Diferenční rovnice a metody jejich řešení

Darina Bajusová

Bakalářská práce
2018

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky
akademický rok: 2017/2018

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE
(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení:	**Darina Bajusová**
Osobní číslo:	**A15042**
Studijní program:	**B3902 Inženýrská informatika**
Studijní obor:	**Informační a řídicí technologie**
Forma studia:	**prezenční**
Téma práce:	**Diferenční rovnice a metody jejich řešení**
Téma anglicky:	**Difference/Differential Equations and Methods to Resolving Them**

Zásady pro vypracování:

1. **Seznamte se s pojmy diference a sumace a nastudujte základní vlastnosti diferenčního a sumačního počtu.**
2. **Definujte lineární diferenční rovnici prvního řádu, uveďte její základní vlastnosti a metody řešení. Na konkrétních příkladech ukažte aplikace diferenčního a sumačního kalkulu při řešení lineárních diferenčních rovnic prvního řádu.**
3. **Nastudujte řešení lineárních diferenčních rovnic vyšších řádů. Na vhodných příkladech ilustrujte použití metody variace konstant a metody neurčitých koeficientů.**
4. **Definujte přímou a zpětnou Z– transformaci a ukažte její využití při řešení lineárních diferenčních rovnic.**
5. **Aplikujte řešení lineárních diferenčních rovnic na konkrétních vybraných úlohách z teorie automatického řízení.**

Rozsah bakalářské práce:

Rozsah příloh:

Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

1. **KELLEY, Walter G. a Allan C. PETERSON. Difference equations: an introduction with applications. 2nd ed. San Diego: Harcourt/Academic Press, c2001. ISBN 0-12-403330-x.**

2. **MAŠEK, Josef. Sbírka úloh z matematiky: diferenční rovnice a transformace Z. Plzeň: Západočeská univerzita, 1998. ISBN 8070824573.**

3. **VOLDÁNOVÁ, Anna. Lineární diferenční rovnice prvního řádu a jejich aplikace. Brno, 2009. Diplomová práce.**

4. **BALÁTĚ, Jaroslav. Automatické řízení. Praha: BEN - technická literatura, 2003. ISBN 80-7300-020-2.**

5. **NAVRÁTIL, Pavel. Automatizace - Vybrané statě [online]. Vyd. 1. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, Fakulta aplikované informatiky, 2011, 289 s. [cit. 2013-01-23]. ISBN 978-80-7318-935-8. Dostupné z: http://dspace.k.utb.cz/handle/10563/18581**

Vedoucí bakalářské práce: **Mgr. Jana Řezníčková, Ph.D.**
Ústav matematiky

Datum zadání bakalářské práce: **15. prosince 2017**

Termín odevzdání bakalářské práce: **25. května 2018**

Ve Zlíně dne 15. prosince 2017

UNIVERZITA TOMÁŠE BATI VE ZLÍNĚ
Fakulta aplikované informatiky
L.S.

doc. Mgr. Milan Adámek, Ph.D.
děkan

prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.
ředitel ústavu

Prohlašuji, že

- beru na vědomí, že odevzdáním bakalářské práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb. o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších právních předpisů, bez ohledu na výsledek obhajoby;
- beru na vědomí, že bakalářská práce bude uložena v elektronické podobě v univerzitním informačním systému dostupná k prezenčnímu nahlédnutí, že jeden výtisk bakalářské práce bude uložen v příruční knihovně Fakulty aplikované informatiky Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně a jeden výtisk bude uložen u vedoucího práce;
- byl/a jsem seznámen/a s tím, že na moji bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších právních předpisů, zejm. § 35 odst. 3;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 1 autorského zákona má UTB ve Zlíně právo na uzavření licenční smlouvy o užití školního díla v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 2 a 3 autorského zákona mohu užít své dílo – diplomovou/bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití jen připouští-li tak licenční smlouva uzavřená mezi mnou a Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně s tím, že vyrovnání případného přiměřeného příspěvku na úhradu nákladů, které byly Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše) bude rovněž předmětem této licenční smlouvy;
- beru na vědomí, že pokud bylo k vypracování bakalářské práce využito softwaru poskytnutého Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně nebo jinými subjekty pouze ke studijním a výzkumným účelům (tedy pouze k nekomerčnímu využití), nelze výsledky bakalářské práce využít ke komerčním účelům;
- beru na vědomí, že pokud je výstupem bakalářské práce jakýkoliv softwarový produkt, považují se za součást práce rovněž i zdrojové kódy, popř. soubory, ze kterých se projekt skládá. Neodevzdání této součásti může být důvodem k neobhájení práce.

Prohlašuji,

- že jsem na bakalářské práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval. V případě publikace výsledků budu uveden jako spoluautor.
- že odevzdaná verze bakalářské práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG jsou totožné.

Ve Zlíně, dne 22.05.2018

Bajusová
....
podpis diplomanta

ABSTRAKT

Cieľom bakalárskej práce je naštudovať problematiku diferenčného a sumačného počtu a prezentovať jeho využitie pri riešení vybraných typov diferenčných rovníc. Hlavná pozornosť bude venovaná lineárnym diferenčným rovniciam (prvého a vyšších rádov). Na konkrétnych príkladoch budú popísané a vysvetlené jednotlivé metódy riešení týchto rovníc, kde okrem klasických metód (variácia konštánt, metóda neurčitých koeficientov) bude ukázané aj použitie alternatívneho postupu, ktorým je tzv. priama a spätná Z-transformácia používaná najmä v teórií automatického riadenia.

Kľúčové slová: diferencia, sumácia, lineárna diferenčná rovnica, variácia konštánt, metóda neurčitých koeficientov, Z-transformácia, spätná Z-transformácia

ABSTRACT

The aim of bachelor thesis is to learn issues of difference and summation calculus and to present uses of them in solving various types of difference equations. The main attention will be dedicated to linear difference equations (first and higher order). Methods of solution will be described on specific examples. Besides those methods (variation of parameters, method of undetermined coefficients) there also will be shown an allternative approach which is direct and inverse Z-transform which are mostly used in theory of automatic control.

Keywords: difference, summation, linear difference equation, variation of parameters, method of undetermined coefficients, Z-transform, inverse Z-transform

Týmto by som sa rada poďakovala vedúcej práce Mgr. Janě Řezníčkové, Ph.D. za odborné vedenie, pripomienky, cenné rady a čas, ktorý mi venovala počas vypracovávania bakalárske práce. Moje poďakovanie patrí aj rodine a priateľovi, ktorí má v štúdiu podporovali.

Prehlasujem, že odovzdaná verzia bakalárskej práce a verzia elektronická nahraná do IS/STAG sú totožné.

OBSAH

ÚVOD

V technických ale aj iných odboroch je spracovávanie signálov súčasťou riešenia problémov. Spojité signály resp. funkcie sú popísané diferenciálnymi rovnicami. Často sa však stretávame so situáciami, kedy nás nezaujíma celý priebeh funkcie, ale len konkrétne hodnoty v určitých časových intervaloch. Jedná sa o diskrétne signály resp. funkcie. Tie sú na rozdiel od spojitých dané diferenčnými rovnicami.

Diferenčné rovnice sú veľmi analogické diferenciálnym rovniciam. V diferenčnom počte zavádzame namiesto pojmu derivácia (známa už z diferenciálneho počtu) pojem diferencia. Opakom diferencie je sumácia. Sumácia odpovedá u spojitých funkcií integrálu. Riešením diferenčnej rovnice je postupnosť čísel.

Cieľom tejto práce je vytvorenie materiálu k štúdiu diferenčných rovníc a poukázať tak najmä na rôzne spôsoby riešenia LDR prvého a vyšších rádov.

Práca je rozdelená na dve časti. V teoretickej časti je definovaná postupnosť a sú vysvetlené základné pojmy diferenčného a sumačného počtu. Ďalej obsahuje pojmy z diferenčných rovníc, dôkladný popis riešenia LDR prvého rádu (s konštantnými a nekonštantnými koeficientmi) a LDR vyšších rádov (s konštantnými koeficientmi). Súčasťou je aj definovaná Z-transformácia, riešenie LDR pomocou Z-transformácie, popis diskrétnych lineárnych dynamických systémov (vonkajší) a základný slovník Z-transformácie. Praktická časť obsahuje riešené príklady diferencie, sumácie, LDR prvého a vyšších rádov, LDR pomocou Z-transformácie. Zahrňuje aj odvodené základné funkcie zo slovníka Z-transformácie a rozobratý vonkajší popis diskrétnych lineárnych dynamických systémov.

I. TEORETICKÁ ČASŤ

1 POSTUPNOSTI

Majme predpis $a_n = 2n$. Priraďme každému prirodzenému číslu n číslo a_n. Ak za n zvolíme jedna, dostaneme $a_1 = 2$. Pre $n = 2$ je $a_2 = 4$. Postupným dosádzaním hodnôt dostávame postupnosť čísel $\{2, 4, 6, 8, \dots, a_n, \dots\}$. V našom prípade sa jedná o postupnosť všetkých párnych prirodzených čísel.

Definícia 1.1 Funkcia, jej definičným oborom je množina všetkých prirodzených čísel $\mathbb{N}$, sa nazýva nekonečná číselná postupnosť.
Funkcia, jej definičným oborom je množina n prirodzených čísel $\{1, 2, \dots, n\}$, sa nazýva konečná číselná postupnosť [1].

V niektorých prípadoch sa stretávame so situáciami, v ktorých je potrebné využiť indexovanie už od nuly. A to najmä pri hodnotách diskrétnych funkcií. Definičný obor čísla n je teda $n \in \mathbb{N}_0$ [11].

Funkčné hodnoty postupnosti sa nazývajú členy postupnosti. Funkčná hodnota postupnosti v bode $n \in \mathbb{N}$ sa nazýva n-tý člen postupnosti a označujeme ho f_n , ale oveľa zaužívanejší spôsob značenia je a_n. Na označenie samotnej postupnosti existuje viacero možností. Nekonečná postupnosť s n-tým členom a_n sa zapisuje $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ alebo $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Konečná postupnosť s n-tým členom a_n a definičným oborom $\{1,2, \dots, k\}$ sa zapisuje $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ alebo $\{a_n\}_{n=1}^{k}$ [1].

Postupnosť môže byť vyjadrená rôznymi spôsobmi:

a) Vymenovaním členov. Príkladom je napr. konečná postupnosť $\{1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots, 6\}$, pri nej je potrebné vedieť posledný člen. U nekonečnej postupnosti alebo v prípade, že neuvádzame všetky členy konečnej postupnosti, je potrebné poznať, podľa čoho boli uvedené členy vytvorené.

b) Vzorcom pre n-tý člen. Pomocou neho dokážeme určiť ľubovoľný člen postupnosti, napr. $a_n = 2n - 1$.

c) Pomocou rekurentného vzorca, kedy pre určenie postupnosti je potrebná znalosť predchádzajúcich členov a vzorca postupnosti, napr. je daný prvý člen a_1 a vzorec vyjadrujúci člen a_{n+1} pomocou a_n.

1.1 Aritmetická postupnosť

Definícia 1.1.1 Aritmetická postupnosť je každá postupnosť určená rekurentne vzťahmi

$$a_1 = a\,, a_{n+1} = a_n + d\,, \forall n \in \mathbb{N},$$

kde a, d sú dané čísla. Číslo d sa nazýva diferencia aritmetickej postupnosti [1].

Diferencia aritmetickej postupnosti je rozdiel dvoch ľubovoľných po sebe nasledujúcich členov, tento rozdiel je nemenný a pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$d = a_{n+1} - a_n.$$

Príklad 1.1.1 Riešme rovnicu $a_{n+1} - a_n = d$ s danou hodnotou a_0 , kde $n \in \mathbb{N}_0$ a d je konštanta. Nájdime všeobecný člen postupnosti a_n.

Po dosadení jednotlivých hodnôt indexov $0, 1, 2, 3, \dots, n-1$ dostávame sústavu rovníc

$$a_1 = a_0 + d,$$

$$a_2 = a_1 + d,$$

$$\dots.$$

$$a_n = a_{n-1} + d.$$

Sčítaním týchto n rovníc sa $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}$ vyrušia. Dostaneme $a_n = a_0 + nd.$ Vieme, že prvý člen je $a_1 = a_0 + d$, môžeme vyjadriť $a_n = a_1 + (n-1)d$. Dostali sme známy vzorec pre n-tý člen aritmetickej postupnosti a prvýkrát sme sa stretli s diferenčnou rovnicou, ktorú si uvedieme neskôr [2].

Podľa [1] pre každú aritmetickú postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí nasledujúca veta.

Veta 1.1.1 N-tý člen aritmetickej postupnosti je možné vyjadriť vzorcom

$$a_n = a_1 + (n-1)d\,.$$

Pre ľubovoľné dva členy a_r, a_s aritmetickej postupnosti platí

$$a_s = a_r + (s-r)d\,.$$

Pre súčet s_n prvých n členov aritmetickej postupnosti platí

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

1.2 Geometrická postupnosť

Definícia 1.2.1 Geometrická postupnosť je každá postupnosť daná rekurentne vzťahmi

$$a_1 = a\ , a_{n+1} = a_n q\ , \forall n \in \mathbb{N},$$

kde a, q sú dané čísla. Číslo q sa nazýva kvocient geometrickej postupnosti.
Pre $a = 0 \vee q = 0$ dostávame postupnosť, jej členy sú samé nuly (s výnimkou 1. členu), kvôli tomu je potrebné brať v úvahu, že $a \neq 0 \wedge q \neq 0$ [1].

Kvocient geometrickej postupnosti je podiel dvoch ľubovoľných po sebe nasledujúcich členov, podiel je nemenný a pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Príklad 1.2.1 Riešme rovnicu $a_{n+1} = qa_n$ s danou hodnotou $a_0 \neq 0$, kde $n \in \mathbb{N}_0$ a q je konštanta. Nájdime všeobecný člen postupnosti a_n.
Dosadením jednotlivých hodnôt indexov $0, 1, 2, 3, \dots, n-1$ dostávame sústavu rovníc

$$a_1 = qa_0,$$

$$a_2 = qa_1,$$

$$\dots.$$

$$a_n = qa_{n-1}.$$

Vynásobením všetkých rovníc a vykrátením dostaneme $a_n = a_0 q^n$. Pretože $a_1 = qa_0$, môžeme vyjadriť vzorec pre n-tý člen geometrickej postupnosti $a_n = a_1 q^{n-1}, n \in \mathbb{N}$ [2].

Podľa [1] pre každú geometrickú postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí nasledujúca veta.

Veta 1.2.1 N-tý člen geometrickej postupnosti je možné vyjadriť vzorcom

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

Pre ľubovoľné dva členy a_r, a_s geometrickej postupnosti platí

$$a_s = a_r q^{s-r}.$$

Pre súčet s_n prvých n členov aritmetickej postupnosti platí

$$s_n = a_1 \frac{q^{n-1}}{\mathrm{q}-1}\ , \text{ak } q \neq 1,$$

$$s_n = na_1\ , \text{ak } q = 1.$$

2 DIFERENCIA

Definícia 2.1 Nech funkcia $f(n)$ je definovaná v bodoch $n_0, n_1, \dots, n_k$. Podľa [3], [11] platí:

Diferenciou prvého rádu funkcie $f(n)$ v bode n_i nazývame rozdiel dvoch po sebe nasledujúcich členov postupnosti $\{f(n_i)\}$

$$\Delta f(n_i) = f(n_{i+1}) - f(n_i).$$

Diferenciou druhého rádu funkcie $f(n)$ v bode n_i nazývame výraz

$$\Delta^2 f(n_i) = \Delta f(n_{i+1}) - \Delta f(n_i).$$

Všeobecne diferencia rádu k funkcie $f(n)$ v bode n_i je daná

$$\Delta^k f(n_i) = \Delta^{k-1} f(n_{i+1}) - \Delta^{k-1} f(n_i).$$

Výpočtom druhej diferencie v bode n_i dostávame

$$\Delta^2 f(n_i) = \Delta f(n_{i+1}) - \Delta f(n_i) = f(n_{i+2}) - f(n_{i+1}) - \big(f(n_{i+1}) - f(n_i)\big) =$$
$$= f(n_{i+2}) - 2f(n_{i+1}) + f(n_i).$$

Podobným spôsobom získame tretiu diferenciu

$$\Delta^3 f(n_i) = \Delta^2 f(n_{i+1}) - \Delta^2 f(n_i) =$$
$$= f(n_{i+3}) - 2f(n_{i+2}) + f(n_{i+1}) - \big(f(n_{i+2}) - 2f(n_{i+1}) + f(n_i)\big) =$$
$$= f(n_{i+3}) - 3f(n_{i+2}) + 3f(n_{i+1}) - f(n_i).$$

Pri vyjadrení diferencií vychádzame zo základnej znalosti, platí, že diferencia k-tého rádu je vytvorená za pomoci diferencie rádu $k-1$.

Nasledujúca veta ukazuje odvodenie k-tej diferencie bez potreby poznania predchádzajúcej [3]. Namiesto $f(n) = y(n)$ budeme používať stručnejší zápis y_n.

Veta 2.1 Nech funkcia y_n je definovaná v bodoch $n, n+1, \dots, n+i, \dots, n+k, \dots$.

Pre diferenciu rádu k platí

$$\Delta^k y_n = \binom{k}{0} y_{n+k} - \binom{k}{1} y_{n+k-1} + \dots + (-1)^k \binom{k}{k} y_n =$$
$$= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} y_{n+k-i}. \tag{1}$$

2.1 Diferencia v ekvidištantných bodoch

O diferencii v ekvidištantných bodoch podľa [3] hovoríme ak platí, že všetky rozdiely

$$\Delta n_i = n_{i+1} - n_i$$

sú rovnako veľké a rovnajú sa číslu h (tzv.diferenčnému kroku), t. j. $\Delta n_i = h$ pre každé $i \in \{1,2,\dots,k-1\}$, takže všetky susedné body $n_0, n_1, \dots, n_k$ sú od seba rovnako vzdialené resp. ekvidištantné, potom platí

$$n_1 = n_0 + h,\ n_2 = n_1 + h = n_0 + 2h, \dots, n_k = n_0 + kh.$$

Ak $h = 1$, je zrejmé

$$n_1 = n_0 + 1\ ,\ n_2 = n_0 + 2, \dots, n_k = n_0 + k.$$

V takom prípade

$$\Delta f(n_i) = f(n_0 + i + 1) - f(n_0 + i)$$

2.2 Základné vlastnosti diferenčného počtu

Veta 2.2.1 Nech C je konštanta, $m, k \in \mathbb{N}$ a y_n , z_n sú funkcie, potom podľa [4] platí

a) $\Delta^m(\Delta^k y_n)) = \Delta^{m+k} y_n.$

b) $\Delta(y_n \pm z_n) = \Delta y_n + \Delta z_n.$

c) $\Delta(C y_n) = C \Delta y_n.$

d) $\Delta(y_n z_n) = z_{n+1} \Delta y_n + y_n \Delta z_n.$

e) $\Delta\left(\frac{y_n}{z_n}\right) = \frac{z_n \Delta y_n - y_n \Delta z_n}{z_n z_{n+1}}.$

V predchádzajúcej vete sú uvedené všeobecné vzorce na výpočet diferencie, následne si ukážeme vzorce pre určenie diferencie v konkrétnych funkciách [4].

Veta 2.2.2 Nech a je konštanta, potom podľa [4] platí

a) $\Delta a = 0$.

b) $\Delta(n + a) = 1$.

c) $\Delta\, a^n = (n - 1)a^n$.

d) $\Delta \sin an = 2 \sin\frac{a}{2} \cos a \left(n + \frac{1}{2}\right)$.

e) $\Delta \cos an = -2 \sin\frac{a}{2} \sin a \left(n + \frac{1}{2}\right)$.

f) $\Delta \log an = \log \left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

g) $\Delta\binom{n}{a} = \binom{n}{a-1}$.

Veta 2.2.3 Nech $P_k(n)$ a $R_k(n)$ sú polynómy stupňa k, $Q_{k-1}(n)$ je polynóm stupňa $k - 1$. Potom podľa [11] platí

a) $\Delta P_k(n) = Q_{k-1}(n)$.

b) $\Delta P_k(n)q^n = R_k(n)q^n$, $q \neq 1$.

3 SUMÁCIA

V predchádzajúcej časti sme si uviedli operátor rozdielu, tzv. diferenciu funkcie y_n. Často sa však stretávame s opačnou úlohou, než tomu bolo u diferencií, kde sme hľadali diferenciu daných funkcií. A to s úlohou určiť takú funkciu Y_n, aby sa jej diferencia rovnala danej funkcii y_n. V tejto časti si teda k operátoru rozdielu zavedieme jeho inverzný operátor, ktorý sa nazýva neurčitá sumácia [3], [4].

Definícia 3.1 Ak Y_n je funkcia, ktorá pre každé $n \in M = \{n_0, n_0 + 1, \dots, n_0 + k, \dots\}$ podľa [3] splňuje vzťah

$$\Delta Y_n = y_n,$$

kde y_n je daná funkcia, potom funkciu Y_n nazývame neurčitou sumáciou funkcie y_n a symbolicky značíme $\sum y_n$, takže na uvedenej množine M platí ekvivalencia

$$\Delta Y_n = y_n \;\Leftrightarrow\; Y_n = \sum y_n. \tag{2}$$

Pričom $\sum$ sa nazýva inverzný operátor k operátoru Δ, a platí

$$\Delta\left(\sum y_n\right) = y_n.$$

Príklad 3.1 Určme neurčitú sumáciu funkcie $a)\ y_n = 0,\ b)\ y_n = 1.$

a) Ide o určenie funkcie Y_n, pre ktorú platí $\Delta Y_n = 0$. Takouto funkciou je napr. $Y_n = C$, kde C je ľubovoľná konštanta, alebo

$$\Delta Y_n = Y_{n+1} - Y_n = C - C = 0.$$

Každá funkcia p_n s periódou $\omega = 1$ (tzv. jednotková periodická funkcia), t. j. $p_{n+1} = p_n$ pre každé $n \in M$, vyhovuje danej úlohe, preto

$$\Delta Y_n = \Delta p_n = p_{n+1} - p_n = 0.$$

Všeobecne platí

$$Y_n = \sum 0 = p_n,$$

kde p_n je ľubovoľná jednotková periodická funkcia [3].

b) Pretože $h = \Delta n = 1$, je $\sum 1 = n$, takže

$$Y_n = \sum 1 = n + p_n,$$

kde p_n je ľubovoľná jednotková periodická funkcia [3].

Ďalej budeme namiesto označenia p_n využívať ľubovoľnú konštantu C.

Veta 3.1 Neurčitá sumácia nie je určená jednoznačne, platí, že každá neurčitá sumácia funkcie y_n je daná ako

$$\sum y_n = Y_n + C,$$

kde funkcia Y_n sa nazýva neurčitou sumáciou funkcie y_n a C je ľubovoľná konštanta.

3.1 Základné vlastnosti sumačného počtu

Veta 3.1.1 Nech C je konštanta a y_n , z_n sú funkcie. Podľa [4] platí

a) $\sum(y_n \pm z_n) = \sum y_n + \sum z_n$.

b) $\sum C y_n = C \sum y_n$.

c) $\sum(y_n \Delta z_n) = y_n z_n - \sum z_{n+1} \Delta y_n \ \ (per\ partes)$.

d) $\sum(y_{n+1} \Delta z_n) = y_n z_n - \sum z_n \Delta y_n \ \ (per\ partes)$.

Veta 3.1.2 Nech a, C sú konštanty. Podľa [4] platí

a) $\sum 0 = C$.

b) $\sum 1 = n + C$.

c) $\sum a^n = \frac{a^n}{a-1} + C\ ,\ \ a \neq 1$.

d) $\sum \sin an = -\frac{\cos a\left(n-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{a}{2}} + C\ , a \neq 2k\pi$.

e) $\sum \cos an = \frac{\sin a\left(n-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{a}{2}} + C\ , a \neq 2k\pi$.

f) $\sum \binom{n}{a} = \binom{n}{a+1} + C$.

Veta 3.1.3 Ak $P_k(n)$ je polynóm stupňa k, potom existuje polynóm $Q_{k+1}(n)$ stupňa $k+1$ a polynóm $R_k(n)$ stupňa k. Podľa [11] platí

a) $\sum P_k(n) = Q_{k+1}(n) + C$.

b) $\sum P_k(n) q^n = R_k(n) q^n + C\ , q \neq 1$.

3.2 Určitá sumácia

Touto vetou zobrazujeme vzťah neurčitej sumácie k určitej sumácii.

Veta 3.2.1 Ak m je pevne dané , $m \leq n$ a C je konštanta, podľa [4] platí

$$\sum y_n = \sum_{k=m}^{n-1} y_k + C. \tag{3}$$

Rovnako aj pri neurčitej sumácií pre inverzný operátor platí

$$\Delta\left(\sum_{k=m}^{n-1} y_k\right) = y_{n.}$$

Nasledujúca veta ukazuje ďalšiu možnosť riešenia určitej sumácie a je bezprostredným dôsledkom rovnice (3) [4].

Veta 3.2.2 Ak z_n je neurčitá sumácia y_n, podľa [4] platí

$$\sum_{k=m}^{n-1} y_k = [z_k]_m^n = z_n - z_m. \tag{4}$$

Ďalšia veta zobrazuje spôsob riešenia určitej sumácie v prípade využitia metódy per partes. Pomocou nej dokážeme určiť každú určitú sumáciu typu $P_k a^n, P_k \sin an,$ $P_k \cos an$ a $P_k \binom{n}{a}$, kde P_k je polynóm stupňa k. Avšak je potrebné zopakovať metódu per partes toľkokrát, koľkého stupňa je polynóm [4].

Veta 3.2.3 Ak $m < n$, podľa [4] platí

$$\sum_{k=m}^{n-1} a_k \Delta b_k = [a_k b_k]_m^n - \sum_{k=m}^{n-1} (\Delta a_k) b_{k+1}. \tag{5}$$

4 DIFERENČNÁ ROVNICA

Diferenčná rovnica je podľa [3] rovnica, v nej sa okrem argumentu a hľadanej funkcie tohto argumentu vyskytuje aj jej diferencia. Implicitný tvar diferenčnej rovnice

$$F(n, y_n, \Delta y_n, \dots, \Delta^k y_n) = 0$$

môžeme upraviť na implicitný tvar (tzv. rekurentný tvar)

$$f(n, y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+k}) = 0 \tag{6}$$

alebo explicitný tvar rádu k

$$y_{n+k} = f(n, y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+k-1}). \tag{7}$$

Rádom diferenčnej rovnice (6), ktorá obsahuje členy y_n a y_{n+k}, nazývame číslo $r = k$. Ak rovnica obsahuje členy y_{n+k} a y_{n+i}, ale neobsahuje členy $y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+i-1}$, nazývame jej rádom číslo $r = k - i$ [3].

Všeobecným riešením rovnice (7) nazývame také riešenie, ktoré obsahuje k takých ľubovoľných konštánt C, že každé riešenie tejto rovnice sa z neho dostane vhodnou voľbou týchto konštánt [3].

Partikulárnym riešením rovnice (7) nazývame také riešenie, ktoré dostaneme zo všeobecného riešenia dosadeným určitých čísel za jednotlivé konštanty C alebo počiatočnými podmienkami v tvare

$$y(n_0) = f_{0,}\, y(n_0 + 1) = f_1, \dots, y(n_0 + k - 1) = f_{k-1},$$

kde $f_{0,}\, f_1, \dots, f_{k-1}$ sú dané čísla [3].

4.1 LDR prvého rádu

Definícia 4.1.1 Nech $a_1(n), a_0(n), f(n)$ sú dané funkcie, pričom $a(n) \neq 0$ pre všetky $n \in \mathbb{N}_0$. Lineárnou diferenčnou rovnicou 1. rádu je rovnica tvaru

$$a_1(n) y_{n+1} - a_0(n) y_n = f(n). \tag{8}$$

Ak $f(n) = 0$, nazývame rovnicu (8) homogénnou, v opačnom prípade nehomogénnou [4].

Ak $a_1(n), a_0(n) \equiv 1$, môžeme rovnicu (8) podľa [4] zapísať ako

$$\Delta y_n = f(n)$$

a jej riešením je

$$y_n = \sum f(n).$$

4.1.1 LDR s konštantnými koeficientmi

Definícia 4.1.1.1 O lineárnej diferenčnej rovnici 1. rádu s konštantnými koeficientmi hovoríme, ak máme rovnicu tvaru

$$a_1 y_{n+1} - a_0 y_n = f(n), \tag{9}$$

kde a_1, a_0 sú konštanty pre ktoré platí $a_1, a_0 \neq 0$ a $f(n)$ je funkcia.

Riešenie homogénnej LDR 1. rádu

$$a_1 y_{n+1} - a_0 y_n = 0 \tag{10}$$

dosiahneme pomocou iteračnej metódy. Na jej základe odhadneme štruktúru riešenia. Prepíšme najprv rovnicu (10) na

$$y_{n+1} = \frac{a_0}{a_1} y_n.$$

Nech $\lambda = \frac{a_0}{a_1}$

$$y_{n+1} = \lambda y_n. \tag{11}$$

Ak $n \in \mathbb{N}_0$, potom

$$\begin{aligned} y_1 &= \lambda y_0, \\ y_2 &= \lambda y_1 = \lambda(\lambda y_0) = \lambda^2 y_0, \\ y_3 &= \lambda y_2 = \lambda(\lambda^2 y_0) = \lambda^3 y_0, \\ &\vdots \\ y_n &= \lambda^n y_0. \end{aligned}$$

Dosadaním takto získaného riešenia $y_n = \lambda^n y_0$ do rovnice (10) dostaneme po vydelení $\lambda^n \neq 0, y_0 \neq 0$ charakteristickú rovnicu (13) rovnice (10).

Vo výsledku platí veta:

Veta 4.1.1.1 Riešenie homogénnej rovnice (10) je podľa [6] dané

$$y_n = \lambda^n y_0, \tag{12}$$

kde y_0 nazývame počiatočnou podmienkou a λ je neznáma konštanta, ktorá je riešením charakteristickej rovnice rovnice (10) v tvare

$$a_1\lambda - a_0 = 0. \tag{13}$$

Všeobecné riešenie rovnice (10) je dané

$$y_n = C\lambda^n,$$

kde $C \in \mathbb{R}$.

Nehomogénnu lineárnu diferenčnú rovnicu 1. rádu (9) riešime pomocou metódy variácie konštánt.

4.1.1.1 Metóda variácie konštánt

Pri tejto metóde je potrebné ako prvé rovnicu (9) zhomogenizovať, t. j. položíme pravú stranu $f(n) = 0$. Dostaneme tak rovnicu (10) a pomocou charakteristickej rovnice (13) nájdeme všeobecné riešenie y_h homogénnej rovnice (10) v tvare

$$y_h = C\lambda^n. \tag{14}$$

Následne budeme hľadať všeobecné riešenie nehomogénnej rovnice (9), ktoré bude taktiež v tvare (14), ale namiesto konštanty C budeme hľadať vhodnú funkciu premennej n, t. j $C(n)$. Riešenie má tvar

$$y_n = C(n)\lambda^n. \tag{15}$$

Z rovnice (15) odvodíme člen y_{n+1}

$$y_{n+1} = C(n+1)\lambda^{n+1} = C(n)\lambda^{n+1} + \Delta C(n)\lambda^{n+1}.$$

Dosadíme členy y_n a y_{n+1} do pôvodnej nehomogénnej rovnice (9) a predelíme nenulovým členom a_1

$$C(n)\lambda^{n+1} + \Delta C(n)\lambda^{n+1} - \frac{a_0}{a_1}C(n)\lambda^n = \frac{f(n)}{a_1}.$$

Rovnako ako pri rovnici (11) zavedieme $\lambda = \frac{a_0}{a_1}$. Tým vypadnú členy obsahujúce $C(n)$. Nakoniec po vyjadrení $\Delta C(n)$ dostávame

$$\Delta C(n) = \frac{f(n)}{a_1\lambda^{n+1}}.$$

Neurčitou sumáciou získame

$$C(n) = \sum \frac{f(n)}{a_1 \lambda^{n+1}} + C.$$

Dosadením funkcie $C(n)$ do vzťahu (15) dostávame všeobecné riešenie nehomogénnej lineárnej diferenčnej rovnice (9).

4.1.2 LDR s nekonštantnými koeficientmi

Uvažujme rovnicu (8) s nekonštantnými koeficientmi $a_1(n), a_0(n)$. Nech jej homogénna rovnica je v tvare

$$a_1(n)u_{n+1} - a_0(n)u_n = 0. \tag{16}$$

Riešenie homogénnej rovnice (16) získame pre $n \in \mathbb{N}_0$ opäť pomocou iterácie. Vychádzajme z tvaru

$$u_{n+1} = \frac{a_0(n)}{a_1(n)} u_n,$$

odtiaľ

$$u_1 = \frac{a_0(0)}{a_1(0)} u_0,$$

$$u_2 = \frac{a_0(1)}{a_1(1)} \frac{a_0(0)}{a_1(0)} u_0,$$

$$\vdots$$

$$u_n = u_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_0(k)}{a_1(k)}. \tag{17}$$

Teraz nájdime všeobecné riešenie nehomogénnej rovnice (8) dosadením substitúcie $y_n = u_n C(n)$ do (8), kde u_n je riešenie homogénnej rovnice (16) a $C(n)$ je funkcia premennej n, ktorú potrebujeme určiť. Dostávame

$$a_1(n)u_{n+1}C(n+1) - a_0(n)u_n C(n) = f(n),$$

$$a_1(n)\frac{a_0(n)}{a_1(n)} u_n C(n+1) - a_0(n)u_n C(n) = f(n),$$

$$a_0(n)u_n\big(C(n+1) - C(n)\big) = f(n),$$

$$a_0(n)u_n \, \Delta C(n) = f(n),$$

$$\Delta C(n) = \frac{f(n)}{a_0(n)u_n} = \frac{f(n)}{a_1(n)u_{n+1}},$$

odkiaľ

$$C(n) = \sum \frac{f(n)}{a_1(n)u_{n+1}} + C, \tag{18}$$

teda

$$y_n = u_n \left[\sum \frac{f(n)}{a_1(n)u_{n+1}} + C \right].$$

Poslednou rovnicou s ľubovoľnou konštantou C získavame vyjadrenie všetkých riešení rovnice (8), pokiaľ u_n je akékoľvek netriviálne (t. j. nenulové) riešenie homogénnej rovnice (16) [4]. Vo výsledku podľa [4] platí nasledujúca veta:

Veta 4.1.2.1 Nech $\frac{a_0(n)}{a_1(n)} \neq 0, n \in \mathbb{N}_0,$ potom riešenie homogénnej rovnice (16) je v tvare

$$u_n = u_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_0(k)}{a_1(k)},$$

pričom u_0 je počiatočná podmienka v tvare $u_0 = C$, kde $C \in \mathbb{R}$. Ak nepoznáme u_0 , všeobecné riešenie rovnice (16) bude

$$u_n = C \prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_0(k)}{a_1(k)}.$$

Všetky riešenia nehomogénnej rovnice (8) sú dané

$$y_n = u_n \left[\sum \frac{f(n)}{a_1(n)u_{n+1}} + C \right],$$

kde $C \in \mathbb{R}$, $a_1(n) \neq 0$ a u_{n+1} je nenulová funkcia v tvare (17).

5 LDR VYŠŠÍCH RÁDOV

Definícia 5.1 Lineárnou diferenčnou rovnicou rádu k nazývame rovnicu v tvare

$$a_k(n)y_{n+k} + \cdots + a_1(n)y_{n+1} + a_0(n)y_n = f(n),$$

kde $a_0(n), a_1(n), \ldots, a_n(n)$ a $f(n)$sú ľubovoľné funkcie argumentu n, z nich $a_0(n) \neq 0$ a $a_k(n) \neq 0$. Takto definovanú rovnicu nazývame tiež nehomogénna lineárna diferenčná rovnica k-tého rádu [3], [5]. Homogénnou diferenčnou rovnicou nazývame rovnicu, pre ktorú platí $f(n) = 0$

$$a_k(n)y_{n+k} + \cdots + a_1(n)y_{n+1} + a_0(n)y_n = 0.$$

5.1 Homogénne LDR *k*-tého rádu

Definícia 5.1.1 Hovoríme, že funkcie $y_n^1, \ldots, y_n^k$ definované pre všetky $n \in \mathbb{N}_0$ sú lineárne nezávislé, ak rovnica

$$C_1 y_n^1 + C_2 y_n^2 + \cdots + C_k y_n^k = 0 \tag{19}$$

je splnená len v prípade, že všetky konštanty $C_1, C_2, \ldots, C_k$ sú rovné nule. V opačnom prípade hovoríme, že $y_n^1, \ldots, y_n^k$ sú lineárne závislé, ak je splnená rovnica (19) a aspoň jedna z konštánt $C_1, C_2, \ldots, C_k$ je rôzna od nuly.

Lineárnu závislosť resp. nezávislosť u lineárnych diferenčných rovníc je jednoduché dokázať pomocou Casoratiho determinantu K, ktorý je obdobou wronskiánu u lineárnych diferenciálnych rovníc.

Nech $y_n^1, \ldots, y_n^k$ sú riešenia homogénnej rovnice pre všetky $n \in \mathbb{N}_0$. Riešenia sú lineárne nezávislé práve vtedy, keď Casoratiho determinant $K(n) \neq 0$. Casoratiho determinant je podľa [3], [4] definovaný ako

$$K = \begin{vmatrix} y_n^1 & y_n^2 & \cdots & y_n^k \\ y_{n+1}^1 & y_{n+1}^2 & \cdots & y_{n+1}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n+k+1}^1 & \cdots & \cdots & y_{n+k+1}^k \end{vmatrix}$$

resp.

$$K = \begin{vmatrix} y_n^1 & y_n^2 & \cdots & y_n^k \\ \Delta y_n^1 & \Delta y_n^2 & \cdots & \Delta y_n^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta^{k-1} y_n^1 & \cdots & \cdots & \Delta^{k-1} y_n^k \end{vmatrix}.$$

Veta 5.1.1 Ak riešenia $y_n^1, \dots, y_n^k$ homogénnej rovnice sú lineárne nezávislé (tvoria fundamentálny systém), potom jej všeobecné riešenie, ktoré nadobúda pre všetky $n \in \mathbb{N}_0$ konečné a určité hodnoty, je v tvare

$$y(n) = C_1 y_n^1 + C_2 y_n^2 + \cdots + C_k y_n^k,$$

kde $C_1, C_2, \dots, C_k$ sú ľubovoľné konštanty [3].

5.1.1 Homogénne LDR k-tého rádu s konštantnými koeficientmi

Definícia 5.1.1.1 Nech homogénna lineárna diferenčná rovnica k-tého rádu je v tvare

$$a_k y_{n+k} + a_{k-1} y_{n+k-1} + \cdots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = 0, \tag{20}$$

kde $a_0, a_1, \dots, a_k$ sú konštanty, pričom $a_0, a_k \neq 0$.
Jej charakteristickou rovnicou nazývame rovnicu (s neznámou λ) v tvare

$$a_k \lambda^k + a_{k-1} \lambda^{k-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0. \tag{21}$$

Charakteristickú rovnicu (21) získame hľadaním riešenia rovnice (20) v tvare $y = \lambda^n$, $\lambda \neq 0$. Dosadením

$$y_{n+k} = \lambda^{n+k} = \lambda^n \lambda^k,$$
$$y_{n+k-1} = \lambda^{n+k-1} = \lambda^n \lambda^{k-1},$$
$$\dots$$
$$y_{n+1} = \lambda^{n+1} = \lambda^n \lambda,$$
$$y_n = \lambda^n = \lambda^n,$$

do rovnice (20) dostaneme vzťah

$$\lambda^n (a_k \lambda^k + a_{k-1} \lambda^{k-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0) = 0.$$

Odtiaľ po predelení výrazom $\lambda^n \neq 0$ získame charakteristickú rovnicu (21) [3].

Veta 5.1.1.1 Ak λ je koreňom charakteristickej rovnice (21), tak

$$y = \lambda^n$$

je riešením homogénnej rovnice (20) [3].

Fundamentálny systém riešení homogénnej lineárnej diferenčnej rovnice (20), ktorý sa skladá z jej k nezávislých riešení, dostaneme pomocou koreňov charakteristickej rovnice (21) [3].

Nasledujúca veta udáva podľa [3] ako pomocou koreňov charakteristickej rovnice určiť fundamentálny systém.

Veta 5.1.1.2 Uvažujme charakteristickú rovnicu $a_k\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$.

a) V prípade, že všetky korene $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ sú reálne rôzne, je fundamentálny systém rovnice tvaru

$$y_1 = \lambda_1^n, y_2 = \lambda_2^n, \dots, y_k = \lambda_k^n.$$

Preto všeobecné riešenie je v tvare

$$y = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n + \cdots + C_k\lambda_k^n.$$

b) Ak je niektorý reálny koreň λ charakteristickej rovnice k-násobný, prislúcha mu vo fundamentálnom systéme celkom k nezávislých riešení tvaru

$$y_{11} = \lambda^n, y_{12} = n\lambda^n, \dots, y_{1k} = n^{k-1}\lambda^n.$$

Všeobecné riešenie je v tvare

$$y = C_1\lambda^n + C_2 n\lambda^n + \cdots + C_k n^{k-1}\lambda^n.$$

c) Ak je niektorý koreň λ charakteristickej rovnice komplexný k-násobný a je vyjadrený v goniometrickom tvare

$$\lambda = r(\cos\varphi \pm j\sin\varphi),$$

prináleží mu vo fundamentálnom systéme celkom $2k$ lineárne nezávislých riešení tvaru

$$y_{11} = r^n\cos(\varphi n), y_{12} = nr^n\cos(\varphi n), \dots, y_{1k} = n^{k-1}r^n\cos(\varphi n),$$
$$y_{21} = r^n\sin(\varphi n), y_{22} = nr^n\sin(\varphi n), \dots, y_{2k} = n^{k-1}r^n\sin(\varphi n).$$

Všeobecné riešenie je v tvare

$$y = C_{11}r^n\cos(\varphi n) + C_{12}nr^n\cos(\varphi n) + \cdots + C_{1k}n^{k-1}r^n\cos(\varphi n) +$$
$$+C_{21}r^n\sin(\varphi n) + C_{22}n\,r^n\sin(\varphi n) + \cdots + C_{2k}n^{k-1}r^n\sin(\varphi n).$$

Algebraický tvar komplexného čísla $a \pm jb$ prevedieme na goniometrický tvar $r(\cos\varphi \pm jsin\,\varphi)$ nasledovne:

a) Veľkosť komplexného čísla je $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

b) Uhol φ je pre sínus definovaný ako $sin\,\varphi = \frac{b}{r}$ a pre kosínus $cos\,\varphi = \frac{a}{r}$.

5.2 Nehomogénne LDR k-tého rádu s konštantnými koeficientmi

Pod názvom nehomogénna lineárna diferenčná rovnica k-tého rádu rozumieme rovnicu s funkciou $f(n)$ na pravej strane v tvare

$$a_k y_{n+k} + a_{k-1} y_{n+k-1} + \cdots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = f(n), \qquad (22)$$

kde $a_0, a_1, \dots, a_k$ sú konštanty, pričom $a_0, a_k \neq 0$.

Pri hľadaní všeobecného riešenia takto zadanej nehomogénnej rovnice postupujeme nasledujúcim spôsobom. Za prvé si určíme všeobecné riešenie príslušnej homogénnej diferenčnej rovnice, to označíme ako y_h. Potom využitím metódy neurčitých koeficientov alebo metódy variácie konštánt nájdeme partikulárne riešenie nehomogénnej diferenčnej rovnice y_p. Výsledné riešenie získame ich súčtom.

Veta 5.2.1 Všeobecné riešenie nehomogénnej diferenčnej rovnice (22) má tvar

$$y = y_h + y_p.$$

5.2.1 Metóda neurčitých koeficientov

Je vhodná len pre špeciálne tvary pravej strany $f(n)$. Najčastejšie býva pravá strana rovná niektorej z funkcií uvedenej v nasledujúcich vetách [3].

Veta 5.2.1.1 V prípade, že funkcia má na pravej strane tvar

$$f(n) = P_m(n),$$

kde $P_m(n)$ je polynóm stupňa m, partikulárne riešenie má tvar

$$y_p = n^k Q_m(n),$$

$Q_m(n)$ je polynóm stupňa m s neurčitými koeficientmi a k je dané násobnosťou čísla 1 ako koreňa charakteristickej rovnice. V prípade, že ani jeden z koreňov $\lambda \neq 1$, je $k = 0$.

Veta 5.2.1.2 Ak pravá strana má tvar

$$f(n) = a^n P_m(n),$$

kde $P_m(n)$ je polynóm stupňa m, partikulárne riešenie hľadáme v tvare

$$y_p = n^k Q_m(n) a^n,$$

$Q_m(n)$ je polynóm stupňa m s neurčitými koeficientmi a k je dané násobnosťou čísla a ako koreňa charakteristickej rovnice. Ak ani jeden z koreňov $\lambda \neq a$, je $k = 0$.

Veta 5.2.1.3 Ak pravá strana je daná

$$f(n) = P_m(n)\sin(\varphi n) \text{ alebo } f(n) = P_m(n)\cos(\varphi n),$$

ak $P_m(n)$ je polynóm stupňa m, partikulárne riešenie hľadáme v tvare

$$y_p = n^k(Q_m(n)\sin(\varphi n) + R_m(n)\cos(\varphi n))r^n,$$

$Q_m(n), R_m(n)$ sú polynómy stupňa m s neurčitými koeficientmi a k je dané násobnosťou čísla $r(\cos\varphi \pm j\sin\varphi)$ ako koreňa charakteristickej rovnice. Ak ani jeden z koreňov $\lambda \neq r(\cos\varphi \pm j\sin\varphi)$ je $k = 0$.

5.2.1.1 Princíp superpozície

O princípe superpozície, resp. skladania hovoríme, ak pravá strana lineárnej diferenčnej rovnice je zložená z viacero funkcií $f(n) = f_1(n) + \cdots + f_k(n)$. Nech $y_{p1}, \dots, y_{pk}$ sú jednotlivé partikulárne riešenia týchto funkcií, potom celkové partikulárne riešenie je dané ich súčtom $y_p = y_{p1} + \cdots + y_{pk}$ [3].

5.2.2 Metóda variácie konštánt

Táto metóda udáva všeobecný postup, pomocou neho dokážeme nájsť partikulárne riešenie pre akúkoľvek nehomogénnu diferenčnú rovnicu bez ohľadu na typ pravej strany.

Uvažujme nehomogénnu rovnicu s konštantnými koeficientmi a_k, a_{k-1}, a_1, a_0 v tvare

$$a_k y_{n+k} + a_{k-1}y_{n+k-1} + \cdots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = f(n) \tag{23}$$

a homogénnu rovnicu

$$a_k y_{n+k} + a_{k-1}y_{n+k-1} + \cdots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = 0. \tag{24}$$

Nech všeobecné riešenie homogénnej rovnice (24) je

$$y_h = C_1 y_n^1 + C_2 y_n^2 + \cdots + C_k y_n^k, \tag{25}$$

kde $C_1, C_2, \dots, C_k$ sú konštanty.

Všeobecné riešenie nehomogénnej rovnice (23) určíme metódou variácie konštánt $C_1, \dots, C_k$. Touto metódou hľadáme všeobecné riešenie rovnice (23) v tvare (25), kde namiesto konštánt $C_1, \dots, C_k$ vystupujú vhodné funkcie premennej n (budeme namiesto $C_1(n), \dots, C_k(n)$ označovať $C_n^1, \dots, C_n^k$).

Hľadané riešenie je v tvare

$$y_n = C_n^1 y_n^1 + C_n^2 y_n^2 + \cdots + C_n^k y_n^k, \tag{26}$$

kde $y_n^1, y_n^2, \dots, y_n^k$ sú nezávislé riešenia homogénnej rovnice (24) a $C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^k$ neznáme funkcie, ktoré sa majú určiť.

Vyjadríme y_{n+1}

$$y_{n+1} = C_{n+1}^1 y_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 y_{n+1}^2 + \cdots + C_{n+1}^k y_{n+1}^k =$$

$$= C_n^1 y_{n+1}^1 + C_n^2 y_{n+1}^2 + \cdots + C_n^k y_{n+1}^k + \Delta C_n^1 y_{n+1}^1 + \Delta C_n^2 y_{n+1}^2 + \cdots + \Delta C_n^k y_{n+1}^k.$$

Zaveďme podmienku

$$\Delta C_n^1 y_{n+1}^1 + \Delta C_n^2 y_{n+1}^2 + \cdots + \Delta C_n^k y_{n+1}^k = 0.$$

Odvoďme aj posledný člen y_{n+k}

$$y_{n+k} = C_{n+1}^1 y_{n+k}^1 + C_{n+1}^2 y_{n+k}^2 + \cdots + C_{n+1}^k y_{n+k}^k =$$

$$C_n^1 y_{n+k}^1 + C_n^2 y_{n+k}^2 + \cdots + C_n^k y_{n+k}^k + \Delta C_n^1 y_{n+k}^1 + \Delta C_n^2 y_{n+k}^2 + \cdots + \Delta C_n^k y_{n+k}^k.$$

Dosadením $y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+k}$ do rovnice (24) dostaneme

$$C_n^1 (a_k y_{n+k}^1 + \cdots + a_1 y_{n+1}^1 + a_0 y_n^1) + C_n^2 (a_k y_{n+k}^2 + \cdots + a_1 y_{n+1}^2 + a_0 y_n^2) +$$

$$+ \cdots + C_n^k \left(a_k y_{n+k}^k + \cdots + a_1 y_{n+1}^k + a_0 y_n^k\right) +$$

$$+ a_k \left(\Delta C_n^1 y_{n+k}^1 + \Delta C_n^2 y_{n+k}^2 + \cdots + \Delta C_n^k y_{n+k}^k\right) = f(n).$$

Všetky výrazy v zátvorkách okrem posledného sú rovné nule, pretože $y_1, y_2, \dots, y_k$ sú riešeniami homogénnej rovnice (24). Pre posledný výraz potom platí

$$\Delta C_n^1 y_{n+k}^1 + \Delta C_n^2 y_{n+k}^2 + \cdots + \Delta C_n^k y_{n+k}^k = \frac{f(n)}{a_k}.$$

Z podmienok zostavíme sústavu pre k-neznámych funkcií $C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^k$ obsahujúcu k-podmienok.

$$\begin{gathered}
\Delta C_n^1 y_n^1 + \Delta C_n^2 y_n^2 + \cdots + \Delta C_n^k y_n^k = 0, \\
\Delta C_n^1 y_{n+1}^1 + \Delta C_n^2 y_{n+1}^2 + \cdots + \Delta C_n^k y_{n+1}^k = 0, \\
\dots \\
\Delta C_n^1 y_{n+k-1}^1 + \Delta C_n^2 y_{n+k-1}^2 + \cdots + \Delta C_n^k y_{n+k-1}^k = 0, \\
\Delta C_n^1 y_{n+k}^1 + \Delta C_n^2 y_{n+k}^2 + \cdots + \Delta C_n^k y_{n+k}^k = \frac{f(n)}{a_k}.
\end{gathered} \tag{27}$$

Zo sústavy (27) zostrojíme determinant $K(n+1)$. Jedná sa o Casoratiho determinant. Tento determinant sústavy (27) musí byť nenulový, pretože sa týka k nezávislých riešení za predpokladu, že $a_k \neq 0$ a $n \geq 0$. Sústava (27) má práve jedno riešenie, ktoré sa podľa Cramerovho pravidlá určí podľa vzorca

$$\Delta C_n^v = \frac{K_v}{K(n+1)}, \tag{28}$$

kde

$$K(n+1) = \begin{vmatrix} y_{n+1}^1 & y_{n+1}^2 & \cdots & y_{n+1}^k \\ y_{n+2}^1 & y_{n+2}^2 & \cdots & y_{n+2}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n+k}^1 & y_{n+k}^2 & \cdots & y_{n+k}^k \end{vmatrix},$$

K_v je determinant matice, ktorú z matice K dostaneme nahradením v-tého stĺpca stĺpcom absolútnych členov zmienenej sústavy (27), t. j. stĺpcom $\left[0,0,\ldots,0,\frac{f(n)}{a_k}\right]^T$.

Zostáva vyriešiť rovnicu (20) pomocou neurčitej sumácie

$$C_n^v = \sum \frac{K_v}{K(n+1)} + C,$$

Po dosadení funkcie C_n^v do vzťahu (26) dostaneme všeobecné riešenie nehomogénnej lineárnej rovnice (25).

Pri vypracovaní variácie konštánt boli použité zdroje [3],[4],[6].

6 Z-TRANSFORMÁCIA

Z-transformácia má podobnú úlohu ako Laplaceova transformácia pri spojitých systémoch. V teórií automatického riadenia je Z-transformácia účinným nástrojom pri popise chovania, t. j. analýze a syntéze, diskrétnych lineárnych dynamických systémov [7].

Podľa [8] Z-transformácia vychádza z Laplaceovej transformácie postupnosti časovo posunutých Diracových impulzov. Diskrétny Diracov impulz je definovaný vzťahom

$$\delta(kT) = \begin{cases} 1 & \text{pre } k = 0 \\ 0 & \text{pre } k \neq 0. \end{cases} \tag{29}$$

Ich jednotková plocha je modulovaná hodnotami funkcie $f(kT)$. Pri vzorkovaní (diskretizácií) spojitej funkcie $f(t)$ v okamžikoch $t = kT$ pre $k \geq 0$ vzniká postupnosť čísel

$$\{f_k\} = \{f_k\}_{k=0}^{\infty} = \{f_0, f_1, f_2, \dots\}$$

alebo Diracových impulzov v tvare rady

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\delta(t - kT),$$

kde T je perióda vzorkovania, $\delta(t - kT)$ je postupnosť časovo posunutých Diracových impulzov. Laplaceov obraz tejto rady je komplexná funkcia

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-ksT},$$

zavedením novej komplexnej premennej $z = e^{-sT}$, kde s je premenná v Laplaceovom obraze, získame definičný vzťah pre diskrétny obraz Z-transformácie

$$F(z) = Z\{f(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}. \tag{30}$$

Obrazom postupnosti $\{f_k\}$ v Z-transformácii nazývame funkciu komplexnej premennej z

$$F(z) = Z\{f_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}.$$

Diskrétne hodnoty funkcie $f(kT)$ alebo postupnosti $\{f_k\}$ nazývame originálom, funkcia $F(z)$ je obrazom a Z je symbol priamej Z-transformácie [8].

Aby diskrétna časová funkcia $f(kT)$ bola originálom, musí byť podľa [7]:

a) nulová pre záporné k, t. j.

$$f(kT) = \begin{cases} f(kT) & \text{pre } k = 0,1,2,\dots \\ 0 & \text{pre } k = -1,-2,\dots \end{cases}$$

Môžeme splniť vždy vynásobením danej diskrétnej časovej funkcie diskrétnym Heavisideovým jednotkovým skokom $f(kT)\eta(kT)$, ktorý je definovaný

$$\eta(kT) = \begin{cases} 1 & \text{pre } k = 0,1,2,\dots \\ 0 & \text{pre } k = -1,-2,\dots \end{cases} \tag{31}$$

b) exponenciálneho rádu, t. j. musí vyhovovať nerovnosti

$$|f(kT)| \leq \mathrm{M}e^{a_0 kT},$$

$$\mathrm{M} > 0, a_0 \in (-\infty,\infty), k = 0,1,2,3 \dots$$

6.1 Spätná Z-transformácia

Spätnou Z-transformáciou určujeme originál, t. j. diskrétnu časovú funkciu $f(kT)$ k danému obrazu $F(z)$. Je definovaná

$$f(kT) = Z^{-1}\{F(z)\} = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\mathrm{C}} F(z) z^{k-1}\,dz, \tag{32}$$

Z^{-1} je operátor spätnej Z-transformácie, z je komplexná premenná, $F(z)$ je diskrétny obraz, kT je diskrétny čas, k je krok, T je perióda vzorkovania, C je kružnica o polomere r, vnútri nej ležia všetky singulárne body funkcie $F(z)$[7].

Podľa [7], [9] originál z obrazu môžeme jednoducho určiť pomocou slovníka Z-transformácie, ktorý je uvedený v tabuľke (Tab. 1.). Existujú aj ďalšie spôsoby ako napr.

a) definičný vzorec pre spätnú Z-transformáciu
b) rozklad obrazu na parciálne zlomky
c) rozvoj obrazu v mocninovú radu.

6.1.1 Definičný vzorec pre spätnú Z-transformáciu

Pri spätnej Z-transformácií môžeme využiť definíciu (32), kde integrál počítame ako súčet reziduí vo všetkých singulárnych bodoch obrazu $F(z)$, podľa [7], [9] t. j.

$$f(kT) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_i}[F(z)z^{k-1}], k = 0,1,2,\ldots,$$

kde $z = z_i$ sú póly $F(z)$ a $\operatorname{res}[F(z)z^{k-1}]$ sú reziduá pre jednotlivé póly z_i.

Pre jednonásobné póly platí

$$\operatorname*{res}_{z=z_i}[F(z)z^{k-1}] = \lim_{z\to z_i}[(z - z_i)F(z)z^{k-1}].$$

Pre n násobné póly platí

$$\operatorname*{res}_{z=z_i}[F(z)z^{k-1}] = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_i}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z - z_i)F(z)z^{k-1}].$$

6.1.2 Rozklad obrazu na parciálne zlomky

Ak má obraz $F(z)$ tvar racionálnej lomenej funkcie

$$F(z) = \frac{Q(z)}{P(z)} = \frac{q_m z^m + \cdots + q_1 z + q_0}{p_n z^n + \cdots + p_1 z + p_0}, n > m,$$

potom obraz rozložíme na parciálne zlomky a ich originály nájdeme v slovníku Z-transformácie (Tab. 1.). Rozklad na parciálne zlomky je možné previesť napr. pomocou metódy neurčitých koeficientov, porovnaním koeficientov u príslušných mocnín.

Pre nenásobné póly platí

$$F(z) = \frac{q_m z^m + \cdots + q_1 z + q_0}{p_n(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n)},$$

pre násobné póly platí

$$F(z) = \frac{q_m z^m + \cdots + q_1 z + q_0}{p_n(z - z_1)^k(z - z_2)\ldots(z - z_{n-k+1})},$$

kde $z_1, \ldots, z_{n-k+1}, \ldots, z_n$ sú póly funkcie $F(z)$, t. j. korene polynómu menovateľa $F(z)$, a k je násobnosť.

Rozklad nenásobných pólov bude

$$F(z) = \frac{A_1}{z - z_1} + \frac{A_2}{z - z_2} + \cdots + \frac{A_n}{z - z_n},$$

kde $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sú hodnoty, ktoré je potrebné určiť.

Rozklad pre násobné póly, ak z_1 je k násobným pólom, bude

$$F(z) = \frac{B_1}{z - z_1} + \frac{B_2}{(z - z_1)^2} + \cdots + \frac{B_k}{(z - z_1)^k} + \frac{A_1}{z - z_2} + \cdots + \frac{A_{n-k}}{z - z_{n-k+1}},$$

kde $A_1, \ldots, A_{n-k}, B_1, \ldots B_k$ sú určované hodnoty.

Pri vypracovávaní rozkladu obrazu na parciálne zlomky boli použité zdroje [7], [9].

6.1.3 Rozvoj obrazu v mocninovú radu

Ak má obraz $F(z)$ tvar racionálnej lomenej funkcie v kladných alebo záporných mocninách premennej z, potom diskrétne úseky $f(kT)$ získame delením čitateľa menovateľom (nekonečným delením). Delíme pritom najvyššiu mocninu najvyššou mocninou.Získame tak mocninovú radu v tvare

$$F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \cdots. \tag{33}$$

Určovanie originálu rozvojom obrazu v mocninovú radu je výhodné v prípade, ak nás zaujíma len niekoľko počiatočných hodnôt. Naopak nevýhodou je, že výsledok nemá uzavretý tvar [7].

6.2 Základné vlastnosti Z-transformácie

Veta 6.2.1 (o linearite) Nech $Z\{f_1(kT)\} = F_1(z), Z\{f_2(kT)\} = F_2(z)$ a a_1, a_2 sú komplexné konštanty, potom platí

$$Z\{a_1 f_1(kT) \pm a_2 f_2(kT)\} = a_1 F_1(z) \pm a_2 F_2(z).$$

Veta 6.2.2 (o posunutí originálu v časovej oblasti) Nech $Z\{f(kT)\} = F(z)$, $y(kT) = 0$ pre $k < 0$, potom pre posunutie vpravo (oneskorenie) platí

$$Z\{f[(k-m)T]\} = z^{-m}F(z), m \geq 0.$$

Pre posunutie vľavo (predstih) platí

$$Z\{f[(k+m)T]\} = z^{m}[F(z) - \sum_{i=0}^{m-1} f(iT)z^{-i}], m \geq 0.$$

Veta 6.2.3 (o počiatočnej a koncovej hodnote) Nech $Z\{f(kT)\} = F(z)$. Potom pre počiatočnú hodnotu platí

$$f(0) = \lim_{k\to 0} f(kT) = \lim_{z\to\infty} \frac{z-1}{z} F(z) = \lim_{z\to\infty} F(z).$$

Pre koncovú hodnotu platí

$$f(\infty) = \lim_{k\to\infty} f(kT) = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z} F(z) = \lim_{z\to 1} (z-1)F(z).$$

Veta 6.2.4 (o derivácií – diferencii v časovej oblasti) Nech $Z\{f(kT)\} = F(z)$ a nech dopredná diferencia 1. rádu je definovaná rovnosťou

$$Z\{\Delta f(kT)\} = Z\{f[(k+1)T] - f(kT)\} = z\big(F(z) - f(0)\big) - F(z) =$$
$$= (z-1)F(z) - zF(z).$$

Pre doprednú diferenciu rádu n platí

$$Z\{\Delta^n f(kT)\} = (z-1)^n F(z) - z \sum_{i=0}^{n-1} (z-1)^{n-i-1} \Delta^i f(0).$$

Nech $Z\{f(kT)\} = F(z)$ a nech spätná diferencia 1. rádu je definovaná rovnosťou

$$Z\{\nabla f(kT)\} = Z\{f(kT) - f[(k-1)T]\} = F(z) - z^{-1}F(z) = \frac{z-1}{z} F(z).$$

Pre spätnú diferenciu rádu n platí

$$Z\{\nabla^n f(kT)\} = \left(\frac{z-1}{z}\right)^n F(z).$$

Veta 6.2.5 (o integrovaní – sumácií v časovej oblasti)
Pre doprednú diferenciu platí

$$Z\left\{\sum_{i=0}^{k-1} f(iT)\right\} = \frac{1}{z-1} F(z).$$

Pre spätnú diferenciu platí

$$Z\left\{\sum_{i=0}^{k} f(iT)\right\} = \frac{z}{z-1} F(z)$$

Pri vypracovaní základných vlastností Z-transformácie boli použité zdroje [8], [9].

6.3 Riešenie lineárnych diferenčných rovníc

Základom matematického popisu diskrétnych systémov sú diferenčné rovnice. Pri zostavení diferenčných rovníc môžeme podľa [10] použiť dva spôsoby definovania diferencií:

a) Doprednú diferenciu 1. rádu

$$\Delta f(kT) = f[(k+1)T] - f(kT),$$

pre n-tý rád platí

$$\Delta^n f(kT) = \Delta^{n-1} f[(k+1)T] - \Delta^{n-1} f(kT)\ ;\ \ n = 1,2,\dots.$$

b) Spätnú diferenciu 1. rádu

$$\nabla f(kT) = f(kT) - f[(k-1)T],$$

pre n-tý rád platí

$$\nabla f(kT) = \nabla^{n-1} f(kT) - \nabla^{n-1} f[(k-1)T]\ ;\ \ n = 1,2,\dots.$$

Lineárnu diferenčnú rovnicu diskrétneho systému s konštantnými koeficientmi a s pravou stranou môžeme podľa [7] napísať v dvoch tvaroch. Využijeme doprednú diferenciu:

a) Diferenčný tvar.

$$\alpha_n \Delta^n y(kT) + \cdots + \alpha_1 \Delta y(kT) + \alpha_0 y(kT) = \beta_m \Delta^m u(kT) + \cdots + \beta_1 \Delta u(kT) + \beta_0 u(kT).$$

b) Rekurentný tvar.

Z dopredných diferencií

$$\begin{aligned} a_n y[(k+n)T] + \cdots + a_1 y[(k+1)T] + a_0 y(kT) = \\ = b_m u[(k+m)T] + \cdots + b_1 u[(k+1)T] + b_0 u(kT), \end{aligned} \tag{34}$$

pre počiatočné podmienky, ktoré sú rovné funkčným hodnotám

$$y(0), y(T), \dots, y[(n-1)T]; u(0), u(T), \dots, u[(m-1)T] \text{ pre } m \le n.$$

Oba tvary sú ekvivalentné, $u(kT)$ je známa vstupná diskrétna funkcia systému a $y(kT)$ je hľadaná výstupná diskrétna funkcia systému, $\alpha_n, \dots, \alpha_0; \beta_n, \dots, \beta_0$ a $a_n, \dots, a_0; b_n, \dots, b_0$ sú konštanty.

Použitím Z-transformácie sa lineárna diferenčná rovnica spolu so zadanými počiatočnými podmienkami transformuje z časovej oblasti (priestoru originálu) do oblasti komplexnej premennej (priestoru obrazu), kde jej odpovedá algebraická rovnica n-tého stupňa. Jej riešením získame obraz riešenia a spätnou transformáciou obrazu získame originál riešenia, t. j. výslednú diskrétnu časovú funkciu [7].

Lineárnu diferenčnú rovnicu môžeme riešiť aj bez použitia Z-transformácie, a to numericky (rekurentný spôsob). Tvar diferenčnej rovnice (34) upravíme tak, aby na ľavej strane bol originál výstupnej diskrétnej funkcie s najväčším posunutím. Použitie rekurentného tvaru je výhodné, umožňuje priamy výpočet hodnôt výstupnej diskrétnej funkcie $y(kT)$ v okamžikoch $0, T, 2T, \dots$. Riešenie nemá uzavretý tvar [7].

6.4 Diskrétne lineárne dynamické systémy

Dynamické vlastnosti systémov je možné podľa [7] popísať dvoma spôsobmi:

a) Vonkajší popis systému (vyjadruje vzťah medzi diskrétnou výstupnou veličinou $y(kT)$ a diskrétnou vstupnou veličinou $u(kT)$ systému).
b) Vnútorný popis systému (zahrňuje okrem uvedených veličín aj stavové veličiny).

Medzi vonkajší popis systému patrí:

a) Diferenčná rovnica.
b) Z-prenos.
c) Impulzná funkcia a charakteristika.
d) Prechodová funkcia a charakteristika.
e) Frekvenčný prenos a frekvenčná charakteristika.

6.4.1 Diferenčná rovnica a Z-prenos

Pre popis vlastností dynamického systému môžeme použiť napr. diferenčnú rovnicu v rekurentnom tvare (34). Aby diferenčná rovnica (34) popisovala reálny dynamický systém, musí byť splnená tzv. podmienka fyzikálnej realizovateľnosti $m \leq n$ [7].

Z-prenos $G(z)$ je definovaný ako pomer Z-obrazov výstupnej veličiny k Z-obrazom vstupnej veličiny pri nulových počiatočných podmienkach

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}.$$

Po Z-transformácii diferenčnej rovnice (34) spolu s nulovými počiatočnými podmienkami dostaneme algebraickú rovnicu tvaru

$$(a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0)Y(z) = (b_m z^m + \cdots + b_1 z + b_0)U(z),$$

odtiaľ je Z-prenos $G(z)$ rovnice (33) daný

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m z^m + \cdots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0}, \tag{35}$$

podľa [7].

6.4.2 Impulzná funkcia a charakteristika

Diskrétna impulzná funkcia je odozva systému na vstupný signál $u(kT)$ v tvare diskrétneho jednotkového (Diracovho) impulzu $\delta(kT)$ pri nulových počiatočných podmienkach [9]. Diskrétny Diracov impulz je definovaný vzťahom (29).

Z-obraz jednotkového impulzu, t. j. vstupného signálu $u(kT)$, je $U(z) = Z\{\delta(kT)\} = 1$, potom Z-obraz výstupnej funkcie $y(kT)$, resp. $i(kT)$, teda $I(z)$ je rovný

$$Y(z) = G(z)U(z) = G(z) \cdot 1 \equiv I(z) \Rightarrow i(kT) = Z^{-1}\{I(z)\},$$

kde $i(kT)$ je impulzná funkcia [9]. Grafom impulznej funkcie je impulzná charakteristika [10].

6.4.3 Prechodová funkcia a charakteristika

Diskrétna prechodová funkcia je odozva systému na vstupný signál $u(kT)$ v tvare diskrétneho jednotkového (Heavisideovho) skoku $\eta(kT)$ pri nulových počiatočných podmienkach [9]. Diskrétny Heavisideov skok je definovaný vzťahom (31).

Z-obraz jednotkového skoku, t. j. vstupného signálu $u(kT)$, je $U(z) = Z\{\eta(kT)\} = \frac{z}{z-1}$, potom Z-obraz výstupnej funkcie $y(kT)$, resp. $h(kT)$, teda $H(z)$ je rovný

$$Y(z) = G(z)U(z) = G(z)\frac{z}{z-1} \equiv H(z) \Rightarrow h(kT) = Z^{-1}\{H(z)\},$$

kde $h(kT)$ je prechodová funkcia [9]. Grafom prechodovej funkcie je prechodová charakteristika [10].

Medzi obrazom diskrétnej prechodovej funkcie $H(z)$ a obrazom diskrétnej impulznej funkcie $I(z)$ platia vzťahy

$$H(z) = \frac{z}{z-1} I(z),$$

$$I(z) = \frac{z-1}{z} H(z),$$

z ktorých vyplývajú vzťahy medzi diskrétnou prechodovou funkciou $h(kT)$ a diskrétnou impulznou funkciou $i(kT)$ [7], a to

$$h(kT) = \sum_{j=0}^{k} i(jT),$$

$$i(kT) = h(kT) - h[(k-1)T].$$

6.4.4 Frekvenčný prenos a frekvenčná charakteristika

Uvažujme lineárny diskrétny systém, jeho Z-prenos má tvar (35). Frekvenčný prenos diskrétneho systému je definovaný vzťahom

$$G(j\omega T) = \frac{Y(j\omega T)}{U(j\omega T)},$$

kde $Y(j\omega T)$ je Fourierov obraz výstupného signálu, $U(j\omega T)$ je Fourierov obraz vstupného signálu. Frekvenčný prenos získame zo Z-prenosu $G(z)$

$$G(j\omega T) = G(z)|_{z=e^{j\omega T}}. \qquad (36)$$

Podľa [10] jedná sa o periodickú funkciu frekvencie ωT s periódou 2π

$$G(j\omega T) = G[(j\omega T + 2k\pi)].$$

Frekvenčná charakteristika diskrétneho systému je grafické znázornenie frekvenčného prenosu $G(j\omega T)$ v komplexnej rovine (Nyqiustova krivka) v závislosti na frekvencii $\omega T \in < 0{,}2\pi >$. Frekvenčná charakteristika je súmerná podľa reálnej osi [10].

Pre zostrojenie frekvenčnej charakteristiky v komplexnej rovine sa frekvenčný prenos podľa [9] upraví na zložkový tvar

$$G(j\omega T) = P(\omega T) + jQ(\omega T) = ReG(j\omega T) + jImG(j\omega T). \qquad (37)$$

7 SLOVNÍK Z-TRANSFORMÁCIE

Tab. 1. Základný slovník [7].

č.	Originál $f(kT)$	Obraz $F(z)$
1.	$\delta(kT)$	1
2.	$\delta[(k-m)T]$	$\frac{1}{z^m}$
3.	$\eta(kT)$	$\frac{z}{z-1}$
4.	$\eta[(k-m)T]$	$\frac{1}{(z-1)z^{m-1}}$
5.	kT	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
6.	$\frac{1}{2}(kT)^2$	$\frac{T^2}{2}\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
7.	$(\pm a)^k\ ;\ a \neq 0$	$\frac{z}{z \pm a}$
8.	$\binom{k-1}{n-1}(\pm a)^{k-n}\eta[(k-n)T], a \neq 0,$ $\binom{k-1}{n-1} = 0$ pre $k = 0, a = 1$	$\frac{z}{(z \pm a)^n}$
9.	$e^{\pm akT}$	$\frac{z}{z-c}\ ;\ c = e^{\pm akT}$
10.	kTe^{-akT}	$\frac{z}{(z-c)^2}\ ;\ c = e^{-aT}$
11.	$\frac{1}{2}(kT)^2 e^{-akT}$	$\frac{T^2}{2}\frac{cz(z+c)}{(z-c)^3};\ c = e^{-aT}$
12.	$\sin(\omega kT)$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2 - 2z\cos\omega T + 1}$
13.	$\cos(\omega kT)$	$\frac{z^2 - \mathrm{z}\cos\omega T}{z^2 - 2z\cos\omega T + 1}$

II. PRAKTICKÁ ČASŤ

8 RIEŠENÉ PRÍKLADY DIFERENCIA

Príklad 8.1 Nájdime v bode $n = 0$ štvrtú diferenciu $\Delta^4 y_n$, ak $y_n = e^{an}$.

Podľa vzorca (1) získavame

$$\Delta^4 y_n = \binom{4}{0} y_{n+4} - \binom{4}{1} y_{n+4-1} + \binom{4}{2} y_{n+4-2} - \binom{4}{3} y_{n+4-3} + \binom{4}{4} y_{n+4-4} =$$
$$= y_{n+4} - 4y_{n+3} + 6y_{n+2} - 4y_{n+1} + y_n.$$

Nahradíme $y_n = e^{an}$ a dostávame

$$\Delta^4 y_n = e^{a(n+4)} - 4e^{a(n+3)} + 6e^{a(n+2)} - 4e^{a(n+1)} + e^{an} =$$
$$= e^{an}(e^{4a} - 4e^{3a} + 6e^{2a} - 4e^{a} + 1) =$$
$$= e^{an}(e^{a} - 1)^4.$$

A pre $n = 0$

$$\Delta^4 y_0 = (e^{a} - 1)^4.$$

Príklad 8.2 Pomocou Vety 2.2.1(d) a Vety 2.2.2(b, c) určme diferenciu $\Delta n 3^n$.

$$\Delta n 3^n = (3^{n+1})\Delta n + n\Delta 3^n = 3^{n+1}\big((n+1) - n\big) + n(3-1)3^n =$$
$$= 3^{n+1} + 2n3^n = 3^n(3 + 2n).$$

Príklad 8.3 Využitím základných vlastností diferenčného počtu vyrátajme $\Delta \frac{1}{\sin \pi n}$.

Pri riešení využijeme Vetu 2.2.1(e) ,Vetu 2.2.2(a, d) a základné goniometrické vzorce

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \tag{38}$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y. \tag{39}$$

Odtiaľ

$$\Delta \frac{1}{\sin \pi n} = \frac{(\sin \pi n)(\Delta 1) - (1)(\Delta \sin \pi n)}{(\sin \pi n)\,(\sin \pi(n+1))} = \frac{-2 \sin \frac{\pi}{2} \cos \pi(n + \frac{1}{2})}{(\sin \pi n)\,(\sin \pi(n+1))} =$$
$$= \frac{-2(\cos \pi n \cos \frac{\pi}{2} - \sin \pi n \sin \frac{\pi}{2})}{\sin \pi n(\sin \pi n \cos \pi + \cos \pi n \sin \pi)} = \frac{-2(-\sin \pi n)}{\sin \pi n(-\sin \pi n)} = -\frac{2}{\sin \pi n}.$$

Príklad 8.4 Nájdime diferenciu polynómu $\Delta(n^2 + 2n - 1)$

Podľa Vety 2.2.1(b) pre diferenciu súčtu platí

$$\Delta n^2 + \Delta 2n - \Delta 1.$$

Podľa Vety 2.2.3(a) je zrejmé, že zadaný polynóm je druhého stupňa $P_2(n)$, hľadaný polynóm musí byť o stupeň nižší, čiže $Q_1(n)$. Určíme si najprv diferencie jednotlivo

$$\Delta n^2 = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1,$$

$$\Delta 2n = 2\Delta n = 2\big((n+1) - n\big) = 2,$$

$$\Delta 1 = 0.$$

Po dosadení

$$\Delta(n^2 + 2n - 1) = \Delta n^2 + \Delta 2n - \Delta 1 = 2n + 1 + 2 - 0 = 2n + 3.$$

9 RIEŠENÉ PRÍKLADY SUMÁCIA

9.1 Neurčitá sumácia

Príklad 9.1.1 Riešme $\sum 3^n$.

Zo základných vlastností pre diferenčný počet vieme, že $\Delta 3^n = (3-1)3^n$. Z rovnice (2) vyplýva $\Delta \frac{3^n}{2} = 3^n$, kde $\frac{3^n}{2}$ je neurčitou sumáciou funkcie 3^n.

Píšeme

$$\sum 3^n = \frac{3^n}{2} + C.$$

Opačne platí

$$\Delta\left(\frac{3^n}{2} + C\right) = \Delta\frac{3^n}{2} + \Delta C = 3^n + 0 = 3^n.$$

Príklad 9.1.2 Riešme $\sum n7^n$.

Využijeme Vetu 3.1.1(c) a Vetu 3.1.2(c). Zvolíme si $y_n = n$ a $\Delta z_n = 7^n$. Následne je potrebné určiť $z_n = \sum 7^n = \frac{7^n}{6}$. Dosadením dostávame

$$\sum n7^n = n\frac{7^n}{6} - \sum \frac{7^{n+1}}{6}\Delta n = \frac{n7^n}{6} - \frac{7}{6}\sum 7^n = \frac{n7^n}{6} - \frac{7}{6^2}7^n + C.$$

Príklad 9.1.3 Určíme $\sum\binom{n}{8}\binom{n}{2}$ využitím Vety 3.1.1(c),Vety 3.1.2(f) a Vety 2.2.2(g).

Nech $y_n = \binom{n}{2} \Rightarrow \Delta\binom{n}{2} = \binom{n}{1}$ a $\Delta z_n = \binom{n}{8}$, potom je zrejmé, že $z_n = \binom{n}{9}$. Použijeme metódu per partes

$$\sum\binom{n}{8}\binom{n}{2} = \binom{n}{2}\binom{n}{8} - \sum\binom{n+1}{9}\binom{n}{1}.$$

Znovu zavedieme per partes $y_n = \binom{n}{1} \Rightarrow \Delta\binom{n}{1} = \binom{n}{0} = 1, \Delta z_n = \binom{n+1}{9} \Rightarrow z_n = \binom{n+1}{10}$.

$$\sum\binom{n}{8}\binom{n}{2} = \binom{n}{2}\binom{n}{8} - \left[\binom{n+1}{9}\binom{n}{1} - \sum\binom{n+1}{10}\right] =$$
$$= \binom{n}{2}\binom{n}{8} - \binom{n+1}{9}n + \binom{n+1}{11} + C.$$

Príklad 9.1.4 Nájdime všetky funkcie Y_n, pre ktoré platí $\Delta Y_n = 3n + 4$.

Podľa Definície 3.1 vieme, že platí rovnica (2), hľadáme $Y_n = \sum(4n + 6)$.

Z Vety 3.1.3(a) vieme, že budeme hľadať polynóm o jeden stupeň vyšší, takže

$$\sum(4n + 6) = an^2 + bn + c.$$

Určíme neznáme koeficienty

$$\Delta(an^2 + bn + c) = [a(n + 1)^2 + b(n + 1) + c] - [an^2 + bn + c] = 2an + a + b$$

$$2an + a + b = 4n + 6.$$

Porovnáme koeficienty u príslušných mocnín

$$2a = 4$$

$$a + b = 6.$$

Odtiaľ dostávame

$$a = 2\,, b = 4.$$

Z čoho vyplýva, že hľadaná funkcia je

$$Y_n = 2n^2 + 4n + C.$$

9.2 Určitá sumácia

Príklad 9.2.1 Vyrátajme určitú sumáciu $\sum_{k=1}^{n-1} 3^k$ použitím rovnice (3) a Vety 3.1.2(c).

$$\sum_{k=1}^{n-1} 3^k = \sum 3^n + C = \frac{3^n}{2} + C \quad (n = 2,3,\dots).$$

Určíme C , pre $n = 2$

$$3^k = \frac{3^n}{2} + C$$

$$C = 3 - \frac{3^2}{2} = -\frac{3}{2}.$$

Riešenie pre $n = 2$

$$\sum_{k=1}^{n-1} 3^k = \frac{3^2}{2} - \frac{3}{2} = 3.$$

Príklad 9.2.2 Vyriešme $\sum_{k=1}^{n-1} 3^k$ pre $n = 2$ použitím rovnice (4).

$$\sum_{k=1}^{n-1} 3^k = \left[\frac{3^k}{2}\right]_1^n = \left[\frac{3^n}{2}\right] - \left[\frac{3^1}{2}\right] = \frac{3^2}{2} - \frac{3^1}{2} = 3.$$

Z Príkladu 9.2.1 a z Príkladu 9.2.2 je vidieť, že oboma spôsobmi sme sa dopracovali k rovnakému riešeniu.

Príklad 9.2.3 Riešme $\sum_{k=1}^{n-1} k4^k$ použitím rovnice (5).

Nech $a_k = k$ a $\Delta b_k = 4^k$ potom

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k \Delta b_k = \left[k\frac{4^k}{3}\right]_1^n - \sum_{k=1}^{n-1} (\Delta k)\frac{4^{k+1}}{3}.$$

Vyriešme najprv $[ka^k]_1^n$,

$$\left[k\frac{4^k}{3}\right]_1^n = \frac{n4^n}{3} - \frac{4}{3} = \frac{n4^n - 4}{3}.$$

Pre $\sum_{k=1}^{n-1}(\Delta k)a^{k+1}$ vieme, že $\Delta k = 1$ a teda

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{4^{k+1}}{3} = \frac{4}{3}\sum_{k=1}^{n-1} 4^k = \frac{4}{3}\left[\frac{4^k}{3}\right]_1^n = \frac{4}{3}\left(\frac{4^n}{3} - \frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{4^n - 4}{3}\right) = \frac{4^{n+1} - 4^2}{3^2}.$$

Po spätnom dosadení čiastkových výpočtov dostávame riešenie

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k \Delta b_k = [ka^k]_1^n - \sum_{k=1}^{n-1} (\Delta k)a^{k+1} = \frac{n4^n - 4}{3} - \frac{4^{n+1} - 4^2}{3^2} = \frac{4^n(3n-4) + 4}{3^2}.$$

10 RIEŠENÉ PRÍKLADY LDR PRVÉHO RÁDU

Príklad 10.1 Riešme rovnicu $\Delta y_n = \sin 5n$.

Hľadáme také y_n, pre ktoré platí

$$y_n = \sum \sin 5n\,.$$

Podľa Vety 3.1.2(d) platí

$$\sum \sin 5n = -\frac{\cos 5\left(n - \frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{5}{2}} + C.$$

Všeobecné riešenie diferenčnej rovnice je tvaru

$$y_n = -\frac{\cos 5\left(n - \frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{5}{2}} + C.$$

10.1 LDR s konštantnými koeficientmi

Na nasledujúcich príkladoch si ukážeme dva spôsoby riešenia diferenčných rovníc prvého rádu s konštantnými koeficientmi:

a) Budeme postupovať podľa odstavca 4.1.1 LDR s konštantnými koeficientmi.
b) Podľa odstavca 4.1.2 LDR s nekonštantnými koeficientmi.

V oboch prípadoch dostaneme rovnaké riešenia.

Príklad 10.1.1 Určme riešenie rovnice $y_{n+1} - 2y_n = 0$ s počiatočnou podmienkou $y_0 = 4$.

a) Riešenie hľadáme v tvare $y_n = \lambda^n y_0$.
   Vyriešme charakteristickú rovnicu $\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$.

   Riešením je

$$y_n = 2^n 4.$$

b) Vyriešme využitím Vety 4.1.2.1. Vychádzajme z tvaru

$$u_{n+1} = 2u_n,$$

   potom výsledkom je

$$u_n = u_0 \prod_{k=0}^{n-1} 2 = u_0\, 2^n = 4.2^n.$$

Príklad 10.1.2 Určme riešenie rovnice $3y_{n+1} - 5y_n = 0$.

a) Zostavíme charakteristickú rovnicu

$$3\lambda - 5 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{5}{3}.$$

Všeobecné riešenie homogénnej rovnice je

$$y_n = C\left(\frac{5}{3}\right)^n.$$

b) Vyriešme využitím Vety 4.1.2.1. Vychádzajme z tvaru

$$u_{n+1} = \frac{5}{3}u_n,$$

potom riešením je

$$u_n = u_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{5}{3} = u_0 \left(\frac{5}{3}\right)^n = C\left(\frac{5}{3}\right)^n.$$

Príklad 10.1.3 Nájdime všeobecné riešenie rovnice $y_{n+1} - 4y_n = 2^n$.

a) Rovnicu zhomogenizujeme

$$y_{n+1} - 4y_n = 0$$

a určíme jej charakteristickú rovnicu

$$\lambda - 4 = 0 \ \Rightarrow \lambda = 4.$$

Všeobecné riešenie homogénnej rovnice má tvar

$$y_h = C4^n.$$

Metódou variácie konštánt nájdeme riešenie nehomogénnej rovnice, ktoré bude v tvare

$$y_n = C(n)4^n.$$

Určíme y_{n+1}

$$y_{n+1} = C(n+1)4^{n+1} = C(n)4^{n+1} + \Delta C(n)4^{n+1}.$$

Dosadením y_n, y_{n+1} do zadanej nehomogénnej rovnice

$$C(n)4^{n+1} + \Delta C(n)4^{n+1} - 4C(n)4^n = 2^n$$

získame

$$\Delta C(n) = \frac{2^n}{4^{n+1}} \Rightarrow C(n) = \sum \frac{2^n}{4^{n+1}}.$$

Určíme, čomu sa rovná $\sum \frac{2^n}{4^{n+1}}$. Ak vieme, že $\Delta \frac{2^n}{4^{n+1}} = -\frac{2^n}{4^{n+1} \cdot 2}$, potom $\Delta - \frac{2^n \cdot 2}{4^{n+1}} = \frac{2^n}{4^{n+1}}$, a je zrejmé

$$C(n) = \sum \frac{2^n}{4^{n+1}} = -\frac{2^n \cdot 2}{4^{n+1}} + C.$$

Všeobecné riešenie nehomogénnej rovnice bude

$$y_n = \left(-\frac{2^n \cdot 2}{4^{n+1}} + C\right) 4^n = -\frac{2^n \cdot 2}{4} + C4^n.$$

b) Vyriešme využitím Vety 4.1.2.1. Príslušná homogénna rovnica je v tvare

$$u_{n+1} - 4u_n = 0,$$
$$u_{n+1} = 4u_n.$$

Nech $u_0 = 1$, potom riešenie tejto homogénnej rovnice je

$$u_n = u_0 \prod_{k=1}^{n-1} 4 = u_1 4^n = 4^n.$$

Riešenie nehomogénnej rovnice hľadáme v tvare

$$y_n = u_n \left[\sum \frac{f(n)}{a_1(n)u_{n+1}} + C\right].$$

Teda

$$y_n = 4^n \left[\sum \frac{2^n}{4^{n+1}} + C\right].$$

Následne

$$\sum \frac{2^n}{4^{n+1}} = -\frac{2^n \cdot 2}{4^{n+1}} + C.$$

Spätne dosadíme a všeobecné riešenie je

$$y_n = 4^n \left[-\frac{2^n \cdot 2}{4^{n+1}} + C\right] = -\frac{2^n \cdot 2}{4} + 4^n C.$$

10.2 LDR s nekonštantnými koeficientmi

Pri riešení nasledujúcich príkladov využijeme znalosť Vety 4.1.2.1.

Príklad 10.2.1 Nájdime riešenie rovnice $u_{n+1} - nu_n = 0$, ak $u_1 = 2$ a $n \in \mathbb{N}$.

Prepíšme najprv zadanú rovnicu na tvar

$$u_{n+1} = nu_n.$$

Riešenie homogénnej rovnice je dané

$$u_n = u_1 \prod_{k=1}^{n-1} k = u_1\,(n-1)! = 2(n-1)!.$$

Príklad 10.2.2 Nájdime všeobecné riešenie rovnice $6u_{n+1} - (n+2)u_n = 0$.

Prepíšeme na tvar

$$u_{n+1} = \frac{(n+2)}{6} u_n.$$

Všeobecné riešenie homogénnej rovnice je

$$u_n = u_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(k+2)}{6} = u_0 \frac{(n+1)n!}{6^n} = C\frac{(n+1)n!}{6^n}.$$

Príklad 10.2.3 Riešme diferenčnú rovnicu $y_{n+1} - \frac{1}{n+1} y_n = \frac{1}{n!}$ pre $y_1 = 3$ a $n \in \mathbb{N}$.

Najprv vyriešime príslušnú homogénnu rovnicu

$$u_{n+1} - \frac{1}{n+1} u_n = 0,$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+1} u_n.$$

Nech $u_1 = 1$, potom riešenie tejto homogénnej rovnice je

$$u_n = u_1 \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{n!}.$$

Teraz budeme hľadať riešenie nehomogénnej rovnice v tvare

$$y_n = u_n \left[\sum \frac{f(n)}{a_1(n) u_{n+1}} + C \right].$$

Teda

$$y_n = \frac{1}{n!} \left[\sum \frac{(n+1)!}{n!} + C \right] = \frac{1}{n!} \left[\sum (n+1) + C \right].$$

Podľa Vety 3.1.3(a) určíme $\sum(n+1)$, kedy predpokladáme, že riešením je polynóm

$$\sum (n+1) = an^2 + bn + c,$$

odtiaľ vieme

$$n + 1 = \Delta(an^2 + bn + c) = 2an + a + b.$$

Porovnaním koeficientov u príslušných mocnín obdržíme $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$ a teda

$$\sum (n+1) = \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n + C.$$

Spätne dosadíme a všeobecné riešenie je

$$y_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n + C \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{n^2}{n!} + \frac{n}{n!} \right) + \frac{C}{n!} = \frac{1}{2} \frac{n+1}{(n-1)!} + \frac{C}{n!}.$$

Vychádzajúc z počiatočnej podmienky $y_1 = 3$ vyčíslime C

$$3 = y_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{0!}\right) + \frac{C}{1!} \Rightarrow C = 2.$$

Riešením diferenčnej rovnice je

$$y_n = \frac{1}{2}\frac{n+1}{(n-1)!} + \frac{2}{n!}.$$

Overme správnosť riešenia

$$y_{n+1} - \frac{1}{n+1}y_n = \frac{1}{2}\frac{n+2}{n!} + \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n+1}\frac{1}{2}\frac{n+1}{(n-1)!} - \frac{1}{n+1}\frac{2}{n!} =$$

$$= \frac{n+2}{2n!} - \frac{1}{2(n-1)!} = \frac{1}{n!}.$$

11 RIEŠENÉ PRÍKLADY LDR VYŠŠÍCH RÁDOV

11.1 Homogénne LDR s konštantnými koeficientmi

Príklad 11.1.1 Nájdime všeobecné riešenie rovnice $y_{n+3} - 8y_{n+2} - 4y_{n+1} + 32y_n = 0$ a overme nezávislosť riešení využitím Casoratiho determinantu.

Za prvé zostavíme charakteristickú rovnicu

$$\lambda^3 - 8\lambda^2 - 4\lambda + 32 = 0.$$

Upravíme

$$\lambda^2(\lambda - 8) - 4(\lambda - 8) = 0,$$

$$(\lambda - 8)(\lambda^2 - 4) = 0,$$

$$(\lambda - 8)(\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0.$$

Dostávame tri rôzne reálne korene $\lambda_1 = 8, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$. Fundamentálny systém tvorí trojica lineárne nezávislých riešení v tvare

$$y_1 = 8^n, y_2 = 2^n, y_3 = (-2)^n.$$

Overme, či sú skutočne nezávisle

$$K = \begin{vmatrix} 8^n & 2^n & (-2)^n \\ 8^{n+1} & 2^{n+1} & (-2)^{n+1} \\ 8^{n+2} & 2^{n+2} & (-2)^{n+2} \end{vmatrix} =$$

$$= 8^n 2^{n+1}(-2)^{n+2} + 8^{n+1}2^{n+2}(-2)^n + 8^{n+2}2^n(-2)^{n+1} -$$

$$-((-2)^n 2^{n+1} 8^{n+2} + (-2)^{n+1}2^{n+2}8^n + (-2)^{n+2}2^n 8^{n+1}) = -15(-1)^n 2^{5n+4} \neq 0.$$

Výsledný determinant $K \neq 0$ pre všetky n a platí, že riešenia sú lineárne nezávislé.

Všeobecné riešenie má tvar

$$y = C_1 8^n + C_2 2^n + C_3(-2)^n.$$

Príklad 11.1.2 Nájdime všeobecné riešenie rovnice $y_{n+2} - 6y_{n+1} + 9y_n = 0$.

Charakteristická rovnica má tvar

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0.$$

Upravením dostávame

$$(\lambda - 3)^2 = 0.$$

Získame jeden dvojnásobný koreň $\lambda = 3$. Fundamentálny systém má tvar

$$y_1 = 3^n, y_2 = n3^n.$$

Všeobecné riešenie je v tvare

$$y = C_1 3^n + C_2 n 3^n.$$

Príklad 11.1.3 Nájdime všeobecné riešenie rovnice

$$y_{n+5} + y_{n+4} + y_{n+3} - y_{n+2} - y_{n+1} - y_n = 0.$$

Charakteristická rovnica má tvar

$$\lambda^5 + \lambda^4 + \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$$

Upravíme

$$\lambda^3(\lambda^2 + \lambda + 1) - (\lambda^2 + \lambda + 1) = 0,$$

$$(\lambda^2 + \lambda + 1)(\lambda^3 - 1) = 0,$$

$$(\lambda^2 + \lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1) = 0,$$

Charakteristická rovnica má jeden reálny koreň $\lambda_1 = 1$ a dvojnásobný komplexne združený koreň $\lambda_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} \pm j\sin\frac{2\pi}{3}$, kde $r = 1$.

Fundamentálny systém má tvar

$$y_1 = 1^n, y_2 = \cos\frac{2\pi}{3}, y_3 = n1^n\cos\frac{2\pi}{3}, y_4 = \sin\frac{2\pi}{3}, y_5 = n1^n\sin\frac{2\pi}{3}.$$

Všeobecné riešenie je v tvare

$$y = C_1 1^n + C_2\, 1^n\cos\frac{2\pi}{3} + C_3 n\, 1^n\cos\frac{2\pi}{3} + C_4 1^n\sin\frac{2\pi}{3} + C_5 n\, 1^n\sin\frac{2\pi}{3},$$

po vytknutí

$$y = C_1 1^n + (C_2 + C_3 n)\, 1^n\cos\frac{2\pi}{3} + (C_4 + C_5 n)1^n\sin\frac{2\pi}{3}.$$

11.2 Nehomogénne LDR s konštantnými koeficientmi

11.2.1 Metóda neurčitých koeficientov

Príklad 11.2.1.1 Nájdime všeobecné riešenie pre $y_{n+2} + 6y_{n+1} + 5y_n = 25n^2 - 2$.

Ako prvé nájdeme všeobecné riešenie homogénnej rovnice

$$y_{n+2} + 6y_{n+1} + 5y_n = 0.$$

Charakteristická rovnica je tvaru

$$\lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0.$$

Jej korene sú $\lambda_1 = -5, \lambda_2 = -1$ a fundamentálny systém má tvar

$$y_1 = (-5)^n, y_2 = (-1)^n.$$

Všeobecné riešenie homogénnej rovnice je v tvare

$$y_h = C_1(-5)^n + C_2(-1)^n.$$

Následne je potrebné nájsť partikulárne riešenie nehomogénnej rovnice. Keďže pravá strana obsahuje polynóm, jedná sa o Vetu 5.2.1.1 a teda riešenie hľadáme v tvare $y_p = n^k Q_m(n)$. Pretože korene charakteristickej rovnice $\lambda_1, \lambda_2 \neq 1$ je $k = 0$ a keďže $f(n) = 25n^2 - 2$ je polynóm druhého stupňa $P_2(n)$, bude aj hľadaný polynóm rovnakého stupňa $Q_2(n)$. Ide o polynóm s neurčitými koeficientmi, teda $Q_2(n) = An^2 + Bn + C$. Partikulárne riešenie hľadáme v tvare

$$y_p = y_n = n^0(An^2 + Bn + C) = An^2 + Bn + C.$$

Pre dosadenie do zadanej rovnice je potrebné poznať y_{n+1}, y_{n+2}

$$y_{n+1} = A(n+1)^2 + B(n+1) + C = An^2 + 2An + A + Bn + B + C,$$

$$y_{n+2} = A(n+2)^2 + B(n+2) + C = An^2 + 4An + 4A + Bn + 2B + C.$$

Dosadením

$$An^2 + 4An + 4A + Bn + 2B + C + 6(An^2 + 2An + A + Bn + B + C) +$$
$$+5(An^2 + Bn + C) = 25n^2 - 2.$$

Upravením

$$12An^2 + 16An + 10A + 12Bn + 8B + 12C = 25n^2 - 2.$$

Porovnaním koeficientov dostávame

$$n^2: \ 12A = 25 \Rightarrow A = \frac{25}{12},$$

$$n^1: \ 16A + 12B = 0 \Rightarrow B = -\frac{25}{9},$$

$$n^0: \ 10A + 8B + 12C = -2 \Rightarrow C = -\frac{11}{216}.$$

Partikulárne riešenie je

$$y_p = \frac{25}{12}n^2 - \frac{25}{9}n - \frac{11}{216}.$$

Všeobecné riešenie je v tvare

$$y = y_h + y_p = C_1(-5)^n + C_2(-1)^n + \frac{25}{12}n^2 - \frac{25}{9}n - \frac{11}{216}.$$

Príklad 11.2.1.2 Nájdime všeobecné riešenie rovnice $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 3y_n = 1$.

Homogénna rovnica má tvar

$$y_{n+2} - 4y_{n+1} + 3y_n = 0.$$

Charakteristická rovnica je v tvare

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0.$$

Korene sú $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$, fundamentálny systém má tvar

$$y_1 = 1^n, y_2 = 3^n.$$

Všeobecné riešenie homogénnej rovnice je v tvare

$$y_h = C_1 1^n + C_2 3^n.$$

Následne potrebujeme nájsť partikulárne riešenie nehomogénnej rovnice. Hľadáme, či sa niektorý z koreňov charakteristickej rovnici rovná 1 a keďže $\lambda_1 = 1$, k je jednonásobné a teda $k = 1$. Polynóm $f(n) = 1$ na pravej strane je nultého stupňa $P_0(n)$, a preto aj hľadaný polynóm $Q_0(n)$ bude rovnakého stupňa $Q_0(n) = A$.

Partikulárne riešenie hľadáme v tvare

$$y_p = y_n = n^1 A = An.$$

Zvyšné členy

$$y_{n+1} = A(n+1) = An + A,$$

$$y_{n+2} = A(n+2) = An + 2A.$$

Dosadením

$$An + 2A - 4(An + A) + 3An = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}.$$

Partikulárnym riešením je

$$y_p = -\frac{1}{2}n.$$

Všeobecné riešenie má tvar

$$y = y_h + y_p = C_1 1^n + C_2 3^n - \frac{1}{2}n.$$

Príklad 11.2.1.3 Nájdime všeobecné riešenie diferenčnej rovnice

$$y_{n+3} - 2y_{n+2} - y_{n+1} + 2y_n = n3^n.$$

Homogénna rovnica je daná

$$y_{n+3} - 2y_{n+2} - y_{n+1} + 2y_n = 0.$$

Charakteristická rovnica je v tvare

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0.$$

Korene sú $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$ a fundamentálny systém je

$$y_1 = 2^n, y_2 = 1^n, y_3 = (-1)^n.$$

Všeobecné riešenie homogénnej rovnice má tvar

$$y_h = C_1 2^n + C_2 1^n + C_3 (-1)^n.$$

Ďalej hľadáme partikulárne riešenie nehomogénnej rovnice. Pravá strana zadanej rovnice odpovedá Vete 5.2.1.2. Ani jeden z koreňov charakteristickej rovnice nie je rovný $a = 3$, preto $k = 0$. Polynóm na pravej strane je prvého stupňa $P_1(n)$. Hľadaný polynóm bude rovnakého stupňa $Q_1(n) = An + B$.

Partikulárne riešenie hľadáme v tvare

$$y_p = y_n = n^0(An + B)3^n = (An + B)3^n.$$

Zvyšné členy

$$y_{n+1} = (A(n+1) + B)3^{n+1} = (An + A + B)3^{n+1},$$
$$y_{n+2} = (A(n+2) + B)3^{n+2} = (An + 2A + B)3^{n+2},$$
$$y_{n+3} = (A(n+3) + B)3^{n+3} = (An + 3A + B)3^{n+3}.$$

Dosadením

$$(An + 3A + B)3^{n+3} - 2\big((An + 2A + B)3^{n+2}\big) - (An + A + B)3^{n+1} +$$
$$+2((An + B)3^n) = n3^n.$$

Po úprave a vykrátení 3^n máme

$$8An + 42A + 8B = n.$$

Porovnaním koeficientov dostávame

$$n^1:\ \ 8A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{8},$$

$$n^0:\ \ 42A + 8B = 0 \Rightarrow B = -\frac{21}{32}.$$

Partikulárne riešenie je

$$y_p = \left(\frac{1}{8}n - \frac{21}{32}\right)3^n.$$

Všeobecné riešenie je v tvare

$$y = y_h + y_p = C_1 2^n + C_2 1^n + C_3(-1)^n + \left(\frac{1}{8}n - \frac{21}{32}\right)3^n.$$

Príklad 11.2.1.4 Nájdime všeobecné riešenie rovnice $y_{n+2} - 10y_{n+1} + 25y_n = 5^n$.

Homogénna rovnica je daná

$$y_{n+2} - 10y_{n+1} + 25y_n = 0.$$

Charakteristická rovnica je tvaru

$$\lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0$$

a má korene $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 5$.

Fundamentálny systém je

$$y_1 = 5^n, y_2 = n5^n.$$

Všeobecné riešenie homogénnej rovnice je v tvare

$$y_h = C_1 5^n + C_2 n 5^n.$$

Následne hľadáme partikulárne riešenie. Konštanta $k = 2$, pretože číslo $a = 5$ sa v koreňoch charakteristickej rovnice nachádza dvakrát. Polynóm na pravej strane je nultého stupňa $P_0(n)$, a preto hľadaný polynóm $Q_0(n) = A$.

Partikulárne riešenie hľadáme v tvare

$$y_p = y_n = n^2 A 5^n.$$

Zvyšné členy sú

$$y_{n+1} = (n+1)^2 A 5^{n+1} = (An^2 + 2An + A)5^{n+1},$$
$$y_{n+2} = (n+2)^2 A 5^{n+2} = (An^2 + 4An + 4A)5^{n+2}.$$

Dosadením dostaneme

$$(An^2 + 4An + 4A)5^{n+2} - 10((An^2 + 2An + A)5^{n+1}) + 25An^2 5^n = 5^n.$$

A po úprave a vykrátení 5^n získame

$$50A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{50}.$$

Partikulárne riešenie je

$$y_p = \frac{1}{50} n^2 5^n.$$

Všeobecné riešenie je v tvare

$$y = y_h + y_p = C_1 5^n + C_2 n 5^n + \frac{1}{50} n^2 5^n.$$

Príklad 11.2.1.5 Nájdime všeobecné riešenie rovnice

$$2y_{n+2} - 7y_{n+1} - 4y_n = 17\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right).$$

Homogénna rovnica je daná

$$2y_{n+2} - 7y_{n+1} - 4y_n = 0.$$

Charakteristická rovnica je tvaru

$$2\lambda^2 - 7\lambda - 4 = 0$$

a má korene $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -\frac{1}{2}$.

Fundamentálny systém je

$$y_1 = 4^n, y_2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Všeobecné riešenie homogénnej rovnice má tvar

$$y_h = C_1 4^n + C_2\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Ďalej hľadáme partikulárne riešenie zadanej nehomogénnej rovnice podľa Vety 5.2.1.3 Konštanta $k = 0$, koreňom charakteristickej rovnice nie je žiadne komplexné číslo, ktoré by splňovalo $\lambda = (\cos\frac{\pi}{2} \pm j\sin\frac{\pi}{2})$. Polynóm na pravej strane je nultého stupňa $P_0(n)$, a preto hľadané polynómy sú $Q_0(n) = A, R_0(n) = B$.

Partikulárne riešenie hľadáme v tvare

$$y_p = y_n = n^0\left(A\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) + B\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right) = A\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) + B\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right).$$

Zvyšné členy sú

$$y_{n+1} = A\sin\left(\frac{\pi}{2}(n+1)\right) + B\cos\left(\frac{\pi}{2}(n+1)\right),$$

$$y_{n+2} = A\sin\left(\frac{\pi}{2}(n+2)\right) + B\cos\left(\frac{\pi}{2}(n+2)\right).$$

Dosadením dostávame

$$2\left(A\sin\left(\frac{\pi}{2}(n+2)\right) + B\cos\left(\frac{\pi}{2}(n+2)\right)\right) - 7\left(A\sin\left(\frac{\pi}{2}(n+1)\right) + B\cos\left(\frac{\pi}{2}(n+1)\right)\right) -$$

$$-4\left(A\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) + B\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right) = 17\sin\frac{\pi}{2}n.$$

Na úpravu využijeme goniometrické vzorce (38), (39) dostávame tak

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}n + \pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)\cos\pi + \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\sin\pi = -\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right),$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}n + \pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\cos\pi - \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)\sin\pi = -\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right),$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)\cos\frac{\pi}{2}+\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\sin\frac{\pi}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right),$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\cos\frac{\pi}{2}-\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)\sin\frac{\pi}{2}=-\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right).$$

Tieto čiastkové výsledky spätne dosadíme. A po úprave máme

$$-2A\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)-2B\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)-7A\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)+7B\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)-$$

$$-4A\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)-4B\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)=17\sin\frac{\pi}{2}n.$$

Teraz porovnáme koeficienty

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right):\ -2A+7B-4A=17,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right):\ -2B-7A-4B=0.$$

Vyriešením sústavy lineárnych rovníc o dvoch neznámych získame $A=-\frac{6}{5}, B=\frac{7}{5}$.

Partikulárne riešenie je

$$y_p=-\frac{6}{5}\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)+\frac{7}{5}\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right).$$

Všeobecné riešenie má tvar

$$y=y_h+y_p=C_1 4^n+C_2\left(-\frac{1}{2}\right)^n-\frac{6}{5}\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)+\frac{7}{5}\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right).$$

Príklad 11.2.1.6 Nájdime všeobecné riešenie rovnice

$$y_{n+2}-2y_{n+1}+2y_n=2\left(\sqrt{2}\right)^n\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right).$$

Homogénna rovnica je daná

$$y_{n+2}-2y_{n+1}+2y_n=0.$$

Charakteristická rovnica je v tvare

$$\lambda^2-2\lambda+2=0$$

a má korene $\lambda_{1,2}=1\pm j=\sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{4}\pm j\sin\frac{\pi}{4})$. Fundamentálny systém je

$$y_1=C_1\left(\sqrt{2}\right)^n\cos\frac{\pi}{4}, y_2=C_2\left(\sqrt{2}\right)^n\sin\frac{\pi}{4}.$$

Všeobecné riešenie homogénnej rovnice má tvar

$$y_h=C_1\left(\sqrt{2}\right)^n\cos\frac{\pi}{4}+C_2\left(\sqrt{2}\right)^n\sin\frac{\pi}{4}.$$

Ďalej hľadáme partikulárne riešenie. Konštanta $k=1$, pretože $\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}\pm j\sin\frac{\pi}{4})$ je jednonásobným koreňom charakteristickej rovnice. Polynóm na pravej strane je nultého stupňa $P_0(n)$, preto hľadané polynómy sú $Q_0(n)=A, R_0(n)=B$.

Partikulárne riešenie hľadáme v tvare

$$y_p = y_n = n^1\left(A\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) + B\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)\right)\left(\sqrt{2}\right)^n =$$

$$= An\left(\sqrt{2}\right)^n \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) + Bx\left(\sqrt{2}\right)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right).$$

Zvyšné členy sú

$$y_{n+1} = A(n+1)\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{4}(n+1)\right) + B(n+1)\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}\cos\left(\frac{\pi}{4}(n+1)\right),$$

$$y_{n+2} = A(n+2)\left(\sqrt{2}\right)^{n+2}\sin\left(\frac{\pi}{4}(n+2)\right) + B(n+2)\left(\sqrt{2}\right)^{n+2}\cos\left(\frac{\pi}{4}(n+2)\right).$$

Dosadením získame

$$A(n+2)\left(\sqrt{2}\right)^{n+2}\sin\left(\frac{\pi}{4}(n+2)\right) + B(n+2)\left(\sqrt{2}\right)^{n+2}\cos\left(\frac{\pi}{4}(n+2)\right) -$$

$$-2\left(A(n+1)\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{4}(n+1)\right) + B(n+1)\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}\cos\left(\frac{\pi}{4}(n+1)\right)\right) +$$

$$+2\left(An\left(\sqrt{2}\right)^n\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) + Bn\left(\sqrt{2}\right)^n\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)\right) = 2\left(\sqrt{2}\right)^n\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right).$$

Na úpravu využijeme goniometrické vzorce (38), (39). Dostávame

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}n + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)\cos\frac{\pi}{2} + \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)\sin\frac{\pi}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right),$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}n + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)\cos\frac{\pi}{2} - \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)\sin\frac{\pi}{2} = -\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right),$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}n + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)\cos\frac{\pi}{4} + \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right),$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}n + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)\cos\frac{\pi}{4} - \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right).$$

Spätne dosadíme, vykrátime $\left(\sqrt{2}\right)^n$ a upravíme na tvar

$$-2A\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) + 6B\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) + 2A\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) - 2B\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right).$$

Porovnáme koeficienty

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right): -2A + 6B = 2,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right):\ 2A - 2B = 0.$$

Vyriešením sústavy lineárnych rovníc o dvoch neznámych získame $A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}$.

Partikulárne riešenie je

$$y_p = \left(\frac{1}{2}n\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) + \frac{1}{2}n\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)\right)\left(\sqrt{2}\right)^n.$$

Všeobecné riešenie je v tvare

$$y = y_h + y_p =$$

$$= C_1\left(\sqrt{2}\right)^n \cos\frac{\pi}{4} + C_2\left(\sqrt{2}\right)^n \sin\frac{\pi}{4} + \left(\frac{1}{2}n\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) + \frac{1}{2}n\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)\right)\left(\sqrt{2}\right)^n.$$

11.2.1.1 Princíp superpozície

Príklad 11.2.1.1.1 Nájdime všeobecné riešenie rovnice $y_{n+2} - 6y_{n+1} + 8y_n = n^2 + 4^n$.

Najskôr vyriešime homogénnu časť rovnice $y_{n+2} - 6y_{n+1} + 8y_n = 0$.

Charakteristická rovnica je daná

$$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$

a jej korene sú $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2$. Fundamentálny systém je

$$y_1 = 4^n, y_2 = 2^n.$$

Všeobecné riešenie homogénnej rovnice je v tvare

$$y_h = C_1 4^n + C_2 2^n.$$

Následne pravú stranu zadanej nehomogénnej rovnice rozdelíme na dve časti $f_1(n) = n^2$ a $f_2(n) = 4^n$. Získavame dve nové nehomogénnej rovnice $y_{n+2} - 6y_{n+1} + 8y_n = n^2$, $y_{n+2} - 6y_{n+1} + 8y_n = 4^n$. Budeme ich riešiť postupne.

a) Nájdime partikulárne riešenie prvej rovnice $y_{n+2} - 6y_{n+1} + 8y_n = n^2$. Na pravej strane je polynóm druhého stupňa $P_2(n) = n^2$, takže hľadaný polynóm bude $Q_2(n) = An^2 + Bn + C$. Overením násobnosti pre $\lambda = 1$, ktorá nie je koreňom charakteristickej rovnice, vieme, že $k = 0$. Partikulárne riešenie hľadáme v tvare

$$y_{p1} = y_n = n^0(An^2 + Bn + C) = An^2 + Bn + C.$$

Zvyšné členy sú

$$y_{n+1} = A(n+1)^2 + B(n+1) + C = An^2 + 2An + A + Bn + B + C,$$

$$y_{n+2} = A(n+2)^2 + B(n+2) + C = An^2 + 4An + 4A + Bn + 2B + C.$$

Dosadením

$$An^2 + 4An + 4A + Bn + 2B + C - 6(An^2 + 2An + A + Bn + B + C) +$$
$$+8(An^2 + Bn + C) = n^2.$$

Po úprave

$$3An^2 - 8An - 2A + 3Bn - 4B + 3C = n^2.$$

Porovnaním koeficientov dostávame

$$n^2\!: \;\; 3A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{3},$$

$$n^1: \; -8A + 3B = 0 \Rightarrow B = \frac{8}{9},$$

$$n^0: \; -2A - 4B + 3C = 0 \Rightarrow C = \frac{38}{27}.$$

Partikulárne riešenie je

$$y_{p1} = \frac{1}{3}n^2 + \frac{8}{9}n + \frac{38}{27}.$$

b) Vyriešme druhú nehomogénnu rovnicu $y_{n+2} - 6y_{n+1} + 8y_n = 4^n$. Hľadaný polynóm bude nultého stupňa $Q_0(n) = A$. Násobnosť k je daná číslom $a = 4$. Číslo $\lambda = 4$ sa vyskytuje ako koreň charakteristickej rovnice práve jedenkrát $\Rightarrow k = 1$. Partikulárne riešenie hľadáme v tvare

$$y_{p1} = y_n = n^1 A 4^n = An4^n.$$

Zvyšné členy sú

$$y_{n+1} = A(n+1)4^{n+1} = (An + A)4^{n+1},$$

$$y_{n+2} = A(n+2)4^{n+2} = (An + 2A)4^{n+2}.$$

Dosadením dostaneme

$$(An + 2A)4^{n+2} - 6((An + A)4^{n+1}) + 8An4^n = 4^n.$$

Po úprave a vykrátení 4^n máme

$$8A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{8}.$$

Partikulárnym riešením je

$$y_{p2} = \frac{1}{8}n4^n.$$

Celkové všeobecné riešenie nehomogénnej rovnice má tvar

$$y = y_h + y_{p1} + y_{p2} = C_1 4^n + C_2 2^n + \frac{1}{3}n^2 + \frac{8}{9}n + \frac{38}{27} + \frac{1}{8}n4^n.$$

11.2.2 Metóda variácie konštánt

Na nasledujúcom príklade si ukážeme diferenčnú rovnicu, ktorej pravá strana je typicky vhodná pre metódu neurčitých koeficientov, avšak je ju možné riešiť aj metódou variácie konštánt a vo výsledku dostaneme rovnaké riešenie. Príklad 11.2.2.1 odpovedá Príkladu 11.2.1.2.

Príklad 11.2.2.1 Nájdime všeobecné riešenie rovnice $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 3y_n = 1$.

Homogénna rovnica je v tvare

$$y_{n+2} - 4y_{n+1} + 3y_n = 0.$$

Charakteristická rovnica je daná

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

a jej korene sú $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$. Fundamentálny systém je v tvare $y_1 = 1^n, y_2 = 3^n$.

Všeobecné riešenie homogénnej rovnice je dané

$$y_h = C_1 1^n + C_2 3^n.$$

Ďalej využitím metódy variácie konštánt nájdeme všeobecné riešenie, ktorého tvar bude

$$y_n = C_n^1 y_n^1 + C_n^2 C_n^2.$$

Máme dve nezávislé riešenie homogénnej rovnice $y_n^1 = 1^n = 1, y_n^2 = 3^n$, preto budeme vychádzať z podmienok

$$\Delta C_n^1 y_{n+1}^1 + \Delta C_n^2 y_{n+1}^2 = 0,$$
$$\Delta C_n^1 y_{n+1}^1 + \Delta C_n^2 y_{n+2}^2 = \frac{f(n)}{a_2}.$$

Dosadíme

$$\Delta C_n^1(1) + \Delta C_n^2(3^{n+1}) = 0,$$
$$\Delta C_n^1(n)(1) + \Delta C_n^2(3^{n+2}) = 1$$

a sčítacou metódou vyjadríme riešenia sústavy $\Delta C_n^1 = -\frac{1}{2}, \Delta C_n^2 = \frac{1}{3^n 6}$.

Podľa Vety 3.1.2(b) alebo Vety 3.1.3(a) určíme C_n^1.

$$C_n^1 = \sum -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}n + C.$$

Pomocou rovnice (2) odvodíme C_n^2. Vieme, že $\Delta \frac{1}{3^n 6} = -\frac{1}{3^n 9}$, potom platí $\Delta - \frac{1}{3^n 4} = \frac{1}{3^n 6}$, kde $-\frac{1}{3^n 4}$ je neurčitou sumáciou funkcie $\frac{1}{3^n 6}$.

$$C_n^2 = \sum \frac{1}{3^n 6} = -\frac{1}{3^n 4} + D.$$

Všeobecné resp. partikulárne riešenie nehomogénnej rovnice je

$$y_n = \left(-\frac{1}{2}n + C\right)(1) + \left(-\frac{1}{3^n 4} + D\right)(3^n) = -\frac{1}{2}n + C - \frac{1}{4} + D3^n =$$
$$= -\frac{1}{2}n + E + D3^n.$$

Celkové všeobecné riešenie

$$y = y_h + y_p = C_1 1^n + C_2 3^n - \frac{1}{2}n + E + D3^n = 1^n(C_1 + E) + 3^n(C_2 + D) - \frac{1}{2}n =$$

$$= G_1 1^n + G_2 3^n - \frac{1}{2}n.$$

Príklad 11.2.2.2 Nájdime všeobecné riešenie rovnice $y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = \frac{1}{n}$.

Homogénna rovnica je $y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 0$.
Jej charakteristická rovnica je daná

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

a korene sú $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$. Fundamentálny systém má tvar $y_1 = 2^n, y_2 = 3^n$.
Všeobecné riešenie homogénnej rovnice je

$$y_h = C_1 2^n + C_2 3^n.$$

Využitím metódy variácie konštánt nájdeme všeobecné riešenie, ktoré bude v tvare

$$y_n = C_n^1 y_n^1 + C_n^2 y_n^2.$$

Máme dve nezávislé riešenia homogénnej rovnice $y_n^1 = 2^n, y_n^2 = 3^n$. Budeme vychádzať z podmienok

$$\Delta C_n^1 y_{n+1}^1 + \Delta C_n^2 y_{n+1}^2 = 0,$$

$$\Delta C_n^1 y_{n+2}^1 + \Delta C_n^2 y_{n+2}^2 = \frac{f(n)}{a_2},$$

kde $a_2 = 1$.
Po dosadení máme

$$\Delta C_n^1 (2^{n+1}) + \Delta C_n^2 (3^{n+1}) = 0,$$

$$\Delta C_n^1 (2^{n+2}) + \Delta C_n^2 (3^{n+2}) = \frac{1}{n}.$$

Zostrojíme determinant sústavy

$$K(n+1) = \begin{vmatrix} 2^{n+1} & 3^{n+1} \\ 2^{n+2} & 3^{n+2} \end{vmatrix}.$$

Pomocou Cramerovho pravidla určíme $\Delta C_n^1, \Delta C_n^2$

$$\Delta C_n^1 = \frac{K_1}{K(n+1)} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 3^{n+1} \\ \frac{1}{n} & 3^{n+2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2^{n+1} & 3^{n+1} \\ 2^{n+2} & 3^{n+2} \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{3^{n+1}}{n}}{2^{n+1}3^{n+2} - 3^{n+1}2^{n+2}} = -\frac{1}{2n2^n},$$

$$\Delta C_n^2 = \frac{K_2}{K(n+1)} = \frac{\begin{vmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ 2^{n+2} & \frac{1}{n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2^{n+1} & 3^{n+1} \\ 2^{n+2} & 3^{n+2} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{2^{n+1}}{n}}{2^{n+1}3^{n+2} - 3^{n+1}2^{n+2}} = \frac{1}{3n3^n}.$$

Na určenie C_n^1, C_n^2 využijeme rovnicu (2)

$$C_n^1 = \sum -\frac{1}{2n2^n} = \frac{n+1}{2^n n(n+2)} + D,$$

$$C_n^2 = \sum \frac{1}{3n3^n} = -\frac{n+1}{3^n n(2n+3)} + E.$$

Všeobecné resp. partikulárne riešenie nehomogénnej rovnice bude

$$y_n = \left(\frac{n+1}{2^n n(n+2)} + D\right)(2^n) + \left(-\frac{n+1}{3^n n(2n+3)} + E\right)(3^n) =$$

$$= \frac{n+1}{2^n n(n+2)} + D2^n - \frac{n+1}{3^n n(2n+3)} + E3^n.$$

Celkové všeobecné riešenie

$$y = y_h + y_p = C_1 2^n + C_2 3^n \frac{n+1}{2^n n(n+2)} + D2^n - \frac{n+1}{3^n n(2n+3)} + E3^n.$$

12 RIEŠENÉ PRÍKLADY Z-TRANSFORMÁCIA

12.1 Odvodenie niektorých funkcií zo slovníka Z-transformácie

Príklad 12.1.1 Pomocou priamej Z-transformácie budeme hľadať obrazy diskrétnych časových funkcií

a) $f(kT) = \delta(kT)$

Diskrétny Diracov impulz $\delta(kT)$ je definovaný vzťahom (29).

Jeho obraz v Z-transformácii je

$$F(z) = Z\{\delta(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(kT) z^{-k} = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1.$$

b) $f(kT) = \eta(kT)$

Diskrétny Heavisideov jednotkový skok je definovaný vzťahom (31).

$$F(z) = Z\{\eta(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \eta(kT) z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots$$

Jedná sa o súčet nekonečnej geometrickej rady. Daný vzťahom

$$s = \frac{a_0}{1-q}, \tag{40}$$

a_0 je prvý člen geometrickej postupnosti a q je kvocient rady (pomer dvoch nasledujúcich členov).V našom prípade je $a_0 = 1$ a $q = z^{-1}$. Súčtom nekonečnej rady (Z-obrazom) bude

$$F(z) = Z\{\eta(kT)\} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}.$$

Rada konverguje ako geometrická pre $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$, t. j. pre $|z| > 1$.

c) $f(kT) = kT$

$$\begin{aligned} F(z) = Z\{kT\} &= \sum_{k=0}^{\infty} kTz^{-k} = 0 + Tz^{-1} + 2Tz^{-2} + \cdots \\ &= T(z^{-1} + 2z^{-2} + \cdots). \end{aligned} \tag{41}$$

Vynásobíme rovnicu (41) výrazom z^{-1}

$$z^{-1}\, Z\{kT\} = z^{-1}\, T(z^{-1} + 2z^{-2} + \cdots)$$

a odčítame od (41)

$$Z\{kT\} - z^{-1}\, Z\{kT\} = T(z^{-1} + 2z^{-2} + \cdots) - z^{-1}\, T(z^{-1} + 2z^{-2} + \cdots),$$

$$Z\{kT\}(1 - z^{-1}) = Tz^{-1}(1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots).$$

Pre výraz $(1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots)$ využijeme vzťah pre súčet nekonečnej geometrickej rady (40), kde $a_0 = 1, q = z^{-1}$. Dosadíme

$$Z\{kT\}(1 - z^{-1}) = Tz^{-1}\frac{1}{1 - z^{-1}}.$$

Upravením dostaneme Z-obraz

$$F(z) = Z\{kT\} = \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})}\frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{Tz}{(z-1)^2}.$$

Rada konverguje pre $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$, t. j. pre $|z| > 1$.

d) $f(kT) = e^{-akT}$

$$F(z) = Z\{e^{-akT}\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT}z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty}(e^{-aT}z^{-1})^k =$$

$$= 1 + (e^{-aT}z^{-1})^1 + (e^{-aT}z^{-1})^2 + \cdots.$$

Využitím vzťahu (40) a dosadením $a_0 = 1, q = e^{-aT}z^{-1}$ dostaneme Z-obraz

$$F(z) = Z\{e^{-akT}\} = \frac{1}{1 - e^{-aT}z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}}.$$

Rada konverguje pre $\left|\frac{1}{e^{aT}z}\right| < 1$, t. j. pre $|e^{aT}z| > 1$.

e) $f(kT) = \cos(\omega kT)$

Využijeme Eulerov vzťah, upravený pre zadanú diskrétnu funkciu

$$\cos(\omega kT) = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega kT} + e^{-j\omega kT}\right)$$

$$F(z) = Z\{\cos(\omega kT)\} = Z\left\{\frac{\left(e^{j\omega kT} + e^{-j\omega kT}\right)}{2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} e^{j\omega kT}z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} e^{-j\omega kT}z^{-k}\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z - e^{j\omega T}} + \frac{z}{z - e^{-j\omega T}}\right) =$$

$$= \frac{z(e^{j\omega T} + e^{-j\omega T})}{2[z^2 - z(e^{j\omega T} + e^{-j\omega T}) + 1]} = \frac{z^2 - z\cos(\omega T)}{z^2 - 2z\cos(\omega T) + 1}.$$

12.2 LDR

Príklad 12.2.1 Pomocou Z-transformácie vyriešme lineárnu diferenčnú rovnicu

$$3y[(k+2)T] + 2y[(k+1)T] + y(kT) = u(kT)$$

pri počiatočných podmienkach $y(0) = 1, y(T) = 3$ a pre vstupnú diskrétnu funkciu $u(kT) = \eta(kT)$.

Za prvé si danú rovnicu transponujeme. Využijeme Vetu 6.2.1(o linearite) a Vetu 6.2.2 (o posunutí originálu v časovej oblasti vľavo). Vieme, že

$$Z\{u(kT)\} = U(z),$$

$$Z\{y(kT)\} = Y(z),$$

$$Z\{y[(k+1)T]\} = zY(z) - zy(0),$$

$$Z\{y[(k+2)T]\} = z^2Y(z) - z^2y(0) - zy(T),$$

teda

$$Z\{3y[(k+2)T] + 2y[(k+1)T] + y(kT)\} = Z\{u(kT)\},$$

$$3[z^2Y(z) - z^2y(0) - zy(T)] + 2[zY(z) - zy(0)] + Y(z) = U(z). \qquad (42)$$

Obraz vstupnej diskrétnej funkcie je

$$U(z) = Z\{\eta(kT)\} = \frac{z}{z-1},$$

spolu s počiatočnými podmienkami dosadíme do (42) a dostaneme

$$3z^2Y(z) - 3z^2 - 9z + 2zY(z) - 2z + Y(z) = U(z),$$

$$Y(z)(3z^2 + 2z + 1) - 3z^2 - 11z = \frac{z}{z-1}.$$

Obrazom bude

$$Y(z) = \frac{3z^3 + 8z^2 - 10z}{3z^3 - z^2 - z - 1}.$$

Na nájdenie originálu riešenia $y(kT)$ použijeme rozvoj obrazu v mocninovú radu.

$$(3z^3 + 8z^2 - 10z) : (3z^2 - z^2 - z - 1) = 1 + 3z^{-1} - 2z^{-2} + \frac{2}{3}z^{-3} + \cdots$$

$$\underline{-3z^3 + z^2 + z + 1}$$

$$9z^2 - 9z + 1$$

$$\underline{-9z^2 + 3z + 3 - 3z^{-1}}$$

$$-6z + 4 + 3z^{-1}$$

$$\underline{+6z - 2 + z^{-1} - 2z^{-2}}$$

$$2 + 2z^{-1} - 2z^{-2}$$

$$\cdots$$

Podľa rovnice (33) sme získali riešenie v neuzavretom tvare

$$y(0) = 1$$

$$y(T) = 3$$

$$y(2T) = -2$$

$$y(3T) = \frac{2}{3}$$

$$\dots$$

Príklad 12.2.2 Vyriešme numericky (rekurentným spôsobom) diferenčnú rovnicu

$$y[(k+3)T] + 2y[(k+2)T] + 3y[(k+1)T] + y(kT) = 4u[(k+1)T] + u(kT)$$

pri počiatočných podmienkach $y(0) = 1, y(1) = 2, y(2) = 3$ pre vstupnú diskrétnu funkciu $u(kT) = 3^k$.

Upravíme rovnicu na tvar

$$y[(k+3)T] = -2y[(k+2)T] - 3y[(k+1)T] - y(kT) + 4u[(k+1)T] + 5u(kT).$$

S ohľadom na počiatočné podmienky

$$y(0) = 1$$

$$y(T) = 2$$

$$y(2T) = 3$$

dostaneme

$$k = 0 : y(3T) = -2y(2T) - 3y(T) - y(0) + 4u(1T) + 5u(0) = -6 - 6 - 1 + 12 + 5 = 4$$

$$k = 1 : y(4T) = -2y(3T) - 3y(2T) - y(1T) + 4u(2T) + 5u(1T) = -8 - 9 - 2 + 36 + 5 = 23$$

$$k = 2 : y(5T) = -2y(4T) - 3y(3T) - y(2T) + 4u(3T) + 5u(2T) = -46 - 12 - 3 + 108 + 45 =$$

$$= 92$$

$$\dots$$

12.3 Diferenčná rovnica a Z-prenos

Príklad 12.3.1 K diferenčnej rovnici

$$y[(k+2)T] + 2y[(k+1)T] + 0{,}5y(kT) = 6u[(k+1)T] + 1{,}5u(kT)$$

napíšme Z-prenos pri nulových počiatočných podmienkach.

Z-prenos získame Z-transformáciou. Využijeme Vetu 6.2.1 (o posunutí originálu v časovej oblasti vľavo) a zohľadníme počiatočné podmienky $u(0) = 0, y(0) = 0, y(T) = 0$. Máme

$$Z\{1{,}5u(kT)\} = 1{,}5U(z) \Rightarrow 1{,}5U(z),$$

$$Z\{6u[(k+1)T]\} = 6zU(z) - 6zu(0) \Rightarrow 6zU(z),$$

$$Z\{0{,}5y(kT)\} = 0{,}5Y(z) \Rightarrow 0{,}5Y(z),$$

$$Z\{2y[(k+1)T]\} = 2zY(z) - 2zy(0) \Rightarrow 2zY(z),$$

$$Z\{y[(k+2)T]\} = z^2Y(z) - z^2y(0) - zy(T) \Rightarrow z^2Y(z).$$

Dosadením dostávame algebraickú rovnicu

$$(z^2 + 2z + 0{,}5)Y(z) = (6z + 1{,}5)U(z).$$

Z-prenos má tvar

$$G(z) = \frac{6z + 1{,}5}{z^2 + 2z + 0{,}5}.$$

12.4 Impulzná funkcia a charakteristika

Príklad 12.4.1 Systém je popísaný diferenčnou rovnicou

$$y[(k+1)T] - 0{,}5y(kT) = 2u(kT). \tag{43}$$

Určme impulznú funkciu a charakteristiku pri počiatočnej podmienke $y(0) = 0$.

Z-prenos je

$$G(z) = \frac{2}{z - 0{,}5}. \tag{44}$$

Impulzná funkcia je daná

$$i(kT) = Z^{-1}\{I(z)\} = Z^{-1}\{G(z)\} = Z^{-1}\left\{\frac{2}{z - 0{,}5}\right\}.$$

Originál určíme pomocou slovníka Z-transformácie (Tab. 1. (8)), dostaneme

$$Z^{-1}\left\{2\frac{1}{z - 0{,}5}\right\} = 2 \cdot 0{,}5^{k-1}\eta[(k-1)T] = 2 \cdot 0{,}5^{k-1}.$$

Impulzná funkcia je daná

$$i(kT) = 2 \cdot 0{,}5^{k-1}.$$

Určme niekoľko hodnôt impulznej diskrétnej funkcie. Vychádzajme z

$$y[(k+1)T] = 2u(kT) + 0{,}5y(kT) \tag{45}$$

$$y(0) = 0$$

$$k = 0 : y(T) = 2\delta(0) + 0{,}5y(0) = 2 \cdot 1 + 0{,}5 \cdot 0 = 2$$

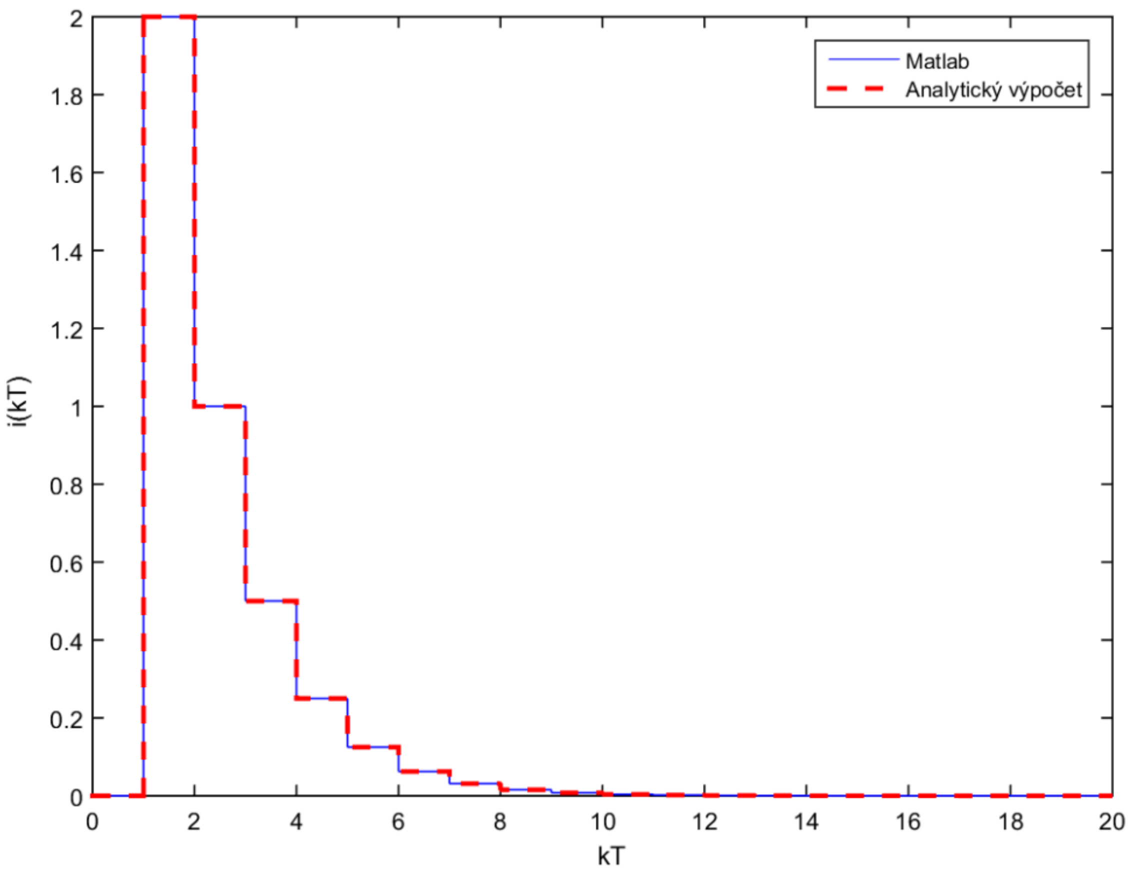
$$k = 1 : \ y(2T) = 2\delta(T) + 0{,}5y(T) = 2 \cdot 0 + 0{,}5 \cdot 2 = 1$$

$$k = 2 : \ y(3T) = 2\delta(2T) + 0{,}5y(2T) = 2 \cdot 0 + 0{,}5 \cdot 1 = 0{,}5$$

$$\dots$$

Pre $k = \infty$ využijeme Vetu 6.2.3 (o koncovej hodnote)

$$f(\infty) = \lim_{k\to\infty} i(kT) = \lim_{z\to 1}(z-1)I(z) = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{2}{z-0{,}5} = 0.$$



Obr. 1. Impulzná charakteristika.

12.5 Prechodová funkcia a charakteristika

Príklad 12.5.1 Systém je popísaný diferenčnou rovnicou (43) a Z-prenosom (44). Určme prechodovú funkciu a charakteristiku pri počiatočnej podmienke $y(0) = 0$.

Prechodová funkcia je daná

$$h(kT) = Z^{-1}\{H(z)\} = Z^{-1}\left\{G(z)\frac{z}{z-1}\right\} = Z^{-1}\left\{\frac{2z}{(z-0{,}5)(z-1)}\right\}.$$

Originál určíme rozkladom na parciálne zlomky.

$$H(z) = \frac{2z}{(z-0{,}5)(z-1)} = \frac{A}{z-0{,}5} + \frac{B}{z-1}$$

$$2z = A(z-1) + B(z-0{,}5)$$

$$2z = Az - A + Bz - 0{,}5B$$

$$z^1\colon\ 2 = A + B$$

$$z^0\colon\ 0 = -A - 0{,}5B$$

Porovnaním koeficientov u rovnakých mocnín dostávame $A = -2$ a $B = 4$.

$$h(kT) = Z^{-1}\left\{-\frac{2}{z-0{,}5} + \frac{4}{z-1}\right\}.$$

Využitím odpovedajúcich tvarov zo slovníka Z-transformácie (Tab. 1. (8)) získame originály.

$$Z^{-1}\left\{-2\frac{1}{z-0{,}5}\right\} = -2\cdot 0{,}5^{k-1}\eta[(k-1)T] = -2\cdot 0{,}5^{k-1}$$

$$Z^{-1}\left\{\frac{4}{z-1}\right\} = 4\cdot\eta[(k-1)T] = 4.$$

Prechodová funkcia je daná

$$h(kT) = -2\cdot 0{,}5^{k-1} + 4.$$

Určme niekoľko hodnôt prechodovej diskrétnej funkcie. Vychádzajme z rovnice (45).

$$y(0) = 0$$

$$k = 0:\ y(T) = 2\eta(0) + 0{,}5y(0) = 2\cdot 1 + 0{,}5\cdot 0 = 2$$

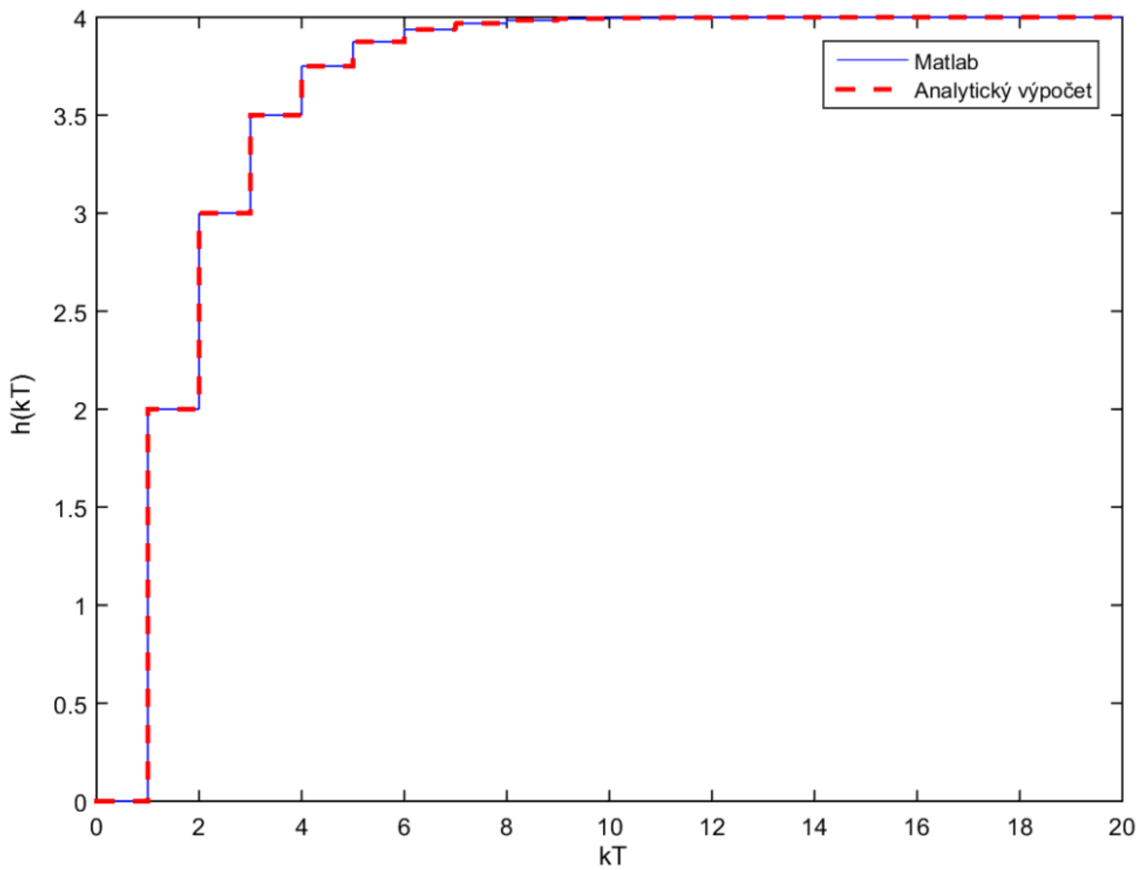
$$k = 1:\ y(2T) = 2\eta(T) + 0{,}5y(T) = 2\cdot 1 + 0{,}5\cdot 2 = 3$$

$$k = 2:\ y(3T) = 2\eta(2T) + 0{,}5y(2T) = 2\cdot 1 + 0{,}5\cdot 3 = 3{,}5$$

$$\dots$$

Pre $k = \infty$ využijeme Vetu 6.2.3 (o koncovej hodnote)

$$f(\infty) = \lim_{k\to\infty} h(kT) = \lim_{z\to 1}(z-1)H(z) = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{2}{z-0{,}5}\frac{z}{z-1} = 4.$$



Obr. 2. Prechodová charakteristika.

12.6 Frekvenčný prenos a frekvenčná charakteristika

Príklad 12.6.1 Systém je popísaný diferenčnou rovnicou (43) a Z-prenosom (44). Určme frekvenčný prenos a frekvenčnú charakteristiku.

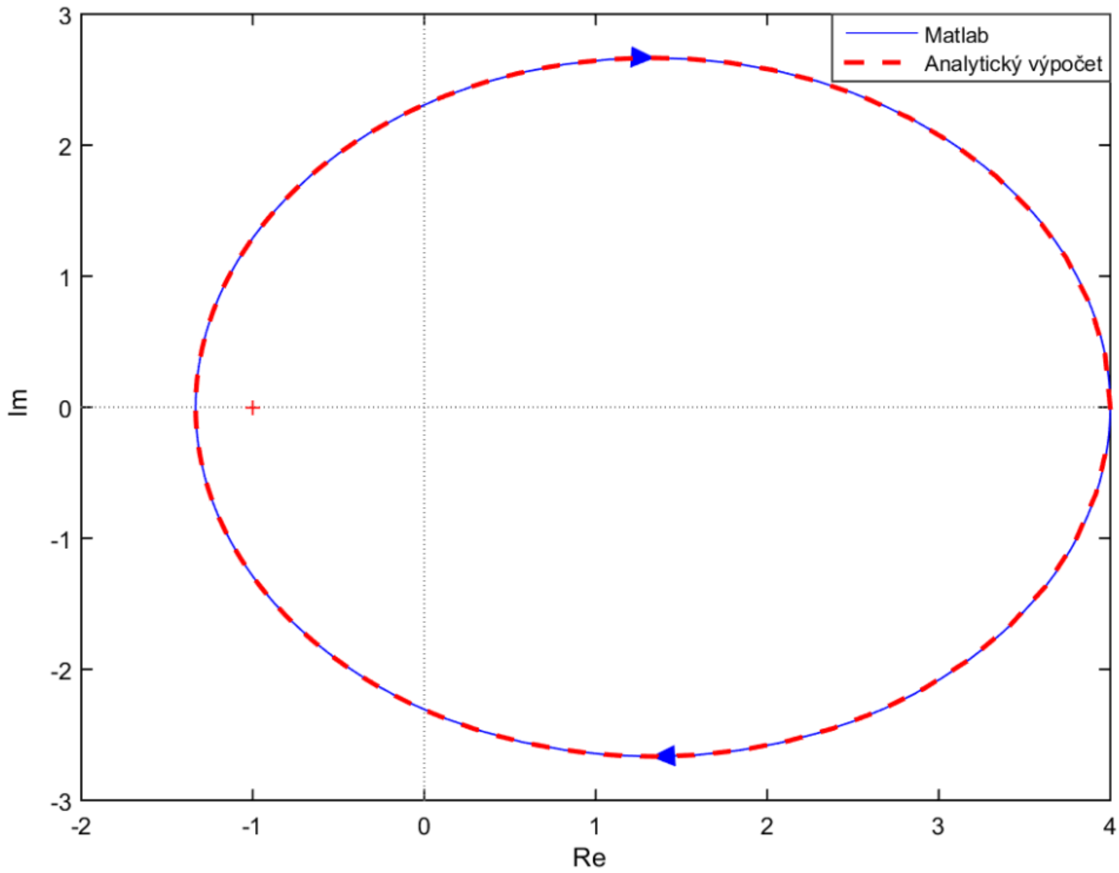
Frekvenčný prenos získame podľa rovnice (36) a následne ho podľa rovnice (37) upravíme na zložkový tvar. Využijeme Eulerov vzťah $e^{j\omega T} = \cos\omega T + j\sin\omega T$. Frekvenčný prenos v zložkovom tvare je

$$G(j\omega T) = \frac{2}{e^{jkT} - 0{,}5} =$$

$$= \frac{2\cos(\omega T) - 1}{(\cos(\omega T) - 0{,}5)^2 + \sin^2(\omega T)} + j\frac{2\sin(\omega T)}{(\cos(\omega T) - 0{,}5)^2 + \sin^2(\omega T)}.$$

Tab. 2. Vypočítané hodnoty pre frekvenčnú charakteristiku.

ωT	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$P(\omega T)$	4	1,9	0,76	0	-0,8	-1,33
$Q(\omega T)$	0	2,6	2,6	2,3	1,6	0



Obr. 3. Frekvenčná charakteristika (Nyquistova krivka).

ZÁVER

Hlavným cieľom práce bolo rozobrať základné vlastnosti diferenčného a sumačného počtu, ukázať rôzne metódy riešenia LDR a ich použitie pri konkrétnych úlohách z teórie automatického riadenia.

Jednou z metód je metóda variácie konštánt. Táto metóda je univerzálna. Dokážeme pomocou nej vyriešiť rôzne typy diferenčných rovníc, ale je náročnejšia na výpočet. Ďalšou metódou je metóda neurčitých koeficientov. Jej nevýhodou je, že je použiteľná len pre špecifické typy pravej strany. Táto metóda bola rozobratá na konkrétnych príkladoch pre každý typ pravej strany a taktiež aj pre násobnosť a nenásobnosť koeficienta k. Bolo ukázané, že aj keď rovnica má pravú stranu vhodnú práve pre metódu neurčitých koeficientov použitie variácie konštánt nemá žiadny vplyv na výsledný tvar riešenia. Prostredníctvom týchto dvoch metód môžeme riešiť LDR prvého a vyšších rádov. Obe metódy boli ukázané pri riešení LDR s konštantnými koeficientmi. Pre LDR prvého rádu je však oveľa zaužívanejší spôsob riešenia popísaný vo Vete 4.2.1 prostredníctvom neho dokážeme jednoducho vyriešiť rovnicu s konštantnými ale aj nekonštantnými koeficientmi.

Ďalšou z metód je riešenie LDR pomocou Z-transformácie. Tá sa však používa len pre riešenie LDR s konštantnými koeficientmi, prípadne sústav. Pomocou nej sme riešením získali Z-obraz a spätnou Z-transformáciou obrazu zase originál. V teórii automatického riadenia sa LDR využíva ako jedna z možností vonkajšieho popisu systému. Na konkrétnych príkladoch boli ukázané aj ďalšie spôsoby vonkajšieho popisu systému ako Z-prenos, impulzná funkcia, prechodová funkcia a frekvenčný prenos. U nich bolo vychádzané práve z diferenčnej rovnice. Pomocou MATLABu bola vykreslená impulzná, prechodová a frekvenčná charakteristiku systému.

ZOZNAM POUŽITEJ LITERATÚRY

[1] POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 8. vyd. Praha: Prometheus, 2005. ISBN 80-7196-267-8.

[2] MAŠEK, Josef. *Sbírka úloh z matematiky: diferenční rovnice a transformace Z*. Plzeň: Západočeská univerzita, 1998. ISBN 8070824573.

[3] ŠKRÁŠEK, Josef a Zdeněk TICHÝ. *Základy aplikované matematiky II*. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatúry n.p. , 1986.

[4] KELLEY, Walter G. a Allan C. PETERSON. *Difference equations: an introduction with applications*. 2nd ed. San Diego: Harcourt/Academic Press, c2001. ISBN 0-12-403330-x.

[5] MOŠOVÁ, Vratislava. *Matematická analýza III*. Olomouc: Univerzita Palackého, 2002. ISBN 80-244-0463-x.

[6] *People.math.aau.dk* [online]. Copyright © [cit. 03.05.2018]. Dostupné z: http://people.math.aau.dk/~matarne/11-imat/notes2011a.pdf

[7] BALÁTĚ, Jaroslav. *Automatické řízení*. Praha: BEN - technická literatura, 2003. ISBN 80-7300-020-2.

[8] *Predmety* [online]. Copyright © [cit. 03.05.2018]. Dostupné z: http://matlab.fei.tuke.sk/raui_new/subory/literatura/modrlak_z_transformace.pdf

[9] NAVRÁTIL, Pavel. *Automatizace - Vybrané statě [online]*. Vyd. 1. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, Fakulta aplikované informatiky, 2011, 289 s. [cit. 2013-01-23]. ISBN 978-80-7318-935-8. Dostupné z: http://dspace.k.utb.cz/handle/10563/18581

[10] ŠVARC, Ivan. *Automatizace: automatické řízení*. Vyd. 2., dopl. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2005. ISBN 80-214-2943-7.

[11] VOLDÁNOVÁ, Anna. Lineární diferenční rovnice prvního řádu a jejich aplikace. Brno, 2009. Diplomová práce.

ZOZNAM POUŽITÝCH SYMBOLOV A SKRATIEK

$G(j\omega T)$	Diskrétna prechodová funkcia.
$G(z)$	Diskrétny Z-prenos.
$h(kT)$	Diskrétna prechodová funkcia.
$i(kT)$	Diskrétna impulzná funkcia.
Im	Imaginárna časť.
j	Imaginárna jednotka.
K	Casoratiho determinant.
LDR	Lineárna diferenčná rovnica.
napr.	Napríklad.
$n \in M$	n patrí do M.
$\mathbb{N}$	Množina prirodzených čísel.
$\mathbb{N}_0$	Množina prirodzených čísel s nulou.
$\mathbb{R}$	Množina reálnych čísel.
Re	Reálna časť.
resp.	Respektíve.
t. j.	To jest.
Z	Operátor priamej Z transformácie.
Z^{-1}	Operátor spätnej Z transformácie.
Δ	Operátor doprednej diferencie.
∇	Operátor spätnej diferencie.
$\sum$	Operátor sumácie.
$\prod$	Operátor súčinu.
$\equiv$	Identicky rovno.
$\wedge$	Konjunkcia.

$\vee$ Disjunkcia.

$\Leftrightarrow$ Ekvivalencia.

$\Rightarrow$ Implikácia.

$\forall$ Pre každé.

ZOZNAM OBRÁZKOV

ZOZNAM TABULIEK

ZOZNAM PRÍLOH

PRÍLOHA P I: MATLAB ZDROJOVÉ SÚBORY.

Príloha obsahuje zdrojové súbory grafov z prostredia MATLABu.