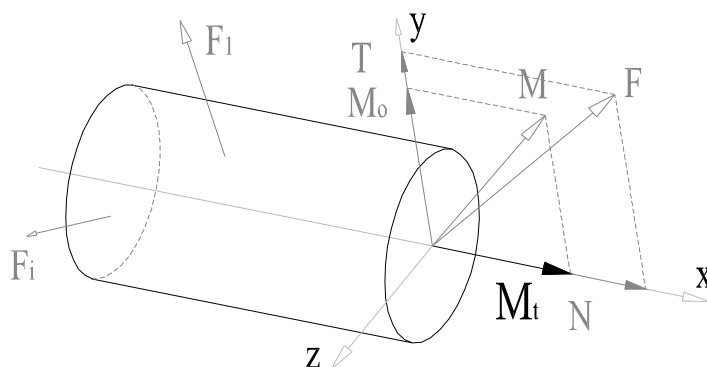
Dále je ještě třeba vzpomenout, že v dnešním rozmachu techniky, jsou na zejména technologické součástky kladeny nemalé nároky. Toto hledisko nám jasně ukazuje, že již nevystačíme pouze s klasickou teorií pružnosti, podle níž předpokládáme, že vnější síly jsou stálé. Je proto potřebné zavádět stále nové a přesnější výpočty, které berou ohled i na časovou změnu vnějších sil. Velmi důležitým činitelem, při uplatňování nových znalostí je zpětná vazba, tj. kontrola na hotových částech nebo modelech.

1 TEORETICKÁ A STUDIJNÍ ČÁST

1.1 Kroucení

1.1.1 Definice

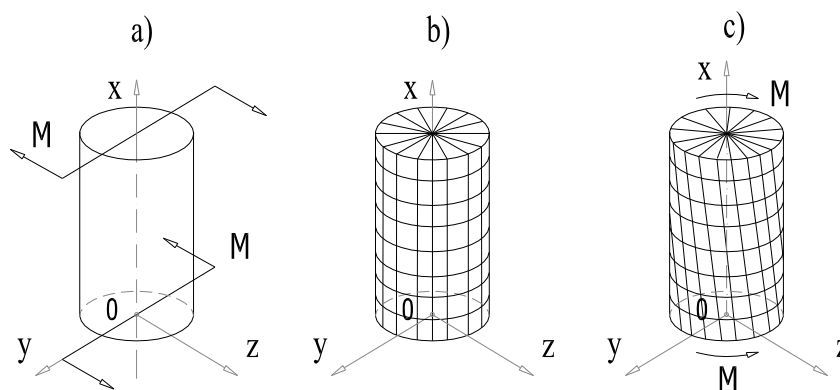
Prostý krut přímý
a momentů (N ,
pak nazýváme k



Obr. 1. Vnitřní statické účinky

1.1.2 Namáhání prostým krutem

Při studiu kroucení využijeme pro názornost kruhový válec, jehož oba konce jsou zatíženy silovými dvojicemi, tj. momenty M (obr.2a).



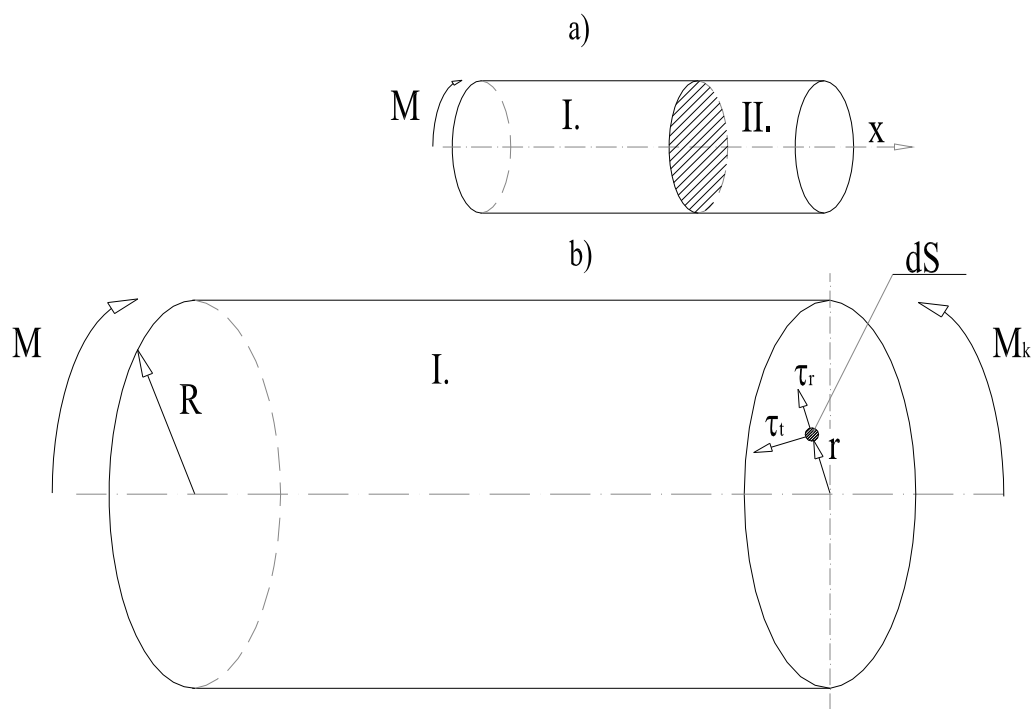
Obr. 2. Deformace vlivem kroucího momentu

Narýsujeme na plášti válce před zkroucením sít' povrchových přímek a soustavu kružnic. Přímky i kružnice mají od sebe stále stejnou vzdálenost (*obr.2b*). Již při velmi malých hodnotách ohybových momentů (*obr.2c*) můžeme pozorovat, že:

- všechny povrchové přímky se natočí o stejný úhel
- čelní průřezy zůstanou rovinné a obrysy všech průřezů se nebortí (kružnice se nemění, tj. zachovává si stejný poloměr jako před začátkem působení kroutícího momentu
- průměry vyznačené na čelním průřezu zůstanou přímkové
- vzdálenosti mezi jednotlivými kružnicemi se účinkem kroutícího momentu nemění
- tyto experimentální poznatky nám též dovolují přijetí hypotézy, že materiál prutu je homogenní, izotropní a řídí se Hookeovým zákonem

1.1.3 Napětí při prostém kroutu

Při kroucení prutů kruhových průřezů vznikají v jednotlivých bodech řezů kolmých k ose prutu tečná smyková napětí.



Obr. 3. Vnitřní napětí při kroucení

Nyní provedeme myšlený řez vyšetřovaným prutem (Obr.3a). Řez rozdělí prut na dvě části. Z části I. vytkneme elementární hranolek (Obr.3b) tak, aby jedna jeho strana ležela vždy v rovině kolmé na osu prutu (osa x) a druhá byla rovnoběžná s průmětem průřezu. Potom z uvedených poznatků uvedených v kapitole 1.1.2 vyplývá, že při zkroucení prutu elementární hranolek nezmění své rozměry. Tzn. $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$ a protože $\sigma = \varepsilon \cdot E \Rightarrow \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$

Z uvedeného plyne, že při prostém kroucení prutů kruhových průřezů jsou ve všech bodech řezů kolmých na osu prutu jen *napětí smyková*. Protože pod vlivem působení radiálního smykového napětí τ_r by došlo k deformaci průřezu, což odporuje výše uvedeným podmínkám, je $\tau_r = 0$. Při prostém kroucení prutů kruhových průřezů se tedy vyskytnou jen smyková napětí tečná τ_t , z čehož vyplývá, že $\tau_t = \tau$.

Na část I. působí vnější momenty M_i , jejichž součet je:

$$M = \sum_1^{\infty} M_i \quad (1)$$

a vnitřní síly $\tau \cdot dS$. Momentová statická podmínka rovnováhy k ose prutu je

$$\sum_1^{\infty} M_i - \int_S \tau \cdot dS \cdot r = 0 \quad (2)$$

Zbývající statické podmínky rovnováhy jsou identicky splněny. Momentový účinek vnitřních sil můžeme nahradit momentem M_t . Můžeme jej rovněž vyjádřit rovnicí rovnováhy

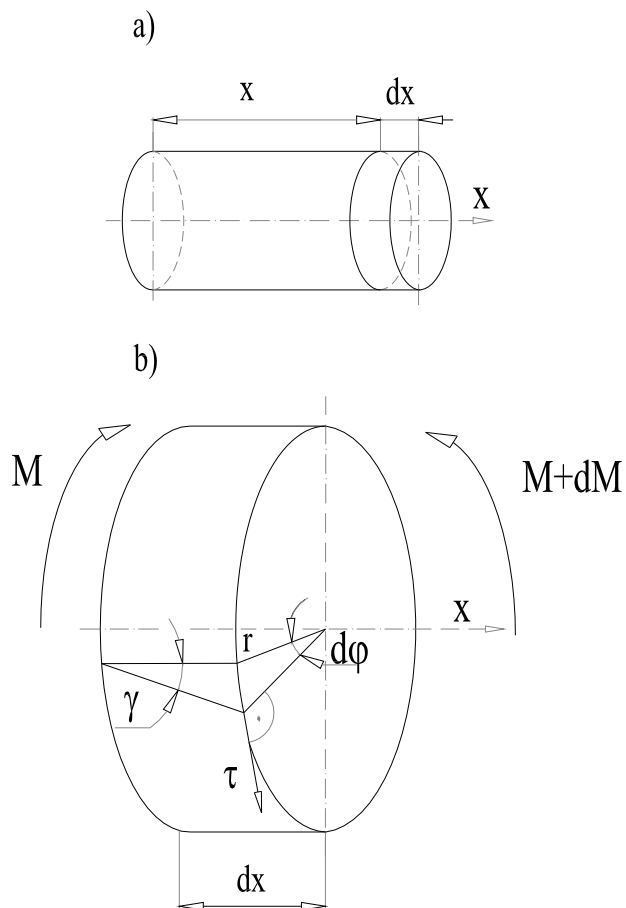
$$M_k = \int_S \tau \cdot dS \cdot r \quad (3)$$

Pomocí rovnice (3) můžeme rovnici (2) upravit do tvaru

$$M_k - \sum_1^{\infty} M_i = 0 \Rightarrow M_t = \sum_1^{\infty} M_i \quad (4)$$

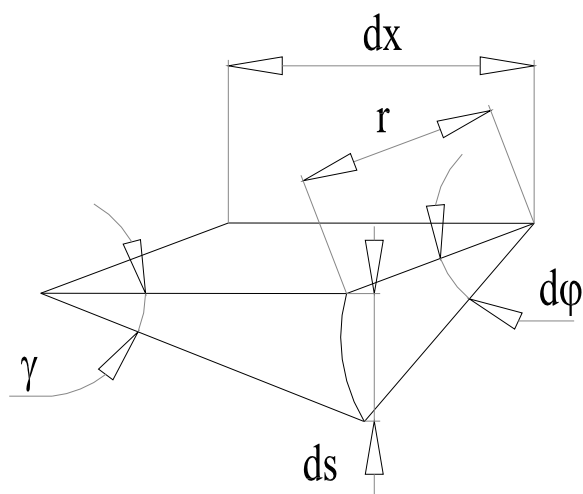
Pro již známou hodnotu kroutícího momentu M_k , vypočtenou z rovnice (4), však nemůžeme stanovit podle vztahu (3) velikost smykového napětí, protože zatím neznáme jeho rozložení po průřezu. To tedy znamená, že úloha stanovení smykového napětí je *staticky neurčitá*. K určení smykového napětí musíme nejdříve vyšetřit deformaci prutu.

Za tím účelem oddělíme z prutu elementární kotouč o výšce dx (obr.4a). Při zatížení prutu kroutícími momenty se jeho průřezy natočí o úhel $d\varphi$ (obr.4b).



Obr. 4. Element zatížený kroutícími momenty

Vzájemným pootočením obou průřezů o úhel $d\phi$ se podélná vlákna na povrchu prutu skosí o úhel γ .



Obr. 5. Detail elementu

Na elementu znázorňující zkosení vláken vlivem kroutícího momentu (obr.5) dále vidíme, že $ds = r \cdot d\varphi$ a rovněž $ds = \gamma \cdot dx$

Porovnáním obou rovnic dospějeme k zjištění, že

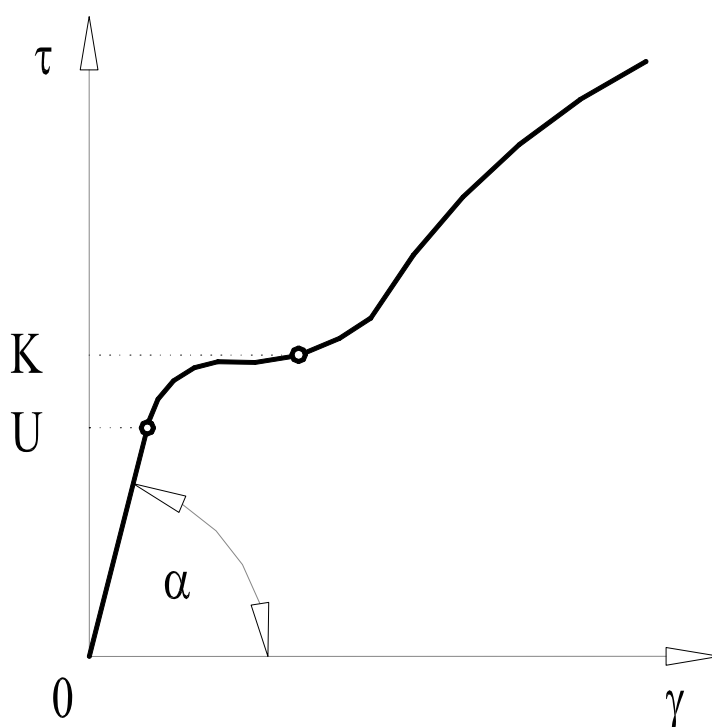
$$\gamma = r \cdot \frac{d\varphi}{dx} = r \cdot \vartheta \quad (5)$$

kde ϑ je tzv. poměrný úhel zkroucení

Z odvozeného výrazu můžeme usuzovat, že úhlové přetvoření při kroucení prutu kruhového průřezu je úměrné poloměru kroucené tyče.

Poznámka - Hookeův zákon pro smyk

Namáháme-li prut prostým smykem, můžeme pokusem určit vztah mezi smykovým napětím a úhlovým přetvořením.



Obr. 6. Křivka smyku

Na (obr.6) je diagram, který byl zjištěn při namáhání tenkostěnné ocelové trubky prostým krutem. Diagram se podobá trhačímu diagramu a můžeme na něm vidět mez úměrnosti τ_U (bod U) a mez kluzu τ_K (bod K). Lze na něm vidět, že závislost mezi smykovým napětím τ a skosením γ je až do bodu U lineární. V tomto úseku diagramu tedy platí vztah $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\tau}{\gamma}$

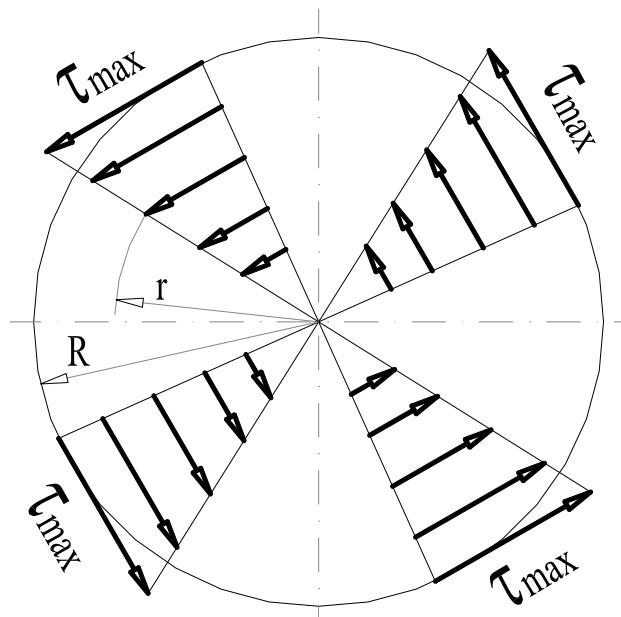
Výraz $\tan \gamma$ nazýváme *modul pružnosti ve smyku* a značíme ho G . Tzn. že $G = \frac{\tau}{\gamma} \Rightarrow$

$$\tau = \gamma \cdot G \quad (6)$$

Nyní po dosazení za γ rovnice (6) do rovnice (5) obdržíme vztah

$$\tau = G \cdot \vartheta \cdot r \quad (7)$$

Protože veličiny G a ϑ jsou pro daný vyšetřovaný průřez konstanty, proto jsou smyková napětí v každém bodě příčného průřezu přímo úměrné vzdálenosti r tohoto bodu od středu prutu. Největší smykové napětí v bodech na obvodě průřezu je na poloměru r (obr.7).



Obr. 7. Smyková napětí

Velikost tohoto maximálního smykového napětí vypočítáme z rovnice (7).

$$\tau_{\max} = G \cdot \vartheta \cdot R \quad (8)$$

Porovnáním rovnic (8) a (7) dostaneme $\frac{\tau}{r} = \frac{\tau_{\max}}{R} \Rightarrow$

$$\tau = \frac{\tau_{\max}}{R} \cdot r \quad (9)$$

Nyní můžeme z rovnice (3) vypočítat velikost smykového napětí, jestliže do ní dosadíme za τ výraz v rovnici (9).

$$M_k = \int_S \tau \cdot dS \cdot r = \int_S \frac{\tau_{\max}}{R} \cdot r^2 dS = \frac{\tau_{\max}}{R} \int_S r^2 dS$$

Integrál $\int_S r^2 dS$ nazýváme *polární moment setrvačnosti průřezu* a značíme ho J_p . Potom

velikost smykového napětí τ_{max} vypočteme z rovnice $\tau_{max} = \frac{M_t}{J_p} \cdot R$. Kde podíl $\frac{J_p}{R}$ je tzv.

průřezový modul v kroucení a značíme ho W_k . Potom

$$\tau_{max} = \frac{M_k}{W_k} \quad (10)$$

Smykové napětí v libovolném bodě průřezu získáme z rovnice (9). Jestliže do tohoto vztahu dosadíme rovnici (10) získáme konečný vztah

$$\tau = \frac{M_k}{W_k} \cdot r \quad (11)$$

1.1.4 Výpočet úhlu zkroucení přímého prutu kruhového průřezu

Pro získání základního vztahu na výpočet úhlu zkroucení přímého prutu kruhového průřezu použijeme rovnice (7) a (11). Ty mezi sebou porovnáme.

$$G \cdot \vartheta \cdot r = \frac{M_k}{J_p} \cdot r \Rightarrow \vartheta = \frac{M_k}{G \cdot J_p}$$

Dále při použití rovnice (5)

$$\vartheta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_k}{G \cdot J_p} \Rightarrow \varphi = \int_l \frac{M_k}{G \cdot J_p} dx \quad \text{kde } l \text{ je délka prutu nebo části prutu, na které}$$

zkroucení počítáme.

Při řešení některých praktických úloh je velmi často nutné vypočítat úhel pootočení φ_{xy} řezu vedeného bodem X vůči řezu vedenému bodem Y. Je-li přitom ještě potřebné rozdělit vyšetřovanou délku XY na dílčí úseky, potom pootočení φ_{xy} vypočteme z rovnic

$$\varphi_{xy} = \sum \pm \varphi_i \quad (12)$$

$$\varphi_i = \int_{l_i} \frac{M_{ti}}{G_i J_{pi}} dx_i \quad (13)$$

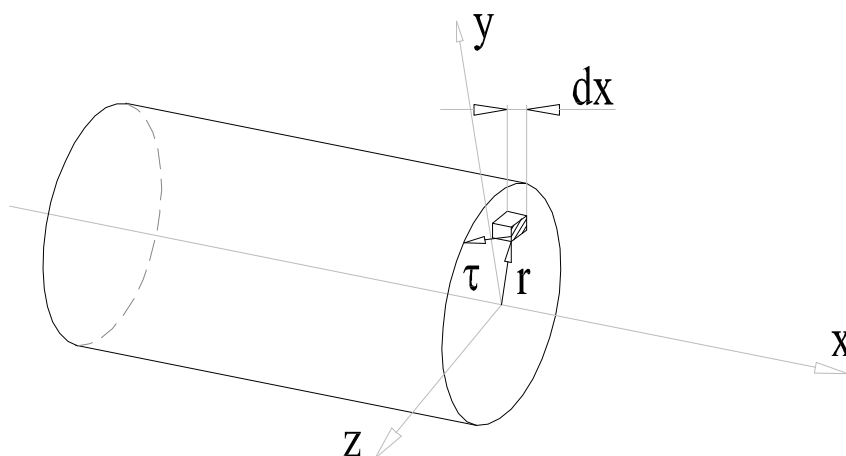
kde l_i je délka i-tého úseku.

1.1.5 Deformační práce při kroucení tyčí kruhových průřezů

Deformační práci (přetvárnou práci či energií napjatosti) tělesa nazýváme prací, která je nahromaděna v tělese při jeho zatížení a přetvoření .

Deformační

kde dV je



Obr. 8. Element objemu

Dosadíme-li do rovnice za

$$dV = dS \cdot dx \quad (15)$$

a za

$$\tau = \frac{M_k}{J_p} \cdot r \quad (16)$$

potom můžeme psát

$$A = \frac{1}{2} \int_l \int_S \frac{M_k^2}{G J_p^2} \cdot r^2 dS dx \quad (17)$$

protože výraz $\frac{M_k}{GJ_p^2} dx$ je pro daný řez konstantní, lze rovnici přepsat do tvaru

$$A = \frac{1}{2} \int_l \frac{M_k^2}{GJ_p^2} dx \int_S r^2 dS = \frac{1}{2} \int_l \frac{M_k^2}{GJ_p} dx J_p \quad \text{kde integrál } \int r^2 dS = J_p \text{ je polární moment}$$

průřezu.

Z toho tedy deformační práce při kroucení kruhových průřezů je

$$A = \frac{1}{2} \int_l \frac{M_k^2}{GJ_p} dx \quad (18)$$

Rovnice (18) platí přesně jen pro prizmatický prut, tj. pro $J_p = \text{konst.}$ Lze jej však s přibližností použít i tehdy, jestliže se průřez o délce plynule pozvolna mění.

Jsou-li M_k a GJ_p konstanty, potom deformační práce je $A = \frac{M_k^2}{2GJ_p} \int_l dx$.

Konečný tvar rovnice pro výpočet deformační práce má tvar

$$A = \frac{M_k^2 l}{2GJ_p} \quad (19)$$

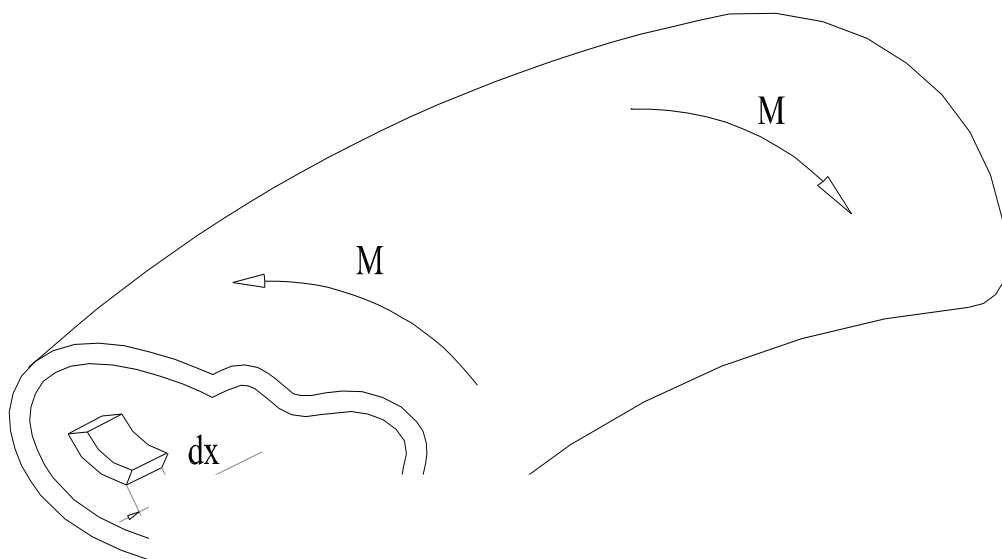
1.2 Přibližné řešení kroucení tenkostěnných uzavřených průřezů

1.2.1 První Bredtův vzorec

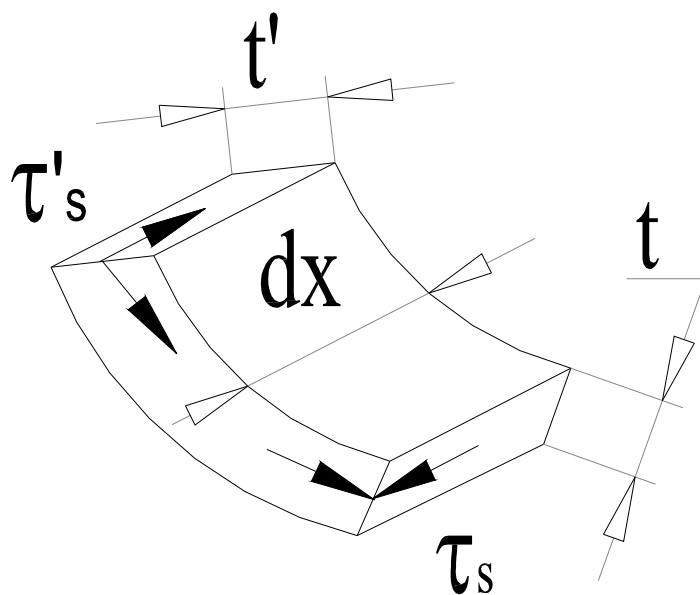
U tenkostěnných prutů libovolného tvaru (s výjimkou kruhových průřezů), namáhané prostým kroucením, nezůstanou příčné rovinné řezy po deformaci rovinné.

Jak již bylo uvedeno v odstavci 1.1.3 vzniká ve stěně prutu při kroucení pouze *smykové napětí*, o kterém při tomto přibližném řešení předpokládáme, že je po tloušťce stěny rovnoměrně rozložené.

Přesně by tento předpoklad platil jen pro nekonečně tenkou stěnu. Ve skutečnosti se smykové napětí τ podél tloušťky stěny t nepatrně mění a proto předpokládané stálé napětí je vlastně střední hodnota smykového napětí s označením τ_s . Na element stěny vyňatý z profilu libovolného tvaru (*obr.9*)



potom působí



Obr. 10. Element dx

Aby nenastalo posunutí elementu ve směru osy x , musí být splněna podmínka rovnováhy ve směru osy x

$$\sum F_{ix} = 0$$

$$\tau'_s \cdot t' \cdot dx - \tau_s \cdot t \cdot dx = 0$$

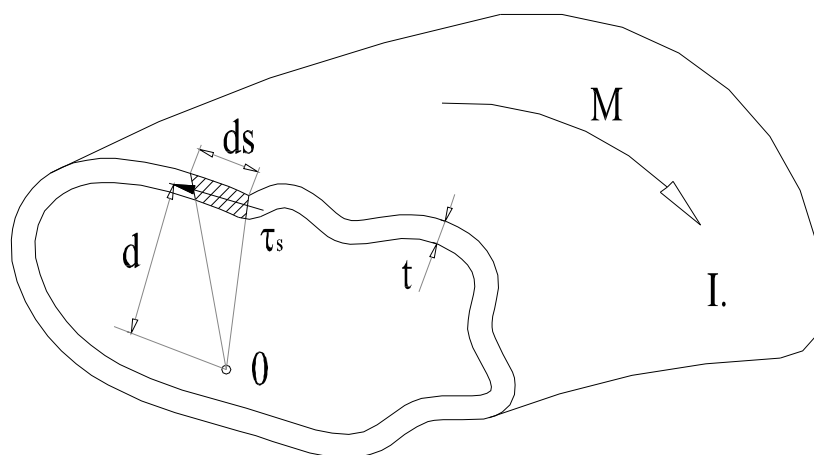
Z této podmínky rovnováhy vyplývá, že

Smyková napětí
stěny. Rovnice

Abychom určili
myšleným řezem



Po



Obr. 12. Část I.

V myšleném řezu potom působí kroutící moment

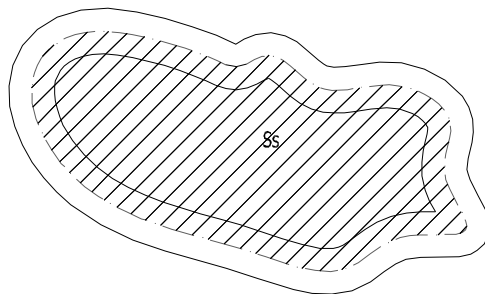
$$M_k = \int_{(s)} \tau_s \cdot t \cdot ds \cdot d \quad (21)$$

který je v rovnováze s vnějším momentem M . Protože $\tau_s \cdot t = \text{konst.}$, proto lze psát

$$M_k = \tau_s \cdot t \int_{(s)} ds \cdot d \quad (22)$$

Integrál $\int_{(s)} ds \cdot d$

S_s .



Obr. 13. Plocha střednice

Celkový krouticí moment potom je

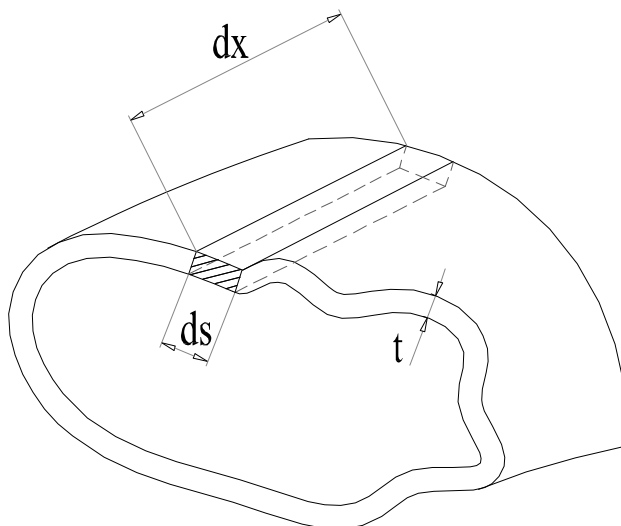
M .

Rovnice

tenkostěr

1.2.2

Deforma



Obr. 14. Element

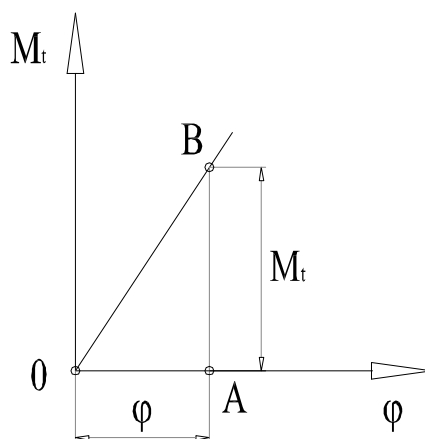
Z trubnaté části vytkneme elementární hranolek o délce dx .

$$dA = \int_s \frac{\tau_s^2}{2G} dV = \int_s \frac{\tau_s^2}{2G} \cdot t ds dx = \frac{dx}{2G} \int_s \tau_s^2 \cdot t ds$$

Protože $\tau_s, t = \text{konst.}$,

a po dosazení za τ_s z

Deformační práci v
(obr.15)



Obr. 15. Diagram práce

Z diagramu plyne, že úhel zkroucení je až po mez úměrnosti τ_U úměrný krouticímu momentu M_k .

Deformační práce je potom rovna ploše trojúhelníka OAB tj. $A = \frac{1}{2} M_k \cdot \varphi$.

V našem případě se dva soumězné řezy trubnaté části o délce dx natočí vůči sobě o úhel $d\varphi$. Deformační práce potom bude

$$dA = \frac{1}{2} M_k d\varphi \quad (26)$$

1.2.3 Druhý Bredtův vzorec

Pomocí tohoto vztahu jsme schopni určit úhel zkroucení.

Při odvozování úhlu zkroucení vycházíme z definice deformační práce obecných průřezů.

Porovnáním rovnic (25) a (26) dostaneme

$$\frac{M_k^2}{8S_s^2 G} dx \int_s \frac{ds}{t} = \frac{1}{2} M_k d\varphi$$

a z toho úhel zkroucení $d\varphi$ získáme ve tvaru

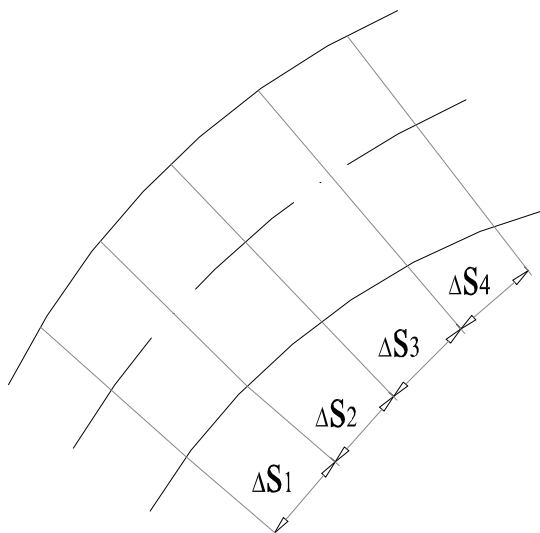
$$d\varphi = \frac{M_k}{4S_s^2 G} dx \int_s \frac{ds}{t} \quad (27)$$

Pro poměrný úhel :

Rovnice (27) nebo

Má-li průřez takov

potom postupujeme

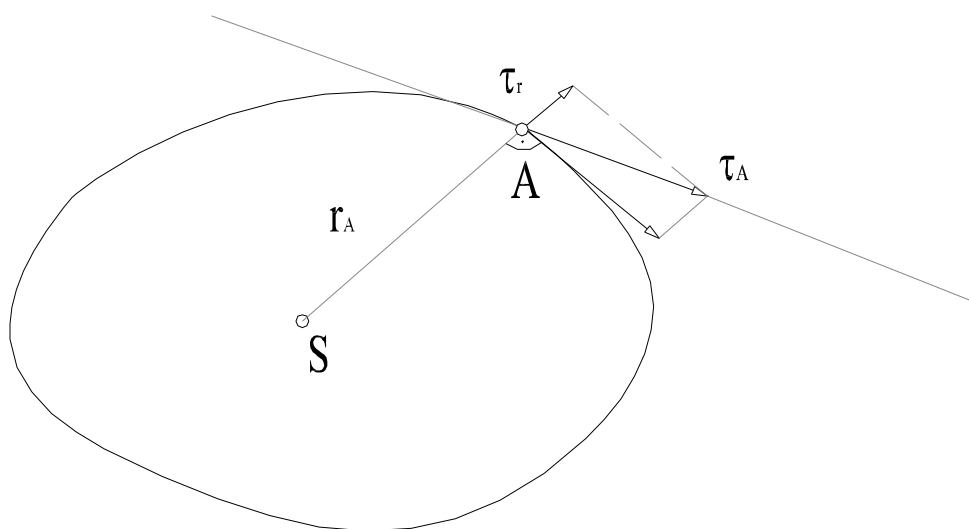


Obr. 16. Dělení složitého průřezu

Nyní lze integrál nahradit součtem $\int \frac{ds}{t} \equiv \sum_i \frac{\Delta s_i}{t_i}$.

1.3 Kroucení nekruhových průřezů

1.3.1 Složky deformace a stav napjatosti prvku při kroucení



Obr. 17. Napětí u nekruhových průřezů

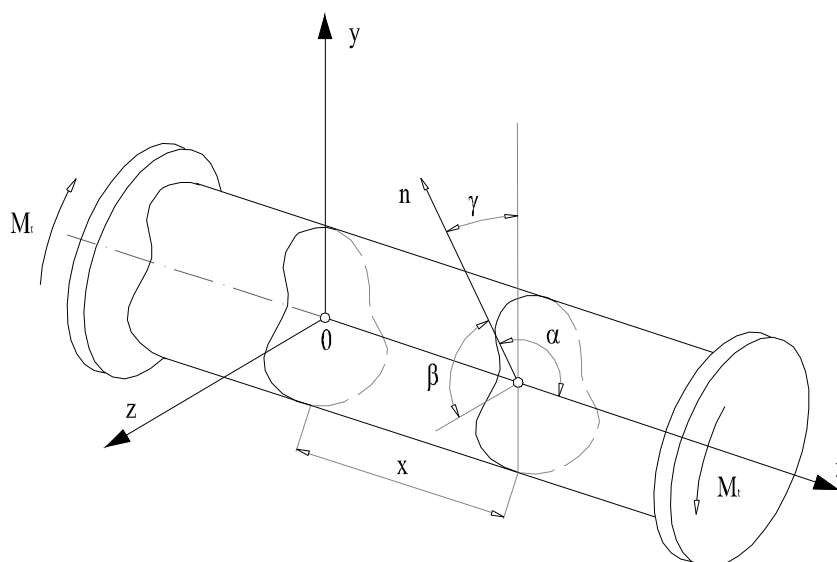
být v každém bodě A na obvodě řezu kolmé k průvodiči r_A , tj. bodu vedeného ze středu krutu-smyku, okolo kterého se průřezy natáčí.

Podle předcházejících poznatků se musí vektor smykového napětí τ_A , v libovolném bodě A na obvodě řezu, dotýkat obrysové čáry. Složka smykových napětí τ_r způsobuje zborcení průřezu.

V dalších úvahách budeme předpokládat, že se jedná o deformaci velmi malou, tzn. že:

- průměty příčných řezů ve směru podélné osy prutu zůstanou nezměněné
- délka neutrálního vlákna se nezmění

Podle Saint Venanta principu místních pohybů se řezu, i když jsou dost vzdálené od působení momentu, neprojevují. Proto můžeme uvažovat, že v každém řezu působí stejný moment.



Obr. 18. Proložení os průřezem

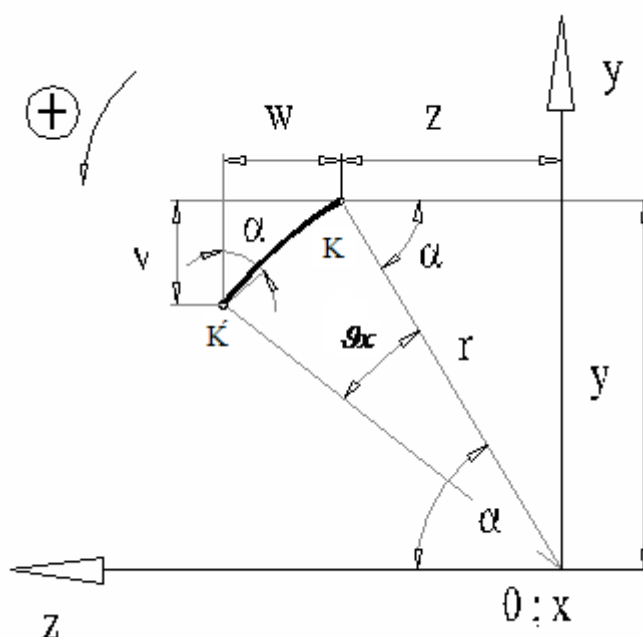
Osou x položíme do neutrálního vlákna. Každý řez se vůči zvolenému nehybnému řezu natočí a zároveň také zvlní. Za uvedených předpokladů lze tedy uvažovat deformaci krouceného prutu tak, že každý řez se natočí o jistý úhel zkrutu φ a zároveň se zbortí – *deplanuje*. Protože deplanace všech řezů je stejná, pak všechny body obecného podélného vlákna (rovnoběžného s osou x), vzniklé jako průsečíky vlákna s uvažovanými řezy, se posunou ve směru osy x o stejný posuv u . Nezávislost posuvu u na souřadnici x lze vyjádřit vztahem:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (29)$$

Řez vzdálený od počátku o délku x , se natočí o úhel φ

$$\varphi = \vartheta \cdot x \quad (30)$$

Složky přemístění libovolného bodu K tohoto průřezu o souřadnicích y, z lze vyjádřit geometrickými závislostmi (obr. 19).



Obr. 19. Zatížený element tělesa

Pokud je úhel $\varphi = \vartheta x$ velmi malý (tzn. že deformace při kroucení jsou velmi malé), můžeme kruhový oblouk nahradit úsečkou $\widehat{K\bar{K}} \approx \overline{K\bar{K}} = r\vartheta x$ a složky posuvu ve směru souřadnicových os jsou

$$v = -r \cdot \vartheta x \cdot \cos \alpha = -r \cdot \vartheta x \frac{z}{r} = -\vartheta x z \quad (31)$$

$$w = r \cdot \vartheta x \cdot \sin \alpha = r \cdot \vartheta x \frac{y}{r} = \vartheta x y \quad (32)$$

Z obr.19 je zřejmé, že smysl kroucího momentu M_k jsme si zvolili za kladný. Znaménka složek přemístění (posuvů) v a w jsou určena podle toho zda jsou orientovány ve smyslu nebo proti smyslu kladných souřadnicových os y a z .

Z rovnice (31) vyplývá, že složka přemístění není v není funkcí y . Obdobně z rovnice (32) plyne, že složka přemístění w není funkcí souřadnice z . Oba tyto závěry lze matematicky vyjádřit jednoduchými rovnicemi (33), (34).

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (33)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (34)$$

S ohledem na rovnici (29) můžeme psát vztah pro poměrnou změnu objemu při kroucení ve tvaru:

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \equiv 0 \quad (35)$$

Na základě rovnice (35) lze konstatovat, že při kroucení nedochází ke změně objemu elementární krychle, představující bod krouceného prutu.

Poznámka - Fyzikální rovnice

Po zavedení fyzikálních veličin (složky napětí) lze vyjádřit závislosti mezi napětím a poměrnými deformacemi.

Protože poměrná prodloužení nezávisí obecně na smykových napětích, ale jen na napětích normálových, platí obecný Hookeův zákon i za přítomnosti smykových napětí pro normálová napětí v libovolných třech vzájemně kolmých rovinách.

Platí tedy:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (36)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad (37)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (38)$$

Přitom samozřejmě platí pro obecné vzájemně kolmé roviny tzv. Hookeův zákon pro prostý smyk (viz. kapitola 1.1.3), jehož tvar je vdaném případě

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (39)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad (40)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \quad (41)$$

Mezi modulem pružnosti v tahu E a modulem ve smyku platí známí vztah

$$G = E \frac{1}{2(1 + \mu)} \quad (42)$$

Obecný Hookeův zákon lze rovněž vyjádřit ve tvaru, v němž se vyjádří normálové napětí, jako funkce poměrných prodloužení. Jednoduchou úpravou rovnic (36), (37), (38) lze získat výrazy

$$\sigma_x = \frac{E}{1 + \mu} \left(\varepsilon_x + \frac{\mu}{1 - 2\mu} \Theta \right) \quad (43)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1+\mu} \left(\varepsilon_y + \frac{\mu}{1-2\mu} \Theta \right) \quad (44)$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1+\mu} \left(\varepsilon_z + \frac{\mu}{1-2\mu} \Theta \right) \quad (45)$$

kde Θ je poměrná změna objemu

Pokud vyjádříme složky deformací pomocí parciálních derivací funkcí složek přemístění (někdy též bývají označovány jako geometrické rovnice Cauchyova typu), můžeme vyjádřit celý *Hookeův fyzikální zákon* pomocí složek deformace. Při užití rovnice (42) tak dostáváme výsledný tvar fyzikálních rovnic.

$$\sigma_x = 2G \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mu}{1-2\mu} \Theta \right) \quad (46)$$

$$\sigma_y = 2G \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\mu}{1-2\mu} \Theta \right) \quad (47)$$

$$\sigma_x = 2G \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mu}{1-2\mu} \Theta \right) \quad (48)$$

$$\tau_{xy} = G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (49)$$

$$\tau_{yz} = G \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (50)$$

$$\tau_{xz} = G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (51)$$

Pomocí výše odvozených fyzikálních rovnic lze zjistit stav napjatosti elementární krychle při uvažovaném případě kroucení. Dosadíme-li do těchto rovnic vztahy (29), (33), (34),(35) a (31),(32), je možno složky tenzoru napětí psát

$$\sigma_x = 2G \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mu}{1-2\mu} \Theta \right) = 0 \quad (52)$$

$$\sigma_y = 2G \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\mu}{1-2\mu} \Theta \right) = 0 \quad (53)$$

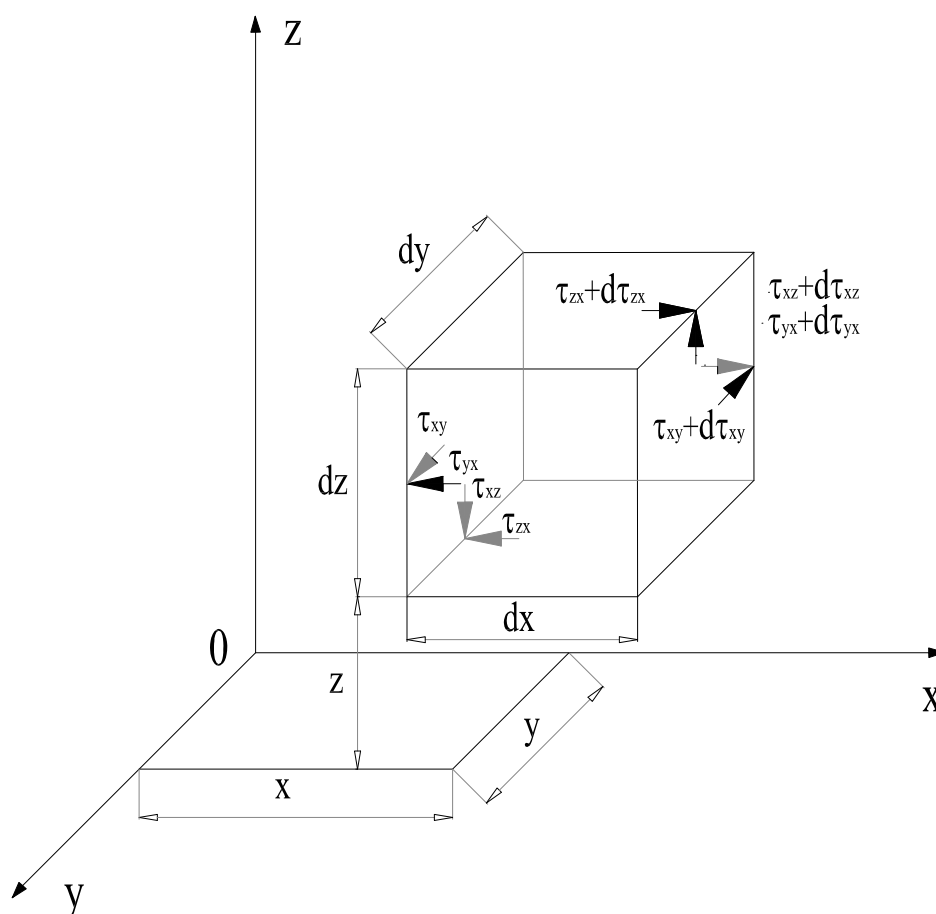
$$\sigma_x = 2G \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mu}{1-2\mu} \Theta \right) = 0 \quad (54)$$

$$\tau_{xy} = G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = G \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \vartheta z \right) \quad (55)$$

$$\tau_{yz} = G \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = G(\vartheta x - \vartheta x) = 0 \quad (56)$$

$$\tau_{xz} = G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = G \left(\frac{\partial u}{\partial z} - v y \right) \quad (57)$$

Různé od nuly jsou tedy jen dvě složky tenzoru napětí, a to složky τ_{xy} a τ_{xz} , takže stav napjatosti prvku je možno znázornit graficky (obr.20).



Obr. 20. Složky smykových napětí

Lze tedy o stavu napjatosti v bodech krouceného prizmatického prutu vyslovit závěr, že příčných řezech prutu jsou dvě složky smykového napětí τ_{xy} , τ_{xz} , v podélných řezech jsou jim příslušná sdružená smyková napětí a ani v příčných, ani v podélných řezech nejsou normálové složky napětí.

1.3.2 Základní rovnice kroucení

Při sestavování této rovnice vycházíme z rovnic rovnováhy elementární krychle ve složkách napětí (Navierovy rovnice).

Lze použít jejich obecný tvar tj.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (58)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (59)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (60)$$

Poslední dva členy na levé straně rovnic (58), (59), (60) vznikly při řešení dynamické úlohy zavedením dynamické protiúčinné síly podle d'Alembertova principu.

Pro případ kroucení nebudou uvažovány složky dynamické síly ani síly objemové, takže uváží-li se závěry předchozího odstavce, tj. $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0$, dostanou tyto Navierovy rovnice jednodušší tvary:

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0 \quad (61)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (62)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = 0 \quad (63)$$

Z rovnic (61), (62), (63) vyplývá, že složky smykových napětí τ_{xy} a τ_{xz} jsou funkcemi pouze y , z .

K dalšímu odvozování musíme do Navierových diferenciálních rovnic dosadit složky napětí, vyjádřené ve složkách přemístění.

Do rovnic (61), (62), (63) tedy dosadíme výrazy pro složky napětí, definované rovnicemi (46) až (51).

Po úpravě získáváme tvary:

$$\nabla^2 u + \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \frac{X}{G} = 0 \quad (64)$$

$$\nabla^2 v + \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \frac{Y}{G} = 0 \quad (65)$$

$$\nabla^2 w + \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \frac{Z}{G} = 0 \quad (66)$$

Dále uvážíme, že poměrná změna objemu je definovaná vztahem (35) a také $X = Y = Z = 0$

dostaneme

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (67)$$

$$\nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \quad (68)$$

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \quad (69)$$

Rovnice (67), (68), (69) se nazývají Laméovy rovnice.

Z rovnice (29) víme, že $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, takže také $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$. Pomocí rovnic (31) a (32) můžeme zjistit, že všechny druhé derivace funkcí v a w jsou nulové.

Z vypočtené soustavy Laméových rovnic tudíž zbývá pouze podmínka

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (70)$$

Rovnice (70) se nazývá *základní rovnicí kroucení*.

Pomocí ní lze pro daný problém vyřešit neznámou funkci $u = u(y,z)$, která určuje zborcení příslušné průřezové plochy. Jestliže je rovnice (70) řešena spolu s okrajovou podmínkou, že smyková napětí na obvodu průřezové plochy mají směr tečny k obrysové čáře.

Podmínky rovnováhy bodu na povrchu krouceného prutu (okrajová podmínka)

Při vyjádření podmínky rovnováhy bodu, ležícího na povrchu krouceného prutu, je možno vyjít z podmínek rovnováhy elementárního čtyřstěnu, které jsou určeny těmito vztahy

$$p_x = \sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \cos \beta + \tau_{xz} \cos \gamma \quad (71)$$

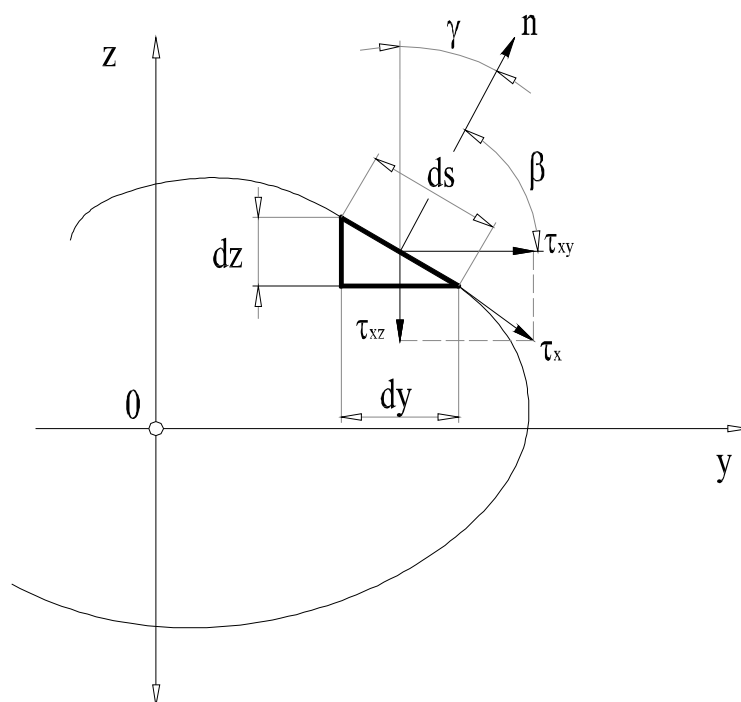
$$p_y = \tau_{xy} \cos \alpha + \sigma_y \cos \beta + \tau_{yz} \cos \gamma \quad (72)$$

$$p_z = \tau_{xz} \cos \alpha + \tau_{yz} \cos \beta + \sigma_z \cos \gamma \quad (73)$$

V těchto rovnicích značí α, β, γ směrové úhly normály n (obr.18). V řešeném případě je uvažován nezátížený povrch prutu, takže $p_x = p_y = p_z = 0$. Dále platí, že $\alpha = \pi/2 \Rightarrow \cos \alpha = 0$.

Protože při kroucení platí výše uvedená podmínka $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0$, lze dosazením do předchozích rovnic zjistit, že lze uplatnit jen jedinou podmínku rovnováhy, vyplývající z první rovnice, a to

$$\tau_{xy} \cos \beta + \tau_{xz} \cos \gamma = 0 \quad (74)$$



Obr. 21. Rozložení napětí

Z obr. 21 vyplívá, že $\cos \beta = \frac{dz}{ds}$, $\cos \gamma = \frac{dy}{ds}$. Vezme-li se v úvahu, že výsledné smykové napětí τ_x má směr tečny k obrysu, pak rovnici (74) lze napsat ve tvaru

$$-\tau_{xy} \frac{dz}{ds} + \tau_{xz} \frac{dy}{ds} = 0 \quad (75)$$

1.3.3 Funkce napětí

Ze soustavy diferenciálních rovnic rovnováhy elementární krychle ve složkách napětí (61), (62), (63) je zřejmé, že složky smykových napětí τ_{xy} a τ_{xz} nemohou být funkcí x – jak určují rovnice (62), (63) a dále, že tyto složky napětí musí splňovat podmínku, danou rovnicí (61). Zároveň je v této úvaze uvážena i platnost zákona o sdruženosti smykových napětí.

Je zřejmé, že rovnici (61) lze vyhovět, jestliže se užije vztahů

$$\tau_{xz} = \pm \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (76)$$

$$\tau_{xy} = \mp \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (77)$$

kde Φ značí spojitou funkci dvou proměnných y a z . Tuto funkci $\Phi = \Phi(y, z)$ lze nazývat funkcí napětí (zavedl ji Prandtl).

Pro další odvozování je nutné upravit rovnice (49) a (51) pomocí rovnic (31) a (32) a přepsat tak fyzikální rovnice do následujících tvarů:

$$\tau_{xy} = G \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \vartheta z \right) \quad (78)$$

$$\tau_{xz} = G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \vartheta y \right) \quad (79)$$

Nyní potřebujeme dosáhnout eliminace složky přemístění u v těchto rovnicích. Toho lze dosáhnout tím, že od druhé z těchto rovnic, derivované podle y , se odečte první rovnice derivovaná podle z .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} &= G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \vartheta \right) \\ -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} &= G \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \vartheta \right) \\ \hline \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} &= 2G\vartheta \end{aligned}$$

Po této jednoduché úpravě a při následné aplikaci definic (76) a (77) snadno dostaneme výsledný výraz:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \pm 2G\vartheta \quad (80)$$

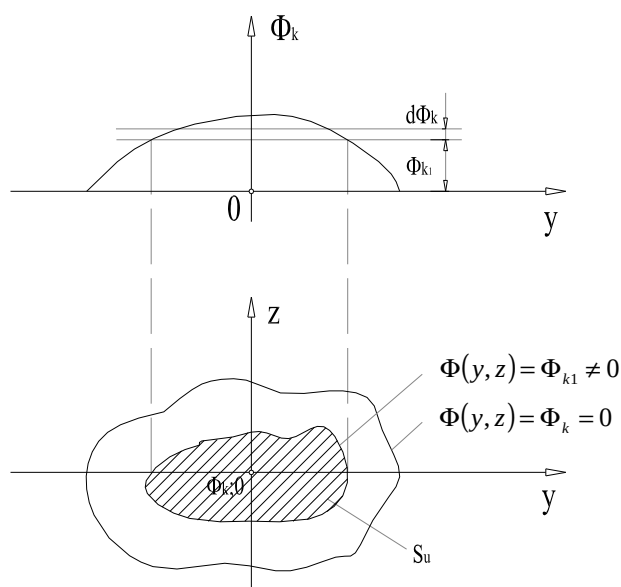
Ten nazýváme *parciální diferenciální rovnicí pro funkci napětí*.

Tato rovnice tvoří druhou podmínku k rovnici rovnováhy. Z ní plyne, že pokud složky napětí jsou spojitými funkcemi, tak těleso původně spojitě zůstává spojitým i po deformaci. Na pravé straně této rovnice je znaménko mínus, protože jsme předpokládali, že účinek napětí τ se shoduje s účinkem kladného momentu M_t a že parciální derivace funkce napětí Φ jsou záporné.

1.3.4 Plocha napětí

Podle definice je funkce napětí $\Phi(y,z)$ jednoznačnou, spojitou funkcí dvou proměnných y , z . Tyto souřadnice určují polohu obecného bodu v průřezové ploše. Je zřejmé, že i derivace funkce napětí $\Phi(y,z)$ jsou spojitými funkcemi týchž souřadnic.

Má-li být provedeno grafické zobrazení funkce napětí $\Phi(y,z)$, je nutno vynést v každém bodě průřezové plochy S , ležící v rovině (y, z) , kolmo na tuto rovinu hodnotu funkce $\Phi = \Phi_k$ (obr.22).



Obr. 22. Plocha napětí

Uvedeným způsobem se získá tzv. plocha napětí, která znázorňuje průběh funkce napětí nad průřezovou plochou S .

Protože na obrysu průřezu platí $\Phi(y,z) = \Phi_k = 0$, znamená to, že obrys průřezu splňuje podmínku křivky, vzniklé řezem plochy napětí rovinou $\Phi(y,z) = 0$, tj. rovinou (y,z) .

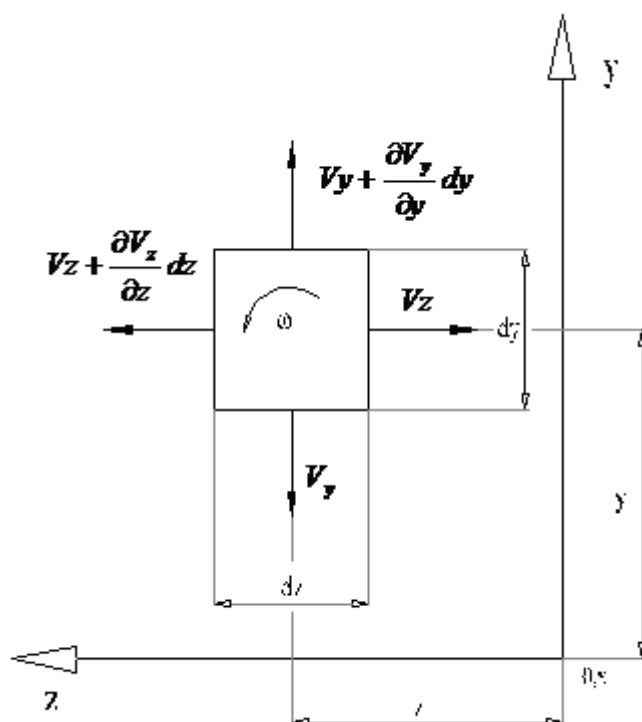
1.3.5 Hydrodynamická analogie

V předešlém odstavci byla odvozena parciální diferenciální rovnice pro funkci napětí

$\Phi = \Phi(y,z)$, která je dána rovnicí (80). Při praktických aplikacích se ovšem ukazuje, že integrace této diferenciální rovnice je velmi obtížná. V důsledku této skutečnosti byly hledány možnosti řešení obecné úlohy o kroucení prizmatických prutů užitím analogie s jiným fyzikálním jevem, u něhož lze použít experimentálních metod k určení hledaných veličin.

Hydrodynamická analogie je založena na matematické shodnosti rovnic (61) a (80), platných pro kroucení prizmatického prutu, s rovnicemi popisujícími rovinné potenciální proudění dokonalé (nestlačitelné) kapaliny.

Při rovinném proudění nestlačitelné kapaliny má rovnice kontinuity tvar odvozený z (obr.23).



Obr. 23. Rovnice kontinuity

$$v_y dz dx + v_z dy dx = \left(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy \right) dz dx + \left(v_z + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz \right) dy dx \quad (81)$$

Levá strana rovnice vyjadřuje množství kapaliny, jenž do rovnoběžnostěnu vtéká.

Pravá strana rovnice vyjadřuje množství kapaliny, jenž z rovnoběžnostěnu vytéká.

Po úpravě získáme základní tvar rovnice kontinuity.

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (82)$$

Rovněž, jako v mechanice tuhého tělesa tak i v mechanice kapalin považujeme pohyb tekuté částice jako postupný, charakterizovaný rychlostí v a otáčivý charakterizovaný úhlovou rychlostí ω .

Střední úhlová rychlost je dána vztahem:

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \quad (83)$$

V analogii rovnice kontinuity a rovnice (61) si vzájemně odpovídají tyto fyzikální veličiny:

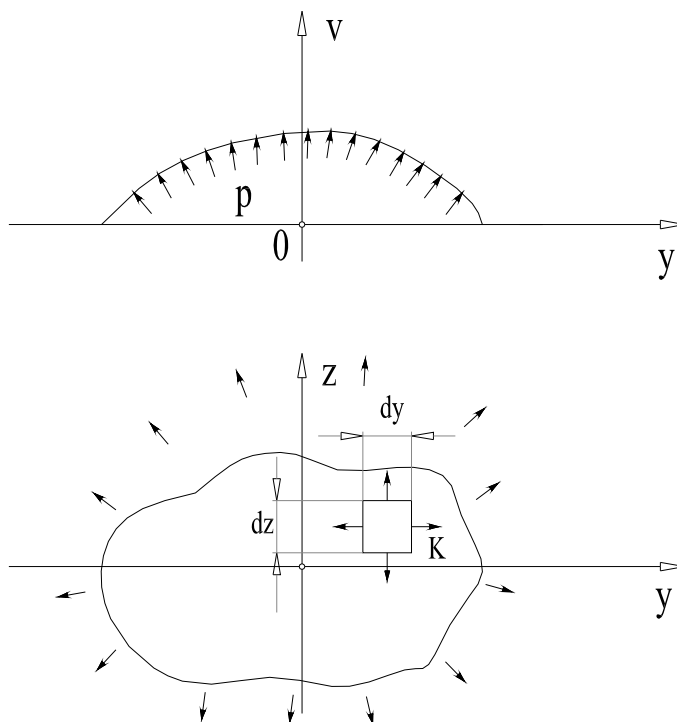
- složce rychlosti proudění v_z odpovídá složka smykového napětí τ_{xz}
- složce rychlosti proudění v_y odpovídá složka smykového napětí τ_{xy}

Při modelování úlohy o kroucení prizmatického prutu užitím hydrodynamické analogie je nutno pamatovat na splnění základní okrajové podmínky tím, že vymezená oblast pro rovinné proudění musí být shodná s geometrickým tvarem krouceného průřezu.

1.3.6 Membránová analogie

V kapitole 1.3.4 bylo uvedeno, že grafické zobrazení funkce napětí $\Phi(y,z)$ dává tzv. plochu napětí, znázorňující průběh funkce napětí nad průřezovou plochou zkrucovaného prutu.

Prandtl dokázal, že tvar takové plochy má nekonečně tenká blána, napjatá přes otvor stejného tvaru jako zkrucovaný průřez prutu, která je mírně vypouklá slabým přetlakem p .



Obr. 24. Prandtlova teorie

Podle Prandtl lze tedy funkci napětí $\Phi(y,z)$ modelovat membránou, uchycenou nad otvorem, jenž má tvar uvažovaného průřezu a zatíženou rovnoměrným tahem v uchycení a rovnoměrným přetlakem ve směru normály ke každému prvku membrány. Důvodem je, že

v takovém případě má tzv. povrchové kapalinové napětí stálou velikost a vnitřní síla v libovolném řezu membránou je vždy normálou (vzhledem k řezu) a její velikost závisí jen na délce řezu.

Označí-li se K vnitřní síla na délkovou jednotku řezu membránou, pak za předpokladu, že:

- tloušťka membrány je velmi malá
- vypuklost membrány je malá
- vlastní tíha membrány je zanedbatelná

můžeme psát podmínku rovnováhy prvku membrány o rozměrech dy, dz (obr.24), ve směru souřadnice v ve tvaru:

$$p dy dz + K \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} dy dz + K \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} dy dz = 0 \quad (84)$$

Po úpravě vyjde tvar podmínky rovnováhy prvku membrány:

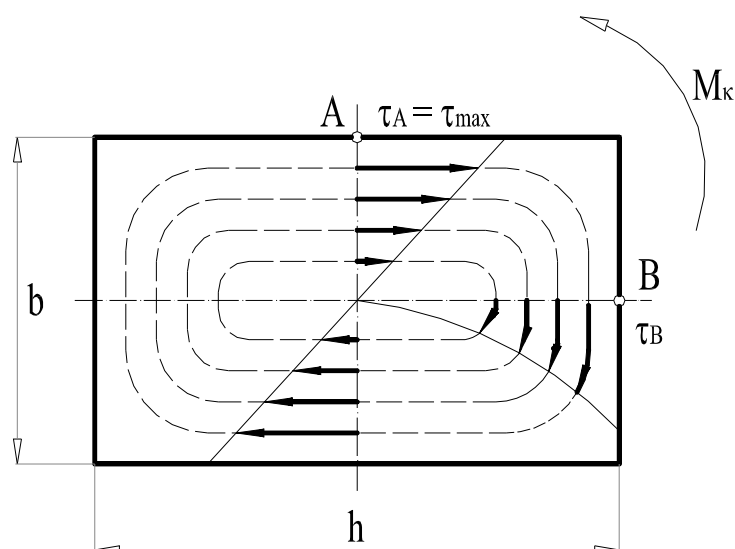
$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -\frac{p}{K} \quad (85)$$

Protože membránová analogie určuje, že objem uzavřený plochou membrány a rovinou (y,z) je shodný s objemem pod plochou napětí, lze po nahrazení $\frac{p}{K}$ veličinou $2G\vartheta$ z rovnice (80) učinit závěr, že velikost kroutícího momentu M_k je představována v jistém měřítku dvojnásobnou hodnotou objemu vrchlíku pod napjatou membránou.

Analogie plochy napětí s tvarem napjaté Prandtlovy membrány je velmi užitečná nejen proto, že z odhadnutého tvaru membrány (modelované např. mýdlovou blanou) lze usuzovat o průběhu smykových čar a o velikosti smykových napětí, nýbrž i proto, že umožňuje využít experimentální řešení obecných průřezů tam, kde by bylo exaktní matematické řešení velmi obtížné.

1.3.7 Výpočet napětí a deformace u prutů obdélníkového průřezu

Exaktní řešení při výpočtu prutů obdélníkového průřezu je značně pracné a je možné pouze integrací rovnice (80) nekonečnými řadami. Proto pro rychlou potřebu řešení praktických úloh lze s výhodou použít výsledků takových řešení, jenž jsou upraveny do tvarů, formálně obdobných formulím pro řešení krutu u kruhového průřezu, při nichž je však použito příslušných součinitelů.



Obr. 25. Obdélníkový průřez namáhaný krutem

U obdélníkového průřezu při namáhání prutu kroutícím momentem M_k (obr.25) lze při užití membránové analogie na základě představy napjaté membrány nad otvorem tvaru zkrucovaného průřezu odhadnout tvar smykových čar a také určit body, v nichž působí největší smykové napětí.

Jak je patrné z (obr.25), jsou smykové čáry, ležící blízko obrysu průřezu, jen málo odlišné od obdélníka, pouze rohy tohoto obdélníka se zaoblují. Čím blíže ke středu se smykové čáry blíží elipsám, pokud obdélník není příliš plochý, tj. pokud poměr $h:b$ není příliš velký.

Podle uvedené úvahy je při kroucení prutu obdélníkového průřezu největší smykové napětí v bodě uprostřed delší strany obdélníka – bod A – neboť v tomto bodě je největší směrnice spádové přímky a rovněž v tomto bodě je největší nahuštění vrstevnic napjaté membrány.

Pro výpočet napětí platí následující vztahy:

$$\tau_A = \tau_{\max} = \frac{M_k}{W_{kb}} \quad (86)$$

kde

$$W_{kb} = \alpha b^2 h \quad (87)$$

$$\tau_B = \frac{M_k}{W_{kh}} \quad (88)$$

kde

$$W_{kh} = \beta b h^2 \quad (89)$$

Pro vyjádření úhlu pootočení φ lze použít výraz:

$$\varphi = \frac{M_k \cdot l}{GJ_k} \quad (90)$$

kde

$$J_k = \beta b^3 h \quad (91)$$

Hodnoty součinitelů, použitých v rovnicích (87), (89), (91), jsou uvedeny pro některé poměry $b:h$ v následující tabulce.

Tabulka I. Součinitele pro výpočet kroucení obdélníkového průřezu

$\frac{b}{h}$	1	1,2	1,5	2	3	5	10	∞
α	0,208	0,219	0,231	0,246	0,267	0,291	0,313	0,333
β	0,208	0,196	0,180	0,155	0,118	0,0783	0,0421	-
γ	0,1404	0,1661	0,1957	0,2286	0,2633	0,2808	0,3123	0,333
$\frac{\tau_B}{\tau_A}$	1	0,933	0,857	0,793	0,754	0,743	0,743	0,7425

2 STANOVENÍ CÍLŮ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Dle zadání bakalářské práce byla vypracována literární studie teorie kroucení a zkonstruován přípravek, který umožňuje toto namáhání demonstrovat.

Teoretickou část práce je zaměřena na studium jednotlivých metod a teorií, které současná teorie pružnosti a pevnosti nabízí. Struktura této studie byla rozdělena do tří základních kapitol:

- kroucení prímých prutů kruhového průřezu
- kroucení tenkostěnných uzavřených průřezů
- kroucení nekruhových průřezů

Experimentální část bude věnována následujícím úkolům:

- možným alternativám konstrukčního řešení daného přípravku
- možnostem kroucení těles odlišných průřezů o různých délkách
- sestavením metodických úloh, které by objasňovaly jednotlivé zákonitosti, poučky a definice uvedené ve studijní a teoretické části
- aplikace těchto úloh

3 EXPERIMENTÁLNÍ ČÁST

3.1 Konstrukce přípravku

Konstrukce celého přípravku se odvíjela od několika základních požadavků:

- jednoduchost konstrukce a následné výroby
- rozdělení přípravku na více konstrukčních celků z důvodu vyšší univerzálnosti a možnosti použití
- možnost kroutit co největší množství odlišných profilů o různých rozměrech
- zajistit dostatečnou tuhost pro případ větší materiálové rozmanitosti zkoušených vzorků
- zajistit jednoduché a přesné odměřování základní zkoumané veličiny (v našem případě tzv. zkrut), která je směrodatná pro stanovování a výpočet jiných konstant a materiálových charakteristik

Na základě těchto primárních požadavků jsem navrhl základní typy přípravků, který Tyto přípravky umožňují odlišné upínání zkušebních těles.

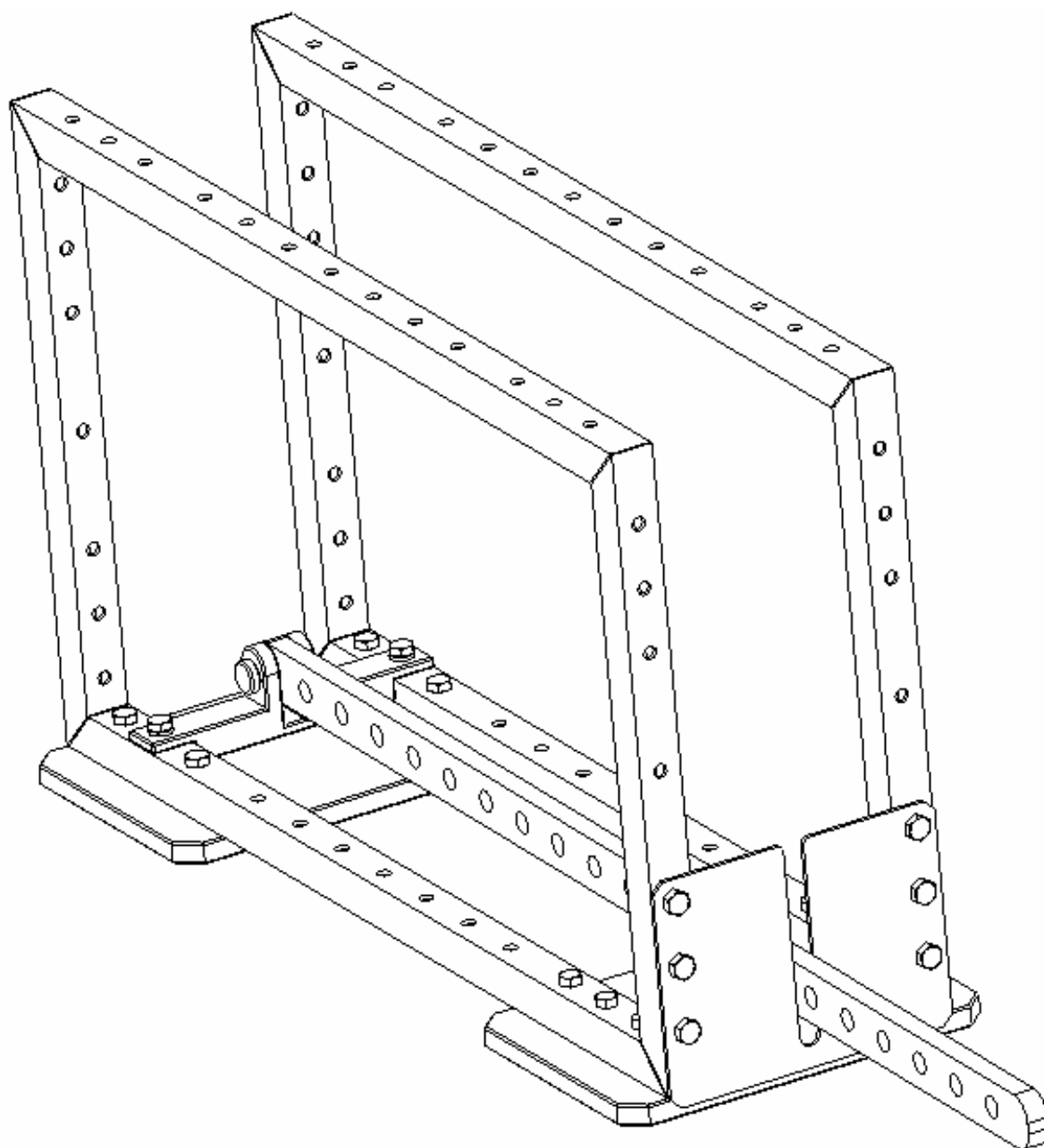
3.1.1 Základní rám

Základní rám plní následující funkce:

- tvoří základnu pro upínání jednotlivých typů přípravků na demonstraci krutu
- lze na něj upevnit také další typy přípravků, které mohou vyvozovat ostatní základní druhy namáhání (tah, tlak, ohyb, vzpěr)
- zajišťuje přes kloubové uložení přenos kroucího momentu, který způsobuje deformace na zkušním vzorku. Moment je vyvozen pomocí závaží, jež je upevněno na otočném ramenu.

Výrobní výkresy byly použity z bakalářské práce, jež se zabývá demonstrací tahu a tlaku.

Sestava rámu je zobrazena na *obr.26*, výrobní výkresy pak v *příloze 1-6*.

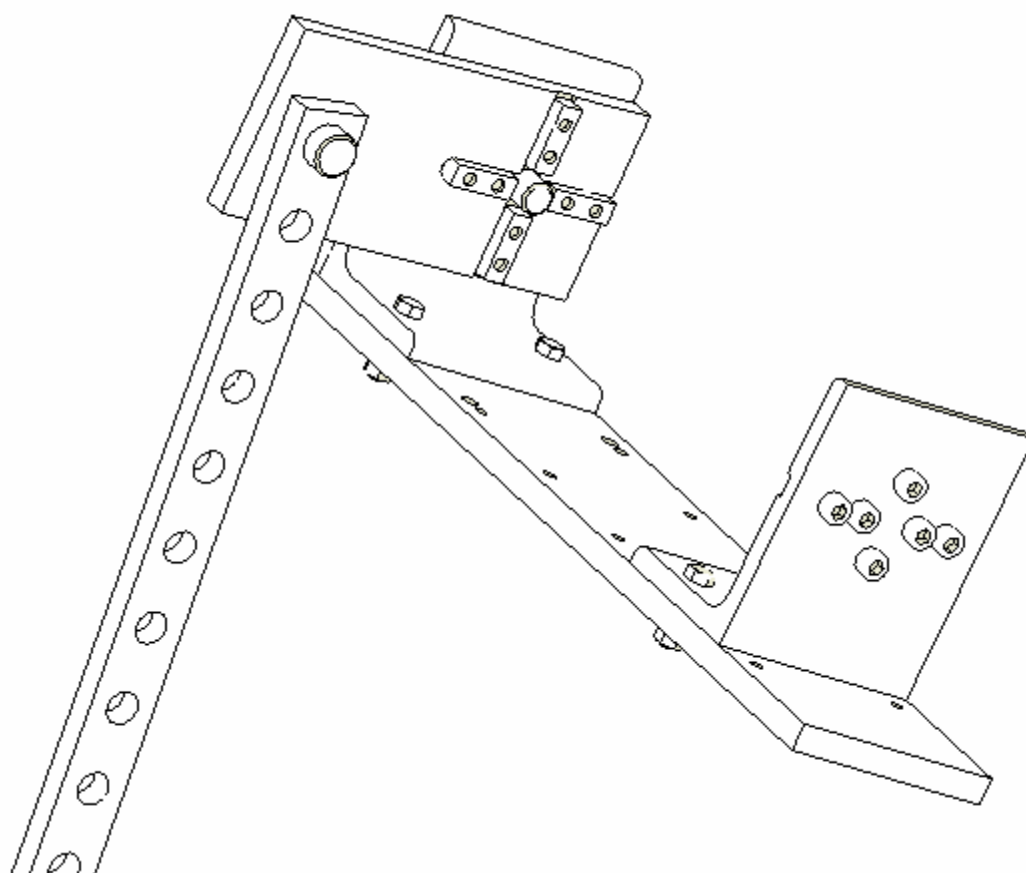


Obr. 26. Základní rám

3.1.2 Přípravek pro kroucení větších průřezů

Výrobní výkresy jednotlivých dílů včetně sestavy celého přípravku jsou uvedeny v příloze 7-16.

Na obr. 27 je sestava celého přípravku



Obr. 27. Přípravek pro kroucení větších průřezů

Na základní vodící desce jsou umístěny dvě upínací desky průřezu nerovnoramenného “L”. První je pevně ukotvena dvěma zajišťovacími šrouby k vedení a přes páku uloženou na čepu přenáší kroutící moment na zkušební vzorek.

Druhá je přestavitelná pro různé délky vzorků. Nejvýše však do délky 300 mm.

Konstrukce toho přípravku umožňuje upínání normalizovaných průřezů uvedených v *tabulce II*.

Tabulka II. Průřezy v kroucení

A	B	C	D	E	F	G

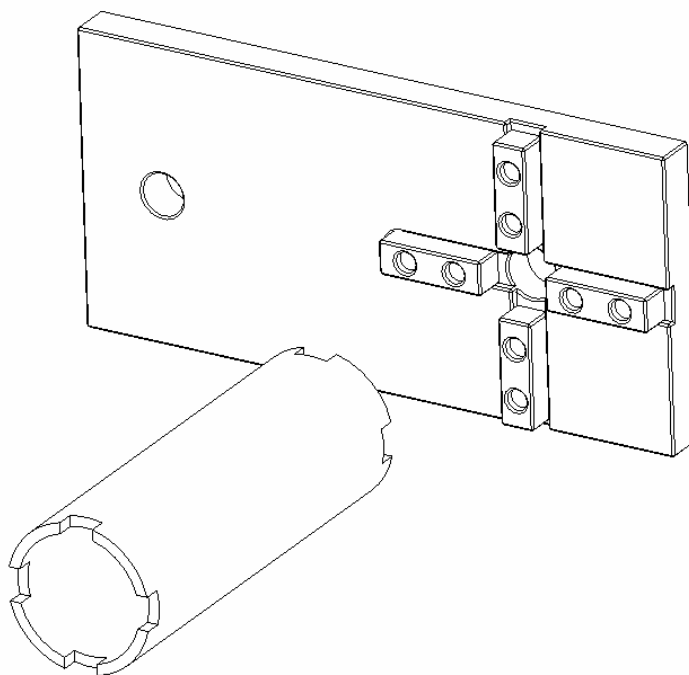
Rozměry kroucených těles jsou však omezeny velikostí upínacích ploch. Jak ukazuje *tabulka III*.

Tabulka III. Intervaly rozměrů kroucených průřezů

Průřez	Minimální rozměry [mm]	Maximální rozměry [mm]
A	Ø18	Ø65
B	Ø18	Ø65
C	PLO 12x10	PLO 70x30
D	TR OBD 50x35x3	TR OBD 60x40x3.5
E	4HR 10	4HR 70
F	TR 4HR 40x3	TR 4HR 60x3.5
G	6HR 10	6HR 70

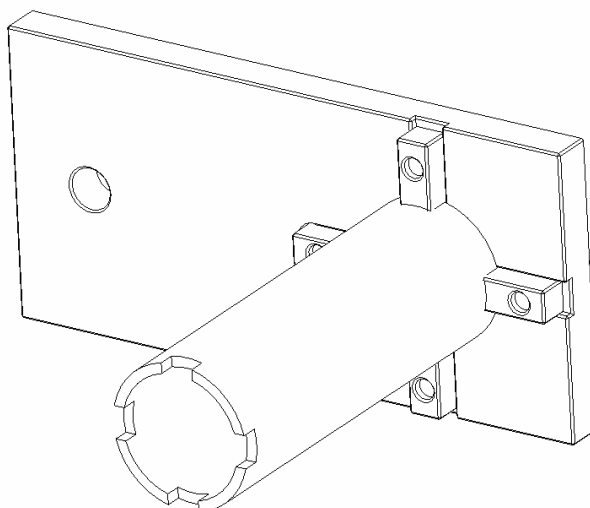
Princip upínání

Upínání je řešeno pomocí drážek, které jsou vyfrézovány do kříže na zkušební tyči, jak je znázorněno na *obr.28*.



Obr. 28. Princip upínání

Drážky zapadnou do ramene, na němž jsou umístěna pera; *Obr.29*.

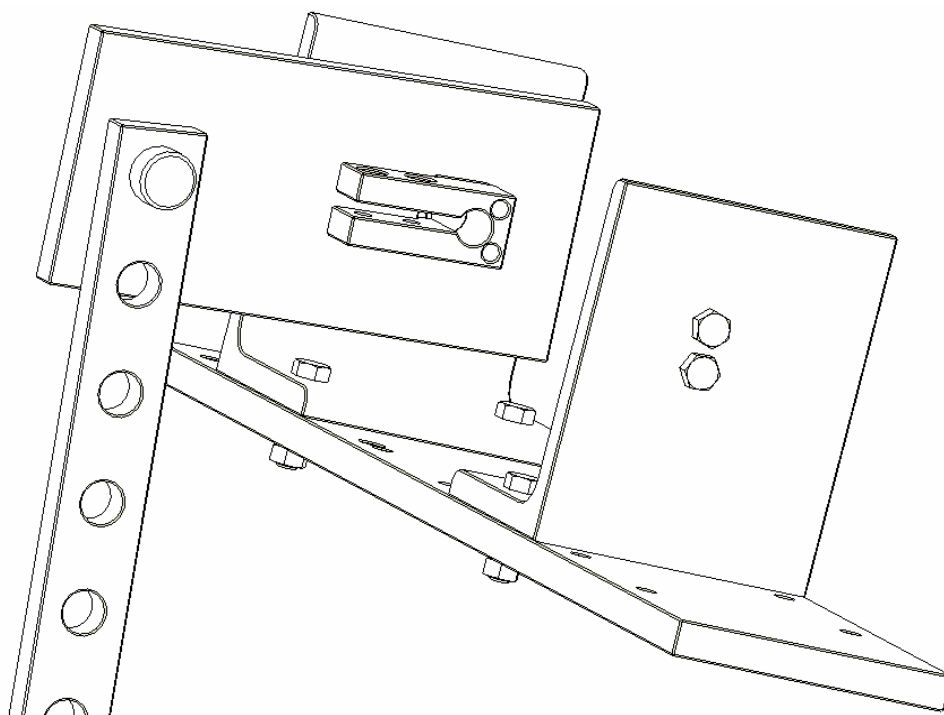


Obr. 29. Princip upínání

Toto řešení je velmi vhodné zejména při kroucení tenkostěnných trubek, protože je zajištěno vnášení kroutícího momentu do průřezu vzorku.

3.1.3 Přípravek pro kroucení malých průřezů

Výrobní výkresy jednotlivých dílů včetně sestavy celého přípravku jsou uvedeny v příloze 18-22.

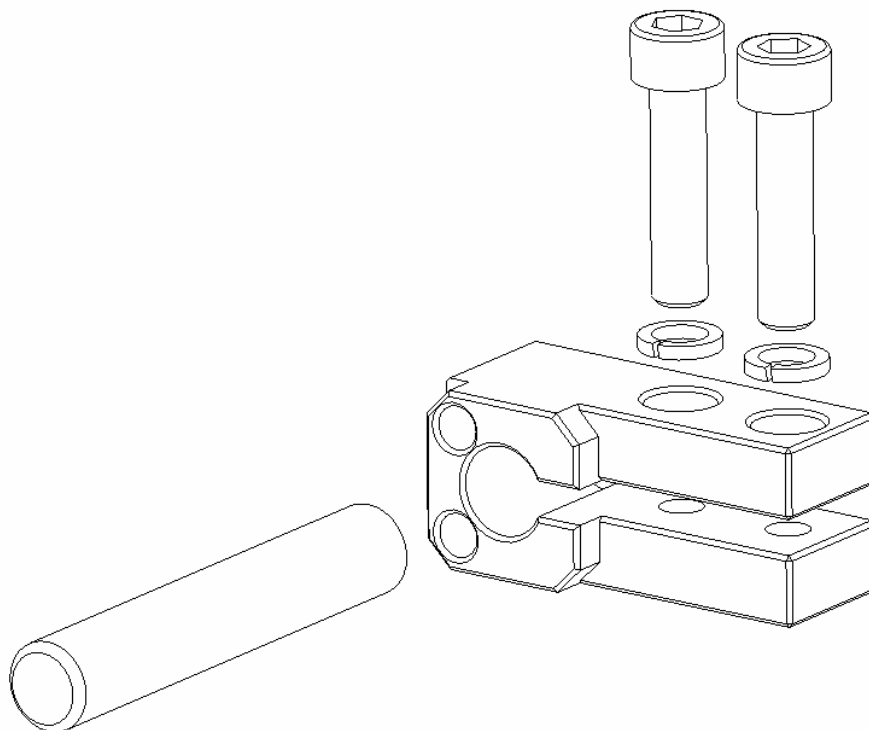


Obr. 30. Přípravek pro kroucení malých průřezů

Použití tohoto typu přípravku je omezené. Je zkonstruován pro průměr 10 mm.

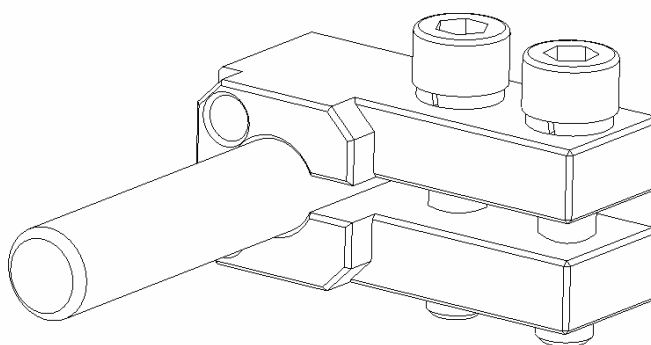
Princip upínání

Upínání je realizováno pomocí svěrného spoje; *Obr.31.*



Obr. 31. Princip upínání

Zkušební tyč se zasune do objímky a dvěma šrouby přitáhne. Výhodou tohoto upnutí je, že upínací síla je rovnoměrně rozložena po celém obvodu vzorku, což značně snižuje možnost deformací v místě



Obr. 32. Princip upínání

3.2 Sestavení úloh pro měření

3.2.1 Úloha I. – Ověření lineární závislosti napětí na deformaci

Zadání:

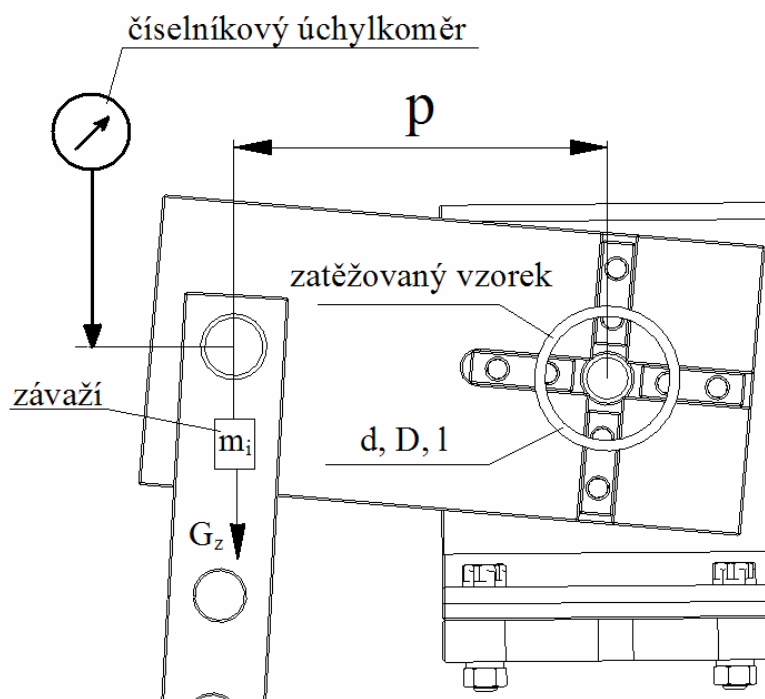
Z namáhání trubky kruhového průřezu, určete :

- lineární závislost napětí na deformaci
- modul pružnosti ve smyku

Dáno:

- D (vnější průměr trubky)
- d (vnitřní průměr trubky)
- $\tau_{k,D}$ (dovolené napětí v krutu)
- p (rameno zatěžovací páky)
- m_i (hmotnosti jednotlivých závaží)
- l (délka trubky)

Schéma zadané úlohy:



Obr. 33. Schéma úlohy č.I.

Postup:

Výpočtem nejprve stanovíme maximální hmotnost závaží, které je daný materiál schopen přijmout aniž bychom se dostali mimo interval pružných deformací.

K tomu potřebujeme zjistit modul průřezu v krutu pro zadaný mezikruhový průřez:

$$W_k = \frac{\pi D^3}{16} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right] \quad (92)$$

Dovolený kroutící moment je vyjádřen úpravou rovnice (10) $M_{k,D} = W_k \tau_{k,D}$ [N.mm].

Kroutící moment způsobený vnějším zatížením při měření (pomocí závaží) musí být menší než kroutící moment dovolený. Tuto podmínku vyjadřuje následující vztah

$$M_k \leq M_{k,D} \quad (93)$$

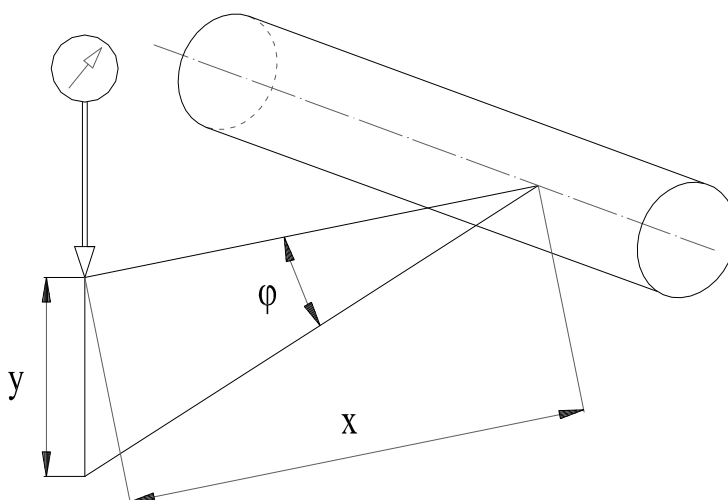
přičemž levou stranu rovnice (93) můžeme rozepsat do tvaru

$$M_k = G_z \cdot p \quad (94)$$

Dosadíme-li (94) do rovnice (93) získáme vztah $G_z p \leq W_k \tau_{k,D}$, z kterého po úpravě vyplývá maximální zatěžující síla.

$$G_z \leq \frac{W_k \tau_{k,D}}{p} \quad (95)$$

Úhel zkroucení se pro malé deformace určí podle níže uvedeného vztahu (96), odvozeného na základě obr. 34.



Obr. 34. Princip měření úhlu zkroucení

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \quad (96)$$

Analogií platí dle rovnice (5) vztah $\frac{D}{2} \varphi = \gamma \cdot l$. Jeho úpravou získáme rovnici pro výpočet úhlu zkosení:

$$\gamma = \frac{D\varphi}{2l} \quad (97)$$

Napětí v krutu τ_k je smykovým napětím, které způsobuje úhel zkosení γ – deformaci.

Pro každou hodnotu krouticího momentu M_k vypočítáme napětí podle rovnice (10):

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_k} = \frac{m \cdot g \cdot p}{W_k}$$

Z tabulky naměřených hodnot pak určíme lineární regresí závislost $\tau = f(\gamma)$. Dále určíme směrnici této závislosti, která má v teorii pružnosti význam tzv. modulu pružnosti ve smyku G . Tuto vyhodnocenou hodnotu pak pro daný materiál porovnáme z tabulkovou hodnotou.

3.2.2 Úloha II. – Aplikace Bredtových vzorců

Zadání:

Z namáhání trubky obdélníkového průřezu na krut a na základě znalostí I. a II. Bredtova vzorce (byly odvozeny v kapitole 1.2.), určete:

- smykové napětí, které vyvolá kroutící moment
- modul pružnosti ve smyku a na základě jeho hodnoty určete pomocí technických tabulek z jakého materiálu je vzorek vyroben

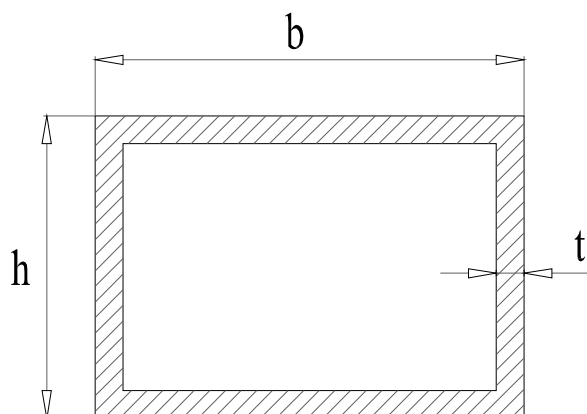
Dáno:

- b (délka průřezu)
- h (šířka průřezu)
- t (tloušťka stěny trubky)
- $\tau_{k,D}$ (dovolené napětí v krutu)
- p (rameno zatěžovací páky)
- m_i (hmotnosti jednotlivých závaží)

Sch

Sch

I. M



Obr. 35. Měřený průřez

Postup:

Výpočtem nejprve stanovíme maximální hmotnost závaží, které je daný materiál schopen přijmout aniž bychom se dostali mimo interval pružných deformací.

Dovolený kroutící moment je vyjádřen úpravou rovnice (10) $M_{k,D} = W_k \tau_{k,D} \quad [N.m]$.

Kroutící moment způsobený vnějším zatížením při měření (pomocí závaží) musí být menší než kroutící moment dovolený. Tuto podmínku vyjadřuje následující vztah

$$M_k \leq M_{k,D}$$

přičemž levou stranu rovnice (93) můžeme rozepsat do tvaru

$$M_k = G_z \cdot p$$

Dosadíme-li do rovnice (93), získáme vztah $G_z p \leq W_k \tau_{k,D}$, z kterého po úpravě vyplývá maximální zatěžující síla.

$$G_z \leq \frac{W_k \tau_{k,D}}{p}$$

Podle prvního Bredtova vzorce určíme smykové napětí.

$$\tau_s = \frac{M_t}{2.S_s.t}$$

Plochu, kterou uzavírá střednice (S_s) vypočítáme ze vztahu:

$$S_s = (b - t) \cdot (h - t) \quad (98)$$

Modul pružnosti ve smyku zjistíme z II. Bredtova vzorce, tzn. úpravou rovnice (28).

$$G = \frac{M_k}{4 \cdot \vartheta \cdot S_s^2} \int_{(s)} \frac{ds}{t}$$

Úhel pootočení, který nám slouží jako vstupní veličina pro další výpočet, odměříme identickým způsobem jako v úloze I.

3.2.3 Úloha III. – Kroucení obdélníkového průřezu

Zadání:

Z namáhání tyče plného obdélníkového průřezu na krut, určete:

- Maximální napětí τ_{max}
- Úhel pootočení φ a porovnejte s úhlem, který stanovíte výpočtem

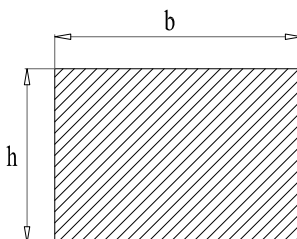
Dáno:

- b (délka průřezu)
- h (šířka průřezu)
- $\tau_{k,D}$ (dovolené napětí v krutu)
- p (rameno zatěžovací páky)
- m_i (hmotnosti jednotlivých závaží)
- l (délka tyče)

Schéma zadané úlohy:

Schéma zařízení a způs

I. a II. Místo trubky kru



Obr. 36. Měřený průřez

Postup:

Výpočtem nejprve stanovíme maximální hmotnost závaží, které je daný materiál schopen přijmout aniž bychom se dostali mimo interval pružných deformací.

K tomu potřebujeme zjistit modul průřezu v krutu pro zadaný průřez. K tomu použijeme rovnici (87).

$$W_{kb} = \alpha b^2 h$$

Príslušný součinitel α získáme z tabulky I., pro poměr b/h

Dovolený kroutící moment je vyjádřen úpravou rovnice (10) $M_{k,D} = W_{kb} \tau_{k,D} \quad [N.m]$.

Kroutící moment způsobený vnějším zatížením při měření (pomocí závaží) musí být menší než kroutící moment dovolený. Tuto podmínku vyjadřuje následující vztah

$$M_k \leq M_{k,D}$$

přičemž levou stranu rovnice (93) můžeme rozepsat do tvaru

$$M_k = G_z \cdot p$$

Dosadíme-li do rovnice (93) získáme vztah $G_z p \leq W_{kb} \tau_{k,D}$, z kterého po úpravě vyplývá maximální zatěžující síla.

$$G_z \leq \frac{W_{kb} \tau_{k,D}}{p}$$

Maximální smykové napětí leží u obdélníkových průřezů v bodě uprostřed delší strany obdélníka. Tento poznatek byl odvozen v části 1.3.7. Pro stanovení τ_{max} tedy využijeme rovnici (86).

$$\tau_{max} = \frac{M_k}{W_{kb}}$$

Pro výpočet úhlu pootočení použijeme rovnici (90)

$$\varphi = \frac{M_k \cdot l}{GJ_k}$$

3.2.4 Úloha IV. – Porovnání tuhostí otevřeného a uzavřeného průřezu

Zadání:

Určete tuhost dvou trubek identických rozměrů a materiálu. Jedna má uzavřený a druhá otevřený průřez. Dále porovnejte vzniklá napětí při použití stejných zatížení u obou trubek

$$M_k \leq M_{k,D}$$

přičemž levou stranu rovnice (93) můžeme rozepsat do tvaru

$$M_k = G_z \cdot p$$

Dosadíme-li do rovnice (93) získáme vztah $G_z p \leq W_{kb} \tau_{k,D}$, z kterého po úpravě vyplývá maximální zatěžující sílu.

$$G_z \leq \frac{W_{kb} \tau_{k,D}}{p}$$

Zjistíme modul průřezu v krutu pro zadaný průřez. K tomu použijeme rovnici (87).

$$W_{kb} = \alpha b^2 h$$

Příslušný součinitel α získáme z tabulky I., pro poměr b/h

Maximální smykové napětí leží u obdélníkových průřezů v bodě uprostřed delší strany obdélníka. Tento poznatek byl odvozen v části 1.3.7. Pro stanovení τ_{max} tedy využijeme rovnici (86).

$$\tau_{max} = \frac{M_k}{W_{kb}}$$

Tuhost kroucené trubky si můžeme definovat jako poměr zatěžujícího kroucího momentu a úhlu pootočení.

$$\frac{M_k}{\varphi} \tag{99}$$

Je zřejmé, že tuhost otevřeného průřezu bude daleko menší než u průřezu uzavřeného.

3.3 Výpočet vzorových úloh se zvolenými zkušebními tělesy

3.3.1 Výpočet navržené úlohy I.

Zadání, schéma, zadané hodnoty a postup vypracování je zpracován v části 3.2.1 .

Dáno:

- $D = 50 \text{ mm}$
- $d = 46 \text{ mm}$
- $\tau_{k,D} = 25 \text{ MPa}$
- $p = 90 \text{ mm}$
- $l = 300 \text{ mm}$

Výpočet:

Nejdříve určíme průřezový modul v kroucení.

$$W_k = \frac{\pi D^3}{16} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right] = \frac{\pi 50^3}{16} \left[1 - \left(\frac{46}{50} \right)^4 \right] = 6957,24 [\text{mm}^3]$$

Podle podmínky (93) určíme maximální sílu jakou můžeme dané zkušební těleso zatížit.

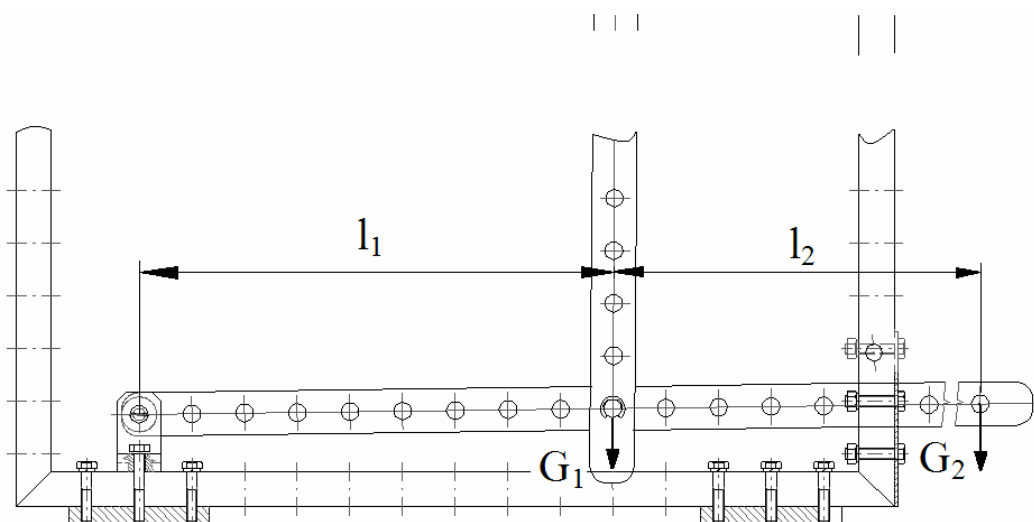
$$G_z \leq \frac{W_k \tau_{k,D}}{p} \leq \frac{6957,24 \cdot 25}{90} \leq 1932 [\text{N}]$$

Tabulka IV. Naměřené a hodnoty pro výpočet

y	G ₁	φ	G ₂	τ	ϑ
[mm]	[N]	[rad]	[kg]	[MPa]	[1]
0,10000	11,03080	0,00125	4,51260	0,14270	0,00010
0,15000	16,54620	0,001875	6,76890	0,21404	0,00016
0,21000	19,78350	0,002625	8,09325	0,25592	0,00022
0,24000	23,02080	0,003	9,41760	0,29780	0,00025
0,30000	26,25810	0,00375	10,74195	0,33968	0,00031
0,36000	29,49540	0,0045	12,06630	0,38156	0,00037
0,46000	36,68940	0,00575	15,00930	0,47462	0,00048
0,56000	40,28640	0,007	16,48080	0,52115	0,00058
0,65000	47,48040	0,008125	19,42380	0,61421	0,00068
0,80000	55,03410	0,01	22,51395	0,71193	0,00083

Příklad výpočtu veličin uvedených v tabulce budu demonstrovat vždy na prvních hodnotách.

a) Sí



Obr. 39. Výpočet síly na čepu

Zatěžující síla G_1 musí splňovat rovnici (100).

$$l_1 \cdot G_1 = (l_1 + l_2) G_2 \Rightarrow G_1 = \frac{(l_1 + l_2) G_2}{l_1} \quad (100)$$

$$G_1 = \frac{(l_1 + l_2) G_2}{l_1} = \frac{(270 + 390) \cdot 10^{-3} \cdot 0,46 \cdot 9,81}{270 \cdot 10^{-3}} = 11,03 [N]$$

b) Úhel pootočení

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} = \frac{0,1}{80} \Rightarrow \varphi = 0,072 [^\circ] \Rightarrow \varphi = 0,00125 [rad]$$

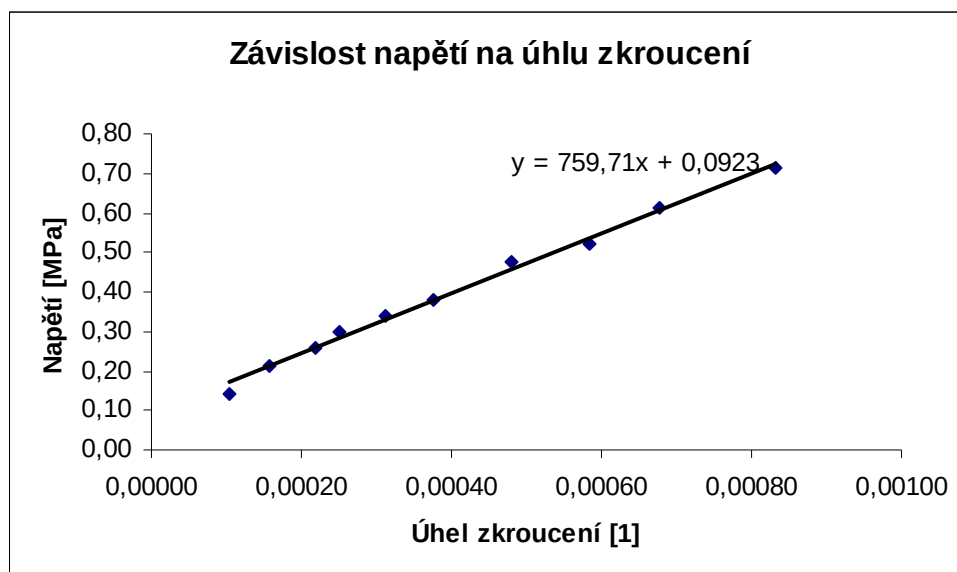
c) Napětí

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t} = \frac{G_1 \cdot p}{W_t} = \frac{11,03 \cdot 90}{6957,24} = 0,1427 [MPa]$$

d) Úhel zkroucení

$$\gamma = \frac{D \varphi}{2l} = \frac{50 \cdot 0,00125}{2 \cdot 300} = 0,0001 [1]$$

Na základě vypočítaných hodnot můžeme stanovit závislost napětí na úhlu zkroucení. Tuto závislost zobrazuje graf č.1.



Obr. 40. Závislost napětí na úhlu zkroucení

- V zobrazené rovnici přímky $y = kx + q$ má konstanta $k = 759,51 \text{ [MPa]}$ význam modulu pružnosti ve smyku.

ZÁVĚR

Bakalářská práce měla dva hlavní cíle, které byly rozděleny do teoretické a studijní části a části experimentální.

Teoretická a studijní část – Teorie kroucení

V této kapitole bylo cílem nastudovat různé studie teorie krutu. Stěžejní část tvoří kroucení kruhových a mezikruhových průřezů, jež jsou zpracovány v kapitolách 1.1, 1.2. Tyto kapitoly se opírají o základní teorie kroucení kruhových průřezů a o tzv. Bredtovy vzorce. Doplňkovou kapitolou je pak kroucení nekruhových průřezů (kapitola 1.3), kde byla uvedena základní rovnice kroucení, která tvoří základ teorie krutu.

Experimentální část – Konstrukce přípravku

Na základě zadání bakalářské práce byly zkonstruovány dva typy přípravků. Přípravek na kroucení větších a menších průřezů. První z nich byl vyroben v dílnách Ústavu výrobního inženýrství.

Pro měření a demonstraci bylo sestaveno několik typových úloh, které svým obsahem navazují na teoretickou a studijní část a tvoří tak vzájemně na sebe navazující celek.

Konečnou částí této práce je naměření a výpočet úlohy.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- (1) Oliva, J. Technická mechanika II. VUT v Brně, 1978.
- (2) Šuba, O. Mechanické chování těles. UTB ve Zlíně, 2002. ISBN 80-7318-101-0.
- (3) Valendin, M. Mechanické chování těles II. VUT v Brně, FT ve Zlíně, 2002. ISBN 80-7318-101-0.
- (4) Oliva, J. Pružnost a pevnost. VUT v Brně, 1980.
- (5) Kuba, F. Teorie pružnosti a vybrané aplikace. SNTL, Brno, 1977.
- (6) Leinveber, J., Řasa, J. a Vávra, P. Strojnické tabulky. Scientia, Praha, 2000. ISBN 80-7183-164-6
- (7) Silovský, K. Pružnost' a pevnost' II. SVŠT v Bratislavě, 1968

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

A	–	deformační práce
e	–	poměrná změna objemu
G	–	modul pružnosti ve smyku
J_k	–	moment tuhosti v kroucení
J_p	–	polární moment setrvačnosti průřezu
M_o	–	ohybový moment
M_k	–	krouťící moment
N	–	normálová síla
p	–	tlak
S_s	–	plocha uzavřená střednicí
T	–	příčná síla
t	–	čas
u	–	složka přemístění libovolného bodu průřezu v ose x
v	–	složka přemístění libovolného bodu průřezu v ose y
w	–	složka přemístění libovolného bodu průřezu v ose z
W_k	–	průřezový modul v kroucení
α	–	výpočtový součinitel u obdélníkového průřezu
β	–	výpočtový součinitel u obdélníkového průřezu
γ	–	úhel zkosení
γ	–	výpočtový součinitel u obdélníkového průřezu
ε_i	–	poměrné prodloužení v dané souřadné ose
Θ	–	poměrná změna objemu
μ	–	Poissonovo číslo
ρ	–	měrná hmotnost

- σ_i – normálové napětí v dané souřadné ose
- $\tau_{\max}$ – maximální, kritické napětí
- τ_r – smykové napětí v radiálním směru
- τ_s – střední hodnota smykového napětí
- τ_t – smykové napětí v tečném směru
- Φ – funkce napětí
- φ – úhel pootočení
- ν – poměrný úhel zkroucení

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr. 1. Vnitřní statické účinky	7
Obr. 2. Deformace vlivem kroutícího momentu	7
Obr. 3. Vnitřní napětí při kroucení	8
Obr. 4. Element zatížený kroutícími momenty	10
Obr. 5. Detail elementu	10
Obr. 6. Křivka smyku	11
Obr. 7. Smyková napětí	12
Obr. 8. Element objemu	14
Obr. 9. Průřez obecným tvarem	16
Obr. 10. Element dx	16
Obr. 11. Řez trubnatou částí	17
Obr. 12. Část I.	17
Obr. 13. Plocha střednice	18
Obr. 14. Element	18
Obr. 15. Diagram práce	19
Obr. 16. Dělení složitého průřezu	20
Obr. 17. Napětí u nekruhových průřezů	21
Obr. 18. Proložení os průřezem	22
Obr. 19. Zatížený element tělesa	23
Obr. 20. Složky smykových napětí	26
Obr. 21. Rozložení napětí	29
Obr. 22. Plocha napětí	31
Obr. 23. Rovnice kontinuity	32
Obr. 24. Prandtlova teorie	33
Obr. 25. Obdélníkový průřez namáhaný krutem	35
Obr. 26. Základní rám	39
Obr. 27. Přípravek pro kroucení větších průřezů	40
Obr. 28. Princip upínání	41
Obr. 29. Princip upínání	42
Obr. 30. Přípravek pro kroucení malých průřezů	42
Obr. 31. Princip upínání	43
Obr. 32. Princip upínání	43
Obr. 33. Schéma úlohy č.I.	44
Obr. 34. Princip měření úhlu zkroucení	45
Obr. 35. Měřený průřez	47
Obr. 36. Měřený průřez	48
Obr. 37. Uzavřený a otevřený průřez	50
Obr. 38. Rozvinutý průřez	50
Obr. 39. Výpočet síly na čepu	53
Obr. 40. Závislost napětí na úhlu zkroucení	54

SEZNAM TABULEK

Tabulka I. Součinitele pro výpočet kroucení obdélníkového průřezu.....	36
Tabulka II. Průřezy v kroucení	40
Tabulka III. Intervaly rozměrů kroucených průřezů.....	41
Tabulka IV. Naměřené a hodnoty pro výpočet.....	52

SEZNAM PŘÍLOH

- P 1 : ÚVI – 01 – K : Podstavec
- P 2 : ÚVI – 02 – K : Rám
- P 3 : ÚVI – 03 – K : Rameno
- P 4 : ÚVI – 04 – K : Deska vodící
- P 5 : ÚVI – 05 – K : Vidlice
- P 6 : ÚVI – 06 – K : Čep
- P 7 : ÚVI – S1 – K : Sestava
- P 8 : ÚVI – 07 – K : Vedení
- P 9 : ÚVI – 08 – K : Pohyblivá část
- P 10 : ÚVI – 09 – K : Pevná část
- P 11 : ÚVI – 10 – K : Čep 2
- P 12 : ÚVI – 11 – K : Páka
- P 13 : ÚVI – 12 – K : Čep 3
- P 14 : ÚVI – 13 – K : Rameno 2
- P 15 : ÚVI – 14 – K : Unášec
- P 16 : ÚVI – 15 – K : Unášec 2
- P 17 : ÚVI – S2 – K : Sestava 2
- P 18 : ÚVI – 16 – K : Distanční kroužek
- P 19 : ÚVI – 17 – K : Páka 2
- P 20 : ÚVI – 18 – K : Pohyblivá část 2
- P 21 : ÚVI – 19 – K : Upínač
- P 22 : ÚVI – 20 – K : Příložka