Lineární programování a jeho využití ve vybraných úlohách

Tomáš Kreisel

Bakalářská práce
2019

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky
akademický rok: 2018/2019

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení:	**Tomáš Kreisel**
Osobní číslo:	**A16045**
Studijní program:	**B3902 Inženýrská informatika**
Studijní obor:	**Bezpečnostní technologie, systémy a management**
Forma studia:	**prezenční**
Téma práce:	**Lineární programování a jeho využití ve vybraných úlohách**
Téma anglicky:	**Linear Programming and its Uses in Applications**

Zásady pro vypracování:

1. **Seznamte se s problematikou lineárního programování. Vypracujte literární rešerši na dané téma, uveďte přehled základních pojmů a vybraných metod užívaných při řešení úloh lineárního programování.**
2. **Nastudujte a přehledně zpracujte matematický aparát potřebný pro řešení úloh lineárního programování ve Vaší práci.**
3. **Popište princip řešení úloh lineárního programování – formulace úlohy, volba vhodné metody, závěr. Celý postup vysvětlete na konkrétních příkladech včetně matematických výpočtů.**
4. **Vyberte vhodné praktické úlohy, které lze řešit pomocí lineárního programování. Věnujte pozornost zejména oblasti bezpečnostních technologií.**
5. **Ukažte řešení vybraných úloh ve vhodném programu.**

Rozsah bakalářské práce:

Rozsah příloh:

Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

1. **BERTSIMAS, Dimitris a John N TSITSIKLIS. Introduction to linear optimization. Belmont, Mass.: Athena Scientific, c1997. ISBN 1-886529-19-1.**
2. **LINDA, Bohdan a Josef VOLEK. Lineární programování. Vydání 6., opravené a doplněné. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2016. ISBN 978-80-7560-018-9.**
3. **MAŇAS, Miroslav. Optimalizační metody. Praha: SNTL, 1979, 257 s.**
4. **PLESNÍK, Ján, Jitka DUPAČOVÁ a Milan VLACH. Lineárne programovanie. Bratislava: Alfa, 1990, 314 s. ISBN 8005006799.**
5. **ŠVRČEK, Jaroslav. Lineární programování v úlohách. 2. přeprac. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého, 2003. ISBN 8024407051.**

Vedoucí bakalářské práce: **Mgr. Jana Řezníčková, Ph.D.**
Ústav matematiky

Datum zadání bakalářské práce: **20. prosince 2018**

Termín odevzdání bakalářské práce: **15. května 2019**

Ve Zlíně dne 20. prosince 2018

UNIVERZITA TOMÁŠE BATI VE ZLÍNĚ
Fakulta aplikované informatiky

L.S.

doc. Mgr. Milan Adámek, Ph.D.
děkan

Ing. Jan Valouch, Ph.D.
ředitel ústavu

Prohlašuji, že

- beru na vědomí, že odevzdáním bakalářské práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb. o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších právních předpisů, bez ohledu na výsledek obhajoby;
- beru na vědomí, že bakalářská práce bude uložena v elektronické podobě v univerzitním informačním systému dostupná k prezenčnímu nahlédnutí, že jeden výtisk bakalářské práce bude uložen v příruční knihovně Fakulty aplikované informatiky Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně a jeden výtisk bude uložen u vedoucího práce;
- byl/a jsem seznámen/a s tím, že na moji bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších právních předpisů, zejm. § 35 odst. 3;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 1 autorského zákona má UTB ve Zlíně právo na uzavření licenční smlouvy o užití školního díla v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 2 a 3 autorského zákona mohu užít své dílo – diplomovou/bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití jen připouští-li tak licenční smlouva uzavřená mezi mnou a Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně s tím, že vyrovnání případného přiměřeného příspěvku na úhradu nákladů, které byly Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše) bude rovněž předmětem této licenční smlouvy;
- beru na vědomí, že pokud bylo k vypracování bakalářské práce využito softwaru poskytnutého Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně nebo jinými subjekty pouze ke studijním a výzkumným účelům (tedy pouze k nekomerčnímu využití), nelze výsledky bakalářské práce využít ke komerčním účelům;
- beru na vědomí, že pokud je výstupem bakalářské práce jakýkoliv softwarový produkt, považují se za součást práce rovněž i zdrojové kódy, popř. soubory, ze kterých se projekt skládá. Neodevzdání této součásti může být důvodem k neobhájení práce.

Prohlašuji,

- že jsem na bakalářské práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval. V případě publikace výsledků budu uveden jako spoluautor.
- že odevzdaná verze bakalářské práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG jsou totožné.

Ve Zlíně, dne ……………………….

podpis diplomanta

ABSTRAKT

Tato bakalářská práce se zabývá lineárním programováním a jeho uplatněním v úlohách týkajících se bezpečnostních technologií. V teoretické části je popsáno sestavení matematického modelu na nejběžnějších typech úloh, základní pojmy a metody řešení, kterými se dají úlohy řešit. V praktické části je popsán návod, jak používat doplňkovou aplikaci Řešitel tabulkového procesoru Microsoft Excel pro počítání úloh lineárního programování. Dále jsou v praktické části představeny možné slovní úlohy lineárního programování se zaměřením na bezpečnostní technologie, včetně možného postupu a řešení.

Klíčová slova: Lineární programování, matematický model, grafické řešení, simplexová metoda, Řešitel, Microsoft Excel

ABSTRACT

This bachelor thesis deals with linear programming and its application to security technologies. The first theoretical part describes how to set up a mathematical model and defines basic terms and methods of solving linear programming problems. The second practical part especially depicts how to use Microsoft Excel Solver for solving linear programming problems. It also presents particular linear programming problems, especially in relation to security technologies, including their solutions.

Keywords: Linear programming, mathematical model, graphical method, simplex method, Solver, Microsoft Excel

Touto cestou bych rád poděkoval zejména vedoucí mé bakalářské práce, Mgr. Janě Řezníčkové, Ph.D. za cenné rady, vedení a konzultace ohledně mé bakalářské práce. Dále bych chtěl poděkovat mé rodině, která mi po čas mého studia byla vždy na blízku.

Prohlašuji, že odevzdaná verze bakalářské práce a verze elektronicky nahraná do IS/STAG jsou totožné.

OBSAH

ÚVOD

Cílem bakalářské práce je v teoretické rovině popsat lineární programování, včetně principů jeho fungování, a současně v praktické části řešit konkrétní úlohy, zejména se zaměřením na bezpečnostní technologie.

Práce je vedena tak, aby byla srozumitelná zejména uživatelům, kteří s lineárním programováním, jakožto matematickou disciplínou, nepřicházejí do styku každodenně. Vzhledem k tomuto záměru je práce psána tak, aby veškeré kroky řešení konkrétních úloh byly popsány a vysvětleny jednoduše a jasně, a byly tak srozumitelné i mimo matematicko-vědní kruhy.

První kapitola teoretické části práce vymezuje základní pojmy lineárního programování, zejména popisuje sestavení matematického modelu nejběžnějších úloh z praktického života.

Druhá kapitola již obsahuje jednotlivé základní metody, kterými se dají úlohy lineárního programování ze sestaveného matematického modelu řešit. Je zde také popsán vztah mezi primární a duální úlohou, díky jehož znalosti se dá za určitých okolností volit mezi grafickým a simplexovým řešením.

Pro praktickou část byl zvolen a představen tabulkový procesor Microsoft Excel, jenž obsahuje doplněk Řešitel softwaru Microsoft Excel. Doplněk Řešitel představuje velmi užitečného pomocníka při řešení nejrůznějších úloh, včetně celočíselného řešení bez nutnosti hlubší znalosti lineárního programování. Celý postup je demonstrován na konkrétní úloze.

Dále jsou v dané části prezentovány různé úlohy na téma bezpečnostní technologie, včetně popisu sestavení matematického modelu a jeho řešení. V neposlední řadě jsou zde i úlohy, které se nevěnují přímo bezpečnostním technologiím, ale jsou na nich názorně aplikovány metody řešení popsané v teoretické části, tedy grafické řešení a simplexová metoda.

Je potřeba zdůraznit, že metody řešení uvedené v této práci nemusí vždy vést k získání celočíselného řešení. Metody celočíselného programování by mohly být předmětem navazující práce.

I. TEORETICKÁ ČÁST

1 LINEÁRNÍ PROGRAMOVÁNÍ

Lineární programování je matematická disciplína, která se zabývá řešením optimalizačních úloh v různých oblastech praktického života. Konkrétně může jít o řešení některého z níže uvedených reálných problémů:

- *Optimální výrobní program*, jenž podniku může zajistit maximální peněžní zisk za předpokladu, že má omezené zásoby surovin.
- *Směšovací problém*, kdy podnik chce vyrobit směs za co nejnižší cenu s žádaným množstvím určitých složek.
- *Dělení materiálu*, tedy jakým způsobem co nejefektivněji rozdělit různý materiál na menší části.
- *Dopravní problém*, jak naplánovat distribuci zboží na prodejny, aby byly náklady na dopravu co nejnižší.

1.1 Základní pojmy a vlastnosti lineárního programování

Informace v této části jsou čerpány ze zdroje [1], není-li uvedeno jinak.

Následující část bakalářské práce vymezuje základní pojmy lineárního programování a jeho vlastnosti, konkrétně *obecný tvar lineárního programování, účelová funkce, přídatná proměnná, pomocná proměnná, standardní tvar lineárního programování*, *kanonický tvar lineárního programování*, *přípustné řešení*, *přípustná množina, optimální řešení, konvexní množina, konvexní polyedr.*

Obecný tvar lineárního programování lze formulovat takto:

Maximalizujte $f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ (1)

(Minimalizujte)

Za podmínek: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1$ (2)

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

$$\ldots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0 \quad (3)$$

- (1) je funkce, jejíž extrém (maximum či minimum) hledáme. Nazývá se **účelová funkce**.
- (2) a (3) jsou **omezující podmínky**, kde podmínky (2) jsou **vlastní omezení** a podmínky (3) jsou **podmínky nezápornosti**. [2]

Řešit úlohu lineárního programování znamená najít extrém, tj. maximum nebo minimum, lineární funkce na množině určené soustavou lineárních rovnic a nerovnic.

Přídatná proměnná je proměnná vyjadřující rozdíl mezi pravou a levou stranou vlastního omezení ve tvaru *menší rovno* a *větší rovno*.

Pomocná proměnná je proměnná vyjadřující rozdíl mezi pravou a levou stranou vlastního omezení ve tvaru *rovnost* nebo *větší rovno*.

Standardní tvar lineárního programování je takový tvar úlohy, který má vlastní omezení ve tvaru rovnic, ale ještě nebyl doplněn o pomocné proměnné.

Kanonický tvar lineárního programování je takový tvar úlohy, jehož vlastní omezení jsou ve tvaru rovnic, a celá soustava je doplněna o přídatné a pomocné proměnné (více v Kapitole 2.2.1 kanonický tvar).

Přípustné řešení je takové řešení úlohy lineárního programování, které vyhovuje všem omezujícím podmínkám, tj. vlastním omezením a podmínkám nezápornosti.

Přípustná množina je množina všech přípustných řešení dané úlohy lineárního programování.

Optimální řešení je takové přípustné řešení, pro které je hodnota účelové funkce maximální či minimální. [2]

Konvexní množina je taková množina, v níž leží celá úsečka spojující libovolné dva body této množiny.

Konvexní polyedr neboli mnohostěn je konvexní útvar omezen ohraničenou množinou.

1.2 Formulace úloh lineárního programování

V této části bakalářské práce budou představeny ukázkové úlohy, které mohou být řešeny pomocí lineárního programování, aniž by však obsahovaly konečné řešení dané úlohy. Tato kapitola vede k získání znalosti sestavení matematického modelu ze slovní úlohy, bez nějž by slovní úloha lineárního programování nemohla být dále řešena. Takový matematický model se skládá z **účelové funkce**, která se může maximalizovat či minimalizovat, což vyplývá ze zadání úlohy. Dále je nutné sestavit tzv. **omezující podmínky**, které se skládají z vlastních omezení a podmínek nezápornosti. [2]

1.2.1 Optimální výrobní program

V této části je ukázková úloha čerpána ze zdroje [3], není-li uvedeno jinak.

Podnik vyrábí 3 druhy výrobků V_1, V_2, V_3, k jejichž výrobě potřebuje čtyři různé hmoty H_1, H_2, H_3 a H_4. Na výrobu jednoho kusu výrobku V_1 je potřeba 5 kg H_1, 9 kg H_2, 4 kg H_3 a 11 kg H_4. Na výrobu jednoho kusu výrobku V_2 je potřeba 6 kg H_1, 3 kg H_2, 2 kg H_3 a 12 kg H_4. Na výrobu jednoho kusu výrobku V_3 je potřeba 7 kg H_1, 9 kg H_2, 3 kg H_3 a 6 kg H_4. Podnik má k dispozici hmoty v odpovídajícím pořadí v množstvích: 600, 380, 320 a 450 tun. Ceny na trhu jednotlivých výrobků činí v odpovídajícím pořadí: 120, 220 a 280 Kč. Určete podniku výrobní program tak, aby jeho zisk byl maximální.

1.2.1.1 Sestavení matematického modelu úlohy

Nejprve je potřeba sestavit tzv. účelovou funkci. Za jednotlivé druhy výrobků V_1, V_2, V_3 dosadíme proměnné x_1, x_2, x_3. Za vyrobené množství x_1 podnik získá $120x_1$ Kč, za x_2 získá $220x_2$ Kč, za x_3 získá $280x_3$ Kč. Pro maximální zisk budeme funkci maximalizovat a bude tedy vypadat takto:

$f(x) = 120x_1 + 220x_2 + 280x_3.$

Dále musí být matematicky vyjádřena skutečnost, že jsme omezeni skladovými zásobami hmoty. Na vyrobené množství x_1 výrobku V_1 spotřebujeme $5x_1$ kilogramů hmoty H_1. Podobně na množství x_2 výrobku V_2 spotřebujeme $6x_2$ kilogramů hmoty H_1, na množství x_3 výrobku V_3 spotřebujeme $7x_3$ kilogramů hmoty H_1. Výsledná nerovnice bude tedy vypadat:

$5x_1 + 6x_2 + 7x_3 \leq 600000.$

Stejným způsobem je nutné postupovat při získání podmínek pro hmoty H_2, H_3, a H_4. Musíme brát na zřetel to, že nemůžeme vyrábět záporné množství výrobků, to zapíšeme podmínkou $x_j \geq 0, j = 1, 2, 3$.

Slovní úloha získá matematickým zápisem níže uvedené zadání:

Maximalizujte $f(x) = \; 120x_1 + 220x_2 + 280x_3$

za podmínek: $5x_1 + 6x_2 + 7x_3 \leq 600000$

$9x_1 + 3x_2 + 9x_3 \leq 380000$

$4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 320000$

$11x_1 + 12x_2 + 6x_3 \leq 450000$

$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3.$

1.2.2 Směšovací problém

V této části je ukázková úloha čerpána ze zdroje [4], není-li uvedeno jinak.

Podnik vyrábí směsi ze šesti různých složek S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 a S_6. Kvalita výsledné směsi je hodnocena pomocí parametrů P_1, P_2, P_3 a P_4. Výsledná směs musí získat ve skupině parametrů P_1 alespoň 65 bodů, ve skupině parametrů P_2 alespoň 40 bodů, ve skupině P_3 alespoň 55 bodů a ve skupině P_4 alespoň 70 bodů. Složka S_2 má mít ve směsi zastoupení alespoň 40 kg a složka S_5 se musí pohybovat v rozmezí od 20 kg do 100 kg. Pořizovací cena jednotlivých složek a jejich kvalitativní ohodnocení ve skupinách parametrů P_1, P_2, P_3 a P_4 je uvedeno v Tabulce 1. Je nutné určit, jaké množství jednotlivých složek bude výsledná směs obsahovat.

Tabulka 1: Směšovací problém (výchozí údaje) [4]

Složka	Kvalita složky ve skupině parametrů				Pořizovací cena složky [Kč/kg]
	P_1 [body/kg]	P_2 [body/kg]	P_3 [body/kg]	P_4 [body/kg]	
S_1	2	5	5	3	20
S_2	6	7	2	6	110
S_3	5	9	4	4	60
S_4	5	6	9	9	80
S_5	8	6	2	5	75
S_6	7	4	7	3	90

1.2.2.1 Sestavení matematického modelu úlohy

Opět je nejprve potřeba sestavit účelovou funkci. Za jednotlivé složky na vytvoření směsi S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 a S_6 dosadíme proměnné x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 a x_6. Za vyrobené množství x_1 podnik platí pořizovací cenu $20x_1$ Kč, za x_2 platí $110x_2$ Kč, za x_3 platí $60x_3$ Kč, za x_4 platí $80x_4$ Kč, za x_5 platí $75x_5$ Kč, za x_6 platí $90x_6$ Kč. Výslednou funkci budeme minimalizovat, jelikož podnik chce získat požadovanou směs za co nejnižší cenu, a bude vypadat takto:

$f(x) = 20x_1 + 110x_2 + 60x_3 + 80x_4 + 75x_5 + 90x_6$.

Dále musíme matematicky vyjádřit skutečnost, že jsme omezeni minimálním počtem bodů, které musí výsledná směs získat ve skupinách parametrů P_1, P_2, P_3 a P_4. Za jeden kilogram složky S_1 obsažený v celkové směsi získá směs 2 body ve skupině P_1, za kilogram složky S_2 6 bodů, za kilogram složky S_3 5 bodů, za kilogram složky S_4 5 bodů, za kilogram složky S_5 8 bodů a za kilogram složky S_6 7 bodů. Celkový počet bodů musí být alespoň 65 pro parametr P_1. Výsledná nerovnice bude tedy vypadat:

$2x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 8x_5 + 7x_6 \geq 65$.

Stejným způsobem budeme postupovat při získání podmínek pro všechny další bodové hodnocení P_2, P_3 a P_4.

V neposlední řadě musíme brát na zřetel, že podmínka pro minimální množství složky S_2 ve směsi je alespoň 40 kg. To zapíšeme podmínkou $x_2 \geq 40$. Stejným způsobem zapíšeme podmínku pro složku S_5, jež musí být ve směsi zastoupena množstvím 20 kg až 100 kg. Nesmíme opomenout, že nemůžeme mít záporné množství ostatních složek S_1, S_3, S_4 a S_6. To zapíšeme podmínkou $x_j \geq 0, j = 1, 3, 4, 6$.

Slovní úloha získá matematickým zápisem níže uvedené zadání:

Minimalizujte $f(x) = 20x_1 + 110x_2 + 60x_3 + 80x_4 + 75x_5 + 90x_6$

za podmínek:

$$2x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 8x_5 + 7x_6 \geq 65$$

$$5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 6x_4 + 6x_5 + 4x_6 \geq 40$$

$$5x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 9x_4 + 2x_5 + 7x_6 \geq 55$$

$$3x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 9x_4 + 5x_5 + 3x_6 \geq 70$$

$$x_2 \geq 40,\ x_5 \geq 20,\ x_5 \leq 100,\ x_j \geq 0,\ j = 1, 3, 4, 6.$$

1.2.3 Dělení materiálu

V této části je ukázková úloha čerpána ze zdroje [3], není-li uvedeno jinak.

Podnik na předmětnou zakázku potřebuje tyče T_1 a T_2 o délce 80 cm a 90 cm. Vedení rozhodlo, že se podnik zbaví skladových zásob. Na skladu jsou tyče délky 150 cm a 180 cm, a to v množství 200 a 240 kusů. Podnik potřebuje tyčí T_1 v množství alespoň 340 kusů a tyčí T_2 alespoň 300 kusů. Je nutné vyřešit, jakým způsobem nejvhodněji rozřezat tyče, aby řezný odpad byl co nejmenší.

1.2.3.1 Sestavení matematického modelu úlohy

U úlohy řezného typu je nutné nejprve vytvořit tabulku, která vymezí všechny možné způsoby řezu s ohledem na řezný odpad. Skladovou tyč délky 150 cm můžeme rozřezat dvěma způsoby. Prvním způsobem podnik získá 1 kus tyče délky 80 cm s množstvím řezného odpadu 70 cm. Druhým způsobem řezu získáme 1 kus tyče délky 90 cm s množstvím řezného odpadu 60 cm. Stejným způsobem postupujeme i pro skladovou tyč délky 180 cm.

Tabulka 2: Možné způsoby řezu tyčí [3]

	Možné způsoby řezu				
Skladové zásoby	Tyč délky 150 cm		Tyč délky 180 cm		
Způsob řezu	1.	2.	3.	4.	5.
Počet tyčí délky 80 cm [ks]	1	0	2	1	0
Počet tyčí délky 90 cm [ks]	0	1	0	1	2
Množství řezného odpadu [cm]	70	60	20	10	0

Nyní můžeme pokračovat se sestavením matematického modelu úlohy. Nejprve je potřeba sestavit účelovou funkci. Způsoby řezu 1., 2., 3., 4. a 5. budou odpovídat proměnným x_1, x_2, x_3, x_4 a x_5. Jestliže množství řezného odpadu musí být co nejmenší, budeme minimalizovat množství řezného odpadu. Výsledná funkce bude tedy vypadat takto:

$f(x) = 70x_1 + 60x_2 + 20x_3 + 10x_4 + 75x_5 + 0x_6$.

Dále musíme matematicky vyjádřit skutečnost, že tyčí T_1 potřebujeme alespoň 340 kusů. Nerovnice se bude skládat ze součtů kusů 80 cm tyčí, které získáme řezy. Výsledná nerovnice bude tedy vypadat takto:

$1x_1 + 0x_2 + 2x_3 + 1x_4 + 0x_5 \geq 340$.

Stejným způsobem budeme postupovat pro získání podmínek pro tyče T_2.

Nesmíme však zapomenout na to, že skladových tyčí, ze kterých budeme potřebné tyče řezat, máme omezené množství. Tyčí délky 150 cm je 200 ks. Sestavíme tedy podmínku:

$1x_1 + 1x_2 \leq 200$.

Stejným způsobem budeme postupovat pro získání podmínek pro tyče délky 180 cm.

V neposlední řadě musíme brát zřetel na to, že nařezaných tyčí nemůže být záporné množství. To zapíšeme podmínkou $x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5$.

Slovní úloha získá matematickým zápisem níže uvedené zadání:

Minimalizujte $f(x) = 70x_1 + 60x_2 + 20x_3 + 10x_4 + 0x_5$

za podmínek:

$$1x_1 + 0x_2 + 2x_3 + 1x_4 + 0x_5 \geq 340$$

$$0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 2x_5 \geq 300$$

$$1x_1 + 1x_2 \leq 200$$

$$1x_3 + 1x_4 + 1x_5 \leq 240$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

1.2.4 Dopravní problém

V této části je ukázková úloha čerpána ze zdroje [4], není-li uvedeno jinak.

Ze skladů S_1, S_2, S_3 a S_4 je třeba převézt zboží do prodejen P_1, P_2, P_3, P_4 a P_5. V Tabulce 3 jsou uvedeny náklady na distribuci jedné jednotky zboží mezi jednotlivými sklady a prodejnami. Dále tabulka obsahuje údaje o kapacitách všech skladů a požadavcích prodejen. Určete, jak má být zboží distribuováno do prodejen, mají-li být náklady co nejnižší.

Tabulka 3: Dopravní problém (výchozí údaje) [4]

		Prodejny	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
		Požadavky prodejen	200	500	400	300	600
Sklady	Kapacity skladů [ks]		Jednotkové náklady na přepravu ze skladu S_i do prodejny P_j [Kč/ks]				
S_1	800		6	10	5	8	7
S_2	400		4	8	12	6	9
S_3	600		11	15	10	9	5
S_4	200		8	6	2	8	14

1.2.4.1 Sestavení matematického modelu úlohy

Nejprve je potřeba sestavit účelovou funkci. Proměnné u dopravního problému budou vyjadřovat množství zboží, které se bude přepravovat ze skladů do prodejen. Celkové množství zboží tedy vypočítáme jako součin skladů a prodejen, tedy $S \cdot P = 20$.

Při takto vysokém počtu proměnných je potřeba si přidat nové proměnné s odpovídajícími indexy, tedy x_{ij},

kde $i = 1, 2, 3, 4$; $j = 1, 2, 3, 4, 5$.

Do účelové funkce je potřeba zahrnout jednotkové náklady na přepravu zboží ze skladů do prodejen. Ty získáme z Tabulky 3. Náklady na přepravu jednoho kusu zboží x_{11} ze skladu S_1 do prodejny P_1 činí 6 Kč. Náklady na přepravu jednoho kusu zboží x_{12} ze skladu S_1 do prodejny P_2 činí 10 Kč. Stejným způsobem budeme postupovat pro jednotlivé kusy zboží. Výsledná funkce, kterou budeme minimalizovat, bude vypadat takto:

$f(x) = 6x_{11} + 10x_{12} + 5x_{13} + 8x_{14} + 7x_{15} +$

$4x_{21} + 8x_{22} + 12x_{23} + 6x_{24} + 9x_{25} +$

$11x_{31} + 15x_{32} + 10x_{33} + 9x_{34} + 5x_{35} +$

$8x_{41} + 6x_{42} + 2x_{43} + 8x_{44} + 14x_{45}.$

Dále musíme matematicky vyjádřit skutečnost, že jsme omezeni kapacitami skladů S_1, S_2, S_3 a S_4. Ze skladu S_1 se do prodejny P_1 přepraví x_{11} ks zboží, do prodejny P_2 se přepraví x_{12} ks zboží, do prodejny P_3 se přepraví x_{13} ks zboží, do prodejny P_4 se přepraví x_{14} ks zboží, do prodejny P_5 se přepraví x_{15} ks zboží. Kapacita skladu S_1 činí 800 ks zboží. Výsledná rovnice bude tedy vypadat takto:

$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 800.$

Stejným způsobem budeme postupovat pro získání podmínek pro sklady S_2, S_3 a S_4.

Dále musíme matematicky vyjádřit skutečnost, že jsme omezeni požadavky prodejen P_1, P_2, P_3, P_4 a P_5. Do prodejny P_1, která má požadavek na 200 kusů zboží, budeme přepravovat zboží ze skladů S_1, S_2, S_3 a S_4, a to zboží x_{11}, x_{21}, x_{31} a x_{41}. Výsledná rovnice bude tedy vypadat takto:

$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 200.$

Stejným způsobem budeme postupovat pro získání podmínek pro prodejny P_2, P_3, P_4 a P_5.

V neposlední řadě musíme brát na zřetel, že nemůžeme distribuovat záporné množství zboží, to zapíšeme podmínkou $x_{ij} \geq 0$, $i = 1, 2, 3, 4$; $j = 1, 2, 3, 4, 5$.

Slovní úloha získá matematickým zápisem níže uvedené zadání:

Minimalizujte $f(x) = 6x_{11} + 10x_{12} + 5x_{13} + 8x_{14} + 7x_{15} +$

$4x_{21} + 8x_{22} + 12x_{23} + 6x_{24} + 9x_{25} +$

$11x_{31} + 15x_{32} + 10x_{33} + 9x_{34} + 5x_{35} +$

$8x_{41} + 6x_{42} + 2x_{43} + 8x_{44} + 14x_{45}$

za podmínek: $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 800$

$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 400$

$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 600$

$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} = 200$

$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 200$

$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 500$

$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 400$

$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 300$

$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} = 600$

$x_{ij} \geq 0$, $i = 1, 2, 3, 4$; $j = 1, 2, 3, 4, 5$.

2 METODY ŘEŠENÍ ÚLOH LINEÁRNÍHO PROGRAMOVÁNÍ

Tato kapitola se zabývá metodami, pomocí kterých se řeší úlohy lineárního programování. Tyto metody budou dále aplikovány a demonstrovány v praktické části práce na konkrétních vybraných úlohách. Konkrétně se jedná o dvě metody: **grafické řešení** a **simplexovou metodu**.

Jak bylo uvedeno v první kapitole bakalářské práce, je pro řešení slovní úlohy vždy nutné nejprve sestavit matematický model.

2.1 Grafické řešení

Informace v této části jsou čerpány ze zdroje [2], není-li uvedeno jinak.

V případě, že **úloha lineárního programování má dvě nebo tři proměnné**, lze ji řešit **graficky**, a to za pomocí **analytické geometrie**. Pokud má zadání tři proměnné, lze jej řešit v trojrozměrném prostoru. V případě maximálně dvou proměnných, může být zadání řešeno ve dvourozměrném prostoru (rovina). Tato bakalářská práce se zabývá grafickým řešením zadání s nejvýše dvěma proměnnými. [3]

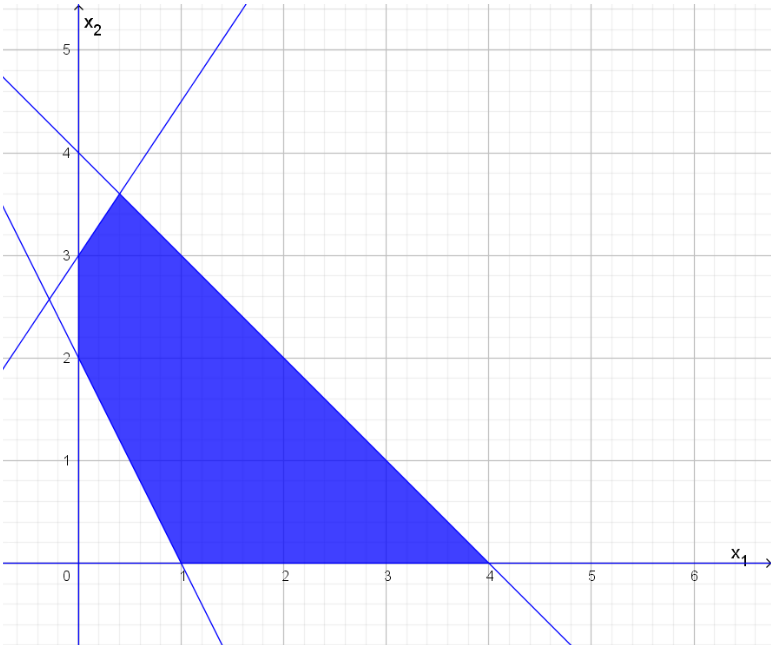
Nejprve je potřeba do **kartézského souřadnicového systému** zakreslit jednotlivé podmínky v sestaveném matematickém modelu úlohy. Graficky se jedná o znázornění polorovin, jejichž průnik bude tvořit množinu všech přípustných řešení. Poté lze pokračovat dvěma možnými způsoby:

- Pomocí **vrstevnic účelové funkce**.
- Dosazením **souřadnic jednotlivých bodů do účelové funkce** a výběrem maximální či minimální hodnoty.

Volba vhodného způsobu závisí na tom, zda je přípustná množina ohraničená či neohraničená.

2.1.1 Přípustná množina ohraničená

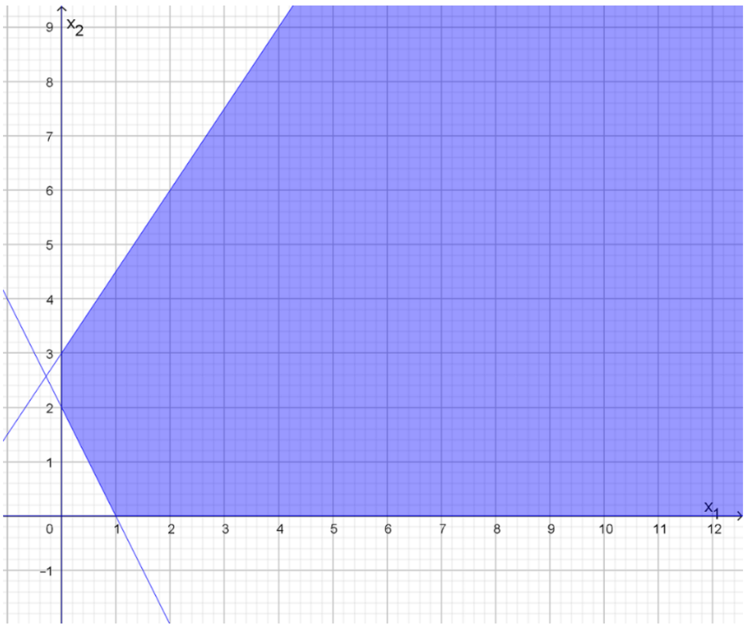
Pakliže se jedná o přípustnou množinu ohraničenou, lze použít oba předchozí způsoby, které vždy povedou ke stejnému řešení. Tím bude bod, v němž účelová funkce nabývá maxima či minima. Jestliže účelová funkce bude nabývat maxima či minima ve dvou různých bodech, nachází se maximum či minimum funkce v každém bodě této přímky protínající oba body uvnitř ohraničené množiny přípustných řešení.



Obrázek 1: Přípustná množina ohraničená

2.1.2 Přípustná množina neohraničená

V případě neohraničené množiny musíme postupovat prvním jmenovaným způsobem, tedy pomocí vrstevnic účelové funkce. Metodu dosazením souřadnic jednotlivých bodů do účelové funkce nelze použít, neboť všechny body neznáme.



Obrázek 2: Přípustná množina neohraničená

2.2 Simplexová metoda

Informace v Kapitole 2.2 Simplexová metoda a všech jejich podkapitolách jsou čerpány ze zdroje [5], není-li uvedeno jinak.

V případě, že zadání obsahuje vyšší počet proměnných než dvě, a nelze ji řešit graficky, přichází v úvahu řešení pomocí **simplexové metody**. Metoda spočívá v sestavení tabulky z koeficientů u jednotlivých proměnných. Úpravy v tabulce jsou založeny na užití maticového počtu. [3]

Před použitím simplexové metody je nutné úlohu v obecném tvaru převést na tvar kanonický. Dále následuje vytvoření simplexové tabulky a provedení simplexového algoritmu do doby, než je nalezeno optimální řešení.

2.2.1 Kanonický tvar

Kanonický tvar lineárního programování je takový tvar úlohy, kde všechna vlastní omezení jsou ve tvaru rovnic [1]. Takového tvaru docílíme doplněním všech nerovnic o přídatné a pomocné proměnné. Přitom záleží na typu omezení:

- Omezení typu ≤ se doplní přídatnými proměnnými s kladným znaménkem.
- Omezení typu = se doplní pomocnými proměnnými s kladným znaménkem.
- Omezení typu ≥ se doplní přídatnými proměnnými se záporným znaménkem a přidá se stejný počet dalších pomocných proměnných s kladným znaménkem.

V účelové funkci mají všechny přídatné a pomocné proměnné koeficient 0.

V případě, že některou nerovnost doplňujeme o pomocné proměnné, definujeme pomocí nich tzv. **pomocnou účelovou funkci** jako součet všech pomocných proměnných. Tento součet získáme sečtením všech rovností soustavy v kanonickém tvaru, v nichž se pomocné proměnné vyskytují.

Pokud by některá z podmínek vlastních omezení měla zápornou pravou stranu, je potřeba takovou podmínku vynásobit hodnotou mínus jedna (je třeba dát si pozor na změnu znaménka nerovnosti). [4]

V případě, že by některá z proměnných byla záporná, je potřeba ji nahradit jak v účelové funkci, tak i v omezujících podmínkách proměnnou s opačným koeficientem. [4]

2.2.2 Simplexový algoritmus

Nejprve se budeme zabývat nejjednodušším případem úloh, kdy všechna vlastní omezení jsou ve tvaru menší rovno.

Uvažujme úlohu v obecném tvaru:

Maximalizujte $f(x) = 15x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 10x_4 + 30x_5$

za podmínek:

$$2x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 1x_4 + 2x_5 \leq 120$$

$$0{,}5x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 0x_4 + 0x_5 \leq 200$$

$$1x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0{,}5x_5 \leq 400$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Levé strany všech tří nerovností doplníme na rovnosti přídatnými proměnnými x_6, x_7, x_8, čímž dostaneme soustavu rovnic v kanonickém tvaru:

$$2x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 1x_4 + 2x_5 + 1x_6 = 120$$

$$0{,}5x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 1x_7 = 200$$

$$1x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0{,}5x_5 + 1x_8 = 400$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.$$

Úlohu v kanonickém tvaru dále přepíšeme do simplexové tabulky. Sloupce tabulky jsou nadepsány našimi proměnnými, kde dvojitou čarou jsou oddělené přídatné proměnné. Do prvního sloupce simplexové tabulky vepíšeme základní proměnné, kterými jsou v tomto případě přídatné proměnné x_6, x_7 a x_8. V posledním sloupci b_j jsou hodnoty pravých stran všech vlastních omezení. Do posledního řádku tabulky vepíšeme koeficienty účelové funkce s opačnými znaménky, jelikož hledáme maximum funkce.

Tabulka 4: Simplexová tabulka

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b_j
x_6	2	0	1	1	2	1	0	0	120
x_7	0,5	1	2	0	0	0	1	0	200
x_8	1	2	0	1	0,5	0	0	1	400
f	-15	-5	-10	-10	-30	0	0	0	0

Poté přichází na řadu simplexový algoritmus, který se skládá z následujících kroků:

Krok 1: **Test optimality**: Simplexový algoritmus končí, pokud jsou všechny koeficienty v posledním řádku, tedy koeficienty v účelové funkci, nezáporné.

Krok 2: **Výběr klíčového sloupce**: Hledá se nejzápornější hodnota posledního řádku.

Krok 3: **Výběr klíčového prvku**: Hledá se klíčový prvek v klíčovém sloupci. Klíčovým prvkem se stává ten prvek, pro který je podíl b_j a odpovídajícího koeficientu v klíčovém sloupci nejmenší a zároveň kladný.

Krok 4: **Eliminace klíčového prvku**: Na pozici klíčového prvku musíme získat hodnotu 1 (vydělením klíčového řádku hodnotou klíčového prvku). Všechny další hodnoty v klíčovém sloupci, včetně posledního řádku, musí získat hodnotu 0.

Toho docílíme pomocí elementárních řádkových úprav, kterými se rozumí:

- Násobení libovolného řádku libovolným nenulovým číslem.
- Sčítání a odčítání řádků.
- Přičtením a odečtením násobku jednoho řádku nenulovým číslem k jinému řádku.

Krok 5: **Provedení kroku 1**.

Řešením simplexovou metodou lze z tabulky vyčíst například následující informace:

- Optimální hodnoty základních a přídatných proměnných.
- Hodnotu účelové funkce.
- Dočerpání či nedočerpání omezení.

Pokud chceme účelovou funkci $f(x)$ minimalizovat, lze úlohu převést na maximalizaci funkce $-f(x)$, tj. do posledního řádku tabulky vepisujeme přímo koeficienty účelové funkce. Klíčový sloupec se hledá podle největší kladné hodnoty posledního řádku. Simplexový algoritmus končí, pokud jsou všechny koeficienty v posledním řádku, tedy koeficienty v účelové funkci, nekladné. Výsledná hodnota účelové funkce je rovna hodnotě s opačným znaménkem v posledním sloupci.

2.2.3 Simplexový algoritmus kombinované úlohy

Obsahuje-li soustava vlastních omezení kromě nerovnosti typu *menší rovno* i omezení typu *rovnost* nebo *větší rovno*, jedná se o tzv. **kombinovanou úlohu**.

Uvažujme kombinovanou úlohu v obecném tvaru:

Maximalizujte $f(x) = 1x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 2x_5$

za podmínek: $1x_1 + 1x_2 \leq 90$

$1x_3 + 1x_4 + 1x_5 \geq 200$

$1x_1 + 0x_2 + 2x_3 + x_4 + 0x_5 \geq 220$

$0x_1 + 20x_2 + 0x_3 + 20x_4 + 40x_5 \leq 5000$

$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5.$

Levé strany všech čtyř nerovností doplníme na rovnosti přídatnými proměnnými x_6, x_7, x_8, x_9 a pomocnou proměnnou y_1, čímž dostaneme soustavu rovnic v kanonickém tvaru:

$1x_1 + 1x_2 + 1x_6 = 90$

$1x_3 + 1x_4 + 1x_5 + 1x_7 = 200$

$1x_1 + 0x_2 + 2x_3 + x_4 + 0x_5 - 1x_8 + 1y_1 = 220$

$0x_1 + 20x_2 + 0x_3 + 20x_4 + 40x_5 + 1x_9 = 5000$

$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, y_1 \geq 0.$

Z pomocných proměnných sestavíme pomocnou účelovou funkci f', která má v našem případě tvar $f' = y_1$. Po převedení do tvaru $f' - y_1 = 0$ a přičtením ke třetí rovnosti soustavy v kanonickém tvaru dostaneme:

$$f' + 1x_1 + 0x_2 + 2x_3 + x_4 + 0x_5 - 1x_8 = 220.$$

Soustavu rovnic v kanonickém tvaru včetně účelové i pomocné účelové funkce v požadovaných tvarech dále přepíšeme do simplexové tabulky. Do prvního sloupce simplexové tabulky vepíšeme všechny základní proměnné, kterými jsou v tomto případě přídatné proměnné x_6, x_7, x_8, x_9 a pomocná proměnná y_1.

Tabulka 5: Simplexová tabulka kombinované úlohy

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	y_1	b_j
x_6	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	90
x_7	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	130
y_1	1	0	2	1	0	0	0	-1	0	1	220
x_9	0	20	0	20	40	0	0	0	1	0	5000
f	-1	-2	0	-1	-2	0	0	0	0	0	0
f'	1	0	2	1	0	0	0	-1	0	0	220

Na rozdíl od předchozího simplexového algoritmu, se simplexový algoritmus kombinované úlohy skládá ze dvou fází. V první fázi minimalizujeme pomocnou účelovou funkci, a to tak, že začneme výběrem klíčového sloupce, kterým je sloupec, v němž má koeficient pomocné účelové funkce největší kladnou hodnotu. Výběr klíčového prvku a další postup již probíhá standardním způsobem. První fáze postupu končí v okamžiku, kdy pomocná účelová funkce má všechny pomocné proměnné rovny nule. Simplexová tabulka po první fázi vypadá následovně:

Tabulka 6: Simplexová tabulka kombinované úlohy po první fázi

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	y_1	b_j
x_6	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	90
x_7	-1/2	0	0	1/2	1	0	1	1/2	0	-1/2	20
x_3	1/2	0	1	1/2	0	0	0	-1/2	0	1/2	110
x_9	0	20	0	20	40	0	0	0	1	0	5000
f	-1	-2	0	-1	-2	0	0	0	0	0	0
f'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0

Ve druhé fázi vynecháme sloupec s pomocnou proměnnou a řádek s pomocnou účelovou funkcí a pokračujeme již obvyklým postupem, jak je uvedeno v podkapitole 2.2.2.

Výsledná simplexová tabulka na konci druhé fáze vypadá následovně:

Tabulka 7: Simplexová tabulka kombinované úlohy na konci druhé fáze

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	b_j
x_2	1	1	0	0	0	1	0	0	0	90
x_5	-1/2	0	0	1/2	1	0	1	1/2	0	20
x_3	1/2	0	1	1/2	0	0	0	-1/2	0	110
x_9	0	0	0	0	0	-20	-40	-20	1	2400
f	0	0	0	0	0	2	2	1	0	220

Z tabulky již vyčteme požadované informace.

2.3 Primární a duální úloha

Informace v této části jsou čerpány ze zdroje [3], není-li uvedeno jinak.

Zadanou úlohu, tedy původní úlohu, označujeme jako **primární úlohu**. Ke každé primární úloze můžeme podle určitých pravidel sestavit úlohu **sdruženou**, tedy **duální úlohu**. Vztah mezi primární a duální úlohou je vzájemný. Lze tedy i z duální úlohy získat úlohu primární. Primární a duální úlohu nicméně neurčuje její tvar, ale záleží na nás, kterou úlohu prohlásíme za primární, zpravidla se jí rozumí ta původní.

Duální úlohu lze sestavit po vytvoření matematického modelu úlohy, tedy ještě před převedením na kanonický tvar. V praxi má tato transformace využití především v ekonomické interpretaci či analýze citlivosti. Pro naše potřeby je významný zejména fakt, že v některých případech můžeme převedením primární úlohy na duální získat úlohu, která bude řešitelná časově méně náročnou metodou, zejména grafickou metodou, než užitím simplexové metody, která mnohdy bývá matematicky náročnější. [6] [7]

Princip převedení primární úlohy na duální užitím maticového zápisu:

Primární úloha:

$$\begin{array}{ll} \text{min/max} & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \text{za podmínek} & \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} \left\{ \begin{matrix} \geq \\ \leq \\ = \end{matrix} \right\} \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \left\{ \begin{matrix} \geq \\ \leq \\ = \end{matrix} \right\} \boldsymbol{0}. \end{array} \tag{4}$$

Duální úloha:

$$\begin{array}{ll} \text{max/min} & \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{b} \\ \text{za podmínek} & \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{y} \left\{ \begin{matrix} \leq \\ \geq \\ = \end{matrix} \right\} \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y} \left\{ \begin{matrix} \geq \\ \leq \\ = \end{matrix} \right\} \boldsymbol{0}, \end{array} \tag{5}$$

kde $\boldsymbol{y}^T = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ je transponovaný vektor duálních proměnných.

Na následující úloze můžeme vidět smysl sestavení duální úlohy z úlohy primární. Ze dvou podmínek o třech neznámých získáváme duální úlohu, jež se skládá ze tří podmínek o dvou neznámých, což nám umožní úlohu dále řešit jednodušší grafickou metodou.

Primární úloha:

Maximalizujte $f(x) = 7x_1 + 3x_2 + 5x_3$

za podmínek:

$1x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 12$

$4x_1 + 2x_2 + 1x_3 \geq 6$

$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3.$

Převedení na duální úlohu:

Minimalizujte $f(x) = 12y_1 + 6y_2$

za podmínek:

$1y_1 + 4y_2 \leq 7$

$3y_1 + 2y_2 \leq 3$

$2y_1 + 1y_2 \leq 5$

$y_j \geq 0, j = 1, 2.$

II. PRAKTICKÁ ČÁST

3 ŘEŠENÍ ÚLOH LINEÁRNÍHO PROGRAMOVÁNÍ VE VYBRANÉM SOFTWARU – MICROSOFT EXCEL

Pro tento bod zadání byl zvolen tabulkový procesor Microsoft Excel (dále jen „Excel“), a to především proto, že Excel je součástí kancelářského balíku Microsoft Office, který každý uživatel osobního počítače využívá. [8]

Pro výpočet optimalizačních úloh Excel obsahuje doplněk s názvem Řešitel. Tento doplněk je poskytován zdarma jakožto součást Excelu. Je však nutné jej jednoduchými kroky do Excelu zavést. Řešitel poté bude aktivně dostupný v každém nově vytvořeném souboru Excelu. [9]

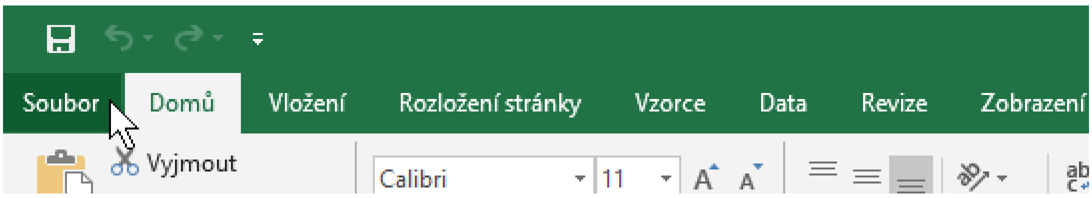
Veškeré operace jsou demonstrovány v operačním systému Windows 10 Home ve verzi Microsoft Office 2016 pro studenty a domácnost. V jiných verzích Microsoft Office se mohou postupy mírně lišit. Nepředpokládají se však odlišnosti zásadního charakteru.

3.1 Zavedení doplňku Řešitel v Excelu

V následující části je podrobně popsáno zavedení doplňku Řešitel do Excelu. Jak bylo uvedeno výše, standardně doplňková aplikace Řešitel není pro uživatele aktivně k dispozici a je nutné ji do Excelu zavést.

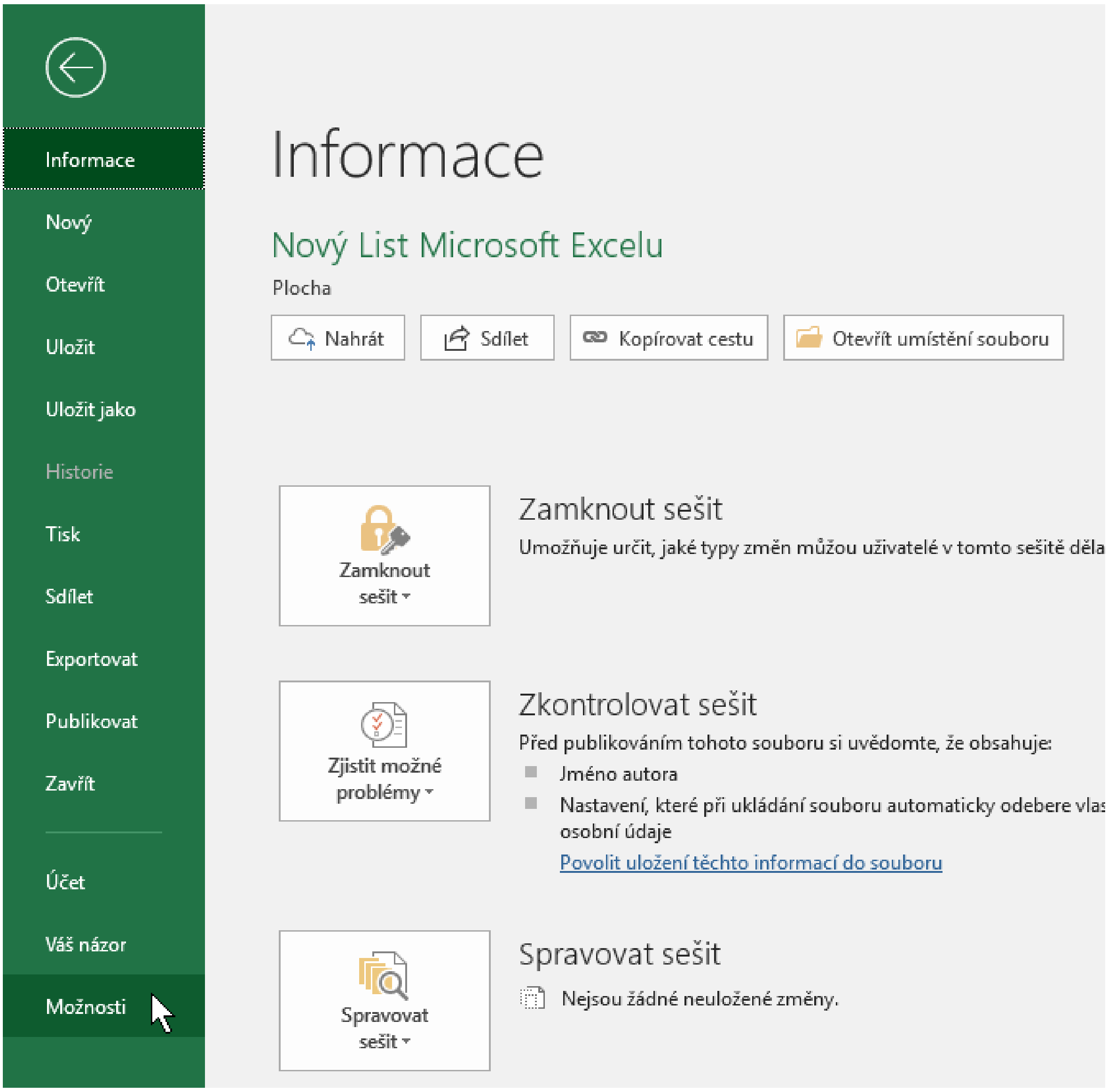
Začneme otevřením nového listu Excelu.

V pásu karet klikneme na kartu „Soubor“.



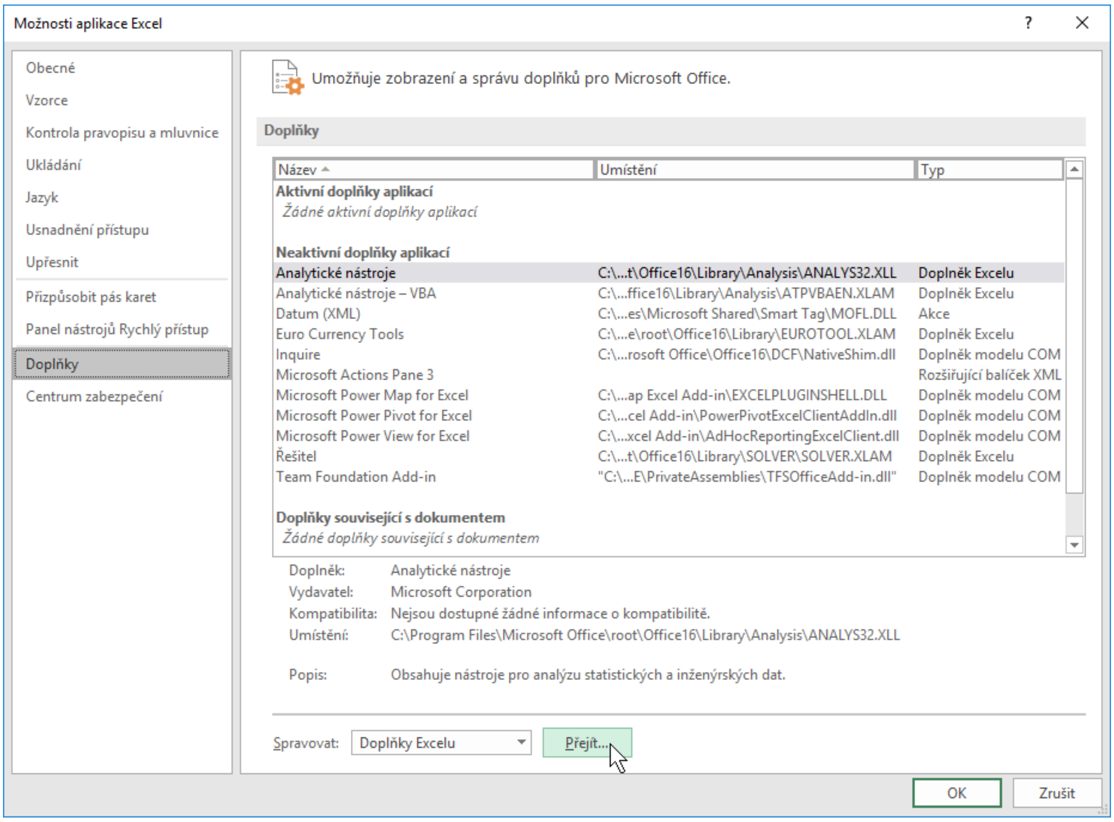
Obrázek 3: Karta Soubor na pásu karet

Rozbalí se nám menu, ve kterém klikneme na poslední položku „Možnosti“.



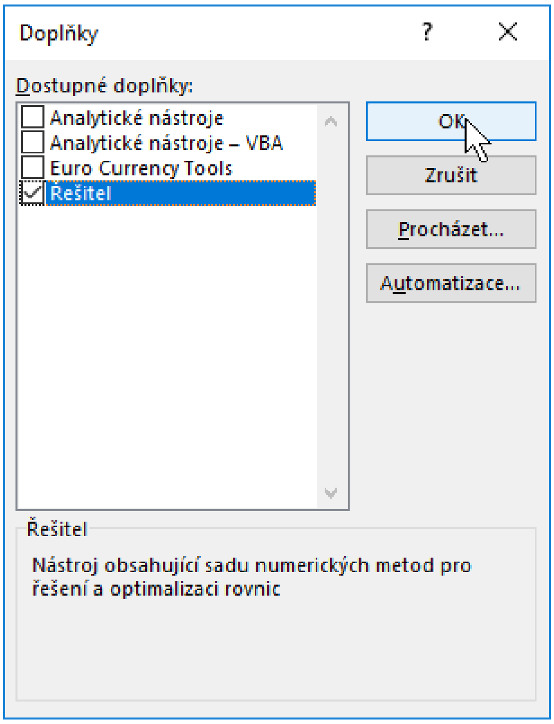
Obrázek 4: Položka Možnosti v kartě Soubor

Zobrazí se nám okno s názvem „Možnosti aplikace Excel“, klikneme na položku „Doplňky“. Zde si lze všimnout, že Řešitel se nachází mezi neaktivními doplňky Excelu. Pro zavedení vybereme možnost u položky „Spravovat: Doplňky Excelu“ a klikneme na tlačítko „Přejít…“.



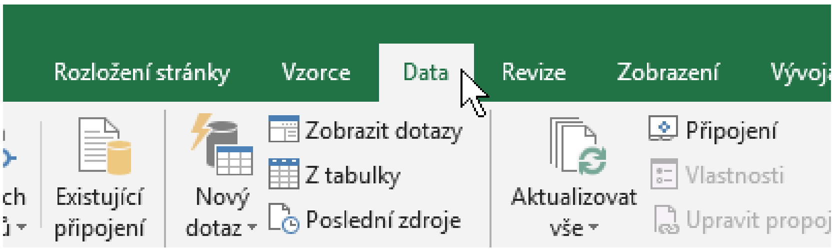
Obrázek 5: Možnosti aplikace Excel

Zobrazí se nám okno „Doplňky“, ve kterém zvolíme doplněk Řešitel a stiskneme tlačítko „OK“.

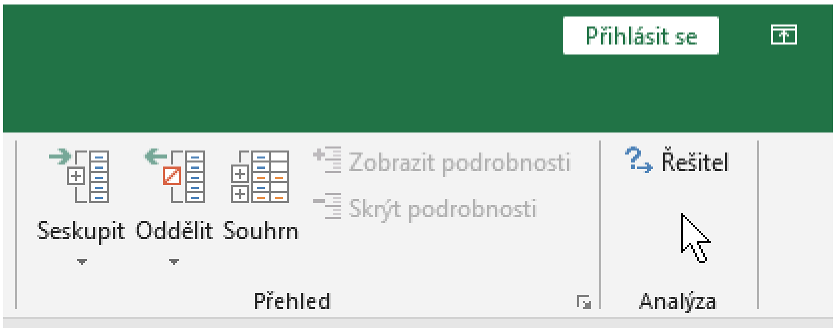


Obrázek 6: Výběr doplňku řešitel

Nyní je doplněk Řešitel aktivní, nalezneme jej mezi příkazy na pásu karet v kartě „Data“, konkrétně u příkazu „Analýza“.



Obrázek 7: Karta Data na pásu karet



Obrázek 8: Aktivní doplněk Řešitel

3.2 Formulace úlohy pro Excel

Na níže uvedené úloze je demonstrováno, jak formulovat úlohu do listu Excelu a pro doplněk Řešitel. Ukázková úloha je čerpána ze zdroje [4].

Slovní zadání:

Podnik vyrábí směsi ze šesti různých složek S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 a S_6. Kvalita výsledné směsi je hodnocena pomocí parametrů P_1, P_2, P_3 a P_4. Výsledná směs musí získat ve skupině parametrů P_1 alespoň 65 bodů, ve skupině parametrů P_2 alespoň 40 bodů, ve skupině P_3 alespoň 55 bodů a ve skupině P_4 alespoň 70 bodů. Složka S_2 má mít ve směsi zastoupení alespoň 40 kg a složka S_5 se musí pohybovat v rozmezí od 20 kg do 100 kg. Pořizovací cena jednotlivých složek a jejich kvalitativní ohodnocení ve skupinách parametrů P_1, P_2, P_3 a P_4 je uvedeno v Tabulce 8. Určete, jaké množství jednotlivých složek bude výsledná směs obsahovat.

Tabulka 8: Směšovací problém (výchozí údaje) [4]

Složka	Kvalita složky ve skupině parametrů				Pořizovací cena složky [Kč/kg]
	P_1 [body/kg]	P_2 [body/kg]	P_3 [body/kg]	P_4 [body/kg]	
S_1	2	5	5	3	20
S_2	6	7	2	6	110
S_3	5	9	4	4	60
S_4	5	6	9	9	80
S_5	8	6	2	5	75
S_6	7	4	7	3	90

Matematický model úlohy:

Minimalizujte $f(x) = 20x_1 + 110x_2 + 60x_3 + 80x_4 + 75x_5 + 90x_6$

za podmínek:

$$2x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 8x_5 + 7x_6 \geq 65$$

$$5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 6x_4 + 6x_5 + 4x_6 \geq 40$$

$$5x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 9x_4 + 2x_5 + 7x_6 \geq 55$$

$$3x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 9x_4 + 5x_5 + 3x_6 \geq 70$$

$$x_2 \geq 40,\ x_5 \geq 20,\ x_5 \leq 100,\ x_j \geq 0,\ j = 1, 3, 4, 6.$$

Nyní si do čistého listu Excelu přepíšeme matematický model úlohy. Výsledný list bude vypadat následovně:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1														
2	**Proměnné:**		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6						
3														
4	**Účelová funkce:**													
5	**Minimalizujte $f(x)$**		20	110	60	80	75	90						
6										**Levá**		**Pravá**	**Rozdíl**	
7										**strana**		**strana**		
8	**Vlastní omezení:**		2	6	5	5	8	7			≥	65		
9			5	7	9	6	6	4			≥	40		
10			5	2	4	9	2	7			≥	55		
11			3	6	4	9	5	3			≥	70		
12														
13	**Podmínky nezápornosti:**			1							≥	40		
14							1				≥	20		
15							1				≤	100		
16			1								≥	0		
17					1						≥	0		
18						1					≥	0		
19								1			≥	0		
20														
21	**Výsledné proměnné:**													
22														
23	**Hodnota účelové funkce:**													
24														
25														
26														

Obrázek 9: Přepis směšovacího problému do listu Excelu

Proměnné x_1 až x_6 v buňkách C2:H2 slouží pouze pro lepší orientaci při přepisu matematického modelu úlohy do listu Excelu, samotný Řešitel s těmito konkrétními buňkami nijak nepracuje.

Jednotlivé hodnoty účelové funkce se nachází v buňkách C5:H5.

Levé strany vlastních omezení se nacházejí v buňkách C8:H11. Později budeme vkládat vzorce, které nám budou počítat výsledné hodnoty levých stran vlastních omezení, pro které si vyhradíme buňky J8:J11. Znaménka nerovností zapisujeme do buněk K8:K11, a pravé strany vlastních omezení vkládáme do buněk L8:L11. Jako ukazatel, zda byla podmínka splněna, budeme používat vzorce pro výpočet rozdílu. Pro něj si vyhradíme buňky M8:M11.

Podmínky nezápornosti se nacházejí v buňkách C13:L19. Podmínky nezápornosti bychom nemuseli vůbec uvádět, pokud by všechny proměnné byly větší nebo rovny nule. Nesmíme zapomenout, že podmínka pro minimální množství složky S_2 ve výsledné směsi je alespoň 40 kg. To je vyjádřeno podmínkou $x_2 \geq 40$, která je přepsána v buňkách C13:L13. Koeficient proměnné x_2 je tedy zapsán v buňce D13 a pravá strana této podmínky v buňce L13. Obdobně postupujeme pro podmínku $x_5 \geq 20$, $x_5 \leq 100$, která je vyjádřena v buňkách C14:L15. V neposlední řadě nesmíme zapomenout na zbylé proměnné $x_j \geq 0$, $j = 1, 3, 4, 6$, které jsou v buňkách C16:L19. Znaménka nerovností jsou opět zapsána v buňkách K13:K19. V buňkách M13:M19 bude později vložen vzorec jako ukazatel splnění jednotlivých podmínek.

Buňky C21:H21 necháváme prázdné. Do nich bude Řešitel vypisovat výsledek jednotlivých proměnných. Hodnotu účelové funkce Řešitel vepíše do buňky B25.

Nyní začneme vkládat potřebné vzorce, bez kterých by Řešitel úlohu lineárního programování nebyl schopen vyřešit. Následující červeně vyznačené buňky budou obsahovat potřebné vzorce.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1														
2	**Proměnné:**		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6						
3														
4	**Účelová funkce:**													
5	**Minimalizujte $f(x)$**		20	110	60	80	75	90						
6										**Levá strana**		**Pravá strana**	**Rozdíl**	
7														
8	**Vlastní omezení:**		2	6	5	5	8	7			≥	65		
9			5	7	9	6	6	4			≥	40		
10			5	2	4	9	2	7			≥	55		
11			3	6	4	9	5	3			≥	70		
12														
13	**Podmínky nezápornosti:**			1							≥	40		
14							1				≥	20		
15							1				≤	100		
16			1								≥	0		
17					1						≥	0		
18						1					≥	0		
19								1			≥	0		
20														
21	**Výsledné proměnné:**													
22														
23	**Hodnota účelové funkce:**													
24														
25														
26														

Obrázek 10: Vyznačení buněk před vložením vzorců

Jako první vložíme do buňky J8 následující vzorec:

=C8*C21+D8*D21+E8*E21+F8*F21+G8*G21+H8*H21

Jedná se o sumu součinů jednotlivých sloupců buněk první podmínky a výsledné proměnné. Díky užití symbolu $ na všech pozicích výsledné proměnné můžeme vzorec zkopírovat směrem dolů, až do buňky J11.

Dále budeme do buňky M8 vkládat vzorec pro výpočet rozdílu levé a pravé strany vlastních omezení. Tento vzorec opět zkopírujeme směrem dolů až do buňky M11. Vzorec bude vypadat takto:

=L8-J8

Nyní budeme vkládat vzorce pro podmínky nezápornosti. Do buňky J13 tedy vložíme následující vzorec:

=C13*C21+D13*D21+E13*E21+F13*F21+G13*G21+H13*H21

Jedná se o obdobu vzorce vkládaného do buňky J8 s tím rozdílem, že tento vzorec odkazuje na první podmínku nezápornosti. Vzorec dále zkopírujeme směrem dolů až do buňky J19. Opět do buňky M13 vložíme vzorec pro výpočet rozdílu levé a pravé strany podmínek nezápornosti, který zkopírujeme směrem dolů až do buňky M19. Vzorec bude vypadat takto:

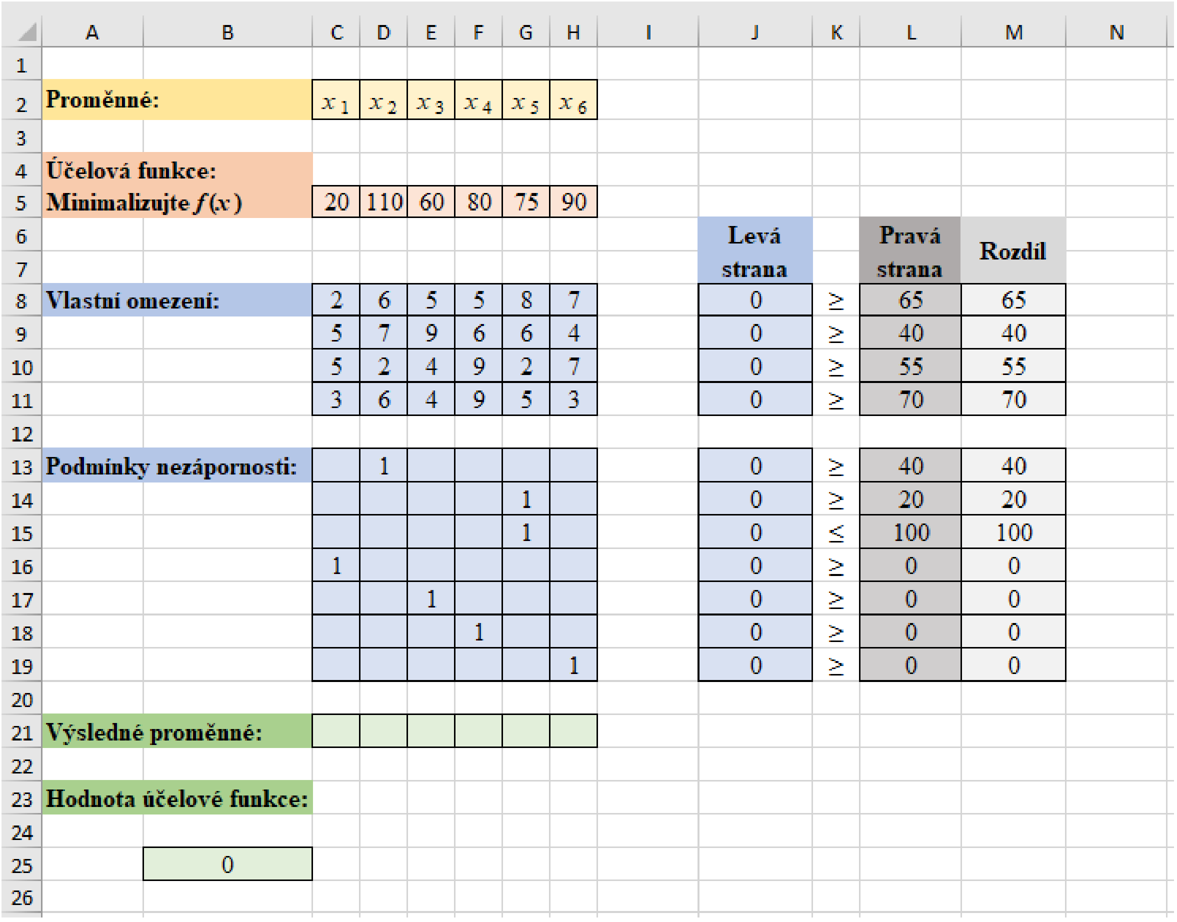
=L13-J13

Na závěr musíme do buňky B25 vložit vzorec pro výpočet hodnoty účelové funkce:

=C5*C21+D5*D21+E5*E21+F5*F21+G5*G21+H5*H21

Jedná o sumu součinů jednotlivých sloupců buněk účelové funkce a výsledných proměnných.

Výsledný list po vložení a nakopírování vzorců bude vypadat následovně:



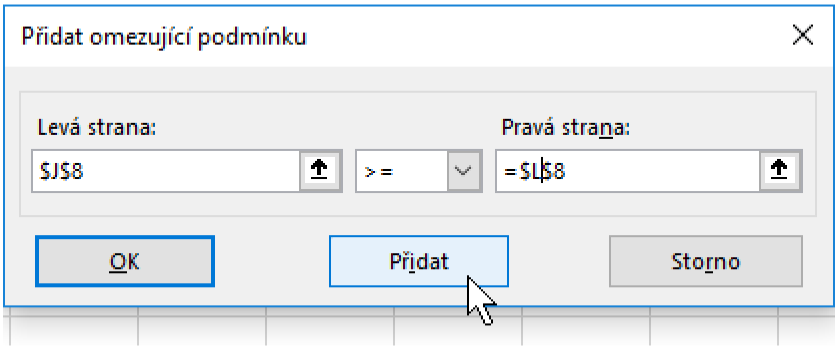
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1														
2	**Proměnné:**		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6						
3														
4	**Účelová funkce:**													
5	**Minimalizujte $f(x)$**		20	110	60	80	75	90						
6										**Levá strana**		**Pravá strana**	**Rozdíl**	
7														
8	**Vlastní omezení:**		2	6	5	5	8	7		0	≥	65	65	
9			5	7	9	6	6	4		0	≥	40	40	
10			5	2	4	9	2	7		0	≥	55	55	
11			3	6	4	9	5	3		0	≥	70	70	
12														
13	**Podmínky nezápornosti:**			1						0	≥	40	40	
14							1			0	≥	20	20	
15							1			0	≤	100	100	
16			1							0	≥	0	0	
17					1					0	≥	0	0	
18						1				0	≥	0	0	
19								1		0	≥	0	0	
20														
21	**Výsledné proměnné:**													
22														
23	**Hodnota účelové funkce:**													
24														
25		0												
26														

Obrázek 11: Směšovací problém po vložení vzorců

3.3 Parametry Řešitele

Nyní přes pás karet na kartě Data vyvoláme dialogové okno Řešitele a budeme do něj postupně vkládat jednotlivé parametry.

Do kolonky „Účelová funkce“ zvolíme buňku hodnoty účelové funkce B23. Chceme minimalizovat naši účelovou funkci, v parametru „Hledat:“ tedy zvolíme „Min“. Do kolonky „Proměnné modelu:“ vybereme buňky C21:H21, tedy naše výsledné proměnné. Nyní budeme vkládat vlastní omezení a podmínky nezápornosti do kolonky „Omezující podmínky:“. Kliknutím na tlačítko „Přidat“ se nám otevře dialogové okno „Přidat omezující podmínku“. Jako první vložíme první vlastní omezení. Do kolonky Levá strana vybereme buňku J8 a zvolíme nerovnostní znaménko větší rovno. Dále do kolonky Pravá strana vybereme buňku L8 a poté klikneme na tlačítko „Přidat“.



Obrázek 12: Vložení omezující podmínky

Obdobně budeme postupovat pro všechny další omezující podmínky a podmínky nezápornosti s tím rozdílem, že u poslední podmínky J19 větší rovno L19 stiskneme tlačítko „OK“. Mezi omezující podmínky můžeme dále přidat například požadavky na naše výsledné proměnné. Například, zda mají být celočíselné, binární apod.

Kolonku „Nastavit podmínky nezápornosti“ již nemusíme volit, protože podmínky nezápornosti jsme přidali do omezujících podmínek již v předchozích krocích. V případě, že bychom měli úlohu, jejíž všechny proměnné by byly větší rovny nule, nemuseli bychom podmínky nezápornosti ručně přidávat a postačilo by pouze zvolit tuto možnost.

Poté již vybereme metodu řešení: „Simplexová metoda“ a klikneme na tlačítko „Možnosti“ pro upřesnění určitých parametrů.

Kliknutím na tlačítko „Možnosti“ můžeme volit další nastavení jednotlivých metod. Nás zajímají především parametry týkající se simplexové metody. Jedná se o:

Přesnost omezující podmínky: Přesnost výpočtu cílové buňky. Čím vyšší je přesnost, tím déle trvá řešení. Výchozí nastavení je 0,000001. [10]

Použít automatické meřítko: Snižuje dopad extrémně velkých nebo malých hodnot na přesnost procesu řešení. Tato možnost je standardně vybrána. [10]

Zobrazovat výsledky iterací: Umožní postupně zobrazit každý krok simplexové metody. [10]

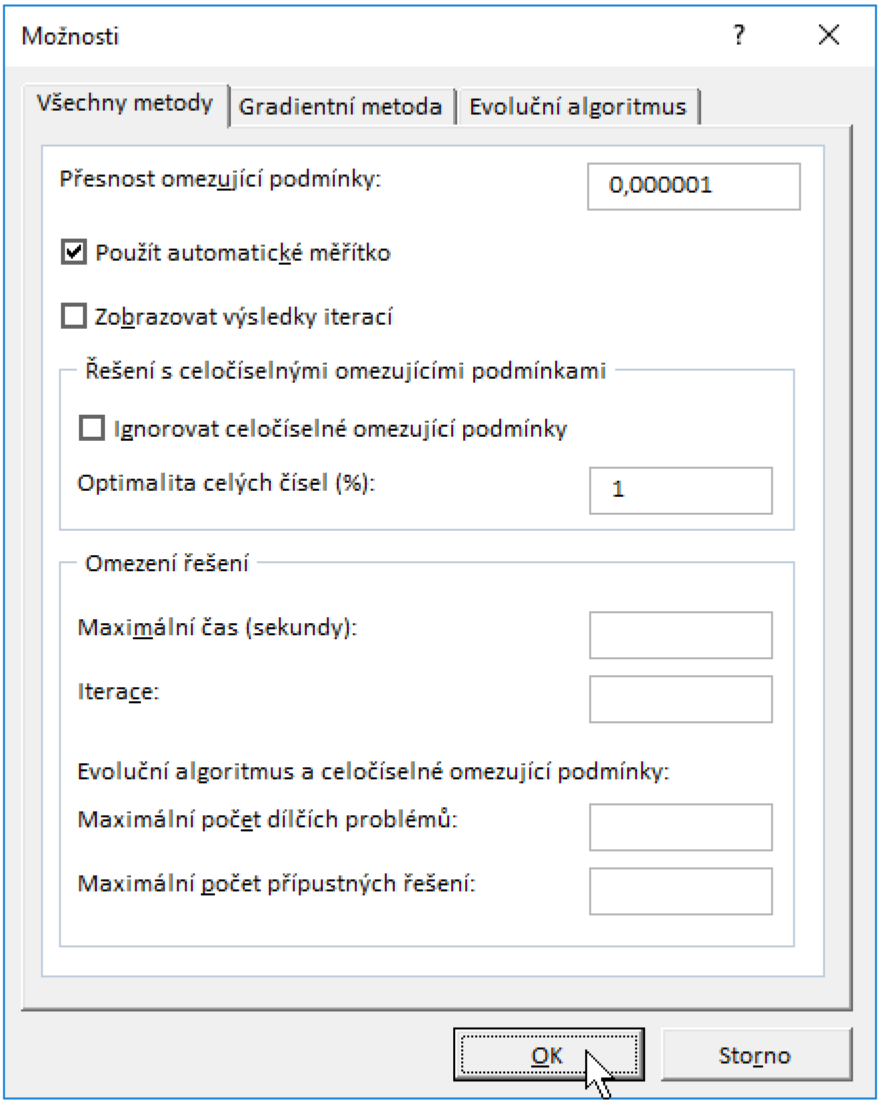
Ignorovat celočíselné omezující podmínky: Požadujeme-li celočíselné řešení, nesmíme tuto možnost zvolit. [10]

Optimalita celých čísel: Horní hranice procentuálního rozdílu mezi objektivní hodnotou nalezeného nejlepšího celočíselného řešení a nejznámějším vázaným optimálním řešením. Výchozí nastavení je 1. [10]

Maximální čas: Maximální čas, do kdy má být řešení spočítáno. [10]

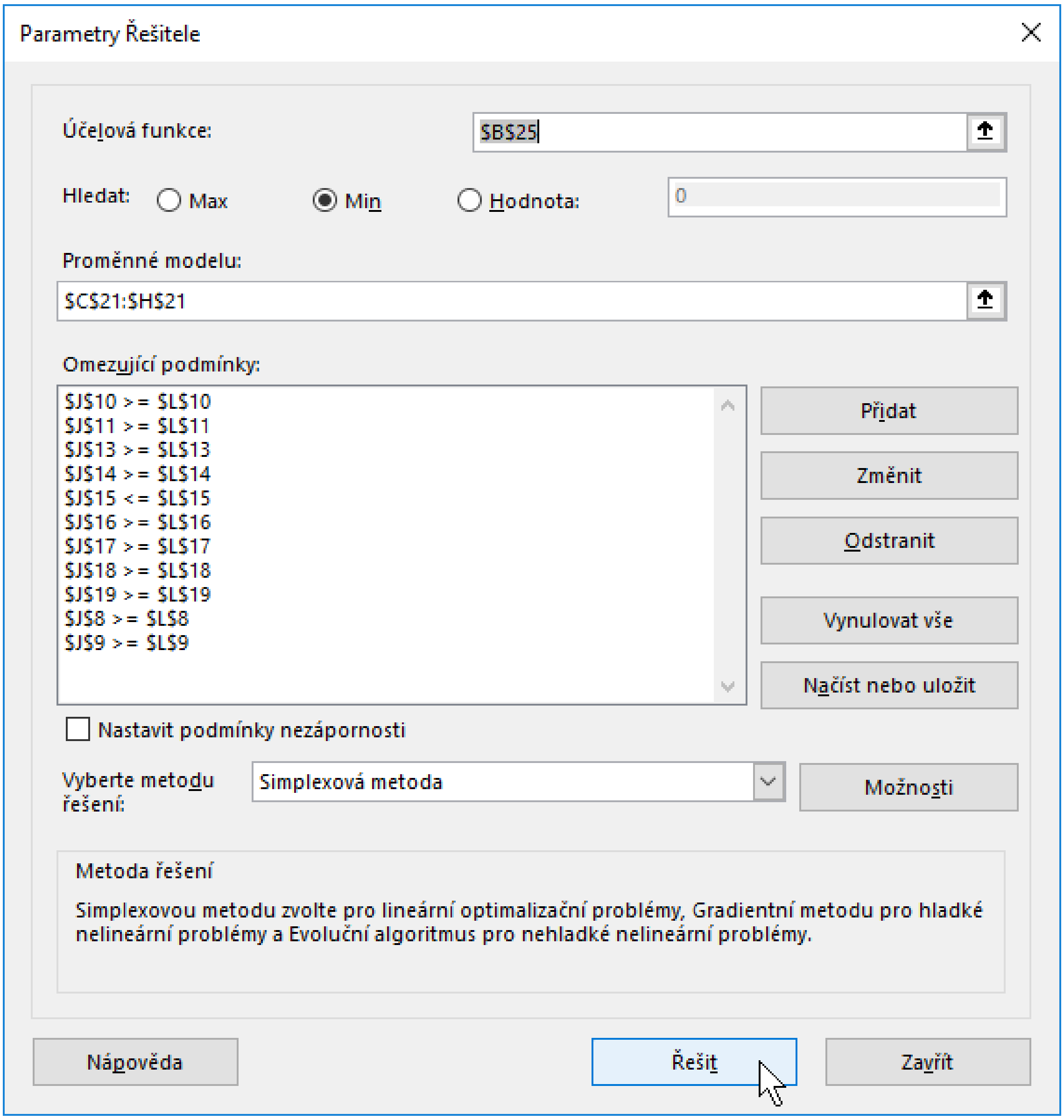
Iterace: Maximální možný počet iterací, která musí být splněna před nalezením řešení. [10]

Nastavíme požadované parametry a naši volbu potvrdíme stisknutím tlačítka „OK".



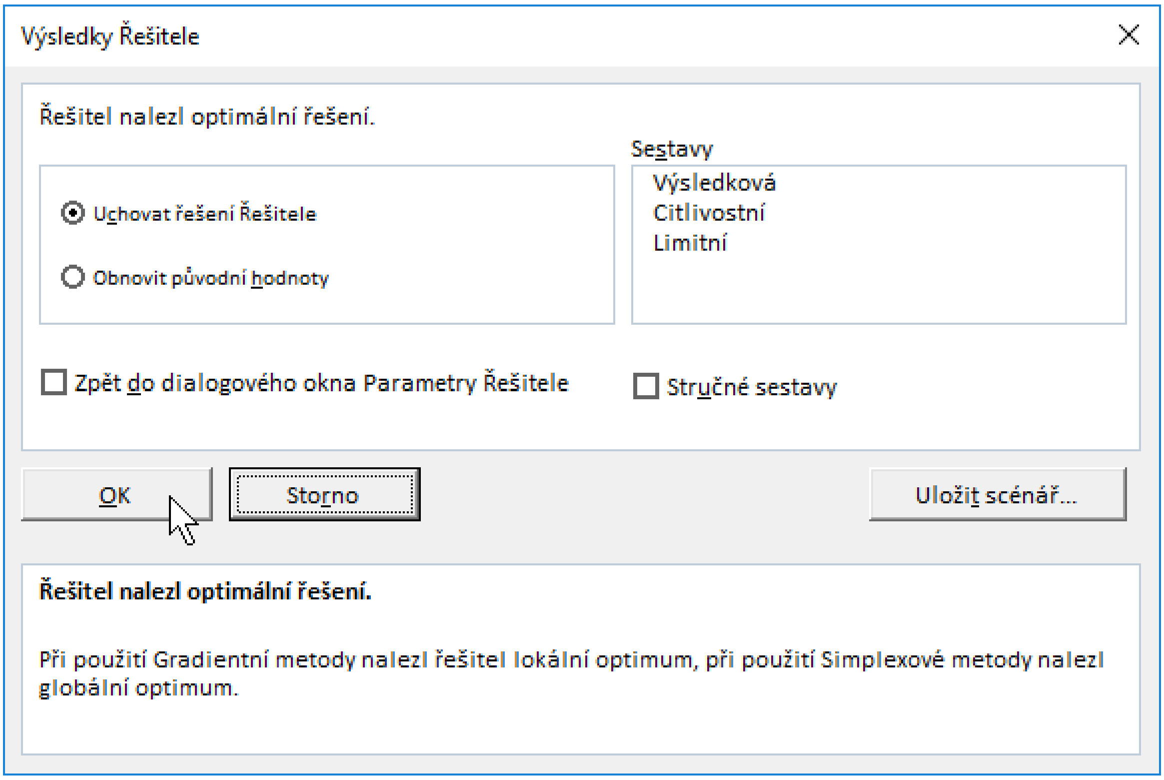
Obrázek 13: Možnosti metod řešení

Nyní už máme vyplněné všechny důležité parametry Řešitele a můžeme stisknutím tlačítka „Řešit" spustit simplexový algoritmus.



Obrázek 14: Vyplněné parametry Řešitele směšovacího problému

Řešitel nalezl optimální řešení. Vybereme možnost „Uchovat řešení Řešitele“ a klikneme na tlačítko „OK“.



Obrázek 15: Výsledky Řešitele

Nyní se nám již do požadovaných hodnot našeho listu vypočítaly žádané výsledky.

V buňkách C21:H21 se nám objevily nové výsledky našich proměnných. Hodnota účelové funkce se spočítala do buňky B25. Všechna vlastní omezení a podmínky nezápornosti byly splněny.

Slovní řešení: Výsledná směs bude obsahovat 40 kg složky S2 a 20 kg složky S5. Směs ve skupině parametrů P1 získá 400 bodů; ve skupině P2 získá 400 bodů; ve skupině P3 získá 120 bodů a ve skupině P4 získá 340 bodů. Cena výsledné směsi bude 5900 Kč.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1														
2	**Proměnné:**		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6						
3														
4	**Účelová funkce:**													
5	**Minimalizujte $f(x)$**		20	110	60	80	75	90						
6										**Levá**		**Pravá**	**Rozdíl**	
7										**strana**		**strana**		
8	**Vlastní omezení:**		2	6	5	5	8	7		400	≥	65	-335	
9			5	7	9	6	6	4		400	≥	40	-360	
10			5	2	4	9	2	7		120	≥	55	-65	
11			3	6	4	9	5	3		340	≥	70	-270	
12														
13	**Podmínky nezápornosti:**			1						40	≥	40	0	
14							1			20	≥	20	0	
15							1			20	≤	100	80	
16			1							0	≥	0	0	
17					1					0	≥	0	0	
18						1				0	≥	0	0	
19								1		0	≥	0	0	
20														
21	**Výsledné proměnné:**		0	40	0	0	20	0						
22														
23	**Hodnota účelové funkce:**													
24														
25		5900												
26														

Obrázek 16: Výsledek směšovacího problému

4 ÚLOHY ZAMĚŘENÉ NA BEZPEČNOSTNÍ TECHNOLOGIE

V následující kapitole jsou řešené úlohy týkající se bezpečnostních technologií.

4.1 Plánování směn fyzické ostrahy

Firma zabývající se poskytováním fyzické ostrahy objektů potřebuje naplánovat rozpis služeb pro své pracovníky ostrahy pro jeden ze svých objektů. Jedná se o jeden pracovní týden, od pondělí do neděle. Délka jedné směny je 10 hodin. Ve všední dny musí být na směně 5 pracovníků ostrahy, v sobotu a v neděli 8 pracovníků ostrahy. Pracovníci na HPP (hlavní pracovní poměr) musí odpracovat právě 5 směn a nikdo nesmí zůstat nevyužit. Počet odpracovaných směn pracovníků na DPP (dohoda o provedení práce) není nijak omezen. Seznam všech pracovníků, typ jejich úvazku a požadavky na směny jsou uvedeny v Tabulce 9 níže.

Tabulka 9: Seznam a informace k pracovníkům

Pracovník:	Číslo pracovníka:	Pracovní poměr:	Poznámky:
Aleš Navrátil	1001	HPP	Požaduje volný víkend.
David Klouzal	1002	HPP	Požaduje volný víkend.
Alena Krátká	1003	HPP	
Petr Nesvačil	1004	HPP	Požaduje volný čtvrtek a pátek.
Tomáš Novák	1005	HPP	
Richard Konečný	2001	DPP	Může pracovat v pátek + víkend.
Petra Částková	2002	DPP	Může pracovat v pondělí a ve středu.
Filip Kareš	2003	DPP	Může pracovat pouze ve čtvrtek.
Martin Maxa	2004	DPP	Může pracovat pouze o víkendu.
Roland Velecký	2005	DPP	Může pracovat pouze v úterý.
Jana Veselá	2006	DPP	Může pracovat pouze o víkendu.
Vojtěch Dorazil	2007	DPP	Nemůže pracovat od úterý do čtvrtka.
Marek Poslušný	2008	DPP	Může pracovat pouze o víkendu.

4.1.1 Sestavení matematické modelu úlohy

Pro větší přehlednost nejprve sestavíme tabulku, v níž bude uvedeno číslo pracovníka a rozpis všech dnů. Barevně budou označeny buňky těch dnů, kdy pracovník nemůže/nechce nastoupit (viz Tabulka 9).

Tabulka 10: Rozpis dnů plánování směn

Číslo pracovníka:	PO	ÚT	ST	ČT	PÁ	SO	NE
1001							
1002							
1003							
1004							
1005							
2001							
2002							
2003							
2004							
2005							
2006							
2007							
2008							

Nyní můžeme začít se sestavením matematického modelu. Záměrně nejprve začneme sestavením omezujících podmínek. V naší úloze je celkem 91 proměnných, přičemž každá proměnná představuje jednotlivou směnu každého pracovníka. Není přitom rozhodující, zda pracovník na směnu nastoupí, či nikoliv. Směna, kdy pracovník může na směnu nastoupit, bude mít koeficient 1. Směnu, na kterou pracovník nemůže/nechce nastoupit, bude mít koeficient 0. Je nutné zohlednit, že pracovníci na HPP musí odpracovat právě 5 směn. Naopak, pracovníci na DPP nejsou nijak omezení.

Vlastní omezení:

$$1x_{11} + 1x_{12} + 1x_{13} + 1x_{14} + 1x_{15} + 0x_{16} + 0x_{17} = 5$$

$$1x_{21} + 1x_{22} + 1x_{23} + 1x_{24} + 1x_{25} + 0x_{26} + 0x_{27} = 5$$

$$1x_{31} + 1x_{32} + 1x_{33} + 1x_{34} + 1x_{35} + 1x_{36} + 1x_{37} = 5$$

$$1x_{41} + 1x_{42} + 1x_{43} + 0x_{44} + 0x_{45} + 1x_{46} + 1x_{47} = 5$$

$$1x_{51} + 1x_{52} + 1x_{53} + 1x_{54} + 1x_{55} + 1x_{56} + 1x_{57} = 5$$

$$0x_{61} + 0x_{62} + 0x_{63} + 0x_{64} + 1x_{65} + 1x_{66} + 1x_{67} \geq 0$$

$$1x_{71} + 0x_{72} + 1x_{73} + 0x_{74} + 0x_{75} + 0x_{76} + 0x_{77} \geq 0$$

$$0x_{81} + 0x_{82} + 0x_{83} + 1x_{84} + 0x_{85} + 0x_{86} + 0x_{87} \geq 0$$

$$0x_{91} + 0x_{92} + 0x_{93} + 0x_{94} + 0x_{95} + 1x_{96} + 1x_{97} \geq 0$$

$0x_{101} + 1x_{102} + 0x_{103} + 0x_{104} + 0x_{105} + 0x_{106} + 0x_{107} \geq 0$

$0x_{111} + 0x_{112} + 0x_{113} + 0x_{114} + 0x_{115} + 1x_{116} + 1x_{117} \geq 0$

$1x_{121} + 0x_{122} + 0x_{123} + 0x_{124} + 1x_{125} + 1x_{126} + 1x_{127} \geq 0$

$0x_{131} + 0x_{132} + 0x_{133} + 0x_{134} + 0x_{135} + 1x_{136} + 1x_{137} \geq 0.$

Nyní musíme vyjádřit skutečnost, že ve všední dny má být na směně 5 pracovníků a v sobotu a v neděli 8 pracovníků. Budeme tedy sčítat proměnné vždy u jednotlivých konkrétních dnů.

$1x_{11} + 1x_{21} + 1x_{31} + 1x_{41} + 1x_{51} + 0x_{61} + 1x_{71} + 0x_{81} + 0x_{91} + 0x_{101} + 0x_{111} + 1x_{121} + 0x_{131} = 5$

$1x_{12} + 1x_{22} + 1x_{32} + 1x_{42} + 1x_{52} + 0x_{62} + 0x_{72} + 0x_{82} + 0x_{92} + 1x_{102} + 0x_{112} + 0x_{122} + 0x_{132} = 5$

$1x_{13} + 1x_{23} + 1x_{33} + 1x_{43} + 1x_{53} + 0x_{63} + 1x_{73} + 0x_{83} + 0x_{93} + 0x_{103} + 0x_{113} + 0x_{123} + 0x_{133} = 5$

$1x_{14} + 1x_{24} + 1x_{34} + 0x_{44} + 1x_{54} + 0x_{64} + 0x_{74} + 1x_{84} + 0x_{94} + 0x_{104} + 0x_{114} + 0x_{124} + 0x_{134} = 5$

$1x_{15} + 1x_{25} + 1x_{35} + 0x_{45} + 1x_{55} + 1x_{65} + 0x_{75} + 0x_{85} + 0x_{95} + 0x_{105} + 0x_{115} + 1x_{125} + 0x_{135} = 5$

$0x_{16} + 0x_{26} + 1x_{36} + 1x_{46} + 1x_{56} + 1x_{66} + 0x_{76} + 0x_{86} + 1x_{96} + 0x_{106} + 1x_{116} + 1x_{126} + 1x_{136} = 8$

$0x_{17} + 0x_{27} + 1x_{37} + 1x_{47} + 1x_{57} + 1x_{67} + 0x_{77} + 0x_{87} + 1x_{97} + 0x_{107} + 1x_{117} + 1x_{127} + 1x_{137} = 8.$

Podmínky nezápornosti:

$x_{ij} \geq 0$, $x_{ij} \leq 1$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13$; $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Vzhledem k náročnosti úlohy je zřejmé, že by řešení simplexovou metodou bylo značně komplikované. Budeme proto volit řešení pomocí doplňku Řešitel v Excelu. Pro tyto účely nepotřebujeme znát účelovou funkci, neboť jak bude později vysvětleno, Řešiteli bude stačit údaj o počtu směn, které je potřeba zaplnit. Nicméně účelovou funkcí by bylo sečtení všech 91 proměnných. Současně by nebylo rozhodující, zda bychom účelovou funkci minimalizovali nebo maximalizovali, neboť hodnota účelové funkce je pevně daná a její výsledek je 41, což představuje počet všech maximálně možných zaplněných směn při dodržení požadovaného počtu pracovníků v jednotlivých dnech.

4.1.2 Řešení

Nyní si do čistého listu Excelu přepíšeme matematický model úlohy včetně všech potřebných vzorců. Výsledný list může vypadat následovně:

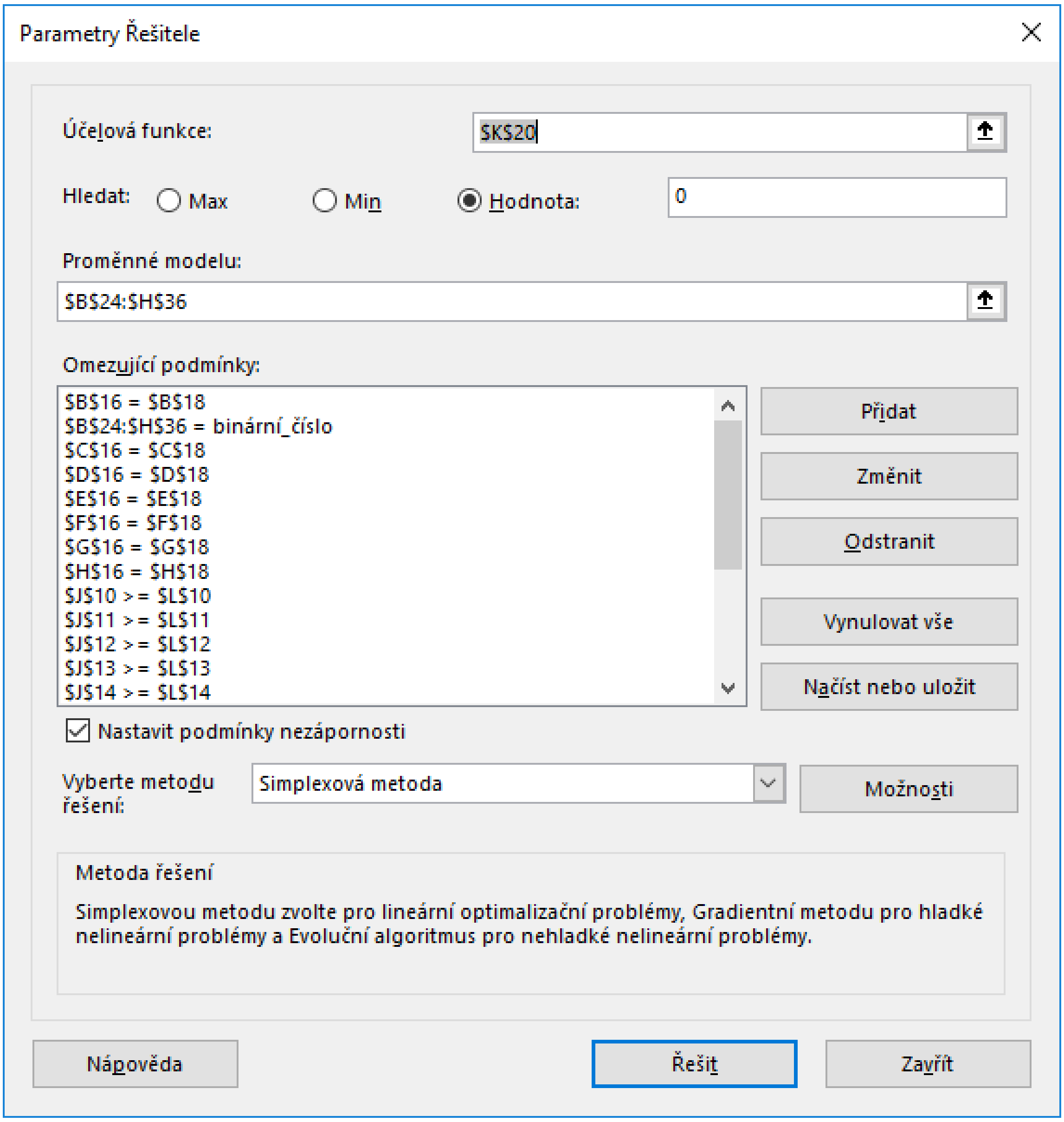
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Číslo pracovníka:	PO	ÚT	ST	ČT	PÁ	SO	NE		Levá strana		Pravá strana	Rozdíl
2	1001	1	1	1	1	1	0	0		0	=	5	5
3	1002	1	1	1	1	1	0	0		0	=	5	5
4	1003	1	1	1	1	1	1	1		0	=	5	5
5	1004	1	1	1	0	0	1	1		0	=	5	5
6	1005	1	1	1	1	1	1	1		0	=	5	5
7	2001	0	0	0	0	1	1	1		0	≥	0	0
8	2002	1	0	1	0	0	0	0		0	≥	0	0
9	2003	0	0	0	1	0	0	0		0	≥	0	0
10	2004	0	0	0	0	0	1	1		0	≥	0	0
11	2005	0	1	0	0	0	0	0		0	≥	0	0
12	2006	0	0	0	0	0	1	1		0	≥	0	0
13	2007	1	0	0	0	1	1	1		0	≥	0	0
14	2008	0	0	0	0	0	1	1		0	≥	0	0
15													
16	Naplněno směn:	0	0	0	0	0	0	0					
17		=	=	=	=	=	=	=					
18	Je potřeba naplnit směn:	5	5	5	5	5	8	8		Hodnota účelové funkce:			
19	Rozdíl	-5	-5	-5	-5	-5	-8	-8					
20											-41		
21	Výsledné proměnné												
22													
23	Číslo pracovníka:	PO	ÚT	ST	ČT	PÁ	SO	NE					
24	1001												
25	1002												
26	1003												
27	1004												
28	1005												
29	2001												
30	2002												
31	2003												
32	2004												
33	2005												
34	2006												
35	2007												
36	2008												

Obrázek 17: Přepis plánování směn do listu Excelu

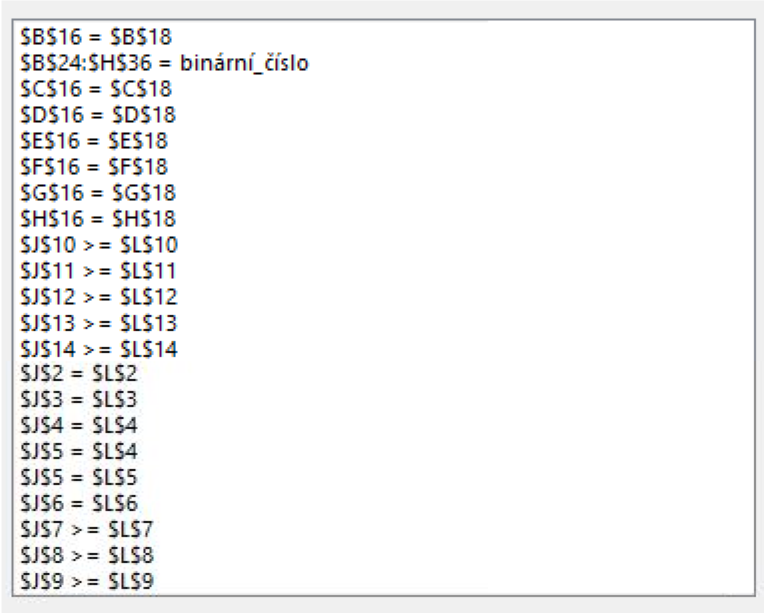
První tabulka představuje matematický model úlohy. V druhé tabulce se nám vypíše nový rozpis směn. Můžeme vidět, že aktuálně chybí naplnit 41 směn, proto je v buňce K20 číslo -41. V této buňce se nachází následující vzorec:

=B19+C19+D19+E19+F19+G19+H19

Jak již bylo zmíněno výše, Řešiteli bude stačit znát požadované číslo na této pozici, což v našem případě bude hodnota 0. Odpadá nám tímto starost s účelovou funkcí, která by se jinak skládala ze součtu všech 91 proměnných.



Obrázek 18: Parametry Řešitele plánování směn



Obrázek 19: Všechny omezující podmínky

Řešení získáme ve druhé tabulce „Výsledné proměnné“. Řešením za dodržení všech omezujících podmínek jsme získali optimální rozpis směn, kdy koeficient 1 značí, že příslušný pracovník má službu, 0 pak znamená, že má volno. Pro lepší orientaci znázorníme volno pracovníka odlišnou barvou.

Tabulka 11: Výsledek rozpisu směn

Číslo pracovníka:	**PO**	**ÚT**	**ST**	**ČT**	**PÁ**	**SO**	**NE**
1001	1	1	1	1	1	0	0
1002	1	1	1	1	1	0	0
1003	0	1	1	1	0	1	1
1004	1	1	1	0	0	1	1
1005	1	0	0	1	1	1	1
2001	0	0	0	0	1	1	1
2002	1	0	1	0	0	0	0
2003	0	0	0	1	0	0	0
2004	0	0	0	0	0	1	1
2005	0	1	0	0	0	0	0
2006	0	0	0	0	0	1	1
2007	0	0	0	0	1	1	1
2008	0	0	0	0	0	1	1

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Číslo pracovníka:	PO	ÚT	ST	ČT	PÁ	SO	NE		Levá strana		Pravá strana	Rozdíl
2	1001	1	1	1	1	1	0	0		5	=	5	0
3	1002	1	1	1	1	1	0	0		5	=	5	0
4	1003	1	1	1	1	1	1	1		5	=	5	0
5	1004	1	1	1	0	0	1	1		5	=	5	0
6	1005	1	1	1	1	1	1	1		5	=	5	0
7	2001	0	0	0	0	1	1	1		3	≥	0	-3
8	2002	1	0	1	0	0	0	0		2	≥	0	-2
9	2003	0	0	0	1	0	0	0		1	≥	0	-1
10	2004	0	0	0	0	0	1	1		2	≥	0	-2
11	2005	0	1	0	0	0	0	0		1	≥	0	-1
12	2006	0	0	0	0	0	1	1		2	≥	0	-2
13	2007	1	0	0	0	1	1	1		3	≥	0	-3
14	2008	0	0	0	0	0	1	1		2	≥	0	-2
15													
16	Naplněno směn:	5	5	5	5	5	8	8					
17		=	=	=	=	=	=	=					
18	Je potřeba naplnit směn:	5	5	5	5	5	8	8		Hodnota účelové funkce:			
19	Rozdíl	0	0	0	0	0	0	0					
20											0		
21	Výsledné proměnné												
22													
23	Číslo pracovníka:	PO	ÚT	ST	ČT	PÁ	SO	NE					
24	1001	1	1	1	1	1	0	0					
25	1002	1	1	1	1	1	0	0					
26	1003	0	1	1	1	0	1	1					
27	1004	1	1	1	0	0	1	1					
28	1005	1	0	0	1	1	1	1					
29	2001	0	0	0	0	1	1	1					
30	2002	1	0	1	0	0	0	0					
31	2003	0	0	0	1	0	0	0					
32	2004	0	0	0	0	0	1	1					
33	2005	0	1	0	0	0	0	0					
34	2006	0	0	0	0	0	1	1					
35	2007	0	0	0	0	1	1	1					
36	2008	0	0	0	0	0	1	1					

Obrázek 20: Vyřešená úloha plánování směn pomocí Řešitele

4.2 Zabezpečení kanceláře detektory kouře

Zákazník si přeje zabezpečit kancelářské prostory detektory kouře. Jedná se o prostor typu *open space* s plochou 2500 metrů čtverečních. Zvolte typ a počet detektorů tak, aby byl kladen důraz na co nejmenší klidovou spotřebu. Cena všech komponent nesmí přesáhnout 27 000 Kč a spotřeba při vyhlášení poplachu celé zóny nesmí být větší než 1300 mA. Pro plochu pokrytí detektory uvažujte rezervu alespoň 10 % z požadované zabezpečované plochy. Všechny typy detektorů jsou spolu kompatibilní a informace o nich jsou uvedeny v Tabulce 12 níže.

Tabulka 12: Informace o detektorech kouře

Označení detektoru	Cena [Kč]	Proudový odběr klid [mA]	Proudový odběr poplach [mA]	Plocha pokrytí [m^2]
DV101	1300	25	49	120
DV203	785	27	54	80
DV111	900	31	64	100
DV213	890	29	45	95

4.2.1 Sestavení matematického modelu

Nejprve je potřeba sestavit účelovou funkci. Za jednotlivé typy detektorů dosadíme proměnné x_1, x_2, x_3 a x_4. Za každý osazený detektor typu DV101 bude klidová spotřeba $25x_1$ mA; za každý osazený detektor typu DV203 bude klidová spotřeba $27x_2$ mA; za každý osazený detektor typu DV111 bude klidová spotřeba $31x_3$ mA; za každý osazený detektor typu DV213 bude klidová spotřeba $29x_4$ mA. Vzhledem k požadavku na co nejmenší klidovou spotřebu budeme výslednou funkci minimalizovat:

$f(x) = 25x_1 + 27x_2 + 31x_3 + 29x_4$.

Dále musíme matematicky vyjádřit skutečnost, že cena všech detektorů nesmí přesáhnout částku 27 000 Kč. Budeme tedy sčítat ceny jednotlivých typů detektorů.

$1300x_1 + 785x_2 + 900x_3 + 890x_4 \leq 27000$.

Stejným způsobem budeme postupovat pro získání podmínek pro proudový odběr při vyhlášení poplachu. Obdobně budeme postupovat pro požadovanou plochu pokrytí detektory, kdy musíme dodržet plochu pokrytí 2750 metrů čtverečních, včetně 10% rezervy. Výsledné nerovnice budou vypadat následovně:

$49x_1 + 54x_2 + 64x_3 + 45x_4 \leq 1300,$

$120x_1 + 80x_2 + 100x_3 + 95x_4 \geq 2750.$

Musíme zohlednit, že nemůžeme osadit záporné množství detektorů. To zapíšeme podmínkou $x_j \geq 0$, $j = 1, 2, 3, 4$.

Slovní úloha získá matematickým zápisem zadání:

Minimalizujte $f(x) =$ $25x_1 + 27x_2 + 31x_3 + 29x_4$

za podmínek: $1300x_1 + 785x_2 + 900x_3 + 890x_4 \leq 27000$

$49x_1 + 54x_2 + 64x_3 + 45x_4 \leq 1300$

$120x_1 + 80x_2 + 100x_3 + 95x_4 \geq 2750$

$x_j \geq 0$, $j = 1, 2, 3, 4$.

Vzhledem k tomu, že požadujeme celočíselné výsledky, neboť informace například o osazení 13,64 kusů detektorů typu DV101 by pro nás neměla žádný praktický užitek, budeme volit řešení opět pomocí doplňku Řešitel v Excelu.

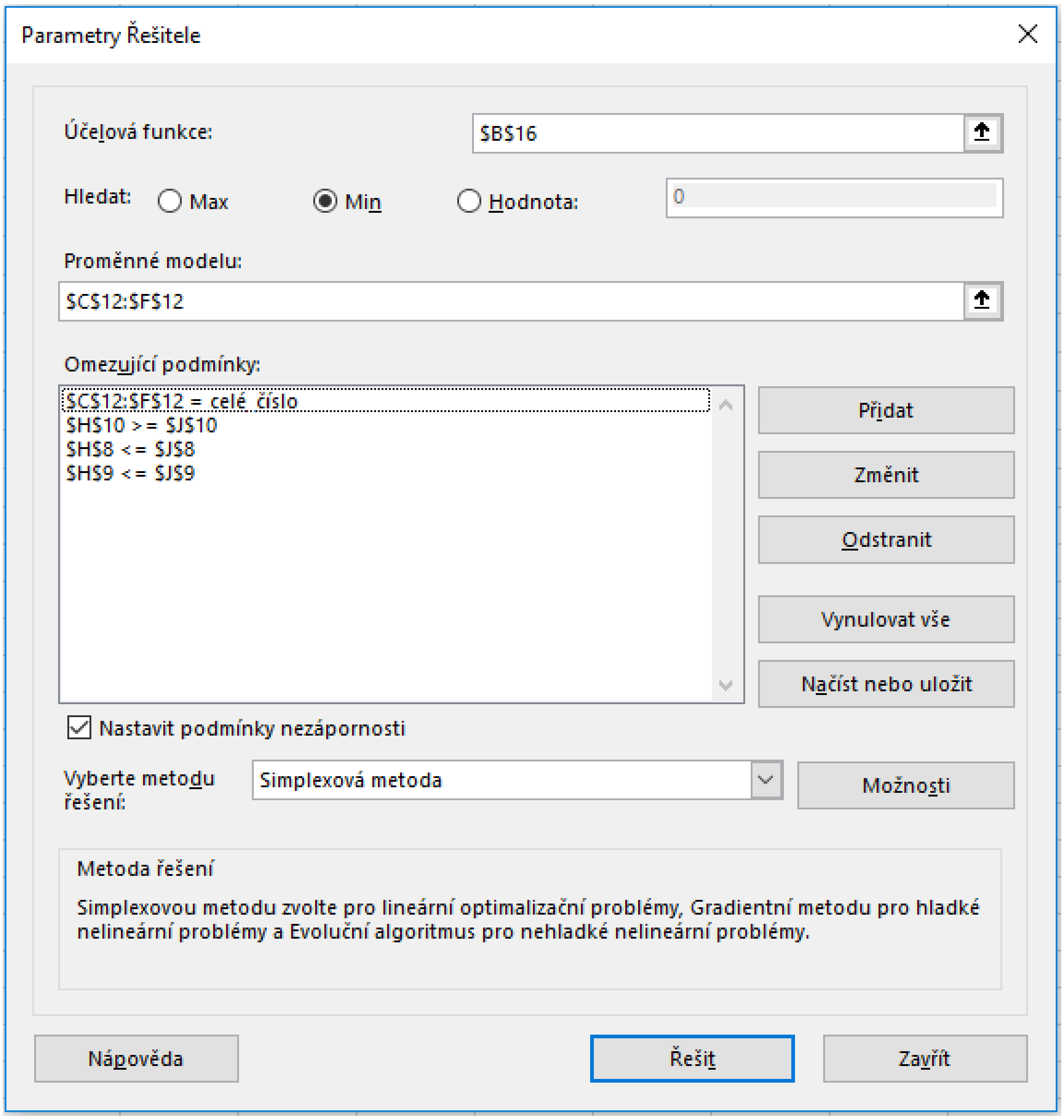
4.2.2 Řešení

Do čistého listu Excelu přepíšeme matematický model úlohy včetně všech potřebných vzorců. Výsledný list může vypadat následovně:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												
2	**Proměnné:**		x_1	x_2	x_3	x_4						
3												
4	**Účelová funkce:**											
5	**Minimalizujte $f(x)$**		25	27	31	29						
6								**Levá**		**Pravá**	**Rozdíl**	
7								**strana**		**strana**		
8	**Vlastní omezení:**		1300	785	900	890		0	≤	27000	27000	
9			49	54	64	45		0	≤	1300	1300	
10			120	80	100	95		0	≥	2750	2750	
11												
12	**Výsledné proměnné:**											
13												
14	**Hodnota účelové**											
15												
16		0										
17												
18												
19												
20												

Obrázek 21: Přepis zabezpečení kanceláře do listu Excelu

Následně vyplníme dialogové okno „Parametry Řešitele“ a zvolíme „Řešit“.



Obrázek 22: Parametry Řešitele zabezpečení kanceláře

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												
2	**Proměnné:**		x_1	x_2	x_3	x_4						
3												
4	**Účelová funkce:**											
5	**Minimalizujte $f(x)$**		25	27	31	29						
6								**Levá**		**Pravá**	**Rozdíl**	
7								**strana**		**strana**		
8	**Vlastní omezení:**		1300	785	900	890		26920	≤	27000	80	
9			49	54	64	45		1281	≤	1300	19	
10			120	80	100	95		2750	≥	2750	0	
11												
12	**Výsledné proměnné:**		7	0	2	18						
13												
14	**Hodnota účelové**											
15												
16		759										
17												

Obrázek 23: Vyřešená úloha zabezpečení kanceláře

Řešení:

$x_1 = 7$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, $x_4 = 18$.

Hodnota účelové funkce $f(x) = 759$.

Slovní řešení:

Kancelář bude osazena 7 detektory typu DV101, 2 detektory typu DV11 a 18 detektory typu DV213. Klidový proudový odběr všech detektorů bude 759 mA. Cena všech detektorů bude 26 920 Kč. Proudový odběr při poplachu bude 1281 mA. Všechny detektory celkem snímají plochu 2750 m^2.

4.3 Výrobní program zbrojního podniku

Podnik zabývající se výrobou zbrojního průmyslu plánuje výrobu na nejbližší čtvrtletní období. Jedná se o úsek výroby brokových zbraní. Podnik plánuje vyrábět 4 typy brokových zbraní. Peněžní náklady na materiál na výrobu jednoho kusu jednotlivých brokových zbraní jsou 4 000 Kč na typ 1, 5 500 Kč na typ 2, 6 000 Kč na typ 3 a 4 500 Kč na typ 4. Vedení podniku na materiál na čtvrtletní výrobu brokových zbraní uvolnilo částku 7 500 000 Kč. Časové náklady na výrobu jednoho kusu jednotlivých typů brokových zbraní jsou 3,5 hodiny na typ 1, 4 hodiny na typ 2, 3,5 hodiny na typ 3, 5 hodin na typ 4. Pro výrobu brokových zbraní jsou vyhrazeny 4 výrobní linky, jejichž celkový počet hodin pro čtvrtletní výrobu činí

6 240 hodin. Předpokládaná prodejní cena jednotlivých brokových zbraní je 34 000 Kč pro typ 1, 39 500 Kč pro typ 2, 37 000 Kč pro typ 3, 50 000 Kč pro typ 4. Stanovte výrobní program tak, aby bylo dosáhnuto maximálního zisku.

4.3.1 Sestavení matematického modelu

Nejprve je potřeba sestavit účelovou funkci. Za jednotlivé typy zbraní dosadíme proměnné x_1, x_2, x_3 a x_4. Za každou prodanou zbraň typu 1 podnik utrží $34000x_1$ Kč; za každou prodanou zbraň typu 2 podnik utrží $39500x_2$ Kč; za každou prodanou zbraň typu 3 podnik utrží $37000x_3$ Kč; za každou prodanou zbraň typu 4 podnik utrží $50000x_4$ Kč. Vzhledem k požadavku na co největší peněžní zisk budeme výslednou funkci maximalizovat:

$f(x) = 34000x_1 + 39500x_2 + 37000x_3 + 50000x_4$.

Dále musíme matematicky vyjádřit skutečnost, že podnik uvolnil částku 7 500 000 Kč na nákup materiálu. Budeme tedy sčítat peněžní náklady na materiál na výrobu jednoho kusu jednotlivých typů zbraní:

$4000x_1 + 5500x_2 + 6000x_3 + 4500x_4 \leq 7500000$.

Stejným způsobem budeme postupovat při sestavení podmínky pro časové náklady na výrobu jednoho kusu jednotlivých typů brokových zbraní:

$3{,}5x_1 + 4x_2 + 3{,}5x_3 + 5x_4 \leq 6240$.

Musíme zohlednit, že nemůžeme vyrobit záporné množství zbraní. To zapíšeme podmínkou $x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4$.

Slovní úloha získá matematickým zápisem zadání:

Maximalizujte $f(x) = 34000x_1 + 39500x_2 + 37000x_3 + 50000x_4$

za podmínek: $4000x_1 + 5500x_2 + 6000x_3 + 4500x_4 \leq 7500000$

$3{,}5x_1 + 4x_2 + 3{,}5x_3 + 5x_4 \leq 6240$

$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4.$

Vzhledem k tomu, že požadujeme celočíselné výsledky, neboť informace například o výrobě 840,479 kusů zbraně typu 1 by pro nás neměla žádný praktický užitek, budeme volit řešení opět pomocí doplňku Řešitel v Excelu.

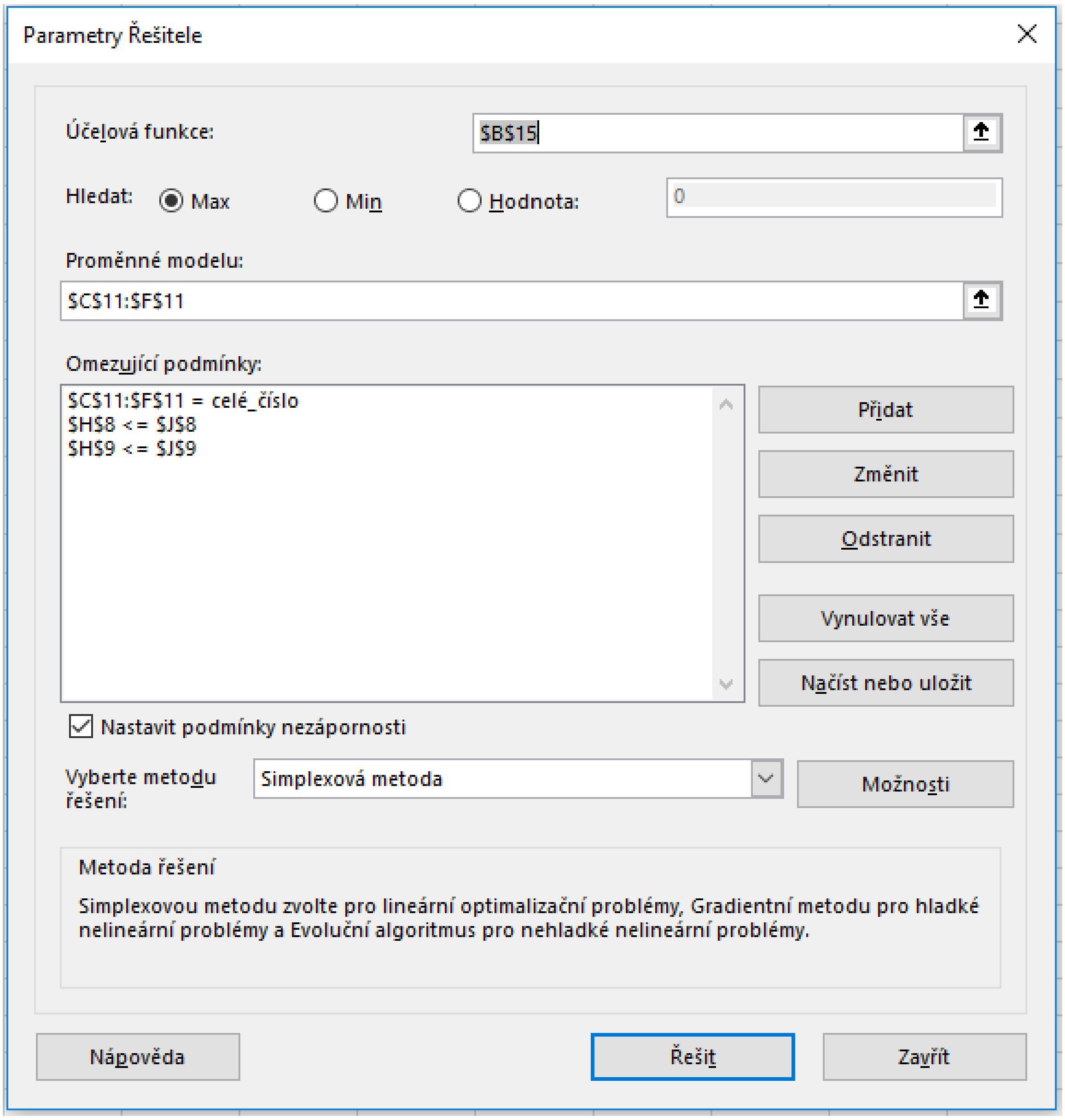
4.3.2 Řešení

Do čistého listu Excelu přepíšeme matematický model úlohy včetně všech potřebných vzorců. Výsledný list může vypadat následovně:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												
2	**Proměnné:**		x_1	x_2	x_3	x_4						
3												
4	**Účelová funkce:**											
5	**Maximalizujte $f(x)$**		34000	39500	37000	50000						
6								**Levá strana**		**Pravá strana**	**Rozdil**	
7												
8	**Vlastní omezení:**		4000	5500	6000	4500		0	≤	7500000	7500000	
9			3,5	4	3,5	5		0	≤	6240	6240	
10												
11	**Výsledné proměnné:**											
12												
13	**Hodnota účelové**											
14												
15		0										
16												
17												

Obrázek 24: Přepis výrobního programu zbrojního podniku do listu Excelu

Následně vyplníme dialogové okno „Parametry Řešitele“ a zvolíme „Řešit“.



Obrázek 25: Parametry Řešitele výrobního programu zbrojního podniku

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												
2	**Proměnné:**		x_1	x_2	x_3	x_4						
3												
4	**Účelová funkce:**											
5	**Maximalizujte $f(x)$**		34000	39500	37000	50000						
6								**Levá**		**Pravá**	**Rozdíl**	
7								**strana**		**strana**		
8	**Vlastní omezení:**		4000	5500	6000	4500		7497000	≤	7500000	3000	
9			3,5	4	3,5	5		6240	≤	6240	0	
10												
11	**Výsledné proměnné:**		0	0	660	786						
12												
13	**Hodnota účelové**											
14												
15		63720000										
16												

Obrázek 26: Vyřešená úloha výrobního programu zbrojního podniku

Řešení:

Při nastavení optimality celých čísel 0 % Řešitel nalezl následující řešení:

$x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 660$ $x_4 = 789$.

Hodnota účelové funkce $f(x) = 63720000$.

Slovní řešení:

Zbrojní podnik pro maximální zisk bude vyrábět 660 kusů brokové zbraně typu 3 a 789 kusů brokové zbraně typu 4. Zisk bude činit 63 720 000 Kč.

5 DALŠÍ ÚLOHY

V následující kapitole jsou úlohy řešené pomocí simplexové metody a grafického řešení.

5.1 Optimální výrobní program I.

Podnik vyrábí 3 druhy výrobků (V_1, V_2, V_3) ze 3 různých součástek (S_1, S_2, S_3). Podnik je omezen skladovými zásobami těchto součástek v počtu 755 kusů součástky S_1, 867 kusů součástky S_2 a 804 kusů součástky S_3. Pro výrobu výrobku V_1 podnik spotřebuje 5 kusů součástky S_1, 3 kusy součástky S_2 a 6 kusů součástky S_3. Pro výrobu výrobku V_2 podnik spotřebuje 4 kusy součástky S_1, 7 kusů součástky S_2 a 3 kusy součástky S_3. Pro výrobu výrobku V_3 podnik potřebuje 6 kusů součástky S_1, 1 kus součástky S_2 a 3 kusy součástky S_3. Podnik za prodej jednoho výrobku V_1 utrží 800 Kč, za prodej jednoho výrobku V_2 utrží 700Kč a za prodej jednoho výrobku V_3 utrží 600 Kč. Stanovte optimální výrobní program tak, aby podnik dosáhl maximálního možného zisku z prodaných výrobků.

5.1.1 Sestavení matematické modelu

Nejprve je potřeba sestavit účelovou funkci. Za jednotlivé druhy výrobků V_1, V_2, V_3 dosadíme proměnné x_1, x_2, x_3. Za vyrobené množství x_1 podnik získá $800x_1$ Kč, za x_2 získá $700x_2$ Kč a za x_3 získá $600x_3$ Kč. Výsledná funkce, kterou budeme maximalizovat, bude tedy vypadat:

$f(x) = 800x_1 + 700x_2 + 600x_3.$

Dále musíme matematicky vyjádřit skutečnost, že jsme omezeni skladovými zásobami součástek. Na vyrobené množství x_1 výrobku V_1 spotřebujeme $5x_1$ kusů součástky S_1. Podobně na množství x_2 výrobku V_2 spotřebujeme $4x_2$ kusů součástek S_1 a na množství x_3 výrobku V_3 spotřebujeme $6x_3$ kusů součástek S_1. Výsledná nerovnice bude tedy vypadat:

$5x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 755.$

Stejným způsobem budeme postupovat pro získání podmínek pro součástky S_2 a S_3. Musíme zohlednit, že nemůžeme vyrábět záporné množství výrobků. To zapíšeme podmínkou $x_j \geq 0$, $j = 1, 2, 3$.

Slovní úloha získá matematickým zápisem zadání:

Maximalizujte $f(x) = 800x_1 + 700x_2 + 600x_3$

za podmínek: $5x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 755$

$3x_1 + 7x_2 + 1x_3 \leq 867$

$6x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 804$

$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3.$

5.1.2 Řešení

Úlohu je vhodné řešit simplexovou metodou, neboť grafické řešení nelze kvůli vyššímu počtu vyskytujících se proměnných použít. Nejprve levé strany všech tří nerovností doplníme na rovnosti přídatnými proměnnými x_4, x_5, x_6, čímž dostaneme soustavu rovnic v kanonickém tvaru:

$5x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 1x_4 = 755$

$3x_1 + 7x_2 + 1x_3 + 1x_5 = 867$

$6x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 1x_6 = 804$

$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$

Úlohu v kanonickém tvaru dále přepíšeme do simplexové tabulky a dle simplexového algoritmu vypočítáme.

Tabulka 13: Optimální výrobní program – simplexový algoritmus

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_j
x_4	5	4	6	1	0	0	755
x_5	3	7	1	0	1	0	867
x_6	**6**	3	3	0	0	1	804
f	-800	-700	-600	0	0	0	0
x_4	0	**3/2**	7/2	1	0	-5/6	85
x_5	0	11/2	-1/2	0	1	-1/2	465
x_1	1	1/2	1/2	0	0	1/6	134
f	0	-300	-200	0	0	400/3	107200
x_2	0	1	7/3	2/3	0	-5/9	170/3
x_5	0	0	-40/3	-11/3	1	**23/9**	460/3
x_1	1	0	-2/3	-1/3	0	4/9	317/3
f	0	0	500	200	0	-100/3	124200
x_2	0	1	-13/23	-3/23	5/23	0	90
x_6	0	0	-120/23	-33/23	9/23	1	60
x_1	1	0	38/23	7/23	-4/23	0	79
f	0	0	7500/23	3500/23	300/25	0	126200

Tučným písmem jsou v tabulce zvýrazněny klíčové prvky. Šedým pozadím jsou zvýrazněny klíčové sloupce.

Řešení:

$x_1 = 79$, $x_2 = 90$, $x_6 = 60$.

Hodnota účelové funkce $f(x) = 126200$.

Slovní řešení:

Podnik pro maximální zisk musí vyrobit a prodat 79 kusů výrobku V_1 a 90 kusů výrobku V_2. Jeho zisk bude v takovém případě činit 126 200 Kč. Skladové zásoby součástek S_1 a S_2 byly vyčerpány. Skladových součástek S_3 zbylo 60 kusů.

5.2 Optimální výrobní program II.

Podnik vyrábí 2 druhy výrobků (V_1, V_2) ze 2 různých součástek (S_1, S_2). Podnik je omezen skladovými zásobami těchto součástek v počtech 150 kusů součástky S_1 a 250 kusů součástky S_2. Pro výrobu výrobku V_1 podnik spotřebuje 1 kus součástky S_1 a 2 kusy součástky S_2. Pro výrobu výrobku V_2 podnik spotřebuje 3 kusy součástky S_1 a 1 kus součástky S_2. Podnik za prodej jednoho výrobku V_1 utrží 250 Kč, za prodej jednoho výrobku V_2 utrží 450 Kč. Stanovte optimální výrobní program tak, aby podnik dosáhl maximálního možného zisku z prodaných výrobků.

5.2.1 Sestavení matematického modelu

Nejprve je nutné sestavit účelovou funkci. Za jednotlivé druhy výrobků V_1 a V_2 dosadíme proměnné x_1 a x_2. Za vyrobené množství x_1 podnik získá $250x_1$ Kč. Za vyrobené množství x_2 získá $450x_2$ Kč. Výsledná funkce bude tedy vypadat:

$z(x) = 250x_1 + 450x_2$.

Dále musíme matematicky vyjádřit skutečnost, že jsme omezeni skladovými zásobami součástek. Na vyrobené množství x_1 výrobku V_1 spotřebujeme $1x_1$ kusů součástky S_1. Podobně na množství x_2 výrobku V_2 spotřebujeme $2x_2$ kusů součástek S_1. Výsledná nerovnice bude tedy vypadat:

$1x_1 + 2x_2 \leq 150$.

Stejným způsobem budeme postupovat pro získání podmínek pro součástku S_2. Nesmíme zapomenout, že nemůžeme vyrábět záporné množství výrobků. To vyjádříme podmínkou $x_j \geq 0, j = 1, 2$.

Slovní úloha získá matematickým zápisem zadání:

Maximalizujte $z(x) = 250x_1 + 450x_2$

za podmínek: $1x_1 + 2x_2 \leq 150$ (1)

$3x_1 + 1x_2 \leq 250$ (2)

$x_j \geq 0, j = 1, 2.$

5.2.2 Řešení

Úlohu budeme řešit grafickou metodou, zejména kvůli nízkému počtu proměnných, kterými jsou v našem případě proměnné x_1 a x_2.

Nejprve zkontrolujeme pravoúhlou soustavu souřadnic s osami x_1 a x_2, do které znázorníme jednotlivé podmínky všech omezení. První podmínka značí polorovinu pod přímkou o rovnici $1x_1 + 2x_2 = 150$, druhá podmínka určuje polorovinu pod přímkou o rovnici $3x_1 + 1x_2 = 250$. Podmínky nezápornosti určují 1. kvadrant souřadného systému. Množinou všech přípustných řešení je čtyřhranný konvexní polyedr se 4 vrcholy: A(0; 0), B(250/3; 0), C(70; 40), D(0; 75).

Dále lze postupovat dvěma způsoby:

Za prvé pomocí **vrstevnic účelové funkce**:

Hodnotu účelové funkce položíme rovnu obecné konstantně, například c, za kterou budeme postupně dosazovat konkrétní čísla, která budeme volit a měla by vést k maximu. Začneme konstantou $c = 0$, tj. $250x_1 + 450x_2 = 0$, z čehož plyne $x_2 = -5/9x_1$. Tím dostáváme první vrstevnici $z = 0$, která je vynesena v obrázku. Postupně budeme za konstantu c dosazovat další hodnoty a tyto skutečnosti znázorňovat do obrázku pomocí vrstevnic. Je zřejmé, že všechny vrstevnice jsou navzájem rovnoběžné. Protože vrstevnice nejsou rovnoběžné se žádnou hranou polyedru, bude maximum funkce ležet v jednom z jeho vrcholů, v našem případě v bodě C(70; 40). V něm účelová funkce nabývá hodnoty 35500. Souřadnice toho bodu jsou $x_1 = 70$, $x_2 = 40$.

Za druhé dosazením **souřadnic jednotlivých bodů do účelové funkce** a výběrem maximální hodnoty:

z (A) = z (0; 0) = 0,

z (B) = z (250/3; 0) = 62500/3,

z (C) = z (70; 40) = 35500,

z (D) = z (0; 75) = 33750.

Z výpočtu je patrné, že se maximum nachází v bodě C(70; 40).

Řešení:

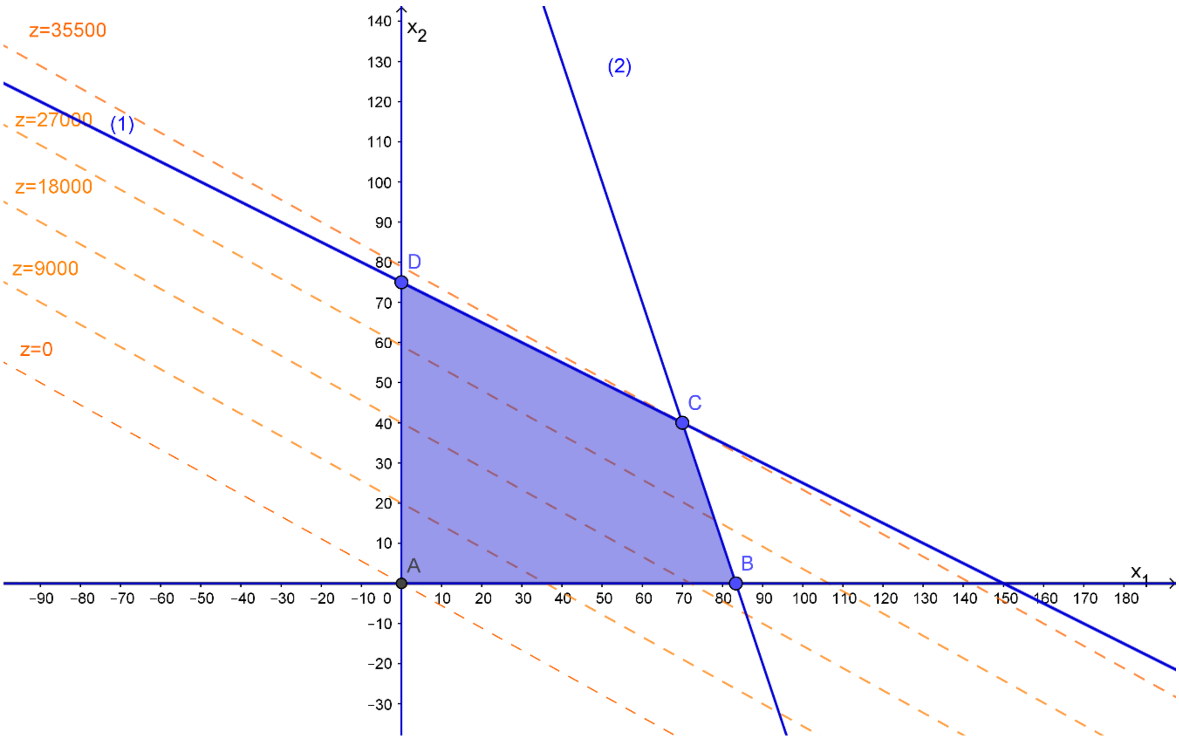
$x_1 = 70$, $x_2 = 40$.

Hodnota účelové funkce $f(x)$ =35500.

Slovní řešení:

Podnik pro maximální zisk musí vyrobit a prodat 70 kusů výrobku V_1 a 40 kusů výrobku V_2. Jeho zisk bude v takovém případě činit 35 500 Kč. Skladové zásoby součástek S_1 a S_2 byly vyčerpány.

Grafické řešení:



Obrázek 27: Grafické řešení optimálního výrobního programu II.

ZÁVĚR

Cílem této bakalářské práce bylo zpracovat literární rešerši na téma lineární programování. Tedy zpracovat téma lineárního programování dle logické posloupnosti od obecných a základních pojmů, přes vybrané metody užívané při řešení úloh lineárního programování až po jejich konkrétní řešení. Pro praktickou část bylo nutné zvolit vhodné praktické úlohy, které mohou být řešeny prostřednictvím lineárního programování. V neposlední řadě také prezentovat řešení vybraných úloh ve vhodném programu.

V úvodu teoretické části bakalářské práce bylo představeno lineární programování jakožto matematická disciplína, kterou lze využít pro řešení různorodých problémů typu výroba zboží, přeprava/distribuce zboží, dělení materiálů atd. Následně byly vymezeny základní pojmy a funkce lineárního programování, které jsou nezbytné jak pro pochopení lineárního programování jako takového, tak i pro pochopení dalších kapitol této bakalářské práce. Dále byly v bakalářské práci formulovány konkrétní úlohy lineárního programování. Na těchto úlohách bylo ukázáno, jak ze slovní úlohy sestavit matematický model, který představuje nezbytný krok pro získání výsledků pomocí metod, které byly v navazující kapitole dále upřesněny. Konkrétně šlo o grafické řešení a simplexový algoritmus. Bylo vysvětleno, že grafické řešení není vhodné volit v situaci, kdy je v úloze obsažen vysoký počet proměnných. Dále bylo popsáno, jak z matematického modelu úlohy sestavit tzv. kanonický tvar, který je nezbytný pro získání výsledku úlohy pomocí simplexového algoritmu. V teoretické rovině byl popsán simplexový algoritmus jak pro úlohy s typem vlastních omezení ve tvaru menší rovno, tak pro kombinované typy úloh, jejichž jednotlivá vlastní omezení obsahují kromě nerovnosti typu menší rovno i omezení typu rovnost nebo větší rovno.

V praktické části bakalářské práce byl jakožto vhodný program, na němž byly prezentovány řešení vybraných úloh lineárního programování, zvolen doplněk Řešitel tabulkového procesoru Microsoft Excel. Prostřednictvím něj bylo demonstrováno, jak lze řešit konkrétní úlohy lineárního programování. Praktické úlohy byly vybírány zejména z oblasti bezpečnostních technologií. Úlohy, jež se daly řešit graficky či simplexovou metodou, byly těmito metodami řešeny. Složitější typy úloh již byly řešeny pomocí Řešitele.

Jedna z úloh řešená pomocí Řešitele byla úloha o plánování směn fyzické ostrahy. Řešením této úlohy byl rozpis směn pracovníků na daný pracovní týden. Princip postupu řešení lze přitom aplikovat k získání rozpisu směn například na celý měsíc dopředu. Tento postup přitom není nijak časově náročný a výsledný optimální rozpis směn se dá dle požadavků pracovníků získat během velmi krátkého času.

Na závěr bych tedy rád shrnul, že jsem se ve své bakalářské práci pokusil vystihnout podstatu lineárního programování prostřednictvím tří základních bodů, a to tak, aby byla srozumitelná i pro uživatele, kterým by lineární programování mohlo pomoci v jejich běžné činnosti, aniž by však měli hluboké matematické znalosti. Tím prvním je vyjádření konkrétního problému, zejména ekonomického charakteru. Dalším krokem je ze slovního zadání konkrétního problému sestavit matematický model a v neposlední řadě tento matematický model adekvátně vyřešit. S ohledem na výše uvedené jsem proto zvolil doplněk tabulkového procesoru Microsoft Excel, jakožto softwaru, se kterým běžně pracují standardní uživatelé. Doufám, že případným čtenářům a zejména studentům nižších ročníků Univerzity Tomáše Bati tak moje bakalářská práce přinese užitek.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

[1] LAGOVÁ, Milada a Josef JABLONSKÝ. *Lineární modely*. Vyd. 3. Praha: Oeconomica, 2014, 300 s. ISBN 978-80-245-2020-9.

[2] FIŠNAROVÁ, Simona. *Základy lineárního programování* [online]. Zemědělská 1, 613 00 Brno, 2012 [cit. 2019-05-17]. Dostupné z: http://user.mendelu.cz/fisnarov/imt/prednasky/lp.pdf. Výukový materiál. Ústav matematiky Mendelovy univerzity v Brně.

[3] LINDA, Bohdan a Josef VOLEK. *Lineární programování*. Vydání 6., opravené a doplněné. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2016. ISBN 978-80-7560-018-9.

[4] BRÁZDOVÁ, Markéta. *Řešené úlohy lineárního programování*. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2011. ISBN 978-80-7395-361-4.

[5] HRABEC, Dušan. *Matematika v bezpečnostních technologiích*. Nad Stráněmi 4511, 760 05 Zlín, 2017. Výukový materiál k předmětu Matematika v bezpečnostních technologiích. Ústav matematiky Fakulty aplikované informatiky Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně.

[6] DVOŘÁK, Jiří. *Dualita úloh lineárního programování a analýza citlivosti* [online]. Technická 2, 616 69 Brno, 2000 [cit. 2019-05-17]. Dostupné z: http://www.uai.fme.vutbr.cz/~jdvorak/vyuka/tsoa/PredO5.ppt.. Výukový materiál. Ústav automatizace a informatiky FSI VUT v Brně.

[7] ŠVRČEK, Jaroslav. *Lineární programování v úlohách*. 2. přeprac. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého, 2003. ISBN 8024407051.

[8] *Jak na Excel* [online]. Brno: Pavel Lasák, 2004 [cit. 2019-05-23]. Dostupné z: https://office.lasakovi.com/excel

[9] Zavedení doplňku Řešitel v Excelu. *Nápověda a školení k Microsoft Office* [online]. Redmond, 980 52, USA: Microsoft Corporation, 2016 [cit. 2019-05-23]. Dostupné z: https://support.office.com/cs-cz/article/zaveden%C3%AD-dopl%C5%88ku-%C5%98e%C5%A1itel-v-excelu-612926fc-d53b-46b4-872c-e24772f078ca

[10] Excel Solver - Change Solver Options. *Frontline Solvers* [online]. 913 Tahoe Blvd # 7, Incline Village, NV 89451, Spojené státy americké: Frontline Systems, 2018 [cit. 2019-05-22]. Dostupné z: https://www.solver.com/excel-solver-change-solver-options

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

HPP	Hlavní pracovní poměr
DPP	Dohoda o provedení práce
Kč	Koruna česká
ks	kus
cm	centimetr
kg	kilogram
mA	miliampér
m^2	metr čtvereční

SEZNAM OBRÁZKŮ

SEZNAM TABULEK

SEZNAM PŘÍLOH

PŘÍLOHA P I: ÚLOHY ŘEŠENÉ POMOCÍ ŘEŠITELE

Příloha obsahuje všechny dokumenty tabulkového procesoru Microsoft Excel, které byly pro potřeby práce vytvořeny. Příloha je umístěna na přiloženém CD.