

# **Analýza robustní stability systémů s parametrickou neurčitostí**

Robust stability analysis of systems with parametric uncertainty

Bc. Lenka Zuzaniková

---

Diplomová práce  
2008



Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně  
Fakulta aplikované informatiky

---

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

Fakulta aplikované informatiky

Ústav řízení procesů

akademický rok: 2007/2008

## ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Bc. Lenka ZUZANIKOVÁ**  
Studijní program: **N 2807 Chemické a procesní inženýrství**  
Studijní obor: **Automatizace a řídicí technika**  
Téma práce: **Analýza robustní stability systémů s parametrickou neurčitostí**

Zásady pro vypracování:

1. Zpracujte literární rešerši dané problematiky. Definujte základní pojmy a myšlenky robustního řízení.
2. Klasifikujte jednotlivé typy parametrických neurčitostí.
3. Popište hlavní (analytické i grafické) nástroje pro analýzu robustní stability systémů s parametrickou neurčitostí.
4. Nastudujte zásady práce s Polynomial Toolboxem pro Matlab se zaměřením na možnosti jeho využití ve zkoumané oblasti.
5. Vytvořte grafické uživatelské rozhraní v prostředí Matlab, které bude umožňovat pohodlné řešení vybraných problémů robustnosti. Funkčnost demonstруйте na vhodně zvolených příkladech.

Rozsah práce:

Rozsah příloh:

Forma zpracování diplomové práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

1. Ackermann, J., et al.: **Robust control – systems with uncertain physical parameters.** Springer-Verlag London, Great Britain, 1993.
2. Barmish, B. R.: **New Tools for Robustness of Linear Systems.** Macmillan, New York, USA, 1994.
3. Bhattacharyya, S. P., Chapellat, H., Keel, L. H.: **Robust control: The parametric approach.** Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1995.
4. Henrion, D.: **Course on polynomial methods for robust control [online].** Merida, Venezuela [cit. 20. ledna 2008]. Dostupné z URL: <http://www.laas.fr/henrion/courses/polyrobust/>.
5. Kučera, V.: **Robustní regulátory.** Automa, roč. 7, č. 6, 2001, str. 43–45.
6. Matusů, R.: **Robust Control of Systems with Parametric Uncertainty: An Algebraic Approach.** Doctoral Thesis, Faculty of Applied Informatics, Tomas Bata University in Zlín, 2007.
7. Polyx: **The Polynomial Toolbox [online].** [cit. 20. ledna 2008]. Dostupné z URL: <http://www.polyx.com/>.
8. Šebek, M., Hromčík, M., Ježek, J.: **Polynomial toolbox 2.5 and systems with parametric uncertainties.** In: **Proceedings of 3rd IFAC Symposium on Robust Control Design, Prague, Czech Republic, 2000.**
9. Šebek, M.: **Robustní řízení [online].** PDF transparenty k předmětu "Robustní systémy", ČVUT Praha [cit. 20. ledna 2008]. Dostupné z URL: [http://dce.felk.cvut.cz/ror/prednasky\\_sebek.html](http://dce.felk.cvut.cz/ror/prednasky_sebek.html).

Vedoucí diplomové práce:

**Ing. Radek Matusů, Ph.D.**

Ústav automatizace a řídicí techniky

Datum zadání diplomové práce:

**22. února 2008**

Termín odevzdání diplomové práce:

**21. května 2008**

Ve Zlíně dne 22. února 2008

prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.  
*děkan*



prof. Ing. Petr Dostál, CSc.  
*ředitel ústavu*

## **ABSTRAKT**

Diplomová práce se věnuje základním pojmům a myšlenkám robustního řízení, klasifikaci jednotlivých typů parametrických neurčitostí a popisu analytických a grafických nástrojů pro analýzu robustní stability systémů. Praktická část je zaměřena na práci s Polynomial Toolboxem pro Matlab se zaměřením na možnosti jeho využití ve zkoumané oblasti. Je vytvořeno grafické uživatelské rozhraní (GUI) v prostředí Matlab, které umožňuje pohodlné řešení vybraných problémů robustní stability. Funkčnost je demonstrována na vhodně zvolených příkladech.

Klíčová slova: robustní řízení, parametrická neurčitost, analýza robustní stability, Matlab, Polynomial Toolbox

## **ABSTRACT**

Diploma thesis is given attention to the elementary notions and thoughts of robust control, classification of individual types of parametric uncertainties and descriptions of analytic and graphic tools for a solution in the analysis of a robust stability of systems. The practical part is directed for a work with Polynomial Toolbox pro Matlab with directivity for the possibilities of the using in a searched sphere. There is created a graphical user interface (GUI) in Matlab, which enables the simple solution of problems in robust stability. Functionality is demonstrated on several suitable examples.

Keywords: robust control, parametric uncertainty, robust stability analysis, Matlab, Polynomial Toolbox

Děkuji panu Ing. Radkovi Matušů, Ph.D., že byl ochotný vést mojí diplomovou práci, za jeho pomoc při řešení problémů, které naskytly během této mé práce a za poskytnutí materiálů.

Souhlasím s tím, že s výsledky mé práce může být naloženo podle uvážení vedoucího diplomové práce, ředitele ústavu a institutu. V případě publikace budu uvedena jako spoluautor.

Prohlašuji, že jsem na celé diplomové práci pracovala samostatně a použitou literaturu jsem citovala.

Ve Zlíně, 21. 05. 2008

.....

podpis

## OBSAH

<b>ÚVOD</b> .....	<b>7</b>
<b>I TEORETICKÁ ČÁST</b> .....	<b>8</b>
<b>1 ZÁKLADNÍ POJMY</b> .....	<b>9</b>
1.1 NEURČITOST.....	9
1.2 MNOŽINA OMEZUJÍCÍ PARAMETRY.....	10
1.3 ROBUSTNÍ STABILITA.....	11
<b>2 TYPY PARAMETRICKÝCH NEURČITOSTÍ</b> .....	<b>15</b>
2.1 NEURČITOST S JEDNÍM PARAMETREM .....	16
2.1.1 Bialasova věta .....	17
2.2 INTERVALOVÁ NEURČITOST (NEZÁVISLÁ).....	19
2.2.1 Množina hodnot (The Value Set).....	20
2.2.2 Kharitonovova věta .....	23
2.2.3 Věta o vyloučení nuly (Zero Exclusion Condition) .....	25
2.3 AFINNÍ LINEÁRNÍ NEURČITOST (POLYTOPICKÁ).....	26
2.3.1 Konvexní množina a konvexní obal.....	27
2.3.2 Polytopy.....	28
2.3.3 Množina hodnot polytopů .....	31
2.3.4 Věta o hranách (The Edge Theorem) .....	33
2.3.5 Ostatní analytické nástroje k řešení robustní stability.....	34
2.3.6 Polytopická neurčitost pro diskrétní systémy.....	35
2.4 MULTILINEÁRNÍ NEURČITOSTI .....	37
2.4.1 Věta o zobrazení (The Mapping Theorem).....	39
2.5 NELINEÁRNÍ NEURČITOSTI.....	43
2.5.1 Polynomiální neurčitost.....	43
2.5.2 Obecná neurčitost.....	45
<b>II PRAKTICKÁ ČÁST</b> .....	<b>47</b>
<b>3 GRAFICKÉ UŽIVATELSKÉ ROZHRANÍ (GUI)</b> .....	<b>48</b>
3.1 POPIS PROGRAMU .....	48
<b>ZÁVĚR</b> .....	<b>54</b>
<b>CONCLUSION</b> .....	<b>55</b>
<b>SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY</b> .....	<b>56</b>
<b>SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK</b> .....	<b>58</b>
<b>SEZNAM OBRÁZKŮ</b> .....	<b>59</b>
<b>SEZNAM TABULEK</b> .....	<b>61</b>
<b>SEZNAM PŘÍLOH</b> .....	<b>62</b>

## ÚVOD

Diplomová práce navazuje na mou bakalářskou práci Robustní stabilita systémů se složitější strukturou neurčitosti obhájenou v roce 2006.

V bakalářské práci byla robustní stabilita zkoumána zejména u složitějších parametrických neurčitostí jako jsou například multilineární, polynomiální, obecná. Byly vhodně zvolené příklady, na kterých byl demonstrován způsob testování robustní stability pomocí vykreslení množiny hodnot a aplikaci věty o vyloučení nuly. Jako softwarové prostředí byl použit Polynomial Toolbox spolu s Matlabem. U zbylých typů neurčitosti, jednoparametrová, intervalová a polytopická, byla analýza robustní stability jen nastíněna. Typy neurčitostí zde byly pouze nadefinovány a popřípadě ukázán i typ příkladu pro ilustraci, který se zde řeší.

Diplomová práce se však zabývá podrobnějším výkladem pojmů neurčitost, množina omezující parametry, robustní stabilita. Je zde popsána klasifikace jednotlivých typů parametrických neurčitostí a podrobněji nadefinovány pojmy s nimi související. U každého typu jsou vysvětleny a na vhodně zvoleném příkladu i ukázány analytické nástroje pro řešení robustní stability. U polytopické neurčitosti je také ukázán příklad pro diskrétní systémy. Pro snadnější a pohodlnější řešení vybraných problémů robustnosti je vytvořeno grafické uživatelské rozhraní (GUI) v softwarovém prostředí Matlab spolu s Polynomial Toolboxem. Funkčnost programu je samozřejmě ukázána později na příkladech.

V posledních několika letech se pojem robustního řízení velmi rozmáhá v oblasti komplexní proměnné [5]. Velkým vývojem právě prochází například analýza robustní stability systémů s parametrickými neurčitostmi, jejichž hlavní nástroje jsou popisovány mnohými autory [1], [2], [3]. Jedním z obrovských úspěchů v analýze robustní stability je objev Kharitonovovy věty [2], [3], [10], která vyřešila elegantním způsobem testování robustní stability systémů s intervalovou neurčitostí, kdy bez ohledu na počet neurčitých parametrů se testují jen čtyři specifické polynomy. Časem byly vyvinuty složitější neurčitosti jako je například polytopická, jejíž řešení vede ke vzniku věty o hranách, věty o 32 hranách a ještě mnohem jednoduššího řešení takových složitých neurčitostí, věty o 16 soustavách [2], [6], [9]. Od polytopických neurčitostí je to kousek k multilineárním, polynomiálním a ještě stále více složitými neurčitostmi, kdy analýza robustní stability je řešena už jen pouze díky velmi univerzálním nástrojům jako vykreslení množiny hodnot a aplikaci věty o vyloučení nuly [3], [4], [9].

## **I. TEORETICKÁ ČÁST**



# 1 ZÁKLADNÍ POJMY

## 1.1 Neurčitost

Velkou část průmyslových procesů lze přibližně modelovat jako lineární časově invariantní systémy a využít matematický aparát přenosových funkcí, i přesto, že je jejich chování někdy mnohem komplikovanější. Proto se snažíme vytvořit dostatečně jednodušší model, ale díky této snaze dochází při vytvoření takového modelu ke vzniku neurčitosti. Neurčitost takového „nominálního“ modelu může pocházet ze zanedbání nelinearit nebo časově proměnných charakteristik procesu. Přítomnost neurčitosti však nelze vyloučit ani u procesů v podstatě lineárních. Fyzikální parametry nejsou nikdy přesně známy a rychlé dynamické jevy se obvykle zanedbávají ve snaze vytvořit model dostatečně jednoduchý, takže při velkých frekvencích není přesně znám ani řád systému.

Neurčitost modelu regulované soustavy se zohlední tak, že vedle navrženého modelu soustavy  $S$  se definuje třída modelů  $S$  jako okolí navrženého modelu. Velikost okolí je pak možné popsat dvěma hlavními způsoby: parametricky, což znamená mezními hodnotami parametrů navrženého modelu, kdy je model „přesný“ až na hodnoty (1 nebo více) parametrů, které v okamžiku návrhu neznáme. Nebo neparametricky, což znamená prostřednictvím omezení rozptylu frekvenční charakteristiky. Tento popis je ale spíše vhodný při zanedbání rychlé dynamiky systému [5].

Pro označení a popis systémů s parametrickými neurčitostmi se často využívá *vektor neurčitých parametrů*  $\mathbf{q}$ , který patří do množiny reálných čísel. Zjednodušeně se tento vektor nazývá neurčitostí. Pokud bude vektor *k-rozměrný*, potom můžeme  $\mathbf{q}$  zapsat jako *k-tici*:

$$\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_k) \in Q \subset R^k \quad (1)$$

Neurčitý systém je popsán přenosem:

$$P(s, q) = \frac{n(s, q)}{d(s, q)} \quad (2)$$

kde  $n(s, q)$  a  $d(s, q)$  jsou polynomy, jejichž koeficienty závisejí na  $\mathbf{q}$ ,

nebo ve formě stavového popisu:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(q)\mathbf{x}(t) \quad (3)$$

kde  $\mathbf{A}(q)$  je neurčitá matice.

## 1.2 Množina omezující parametry

Množina omezující parametry  $Q$  je často uvažována jako předem daná. Obvykle má množina  $Q$  tvar koule (ball), která je ohraničena vhodnou normou, kdy má často střed v bodě nula.

Pro normu  $L_\infty$  vektoru neurčitých parametrů  $\mathbf{q}$  platí:

$$\|\mathbf{q}\|_\infty = \max_i |q_i| \quad (4)$$

Ohraničení je ve tvaru kvádru (box). Pokud máme jednotkový kvádr se středem v

$$q': \|\mathbf{q} - q'\|_\infty \leq 1 \quad (5)$$

pak kvádr často zadáváme po složkách:

$$Q = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^k : q_i^- \leq q_i \leq q_i^+ \text{ pro } i = 1, 2, \dots, k\} \quad (6)$$

Toto ohraničení (kvádr) se nejčastěji používá pro parametrické neurčitosti takových typů, které jsou popsány v kapitole dvě.

Dále zde můžeme pracovat s normou  $L_2$  (Euklidova), pro kterou platí:

$$\|\mathbf{q}\|_2 = \sqrt{\sum q_i^2} \quad (7)$$

Ohraničení je v tomto případě ve tvaru koule (sféra) a můžeme se s ní setkat přímo u sférických neurčitostí. Zde se objevuje vážená Euklidova norma

$$\sum w_i^2 q_i^2 \leq 1 \quad (8)$$

Obecněji pro  $X \in \mathbb{R}^k, W \in \mathbb{R}^{k \times k}$  pozitivně definitní symetrická matice je

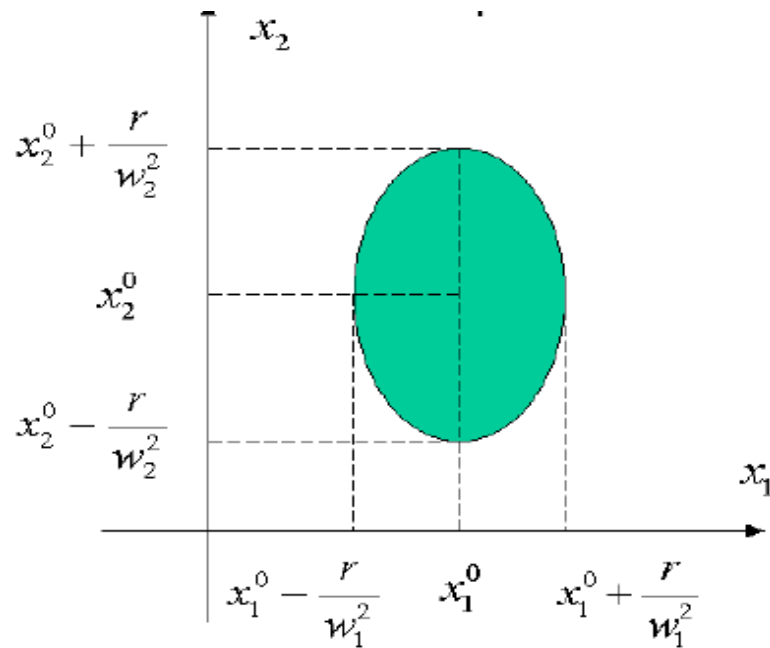
$$\|\mathbf{X}\|_{2,W} = \sqrt{(\mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{X})} \quad (9)$$

V této normě je „koule“

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_{2,W} \leq r \quad (10)$$

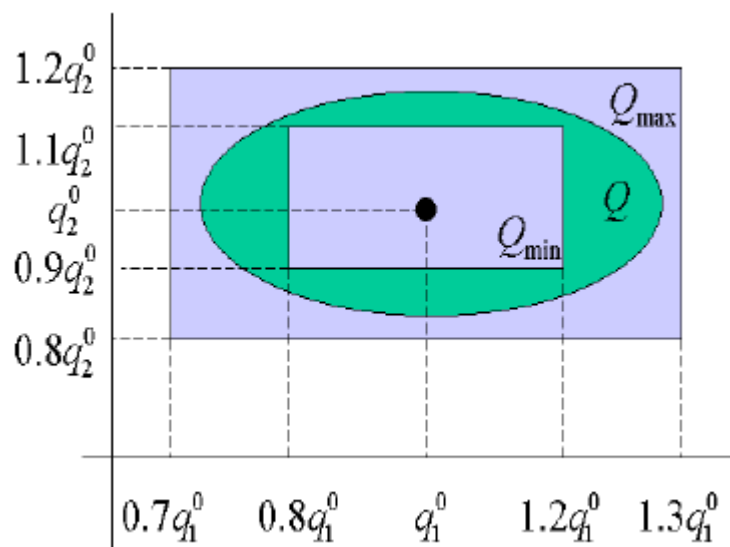
elipsoid se středem v  $\mathbf{x}_0$  a platí

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{W} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \leq r^2 \quad (11)$$



Obr. 1 - Vykreslení elipsoidu v rovině

Neurčité parametry jsou většinou vzájemně nezávislé, takže  $Q$  je přirozeně kvádr. Pokud ale meze nejsou zadány přesně, můžeme místo kvádrů použít sféru (elipsoid).

Obr. 2 - Vykreslení množin  $Q$ 

### 1.3 Robustní stabilita

Robustnost znamená, že určitou vlastnost regulovaného obvodu, kterou regulátor zajišťuje pro navrženou soustavu  $S$ , zajistí zároveň pro celou třídu soustav  $S$ . Tato definice je podložena následující úvahou, že regulační obvod je navržen pro nominální soustavu  $S$ . Skuteč-

ná soustava není známa, ale je možné zajistit, aby požadavky kladené na regulační obvod byly splněny pro každou soustavu z okolí  $S$  nominální soustavy. Tím je nepřímě zajištěno splnění požadavku i pro skutečnou soustavu, pochopitelně za předpokladu, že z množiny  $S$  nevybočuje.

Kromě vymezení přípustného okolí nominální soustavy je podle definice třeba vztáhnout robustnost na jednu konkrétní vlastnost regulačního obvodu. Jde o vlastnost spíše kvalitativní než kvantitativní. Těžko si lze představit, že jeden regulátor zajistí minimální hodnotu kritéria optimality nebo dané rozmístění pólů pro celou třídu soustav. Ale může zachovat stabilitu, zajistit stálou nulovou regulační odchylku anebo udržet hodnotu kritéria optimality pod danou mezí.

Robustnost je neodmyslitelně spojena se dvěma pojmy: modelem neurčitosti regulované soustavy a vlastností regulovaného obvodu, která má být robustní. To bývá nejčastěji stabilita. Robustní stabilita znamená více než současně stabilizovat určitý počet soustav v okolí navržené soustavy, znamená stabilizovat celé okolí, tedy nekonečně mnoho soustav.

S robustní stabilitou souvisí pojem *rodina polynomů*. Většinou se jimi zabýváme proto, protože nás zajímají charakteristické polynomy uzavřeného regulačního obvodu. Dá se říct, že rodina je neurčitý polynom + množina omezující parametry:

$$P = \{p(s, q) : q \in Q\} \quad (12)$$

Rodina polynomů je pak robustně stabilní právě tehdy, když  $p(s, q)$  je stabilní pro každé  $q \in Q$ .

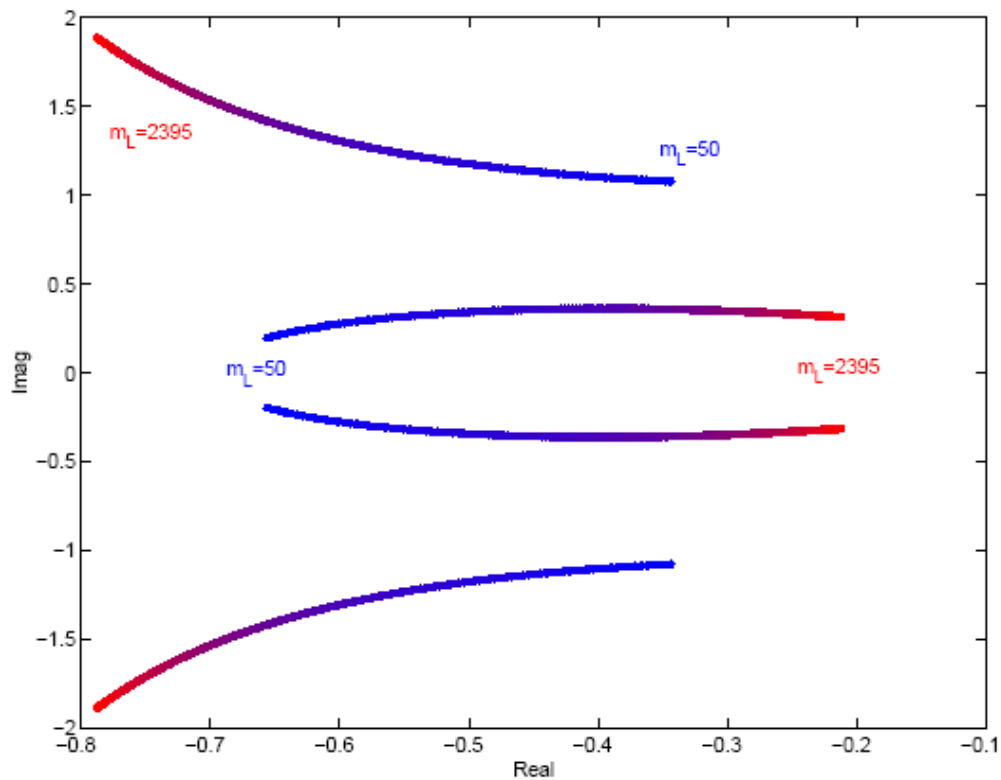
V následujících dvou příkladech je zobrazena metoda přímého vykreslení kořenů, které určuje, zda je zpětnovazební obvod robustně stabilní nebo nikoli [4].

#### Příklad 1:

Geometrické rozložení kořenů charakteristického polynomu

$$0,6 + 2s + (2,6 + 0,001m_L)s^2 + 2s^3 + s^4 \quad (13)$$

pro všechny přípustné hodnoty parametru  $m_L \in [50, 2395]$  můžeme vidět na Obr. 3.



Obr. 3 - Geometrické místo kořenů charakteristického polynomu (13)

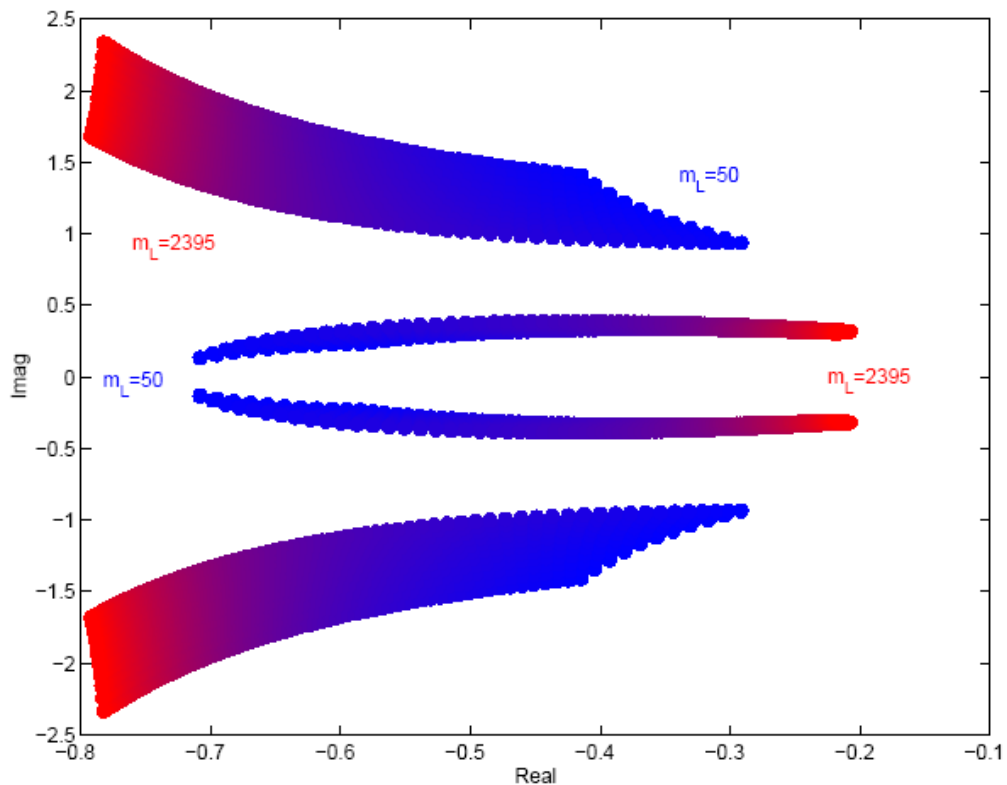
Rozložení kořenů setrvává v levé části komplexní roviny, a tak je možno říct, že polynom (13) je robustně stabilní. To jsme však předpokládali jeden neurčitý parametr v polynomu. V příkladu dvě bude vykreslen případ, kdy charakteristický polynom bude obsahovat dva neurčité parametry.

#### Příklad 2:

Charakteristický polynom obsahuje dva neurčité parametry:

$$\frac{6}{l} + \frac{20}{l}s + \frac{0,6l + 20 + 0,01m_L}{l}s^2 + 2s^3 + s^4 \quad (14)$$

pro všechny přípustné hodnoty parametru  $m_L \in [50, 2395]$  a parametru  $l \in [7, 12]$ .



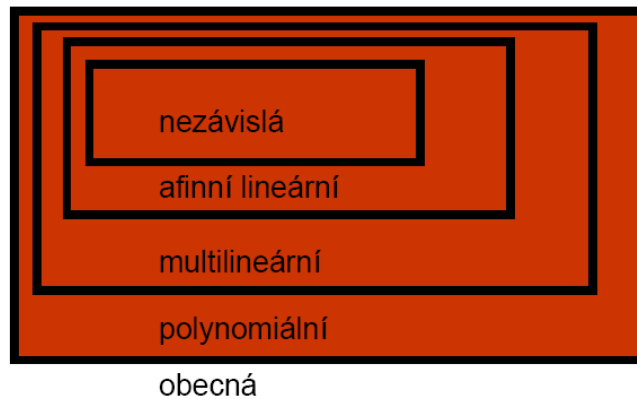
Obr. 4 - Geometrické místo kořenů charakteristického polynomu (14)

Zde můžeme vidět, že je výsledek stejný jako u předešlého příkladu jedna. Polynom (14) je také robustně stabilní.

Přímým vykreslením kořenů charakteristických polynomů můžeme robustní stabilitu testovat vždycky, ale čím víc máme složitější příklad, tím víc se stává tento způsob náročnější na výpočet, a proto je nutné se zabývat vhodnějšími nástroji. Robustní stabilitu tak analyzujeme především analyticky. V jednotlivých podkapitolách v kapitole dvě jsou tyto nástroje popsány u každého typu neurčitosti. Bohužel ne u všech se dá robustní stabilita určit pomocí analytických metod. V některých případech jsou velmi těžce aplikovatelné či neexistují vůbec, jako je tomu například u polynomiální nebo obecné neurčitosti. Zde jsme nuceni použít jen grafické metody, a to *Vykreslení množiny hodnot (Value Set)* a aplikaci *Věty o vyloučení nuly (Zero Exclusion Condition)*, které budou vysvětleny později.

## 2 TYPY PARAMETRICKÝCH NEURČITOSTÍ

Parametrické neurčitosti rozlišujeme podle následující hierarchie:



Obr. 5 - Hierarchie typů neurčitosti

Množina omezující parametry  $Q$  bude mít ve všech následujících podkapitolách ohraničení ve tvaru kvádru (box). Analýza robustní stability bude zjišťována analytickými a grafickými cestami.

Pro neurčitost s jedním parametrem se za analytický nástroj využívá Bialasova věta, kterou si můžeme ověřit v Polynomial Toolboxu pomocí příkazu „stabint“ [7], [8].

U intervalových (nezávislých) neurčitostí je hlavní analytickou metodou Kharitonovova věta, která představuje čtyři Kharitonovovy polynomy. Můžeme je vypočítat pomocí příkazu „kharit“. Robustní stabilitu zde můžeme testovat rovněž graficky, a to díky větě o vyloučení nuly, která je aplikována na vykreslenou množinu hodnot (Kharitonovových obdélníků). V Polynomial Toolboxu můžeme tento případ vykreslit příkazem „khplot“ [2], [9].

Afinní lineární (polytopická) neurčitost analyzuje robustní stabilitu větou o hranách, větou o 32 hranách a ještě jednodušší na výpočet větou o 16 soustavách. Zde se testuje pomocí příkazu „edgetest“. Graficky je možno vykreslit příkazem „ptopplot“ [6], [9].

U složitějších neurčitostí jako jsou *multilineární*, *polynomiální* a *obecná* budeme pro zjištění robustní stability využívat už jen grafické nástroje, kdy přejdeme k aplikaci věty o vyloučení nuly na vykreslenou množinu hodnot pomocí příkazů „vset“, „vsetplot“ [2], [3], [8].

## 2.1 Neurčitost s jedním parametrem

Analýza robustní stability v případě jediného neurčitého parametru je speciálním a nejjednodušším případem, kterým má význam se zabývat. Jeden z hlavních důvodů je existence řady důležitých složitějších problémů robustní stability, které mohou být zredukovány na případ s jedním parametrem.

Uvažujme zde polynom:

$$p(s, q) = p_0(s) + qp_1(s) \quad (15)$$

Kde

- $p_0$  je nominálně stabilní polynom
- $p_1$  je libovolný polynom
- $q$  je reálný neurčitý parametr ležící v intervalu  $[q_{\min}, q_{\max}]$

### Příklad 3:

Mějme rodinu soustav

$$P(s, q) = \frac{1}{s - q}, \quad |q| \leq 2 \quad (16)$$

s nominálním přenosem

$$P(s, 0) = \frac{1}{s} \quad (17)$$

a s P regulátorem se zesílením

$$C(s) = 1 \quad (18)$$

Pak je neurčitý polynom uzavřeného regulačního obvodu

$$p(s, q) = s + 1 - q \quad (19)$$



Pro rodinu soustav (16) s nominálním přenosem (17) je polynom (19) a tedy celý systém stabilní - je tedy nominálně stabilní. Robustně stabilní ale není, protože pro  $q \geq 1$  už nebude kořen ležet v levé části komplexní roviny.

Pro složitější případy můžeme použít i výpočet Polynomial Toolboxu pomocí příkazu „rlocus“, díky němuž lze vykreslit kořeny složitějšího charakteristického polynomu. Zde se můžeme setkat s pojmem „přeskok přes nekonečno“. Znamená to, že kořen přejde ze stabilní oblasti do oblasti nestabilní právě „přes nekonečno“, ne normálně přes mez stability [6].

Mnoho metod analýzy je založeno na principu hlídání meze stability. Tj., že se vychází z členu ve stabilní oblasti a postupně pak měníme parametr. Během změn se hlídá přechod přes mez stability. Proto také raději předpokládáme *invariantní stupeň*, tedy stejný stupeň pro všechna  $q \in Q$ .

### 2.1.1 Bialasova věta

U analýzy neurčitosti s jedním parametrem jako první kontrolujeme, zda  $p(s, q)$  je stabilní pro  $q = 0$ . Pak najdeme její nejmenší levostranné  $q_{\min}$  a největší pravostranné  $q_{\max}$ , pro které je stabilní a také pro všechna  $q$ , která pocházejí z daného intervalu. Zde chceme určit maximální interval  $Q_{\max} = [q_{\min}^-, q_{\max}^+]$  pro neurčitý polynom. Maximální interval je takový, pro který platí, že  $p(s, q)$  je stabilní pro všechna  $q \in Q_{\max}$ . Uvažujeme neurčitý polynom s invariantním stupněm

$$p(s, q) = p_0(s) + qp_1(s) \quad (20)$$

kde  $p_0$  je stabilní polynom a platí  $\deg p_0(s) > \deg p_1(s)$ .

K řešení se používá *Bialasova věta* [2], [9], kdy se využije princip hlídání singularity Hurwitzovy matice, tzn. z matice „poskládané“ stejným způsobem, jako při aplikaci známého Hurwitzova kritéria stability):

$$\mathbf{H}(p) = \mathbf{H}(p_0(s) + qp_1(s)) = \mathbf{H}(p_0(s)) + q\mathbf{H}(p_1(s)) = \mathbf{H}(p_0) + q\mathbf{H}(p_1) \quad (21)$$

Pro obecný polynom

$$p(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0, \quad a_n \geq 0 \quad (22)$$

je

$$\mathbf{H}(p) = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & \dots \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & \dots \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_n & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \end{bmatrix}, \quad n \times n \quad (23)$$

Bialasova věta říká, že *maximální interval robustní stability* je dán vztahy:

$$q_{\max}^+ = \frac{1}{\lambda_{\max}^+(-\mathbf{H}^{-1}(p_0)\mathbf{H}(p_1))} \quad (24)$$

$$q_{\min}^- = \frac{1}{\lambda_{\min}^-(-\mathbf{H}^{-1}(p_0)\mathbf{H}(p_1))}$$

kde

- $\lambda_{\max}^+$  je maximální reálné kladné vlastní číslo
- $\lambda_{\min}^-$  je minimální reálné záporné vlastní číslo
- $\mathbf{H}$  je Hurwitzova matice

Jestliže kladné nebo záporné reálné vlastní číslo neexistuje, bere se příslušná mez jako plus nebo minus nekonečno. Příímý výpočet lze pak zrealizovat například pomocí Polynomial Toolboxu příkazem „stabint“.

#### Příklad 4:

Mějme neurčitý polynom

$$p(s, q) = s^4 + (6 + q)s^3 + 12s^2 + (10 + q)s + 3 = s^4 + 6s^3 + 12s^2 + 10s + 3 + q(s^3 + s) \quad (25)$$

$$p_0 = s^4 + 6s^3 + 12s^2 + 10s + 3, \quad p_1 = q(s^3 + s) \quad (26)$$

Určete maximální interval stability  $Q_{\max} = \langle q_{\min}^-; q_{\max}^+ \rangle$  pro tento daný polynom.

Hurwitzovy matice jsou:

```
pinit
hurwitz(p0)
hurwitz(p1)
```

$$H(p0) = \begin{bmatrix} 6 & 10 & 0 & 0 \\ 1 & 12 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 12 & 3 \end{bmatrix}, \quad H(p1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vlastní čísla matice  $-\mathbf{H}^{-1}(p_0)\mathbf{H}(p_1)$  jsou (0, 0, -0.0879, -0.1777). Po aplikaci polynomu (24) docházíme k závěru, že neexistuje žádné maximální reálné kladné vlastní číslo, a proto platí  $q_{\max}^+ = +\infty$ . Pro minimální reálné záporné vlastní číslo platí  $q_{\min}^- = -5.6277$ . K vyšetření *maximálního intervalu stability* můžeme využít příkaz „stabint“.

```
pinit
p0 = 3 + 10s + 12s^2 + 6s^3 + s^4
p1 = s + s^3
[lmin,lmax]=stabint(p0,p1)
lmin = -5.6277
lmax = Inf
```

## 2.2 Intervalová neurčitost (nezávislá)

U intervalové neurčitosti je nutným předpokladem to, aby neurčitost měla *nezávislou strukturu*. Neurčitý polynom

$$p(s, q) = \sum_{i=0}^n \rho_i(q) s^i \quad (27)$$

má nezávislou strukturu v případě, kdy každá složka  $q_i$  vstupuje pouze do jednoho koeficientu. Jinými slovy, pro každé  $q$  platí jeho daný interval. Pokud se jeden z parametrů změní, pak se změní nezávisle na ostatních a nezasahuje do zbylých parametrů.

Rodina polynomů

$$P = \{p(\cdot, q) : q \in Q\} \quad (28)$$

je intervalový polynom, když každé  $q_i$  je pouze v jednom koeficientu, každý koeficient je spojitou funkcí  $q$  a  $Q$  je kvádr. Příkladem mohou být následující polynomy:

$$\begin{aligned} p_1(s, q) &= (6 + q_0) + (4 + q_1)s + (2 + q_2)s^2, & q_1, q_2, q_3 &\in [-1, 1] \\ p_2(s, q) &= 6 + (4 + q_1)s + q_2s^2, & q_1 &\in [-0.1, 0.1], q_2 \in [4.9, 5.1] \end{aligned} \quad (29)$$

U intervalové neurčitosti využíváme mnohem jednodušší zápis, kdy každý neurčitý koeficient je vyjádřen pouze jako interval. Neurčité parametry  $q_i$  jsou brány z intervalu  $q_i \in [q_i^-, q_i^+]$ . Obecný tvar neurčitosti pak je:

$$p(s, q) = \sum_{i=1}^n [q_i^-; q_i^+] s^i \quad (30)$$

Jako ilustrativní příklad může být následující polynom:

$$p(s, q) = [1, 12] + [9, 10]s + [7, 8]s^2 + [5, 6]s^3 + [3, 4]s^4 + [1, 2]s^5 \quad (31)$$

### 2.2.1 Množina hodnot (The Value Set)

*Množina hodnot intervalového polynomu*

$$V(p, \omega) = \{p(j\omega, Q) : \omega = \omega'\} \quad (32)$$

je dvourozměrná množina všech komplexních hodnot, které intervalový polynom nabývá, když za „ $s$ “ dosadíme  $j\omega$  s jedním pevným reálným  $\omega$  a všechny koeficienty necháme probíhat jejich intervaly. Později bude tento pojem definován obecněji.

Pro intervalový polynom

$$p(s, q) = \sum_{i=1}^n [q_i^-; q_i^+] s^i \quad (33)$$

a jednu pevně danou frekvenci  $\omega_0$  je množina hodnot

$$p(j\omega_0, Q) = \{p(j\omega_0, q) : q \in Q\} \quad (34)$$

vždy obdélník (výjimečně úsečka), který má strany rovnoběžné s osami. Říká se mu *Khari-tonův obdélník* pro frekvenci  $\omega_0$ . Dokázat to lze dosazením  $s=j\omega_0$  do  $p(s, q) = \sum q_i s^i$ ,  $q_i \in [q_i^-, q_i^+]$  a napíšeme zvlášť reálnou a imaginární část.

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} p(j\omega_0, q) &= \sum_{i \text{ even}} q_i (j\omega)^i = q_0 - q_2 \omega_0^2 + q_4 \omega_0^4 - q_6 \omega_0^6 + \dots \\ \operatorname{Im} p(j\omega_0, q) &= \frac{1}{j} \sum_{i \text{ odd}} q_i (j\omega)^i = q_1 \omega - q_3 \omega^3 + q_5 \omega^5 - q_7 \omega^7 + \dots \end{aligned} \quad (35)$$

Zřejmě žádné  $q_i$  není v obou polynomech současně a tak je můžeme zkoumat nezávisle. Reálná část je vždy v mezi

$$\begin{aligned} \min_{q \in \mathcal{Q}} \operatorname{Re} p(j\omega_0, q) &= q_0^- - q_2^+ \omega_0^2 + q_4^- \omega_0^4 - q_6^+ \omega_0^6 + \dots = \operatorname{Re} K_1(j\omega_0) \\ \max_{q \in \mathcal{Q}} \operatorname{Re} p(j\omega_0, q) &= q_0^+ - q_2^- \omega_0^2 + q_4^+ \omega_0^4 - q_6^- \omega_0^6 + \dots = \operatorname{Re} K_2(j\omega_0) \end{aligned} \quad (36)$$

Zde znaménko  $\omega$  nehraje roli, protože mocniny jsou sudé. Imaginární část bude ve tvaru

$$\begin{aligned} K_3(j\omega_0) &= q_1^- \omega_0 - q_3^+ \omega_0^3 + q_5^- \omega_0^5 - q_7^+ \omega_0^7 - \dots \\ K_4(j\omega_0) &= q_1^+ \omega_0 - q_3^- \omega_0^3 + q_5^+ \omega_0^5 - q_7^- \omega_0^7 - \dots \end{aligned} \quad (37)$$

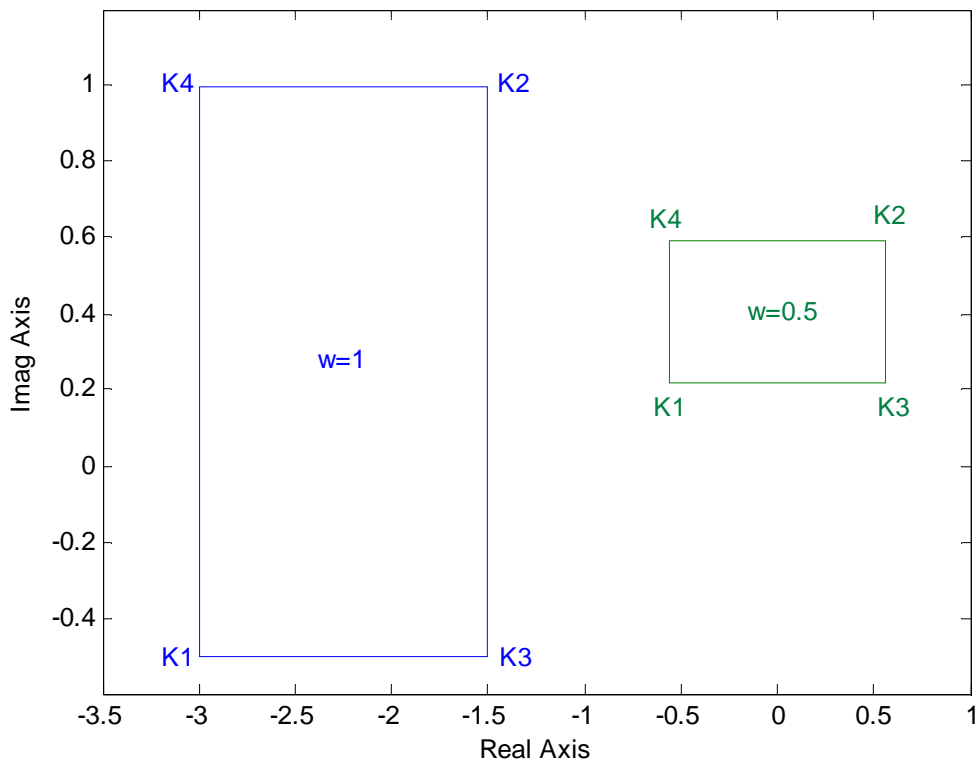
Tady už znaménko  $\omega$  hraje roli, protože mocniny jsou liché. Imaginární část je vždy v mezi

$$\min_{q \in \mathcal{Q}} \operatorname{Im} p(j\omega_0, q) = \begin{cases} \operatorname{Im} K_3(j\omega_0) & \text{pro } \omega_0 \geq 0 \\ \operatorname{Im} K_4(j\omega_0) & \text{pro } \omega_0 < 0 \end{cases} \quad (38)$$

$$\max_{q \in \mathcal{Q}} \operatorname{Im} p(j\omega_0, q) = \begin{cases} \operatorname{Im} K_4(j\omega_0) & \text{pro } \omega_0 \geq 0 \\ \operatorname{Im} K_3(j\omega_0) & \text{pro } \omega_0 < 0 \end{cases} \quad (39)$$

Protože jsou obě části omezeny nezávisle, výsledný tvar je obdélník.

Mějme například polynom  $p(s, q) = [0.25, 1.25] + [0.75, 1.25]s + [2.75, 3.25]s^2 + [0.25, 1.25]s^3$ . Jeho zobrazená množina hodnot je vykreslena na Obr. 6, a to jak pro frekvenci  $\omega=1$ , tak pro  $\omega=0.5$ .



Obr. 6 - Vykreslená množina hodnot pro  $\omega=1$  a  $\omega=0.5$

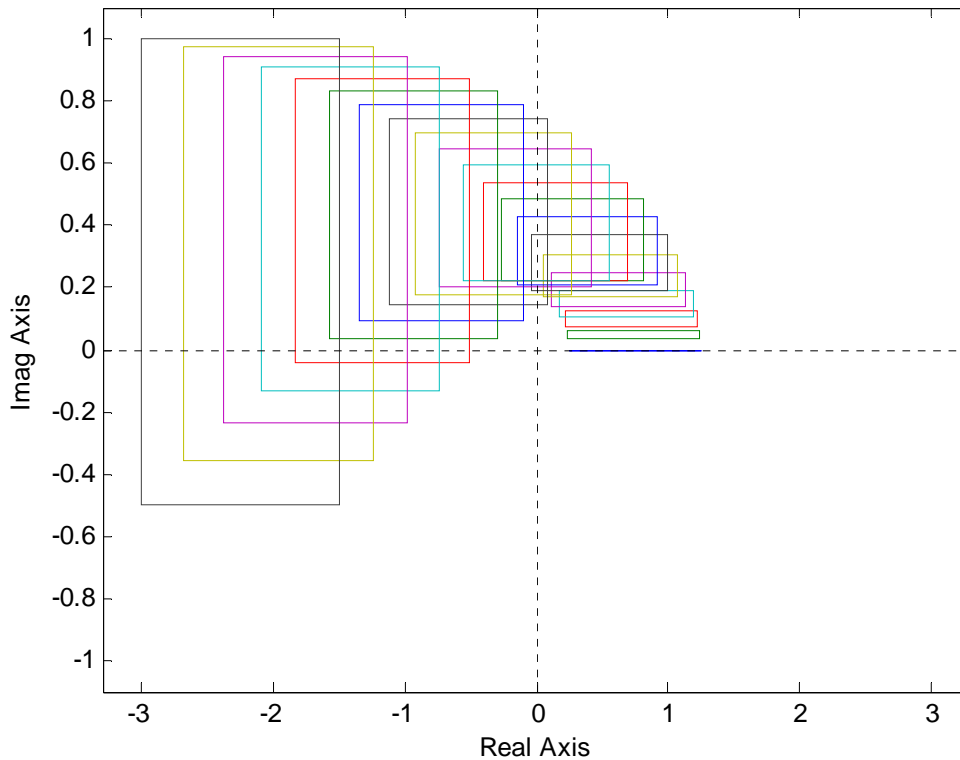
Při změně  $\omega$  se obdélník pohybuje a mění rozměr. Obrázek je vykreslen u následujícího příkladu 5.

#### Příklad 5:

Vykreslete množinu hodnot pro polynom s intervalovou neurčitostí, kdy se frekvence bude měnit v intervalu  $\langle 0,1 \rangle$ .

$$p(s, q) = [0.25, 1.25] + [0.75, 1.25]s + [2.75, 3.25]s^2 + [0.25, 1.25]s^3 \quad (40)$$

```
pinit
pminus=.25+0.75*s+2.75*s^2+.25*s^3
pplus=1.25+1.25*s+3.25*s^2+1.25*s^3
khplot(pminus,pplus,0:.05:1)
```



Obr. 7 - Vykreslení tvaru množiny hodnot při změně frekvence  $\omega$

Výsledkem jsou Kharitonovovy obdélníky, jejichž stabilitu můžeme analyticky testovat pomocí Kharitonovovy věty.

### 2.2.2 Kharitonovova věta

*Kharitonovova věta* [2], [3], [10] má v analýze robustní stability obrovský význam. Tato věta nám říká, že intervalový polynom s invariantním stupněm je robustně stabilní právě tehdy, když jsou stabilní všechny čtyři *Kharitonovovy polynomy*. Bez ohledu na počet neurčitých parametrů se testují právě jen tyto čtyři polynomy. Jejich konstrukce je jednoduchá a využívá následující schéma.

$$\begin{aligned}
 K_1(s) &= q_0^- + q_1^- s + q_2^+ s^2 + q_3^+ s^3 + q_4^- s^4 + q_5^- s^5 + q_6^+ s^6 + \dots \\
 K_2(s) &= q_0^+ + q_1^+ s + q_2^- s^2 + q_3^- s^3 + q_4^+ s^4 + q_5^+ s^5 + q_6^- s^6 + \dots \\
 K_3(s) &= q_0^+ + q_1^- s + q_2^- s^2 + q_3^+ s^3 + q_4^+ s^4 + q_5^- s^5 + q_6^- s^6 + \dots \\
 K_4(s) &= q_0^- + q_1^+ s + q_2^+ s^2 + q_3^- s^3 + q_4^- s^4 + q_5^+ s^5 + q_6^+ s^6 + \dots
 \end{aligned} \tag{41}$$

Příklad 6:

Mějme polynom:

$$p(s, q) = [1, 2] + [3, 4]s + [5, 6]s^2 + [7, 8]s^3 \quad (42)$$

Kharitonovovy polynomy jsou:

$$\begin{aligned} K_1(s) &= 1 + 3s + 6s^2 + 8s^3 \\ K_2(s) &= 2 + 4s + 5s^2 + 7s^3 \\ K_3(s) &= 2 + 3s + 5s^2 + 8s^3 \\ K_4(s) &= 1 + 4s + 6s^2 + 7s^3 \end{aligned} \quad (43)$$

Všechny čtyři Kharitonovovy polynomy jsou stabilní a stabilní je tedy i původní intervalový polynom (42).

Příklad 7:

Intervalový polynom

$$p(s, q) = [11, 12] + [9, 10]s + [7, 8]s^2 + [5, 6]s^3 + [3, 4]s^4 + [1, 2]s^5 \quad (44)$$

má Kharitonovovy polynomy

$$\begin{aligned} K_1(s) &= 11 + 9s + 8s^2 + 6s^3 + 3s^4 + s^5 \\ K_2(s) &= 12 + 10s + 7s^2 + 5s^3 + 4s^4 + 2s^5 \\ K_3(s) &= 12 + 9s + 7s^2 + 6s^3 + 4s^4 + s^5 \\ K_4(s) &= 11 + 10s + 8s^2 + 5s^3 + 3s^4 + 2s^5 \end{aligned} \quad (45)$$

Polynom má sice invariantní stupeň, ale i přesto není robustně stabilní, protože ne všechny Kharitonovovy polynomy jsou stabilní. Stabilitu si můžeme ověřit v Polynomial Toolboxu příkazem „kharit“.

```
pinit
pmin=11+9*s+7*s^2+5*s^3+3*s^4+1*s^5
pmax=12+10*s+8*s^2+6*s^3+4*s^4+2*s^5
[sta, K1, K2, K3, K4]=kharit(pmin, pmax)
```



sta = 0

K1 = 11 + 9s + 8s<sup>2</sup> + 6s<sup>3</sup> + 3s<sup>4</sup> + s<sup>5</sup>

K2 = 12 + 10s + 7s<sup>2</sup> + 5s<sup>3</sup> + 4s<sup>4</sup> + 2s<sup>5</sup>

K3 = 12 + 9s + 7s<sup>2</sup> + 6s<sup>3</sup> + 4s<sup>4</sup> + s<sup>5</sup>

K4 = 11 + 10s + 8s<sup>2</sup> + 5s<sup>3</sup> + 3s<sup>4</sup> + 2s<sup>5</sup>

### 2.2.3 Věta o vyloučení nuly (Zero Exclusion Condition)

Větu o vyloučení nuly užíváme tehdy, když chceme robustní stabilitu testovat grafickým způsobem. V Polynomial Toolboxu příkazem „khplot“ vykreslíme množinu hodnot (Kharitonovovy obdélníky) a využijeme tuto větu. Pro intervalové neurčitosti to sice nemá velký smysl z důvodu existence Kharitonovových polynomů, které představují mnohem lepší metodu, ale pro složitější neurčitosti je to jediná prakticky využitelná metoda [10].

Intervalový polynom

$$P = \{p(.,q) : q \in Q\} \quad (46)$$

který má invariantní stupeň a aspoň jeden stabilní člen  $p(s, q^0)$  je robustně stabilní právě tehdy když

$$0 \notin p(j\omega, Q) \quad \forall \omega \geq 0 \quad (47)$$

#### Příklad 8:

Pro názornost nejprve najdeme stabilní člen rodiny a pak kreslíme množiny hodnot pro rostoucí  $\omega$  a kontrolujeme podmínku  $0 \notin p(j\omega, Q)$ .

$$p(j\omega, q) = [0.45, 0.55] + [1.45, 2.55]s + [2.45, 3.55]s^2 + [5.45, 6.55]s^3 + [3.45, 4.55]s^4 + [4.35, 4.55]s^5 + s^6 \quad (48)$$

pinit

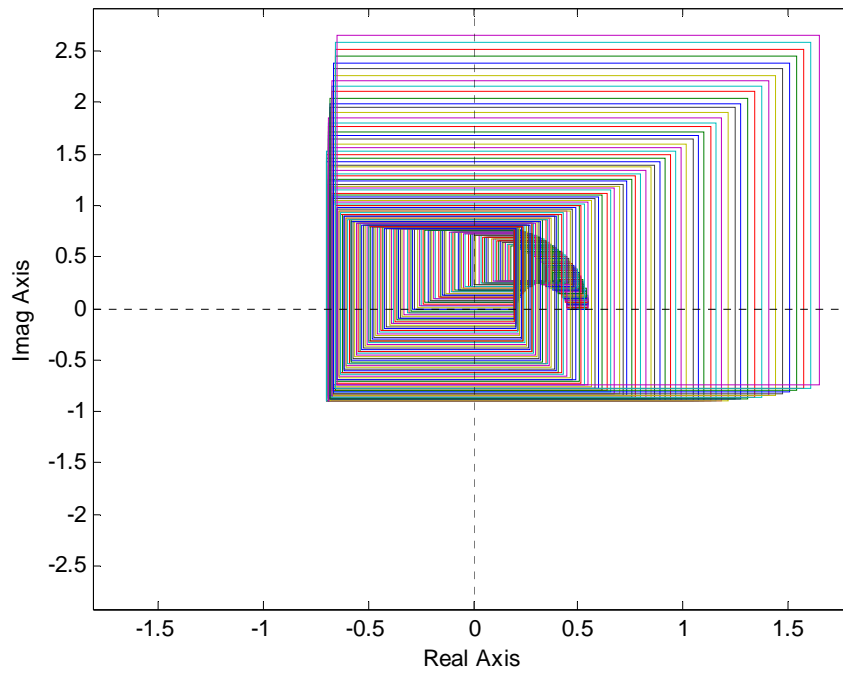
ppmin=pol([0.45, 1.45, 2.45, 5.45, 3.45, 4.35, 1], 6);

ppmax=pol([0.55, 2.55, 3.55, 6.55, 4.55, 5.55, 1], 6);

```

pp0=(ppmin+ppmax)/2
isstable(pp0)
khplot(ppmin,ppmax,0:.005:1)

```



Obr. 8 - Kharitonovy obdélníky polynomu (48) pro  $\omega \in [0,1]$

Je vidět, že nula jako počátek komplexní roviny patří do množiny vykreslených hodnot, proto není rodina polynomu robustně stabilní.

### 2.3 Afinní lineární neurčitost (polytopická)

Dalším typem neurčitosti je *afinní lineární neurčitost*, často nazývaná *polytopická*. Rodina polynomů

$$p(s, q) = \sum_{i=1}^n a_i(q) s^i \quad (49)$$

má afinní lineární strukturu neurčitosti tehdy, pokud koeficienty  $a_i(q)$  jsou afinní lineární funkce  $q$ , tj. že existuje sloupcový vektor  $\alpha_i$  a skalární číslo  $\beta_i$  takové, že platí

$$a_i(q) = \alpha_i^T q + \beta_i \quad (50)$$

kde  $\alpha_i^T$  je transponovaná matice  $\alpha_i$  a  $\beta$  je skalární číslo. Pak mluvíme o polytopické neurčitosti.

Pro představu řešíme příklady s polytopickou neurčitostí tohoto typu:

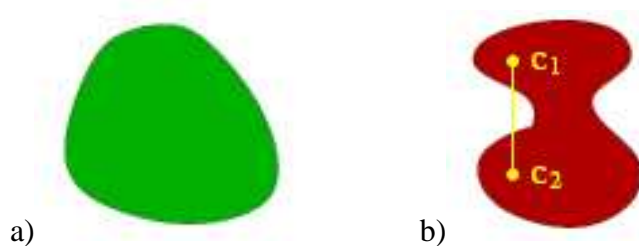
$$p(s, q) = (2q_1 - q_2)s^3 + (3q_2 + 3)s^2 + (q_1 + 3)s + 3 \quad (51)$$

### 2.3.1 Konvexní množina a konvexní obal

Při analýze robustní stability s polytopickou neurčitostí se můžeme setkat s určitými souvisejícími pojmy. Jeden z nich je například *konvexní množina* a *konvexní obal* [4], [6].

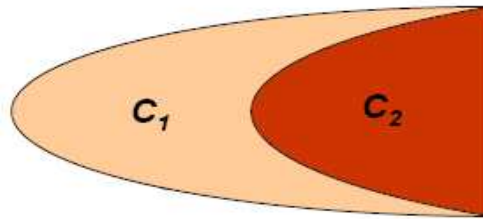
Množina  $C \subseteq \mathbf{R}^k$  je konvexní, jestliže konvexní kombinace libovolných dvou bodů v ní celá leží. Jednoduše řečeno, když lze dva libovolné body  $c_1$  a  $c_2$  spojit úsečkou tak, aby celá ležela v množině  $C$ , pak můžeme říct, že je *množina konvexní* a platí:

$$\lambda c_1 + (1 - \lambda)c_2 \in C \quad \forall c_1, c_2 \in C \quad \lambda \in \langle 0; 1 \rangle \quad (52)$$



Obr. 9 a) konvexní množina, b) nekonvexní množina

Pro nekonvexní množinu definujeme *konvexní obal* jako nejmenší konvexní množinu obsahující  $C$ . Konvexní obal množiny  $C$  označujeme  $\text{conv}\{C\}$ . Na Obr. 10 je vidět, že množina  $C_1$  je původní nekonvexní množina. Tím, že jsme přidali množinou  $C_2$ , nám vzniká konvexní obal  $\text{conv}\{C_1\} = C_1 \cup C_2$ .



Obr. 10 - Konvexní obal

### 2.3.2 Polytopy

Dalším pojmem, se kterým se zde setkáváme, jsou *polytopy* [2],[9]. Polytop je průnik konečného počtu poloprostorů.

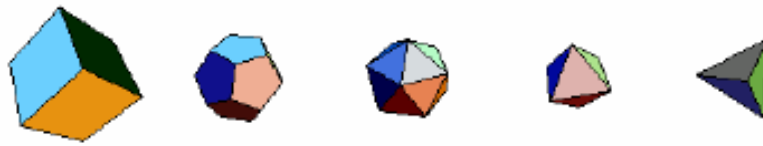
Polytop  $P$  v  $R^k$  je konvexní obal konečné množiny bodů  $p^1, p^2, \dots, p^m \in R^k$ . Zapišeme jej jako

$$P = \text{conv}\{p^i\} \quad (53)$$

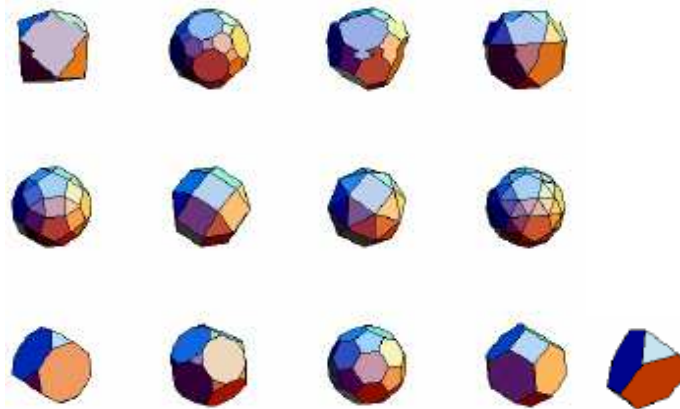
a množina generátorů polytopu  $P$  je  $\{p^1, p^2, \dots, p^m\}$ . Polytopy v  $R^2$  jsou konvexní mnohoúhelníky (polygony), ale nejsou to nekonvexní mnohoúhelníky (hvězdy).

Obr. 11 - Příklad konvexních polygonů v  $R^2$ Obr. 12 - Příklad nekonvexních hvězd v  $R^2$ 

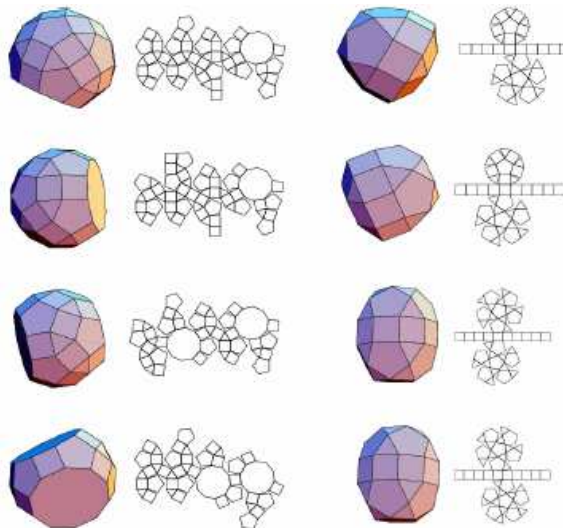
Polytopy v  $R^3$  jsou mnohostěny. Mohou to být například Platonova tělesa, Archimedova nebo i Johnsonova. Platonova tělesa jsou taková, jejichž stěny jsou stejné pravidelné konvexní mnohoúhelníky. Archimedova tělesa mají stěny jako pravidelné konvexní mnohoúhelníky různých typů, které mají sférickou symetrii.



Obr. 13 - Platonova tělesa

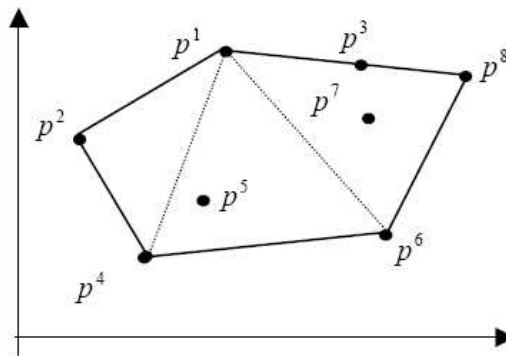


Obr. 14 - Archimedova tělesa



Obr. 15 - Johnsonova tělesa

Množina generátorů polytopu  $P$  není až tak jednoznačně daná. Příkladem se může stát Obr. 16, kde body  $p^3$ ,  $p^5$  a  $p^7$  jsou zbytečně zařazeny do množiny generátorů daného polytopu.



Obr. 16 - Příklad polytopu

Jednoznačnou množinou generátorů polytopu je množina, která je dána množinou extrémních bodů polytopu.

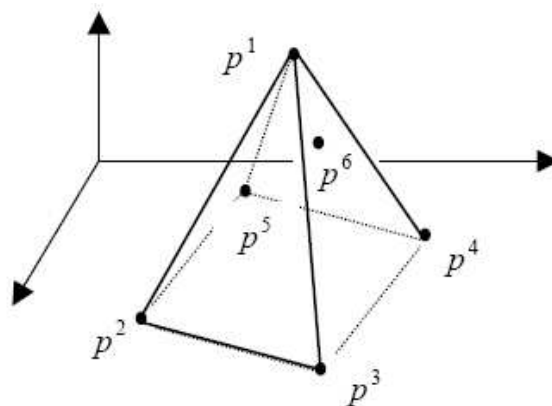
Nechť  $P = \text{conv}\{p^i\}$  je polytop  $P$  v  $R^k$ . Bod  $p \in P$  je extrémní bod polytopu  $P$ , pokud není vyjádřen jako konvexní kombinace žádných dvou různých bodů  $P$ . Konvexní kombinací se myslí to, že v polytopu  $P = \text{conv}\{p^1, p^2, \dots, p^m\}$  může být každý bod  $p \in P$  vyjádřený touto kombinací  $p^i$ , tzn. že existují reálná skalární čísla  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \geq 0$  a to taková, pro která platí

$$p = \sum_{i=1}^m \lambda_i p_i(s) \quad (54)$$

a

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \quad (55)$$

Příklad 9:

Obr. 17 - Polytop v  $R^3$

Polytop má množinu extrémních bodů  $\{p^1, p^2, p^3, p^4, p^5\}$ . Můžeme říct, že minimální množinou generátorů je tato množina extrémních bodů.

### 2.3.3 Množina hodnot polytopů

Ještě než se dostaneme k množině hodnot polytopů, musíme se nejdříve seznámit s pojmem *polytop polynomů*.

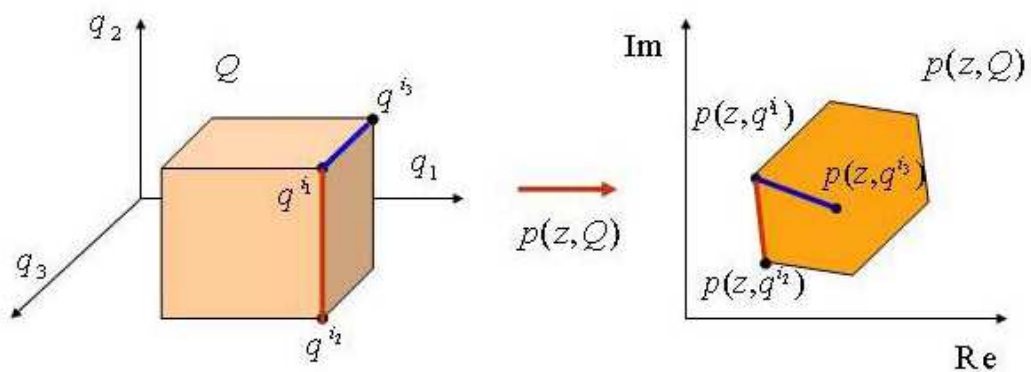
Rodina polynomů

$$P = \{p(\cdot, q) : q \in Q\} \quad (56)$$

je polytop polynomů, když  $p(\cdot, q)$  má afinní lineární strukturu neurčitosti a  $Q$  je polytop. Jestliže  $Q = \text{conv}\{q^i\}$ , pak  $p(s, q^i)$  jsou generátory polytopu polynomů  $P$ .

Nyní polytop  $P = \{p(\cdot, q) : q \in Q\}$ ,  $Q = \text{conv}\{q^i\}$  má v bodě  $z \in \mathbb{C}$  množinu hodnot  $p(z, Q) = \text{conv}\{p(z, q^i)\}$ . Jestliže  $z_0 = p(z, q^0)$  je na hraně  $p(z, Q)$ , pak  $q^0$  je na hraně  $Q$ . Tato věta však neplatí obráceně, protože hrana se může zobrazit i dovnitř.

Na Obr. 18 je znázorněn pro lepší představivost příklad.



Obr. 18 - Příklad zobrazení hran

Červená hrana se zobrazí na hranu, zatímco modrá hrana se zobrazí dovnitř.

Příklad 10:

Mějme polytop se třemi neurčitými parametry

$$p(s, q) = (q_1 - q_2 + 2q^3 + 3) + (3q_1 + q_2 + q_3 + 3)s + (3q_1 - 3q_2 + q_3 + 3)s^2 + (2q_1 - q_2 + q_3 + 1)s^3 \quad (57)$$

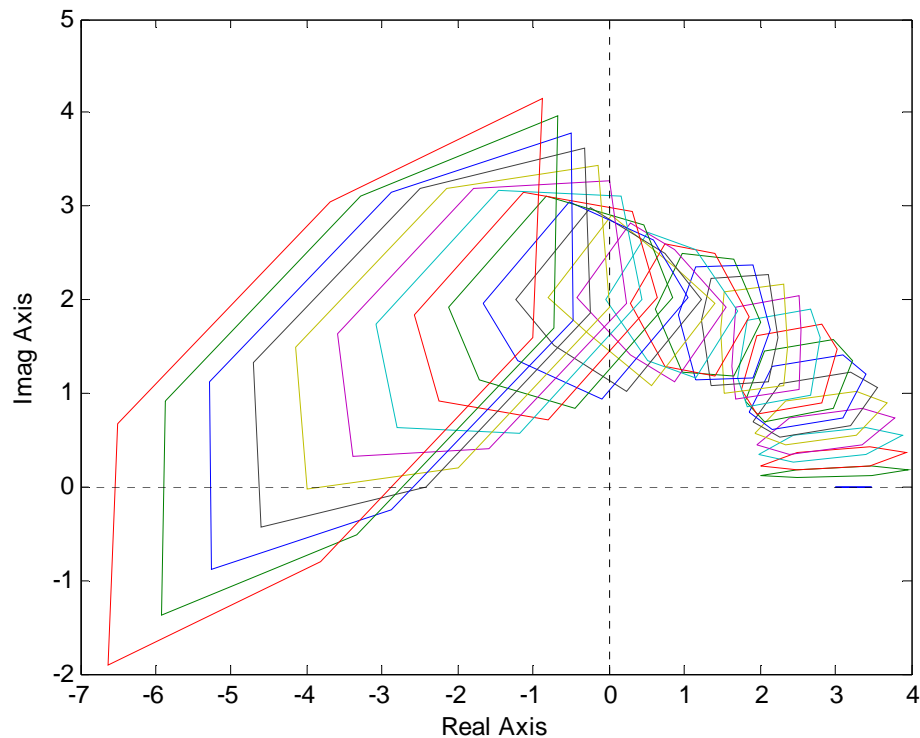
kde  $q_1 \in \langle -0.245, 0.245 \rangle, q_2 \in \langle -0.245, 0.245 \rangle, q_3 \in \langle -0.245, 0.245 \rangle$  Třemi parametry se myslí, že množina hodnot je polygon s  $2^3 = 8$  generátory. Avšak polygon má jen šest extrémů čili je to šestiúhelník z důvodu, že se dva vrcholy vždy zobrazí dovnitř. Máme například vrchol  $q^5 = (0, 245; -0, 245; 0, 245)$ , který se zobrazí do bodu  $p(z, q^5) = 3,98 + 3,735z + 4,175z^2 + 1,98z^3$ . Vyčíslení je možné pomocí Polynomial Toolboxu a příkazu "ptopex".

Nyní si vykreslíme množinu hodnot. Nejdříve si polytop přepíšeme do tvaru

$$p(s, q) = (3 + 3s + 3s^2 + s^3) + q_1(1 + 3s + 3s^2 + 2s^3) + q_2(-1 + s - 3s^2 - s^3) + q_3(2 + s + s^2 + 2s^3) \quad (58)$$

```
pinit
p0=pol([3 3 3 1],3)
p1=pol([1 3 3 2],3)
p2=pol([-1 1 -3 -1],3)
p3=pol([2 1 1 2],3)
q=[-0.245 0.245;-0.245 0.245;-0.245 0.245]
ptopplot(p0,p1,p2,p3,q,j*(0:.05:1.5))
```





Obr. 19 - Množina hodnot polygonu

### 2.3.4 Věta o hranách (The Edge Theorem)

Z vlastností množiny hodnot a z věty o vyloučení nuly plyne, že vnitřek množiny hodnot není zas až tak důležitý. Dříve, než se nula dostane dovnitř množiny hodnot, objeví se nejdříve na hraně. Jinými slovy, pokud se nula neobjeví na žádné hraně, nemůže dojít k přechodu přes mez stability. Proto se můžeme omezit jen na zkoumání hran. U systémů s afinní lineární strukturou neurčitosti se vyšetřuje robustní stabilita *větou o hranách (The Edge Theorem)*, která je založena na této myšlence [2], [6].

Věta říká, že polynom  $p(s, q)$  je robustně stabilní, jestliže  $p(s, q)$  je stabilní na hranách polytopu  $Q$ . Pro zkoumání robustní stability pomocí věty o hranách existuje v Polynomial Toolboxu funkce „edgetest“. K interpretaci je použit následující příklad.

```
pinit
p0=pol([3 3 3 1],3)
p1=pol([1 3 3 2],3)
```

```

p2=pol([-1 1 -3 -1],3)
p3=pol([2 1 1 2],3)
q=[-0.1 0.1;-0.1 0.1;-0.1 0.1]
edgetest(p0,p1,p2,p3,q)
ans = 1

```

### 2.3.5 Ostatní analytické nástroje k řešení robustní stability

Testování robustní stability pomocí testování hran se zdá být velmi efektivní, jenže má jednu nevýhodu a tím je velké zvyšování počtu neurčitých parametrů a tím i hran  $Q$ . Pokud bude  $Q$  dáno jako  $n$ -rozměrné těleso, pak pro počet hran platí

$$K_{\text{hran}} = n \cdot 2^{n-1} \quad (59)$$

A pak například pro 5 neurčitých parametrů dostaneme 80 hran, které máme prozkoumat. Při 10 neurčitých parametrů dostáváme až 5120 hran. Tabulka *Tab. 1* zobrazuje počet neurčitých parametrů (*vertices*) a k nim odpovídající zkoumané hrany (*edges*) dle vzorce (59).

$n$	vertices	edges
1	2	1
2	4	4
3	8	12
4	16	32
5	32	80
10	1024	5120
20	1048576	10485760

*Tab. 1 - Tabulka 1*

Nabízí se otázka, zda jsou vůbec všechny hrany důležité.

Necht'  $P = \{p(\cdot, q) : q \in Q\}$  je polytop polynomů s  $n$  parametry a  $Q$  je kvádr v  $R^n$ , pak  $Q$  má sice  $K_{\text{hran}} = n \cdot 2^{n-1}$  hran, ale jeho množina hodnot má hran méně ( $p(z, Q)$  je rovnoběžný mnohoúhelník s počtem hran  $\leq 2n$ ). Bohužel se hrany  $p(z, Q)$  mění se změnou  $z$ , tím pádem nejde tak obecně určit, které z hran  $Q$  jsou ty důležité a které ne. V takové případě můžeme k řešení použít větu o 32 hranách (*The 32 Edge Theorem*) [2], [6].

Nechť  $P(s, q, r) = N(s, q)/D(s, r)$  je intervalová soustava s Kharitonovými polynomy čitatele  $N_1(s), N_2(s), N_3(s), N_4(s)$  a Kharitonovými polynomy jmenovatele  $D_1(s), D_2(s), D_3(s), D_4(s)$  a necht'  $C(s, q, r) = N_c(s, q)/D_c(s, r)$  je zpětnovazební regulátor takový, že výsledný zpětnovazební charakteristický polynom  $P_x$  má invariantní stupeň. Pak  $P_x$  je robustně stabilní právě tehdy, když všechny polynomy na hranách

$$e(s, \lambda) = N_{i_1, i_2}(s, \lambda)N_c(s) + D_{i_3}(s)D_c(s) \quad (60)$$

kde  $(i_1, i_2) \in \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4)\}$ ,  $i_3 \in \{1,2,3,4\}$  jsou stabilní pro všechna  $\lambda \in [0,1]$ .

Dalším analytickým nástrojem pro řešení robustní stability u polytopických neurčitostí je *věta o 16 soustavách (The 16 Plant Theorem)*. Ta je ještě mnohem více jednodušší. Převádí složitou úlohu na lehčí jen se 16 obyčejnými polynomy. Podmínkou aplikace věty o 16 soustavách je však zvláštní struktura soustavy. Musí se skládat z intervalové soustavy plus z regulátoru prvního řádu. Věta nám říká, že regulátor prvního řádu stabilizuje intervalovou soustavu právě tehdy, když stabilizuje všech 16 Kharitonových soustav, tj. 16 zpětnovazebních stabilních charakteristických polynomů.

Podrobnější analýzu těchto analytických nástrojů pak lze najít v následující literatuře [2], [6], [9].

### 2.3.6 Polytopická neurčitost pro diskrétní systémy

Množinu hodnot pro obecné komplexní číslo  $z$  můžeme definovat nejen na imaginární ose s reálnou frekvencí  $s=j\omega$ , ale i pro  $z \in C$ . Množina hodnot rodiny polynomů je  $P = \{p(., q) : q \in Q\}$ . Pro obecné  $z \in C$  je pak

$$p(z, Q) = \{p(z, q) : q \in Q\} \quad (61)$$

Obecná rodina polynomů  $P = \{p(., q) : q \in Q\}$ , kde  $P$  má invariantní stupeň, koeficienty jsou spojité funkce parametrů  $a_i(q)$  a aspoň jeden člen je stabilní  $p(s, q^0)$ , je pak *robustně D-stabilní* právě tehdy, když platí

$$0 \notin p(z, Q) \quad \forall z \in \partial D \quad (62)$$

kde  $\partial D$  je hranice oblasti stability  $D$  (obecně  $D$  může být kruh, posunutá polorovina, kónus, atd.) [9].

Robustní D-stabilitu diskretních polynomů je možné ověřit stejně analyticky pomocí funkce „edgetest“, tak jako u spojitého systému. To platí i pro grafické zobrazení příkazem „ptopplot“.

### Příklad 11:

Diskretní polynom

$$p(z, Q) = [-0.06, 0.056] + [-0.058, 0.058]z + [0.042, 0.158]z^2 + z^3 \quad (63)$$

vyjádříme jako polytop

$$p(z, Q) = p_0(z) + q_1 p_1(z) + q_2 p_2(z) + q_3 p_3(z) \quad (64)$$

a testujeme funkcí „edgetest“.

```
pinit
p0=z^3;p1=1;p2=z;p3=z^2
q=[-0.06,0.056;-0.058,0.058;0.042,0.158]
edgetest(p0,p1,p2,p3,q)
ans = 1
```

Lze vidět, že diskretní polynom (63) je robustně D-stabilní.

### Příklad 12:

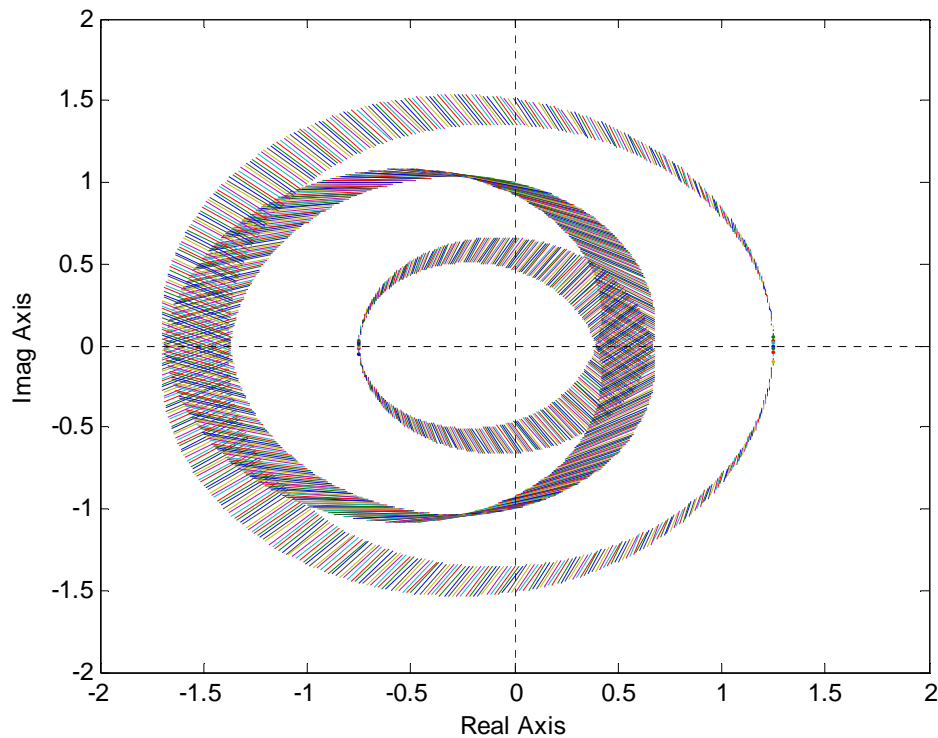
Rodinu diskretních polynomů

$$p(z, Q) = z^3 + (0.5 + q)z^2 - (0.25 + q), \quad Q = [-0.1, 0.1] \quad (65)$$

přepíšeme do tvaru:

$$p(z, Q) = \underbrace{0.75z^3 + z^2 - 0.25}_{p_0} + \underbrace{q(z^2 - 1)}_{p_1} \quad (66)$$

```
pinit
p0=-0.25+0.5*z^2+z^3
p1=-1+z^2
ptopplot(p0,p1,[-0.1,0.1],exp(-j*(0:.005:2*pi)))
```



Obr. 20 - Příklad diskrétní stability

Rodina polynomů je robustně D-stabilní.

## 2.4 Multilineární neurčitosti

Neurčitý polynom

$$p(s, q) = \sum_{i=1}^n a_i(q) s^i \quad (67)$$

má *multilineární strukturu neurčitosti*, když všechny  $a_i(q)$  jsou multilineární funkce, tzn. fixujeme-li všechny složky  $q$  až na jednu (např.  $q_i$ ), pak je to afinní lineární funkce té zbývající složky  $q_i$ . Pro ilustraci řešíme příklady s multilineární neurčitostí následujícího typu.

Např.:

$$(q_1 + 3q_2q_3 + 2) + (5q_1q_3 + 3q_3 - 1)s + s^2 \quad (68)$$

Dále necht'

$$\mathbf{A}(q) = \sum_{i=1}^l \mathbf{A}_i q_i \quad (69)$$

je konstantní matice s nezávislou strukturou neurčitosti, tzn. že každý parametr je v jednom prvku maximálně jednou. Mějme například intervalovou konstantní matici. Potom její charakteristický polynom

$$p(s, q) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}(q)) \quad (70)$$

má multilineární strukturu neurčitosti.

Nyní vykreslíme množinu hodnot na vhodně zvoleném případě.

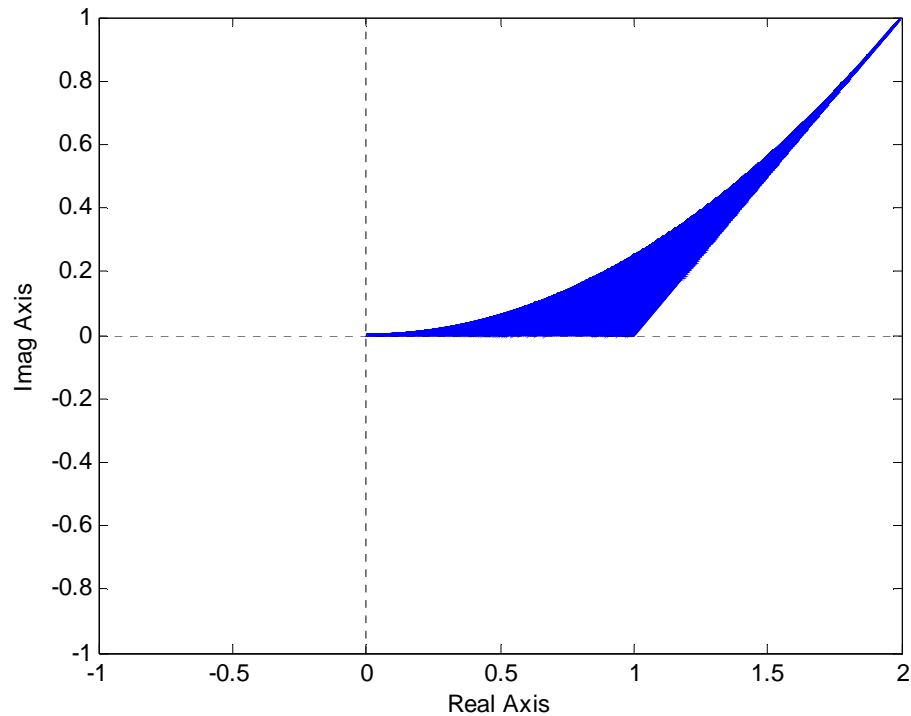
### Příklad 13:

Pro rodinu polynomů s multilineární neurčitostí

$$p(s, q_1, q_2) = s^2 + q_1 q_2 s + q_1 + q_2 + 1, \quad q_1, q_2 \in [0, 1] \quad (71)$$

vypočteme množinu hodnot pro  $\omega = 1$ . Použijeme funkce „vset“ a „vsetplot“.

```
pinit
p0=1+s^2;p1=1;p2=s;
q1=0:.001:1;q2=q1;
expr='p0+(q1+q2)*p1+q1*q2*p2';
V=vset(q1,q2,expr,p0,p1,p2,j);vsetplot(V)
```



Obr. 21 - Vykreslení množiny hodnot polynomu (71)

Množina hodnot rodiny polynomů s multilineární neurčitostí není konvexní a navíc její okraje nejsou jen obrazy hran, ale i vnitřních bodů.

#### 2.4.1 Věta o zobrazení (The Mapping Theorem)

Nejznámějším nástrojem pro analýzu robustní stability multilineárních neurčitých systémů je věta o zobrazení (*The Mapping Theorem*), kdy se předpokládá překrytí originální struktury konvexním obalem extrémů. Cenou je ale pouhá postačitelnost podmínky [1], [4], [9].

Nechť  $Q \subset R^l$  je kvádr s extrémí  $\{q_i\}$ , dále necht'  $f: Q \rightarrow R^k$  je multilineární funkce s oborem hodnot  $f(Q) = \{f(q) : q \in Q\}$ . Pak platí

$$\text{conv } f(Q) = \text{conv } \{f(q_i)\} \quad (72)$$

The Mapping theorem užijeme tak, že pokud  $p(s, q)$  je neurčitý polynom s koeficienty vektoru  $a(q)$ , který závisí multilineárně na parametru  $q$ , jež je brán z množiny  $Q$  s extrémí  $q_i$ , pak konvexní obal  $a(Q)$  se rovná konvexnímu obalu  $\{a(q_i)\}$ .

Příklad 14:

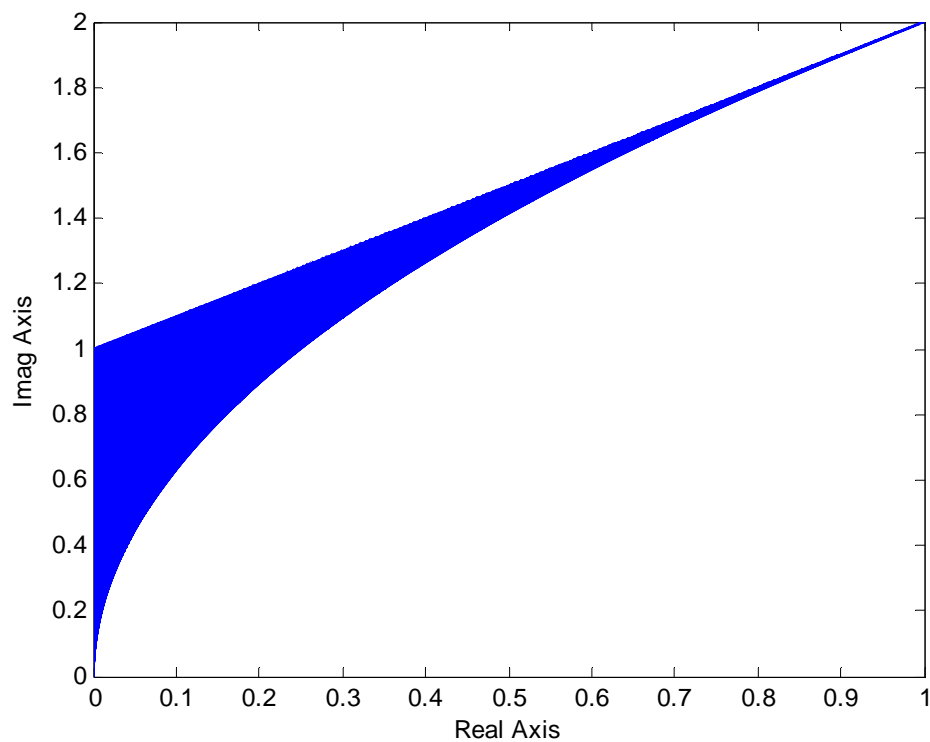
$Q$  je jednotkový čtverec v  $\mathbb{R}^2$ ,  $f(Q)$  je funkce se složkami:

$$x(q) = q_1 q_2$$

$$y(q) = q_1 + q_2$$

Obor hodnot vykreslíme pomocí

```
pinit
[X,Y]=meshgrid(0:.001:1, 0:.001:1);
plot(X(:).*Y(:),X(:)+Y(:))
```

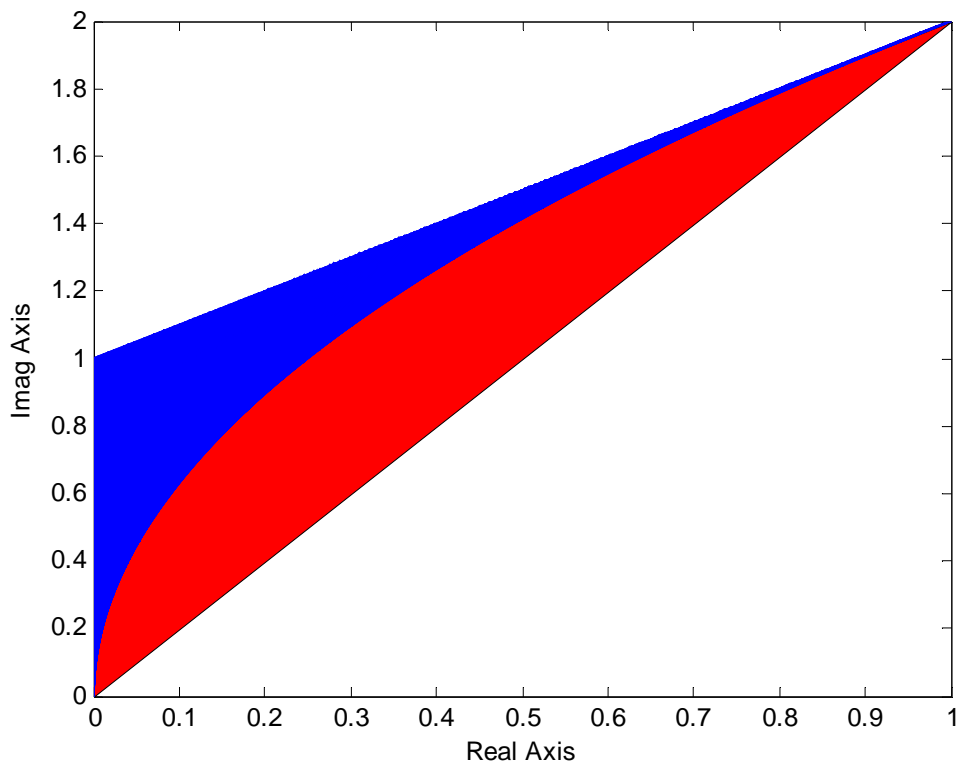


Obr. 22 - Vykreslení oboru hodnot k příkladu 14

Nyní přidáme konvexní obal

```
fill([0,1,0,0],[0,2,1,0],'r'),hold on
plot(X(:).*Y(:),X(:)+Y(:))
```





Obr. 23 - Vykreslení oboru hodnot spolu s konvexní obalem

V případě, že dokážeme rozumně nakreslit právě (nekonvexní) množiny hodnot, pak vlastně Mapping Theorem ani nepotřebujeme, protože můžeme o vyloučení nuly rozhodovat přímo. Vykreslení takových množin umí dobře zvládnout již zmíněné funkce „vset“, „vsetplot“ v Polynomial Toolboxu.

#### Příklad 15:

Mějme neurčitý polynom s multilineární neurčitostí

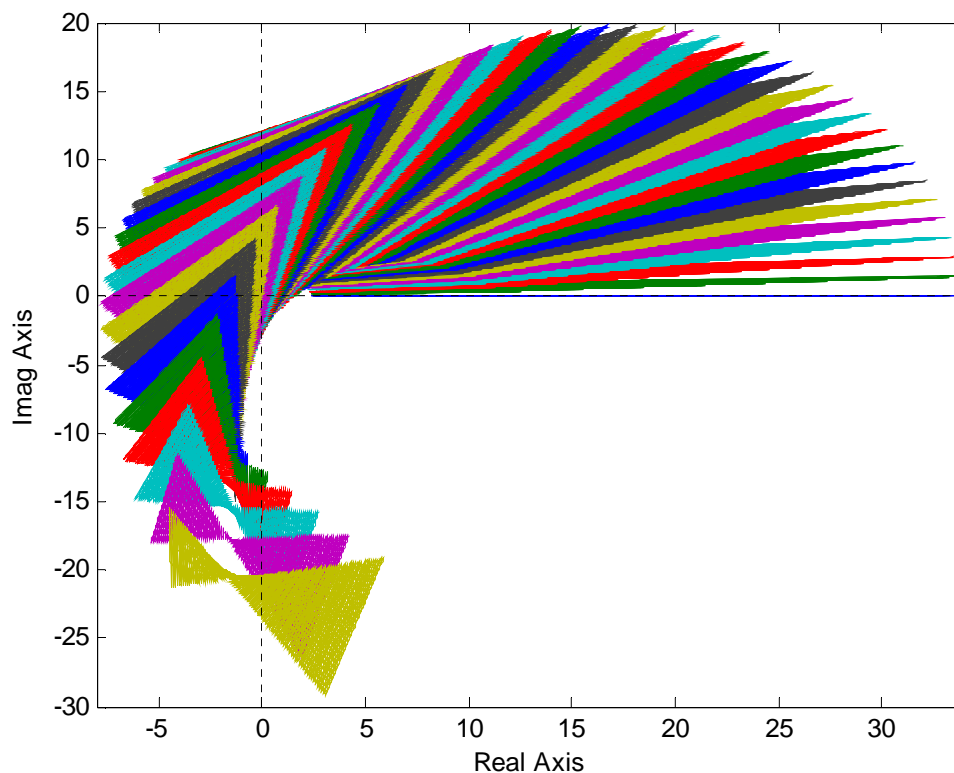
$$p(s, q_1, q_2) = p_0(s) + q_1 p_1(s) + q_2 p_2(s) + q_1 q_2 p_{12}(s) \quad (73)$$

sestavený ze čtyř pevně daných polynomů

$$\begin{aligned} p_0 &= 2,4 + 3,23s + 7,123s^2 + 3,2s^3 + 2s^4 \\ p_1 &= 8,213 + 2,98s + 2,765s^2 + 2s^3 \\ p_2 &= 2,187 + 7,465s + 1,835s^2 + 2s^3 \\ p_{12} &= 9,388 + 3,966s + 2s^2 \end{aligned} \quad (74)$$

Intervaly pro parametry  $q$  je  $q_1 \in [0,1]$  a  $q_2 \in [0,2]$ .

```
pinit
p0 = pol([2.4 3.23 7.123 3.2 2],4);
p1 = pol([8.213 2.98 2.765 2],3);
p2 = pol([2.187 7.465 1.835 2],3);
p12 = pol([9.388 3.966 2],2);
q1 = 0:0.01:1;
q2 = 0:0.01:2;
expr = 'p0 + q1*p1 + q2*p2 + q1*q2*p12';
V = vset(q1,q2,expr,p0,p1,p2,p12,j*[0:.05:2]);
vsetplot(V)
```



Obr. 24 - Vykreslení množiny hodnot pro polynomy (74)

Z obrázku lze jasně vidět, že množina hodnot obsahuje bod nula jako počátek komplexní roviny, a tak zde můžeme o rodině polynomů říci, že není robustně stabilní.

## 2.5 Nelineární neurčitosti

Nelineární neurčitosti jsou velmi komplikované případy. Mezi ně řadíme například neurčitosti polynomiální, obecné. Díky své složité struktuře tak analyzujeme robustní stabilitu dosti univerzálními nástroji jako jsou *vykreslení množiny hodnot (Value Set)* a *věta o vyloučení nuly (Zero Exclusion Condition)* [2], [9]. Jedná se zde o jedinou možnost, a to z toho důvodu, že teoretické metody pro řešení nelineárních neurčitostí díky své velké složitosti téměř neexistují. V praxi používáme Polynomial Toolbox, kde nám funkce „vset“ a „vsetplot“ dokáží vykreslit tak náročné struktury neurčitosti. Ze zobrazení pak lze velmi jednoduše rozpoznat, zda se jedná o rodinu polynomů robustně stabilní či nikoli.

### 2.5.1 Polynomiální neurčitost

Neurčitý polynom

$$p(s, q) = \sum_{i=1}^n a_i(q) s^i \quad (75)$$

má polynomiální strukturu neurčitosti, když všechny  $a_i(q)$  jsou polynomiální funkce. V praxi to vypadá tak, že jestliže máme polynom, u kterého by parametr  $a_i(q)$  obsahoval například druhou, třetí nebo vyšší mocninu, považovali bychom tuto neurčitost už za polynomickou.

Např.:

$$(4q_1^3 + q_2 + 1) + (6q_2^2 q_3 - 2q_1 q_2 + q_3) s + 3s^2 \quad (76)$$

Polynomickou strukturu můžeme převést na multilineární substitucí nových parametrů za každou mocninu. Tím se zjednoduší struktura, ale naroste počet parametrů a změní se tvar množiny  $Q$ , takže stejně není možné Mapping Theorem použít. Proto i zde se nabízí využití vykreslení množiny hodnot a aplikace věty o vyloučení nuly.

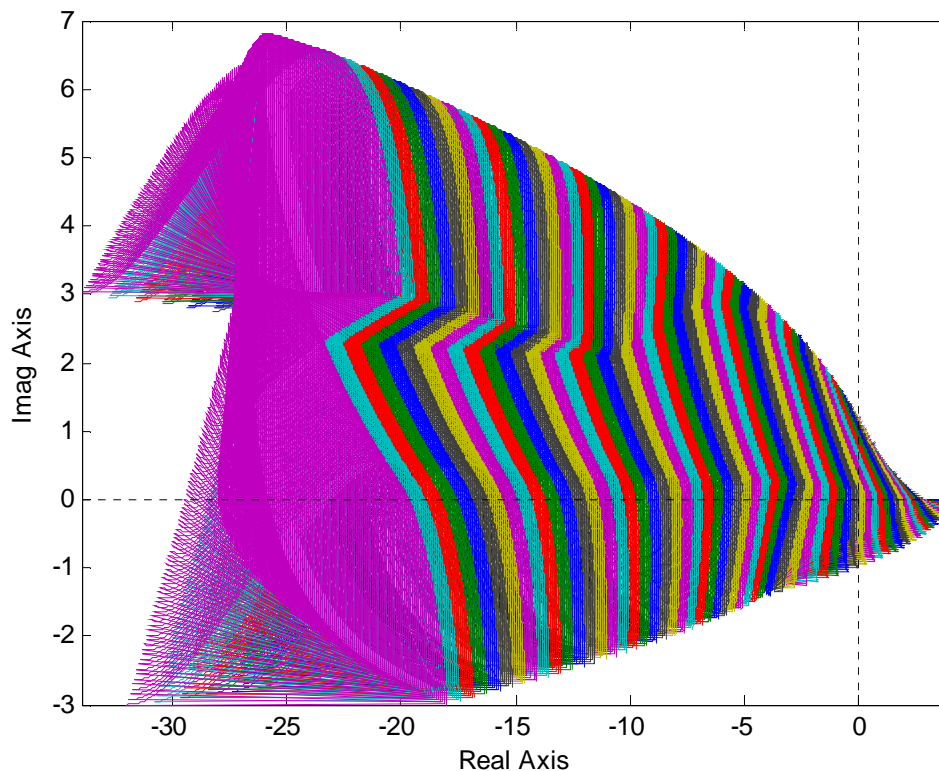
Příklad 16:

Neurčitý polynom má polynomiální strukturu neurčitosti

$$p(s, q_1, q_2) = p_0 + (q_1^3 - q_1^2) p_1 + (q_2^2 - q_2) p_2 + q_1 q_2^2 p_3 \quad (77)$$

Interval pro parametr  $q$  je brán pro  $q_{1,2} \in [-1, 1]$ .

```
pinit
p0 = 1 + 2*s + 3*s^2;
p1 = 1 + s;
p2 = 1 - s;
p3 = 1 - s + s^2;
q1 = -1:.005:1;
q2 = -1:.005:1;
expr = 'p0 + (q1^3 - q1^2)*p1 + (q2^2 - q2)*p2 + q1*q2^2*p3';
V = vset(q1,q2,expr,p0,p1,p2,p3,j*[0:.05:3]);
vsetplot(V)
```



Obr. 25 - Rodina polynomů s polynomiální neurčitostí

Tak jako u příkladu 15 v kapitole multilineárních neurčitostí i tady se nám vyskytuje stejný výsledek. Rodina polynomů opět není robustně stabilní.

### 2.5.2 Obecná neurčitost

U polynomů s obecnou neurčitostí se nenachází skoro žádná teorie. Můžeme zde spoléhat jen na větu o vyloučení nuly. Musíme však dbát nato, aby koeficienty byly spojité funkce na intervalech, které nás zajímají. V praxi to vypadá tak, že se u parametru  $a_i(q)$  mohou vyskytovat odmocniny, goniometrické funkce, absolutní hodnota, atd.

Např.:

$$\left(2 \cos(q_1^2) - \left| -7 \sin^2(q_2) \right| + 3\right) + \left(\sqrt{q_1} + 2q_3q_4^{2\sqrt{2}} + q_3^2\right)s + s^2 \quad (78)$$

Množinu hodnot rodiny polynomů s obecnou neurčitostí pak musíme detailně vykreslit, a to opět s pomocí již námi zmíněnými příkazy „vset, vsetplot“.

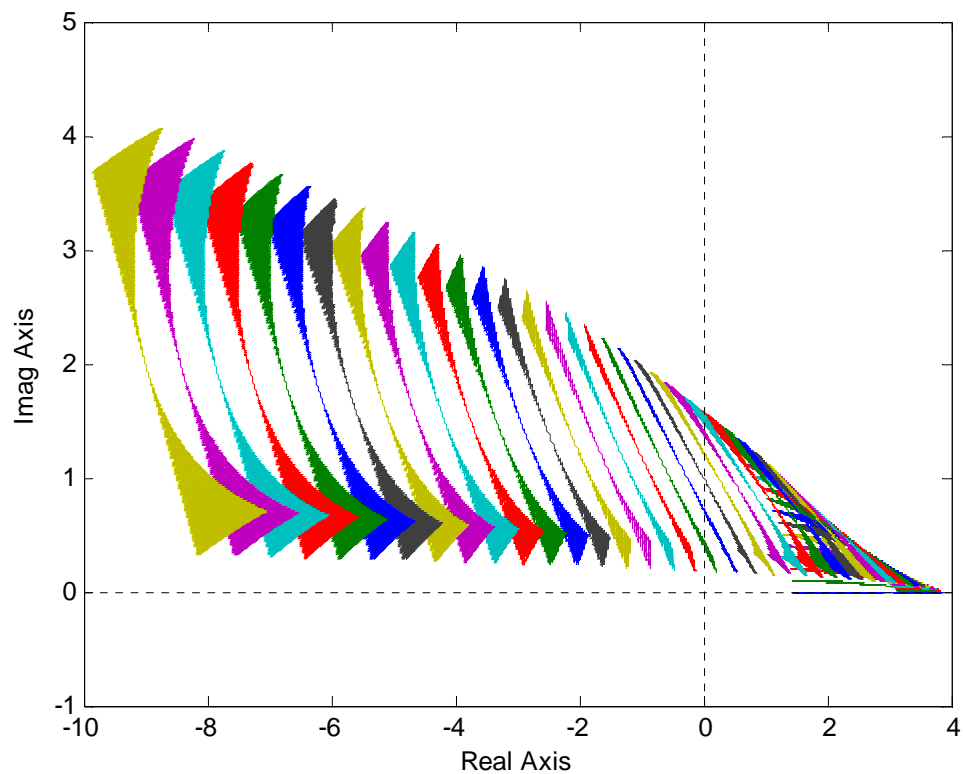
Příklad 17:

Polynom s obecnou neurčitostí vypadá následovně:

$$p(s, q_1, q_2) = p_0 + p_1 \sqrt{\cos(q_1 q_2)} + p_2 \cdot \sin(q_2) + p_3 \cdot \cos(q_1 q_2) \quad (79)$$

Parametry  $q_{1,2} \in [-1, 1]$ .

```
pinit
p0 = 1 + s + 2*s^2;
p1 = 1 + s;
p2 = 1 - s;
p3 = 1 - s + s^2;
q1 = -1:.005:1;
q2 = -1:.005:1;
expr = 'p0 + sqrt(cos(q1*q2))*p1 + sin(q2)*p2 + cos(q1*q2)*p3';
V = vset(q1, q2, expr, p0, p1, p2, p3, j*(0:.05:2));
vsetplot(V)
```



Obr. 26 - Vykreslená rodina polynomů s obecnou neurčitostí

Tentokrát máme průběh množiny hodnot vykreslen tak, že nula jako počátek komplexní roviny není zahrnut v množině hodnot. Navíc polynom obsahuje stabilní člen, a tak je možno říct, že tato rodina polynomů je robustně stabilní.

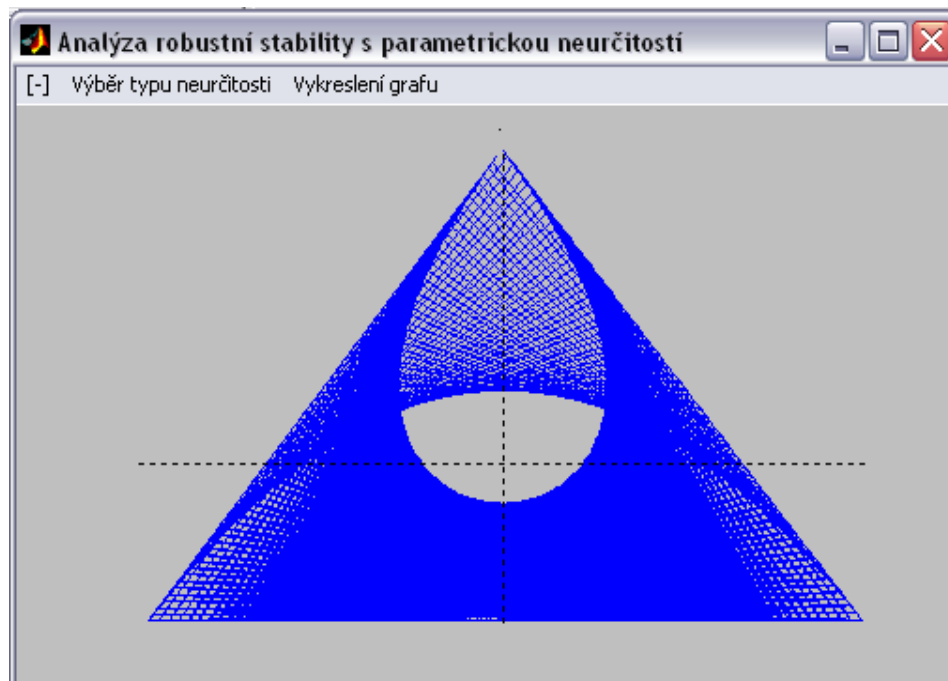
## **II. PRAKTICKÁ ČÁST**

### 3 GRAFICKÉ UŽIVATELSKÉ ROZHŘANÍ (GUI)

Pro analýzu robustní stability byl vytvořen program, díky němuž má uživatel možnost snadnější řešení vybraných problémů. Program byl navržen pro systémy s parametrickou neurčitostí a umožňuje zadat jednotlivé polynomy spolu se strukturou neurčitosti, vykreslení množin hodnot nebo například u jednoparametrové neurčitosti jen výpočet kořenů. Jeho součástí je i nápověda, která slouží jako pomoc při použití tohoto programu. Program byl vytvořen v prostředí Matlab spolu s Polynomial Toolboxem.

#### 3.1 Popis programu

Uživatel spustí program pomocí souboru *start.m*, který je umístěný v kořenovém adresáři GUI, kdy se objeví hlavní okno programu.



Obr. 27 - Hlavní okno programu

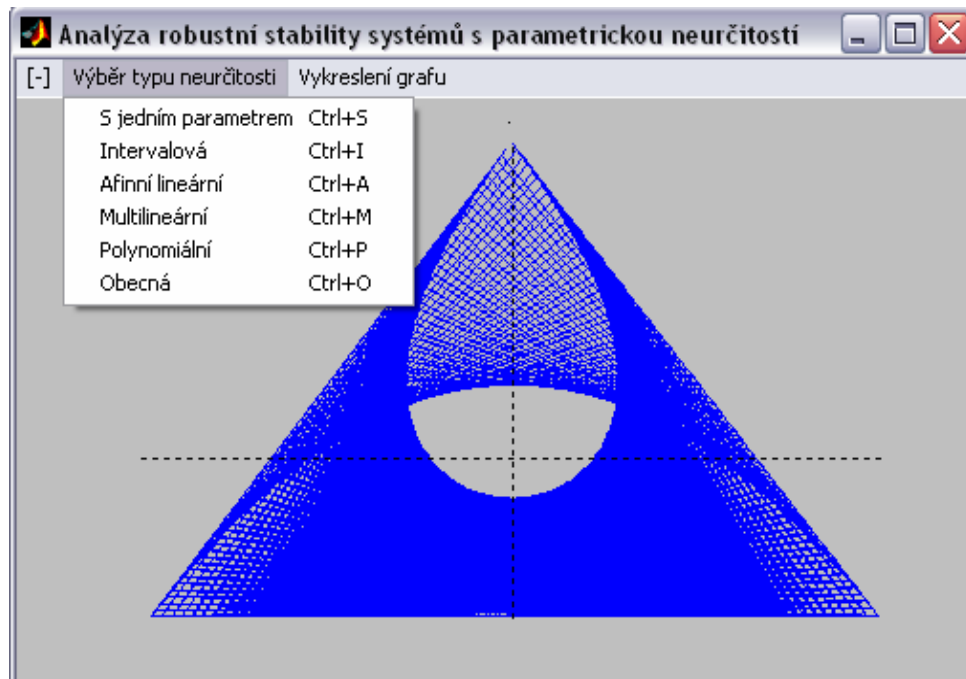
Hlavní okno obsahuje následující tlačítka:

- [-] obsahuje pole *Nápověda* a *Konec*
- *Výběr typu neurčitosti* obsahuje jednotlivé typy neurčitosti



- *Vykreslení grafu* obsahuje nabídku vykreslení nebo výpočtu pro předem zadaný typ neurčitosti

Po stisknutí tlačítka *Výběr typu neurčitosti* se nám zobrazí nabídka jednotlivých typů.



Obr. 28 - Nabídka *Výběr typu neurčitosti*

Po vybrání jednoho z nich se nám po kliknutí zobrazí okno pro zadání parametrů jako polynomy, intervaly frekvencí, struktury neurčitosti. Na následujícím obrázku je uvedeno například okno pro systém s *multilineární neurčitostí*.

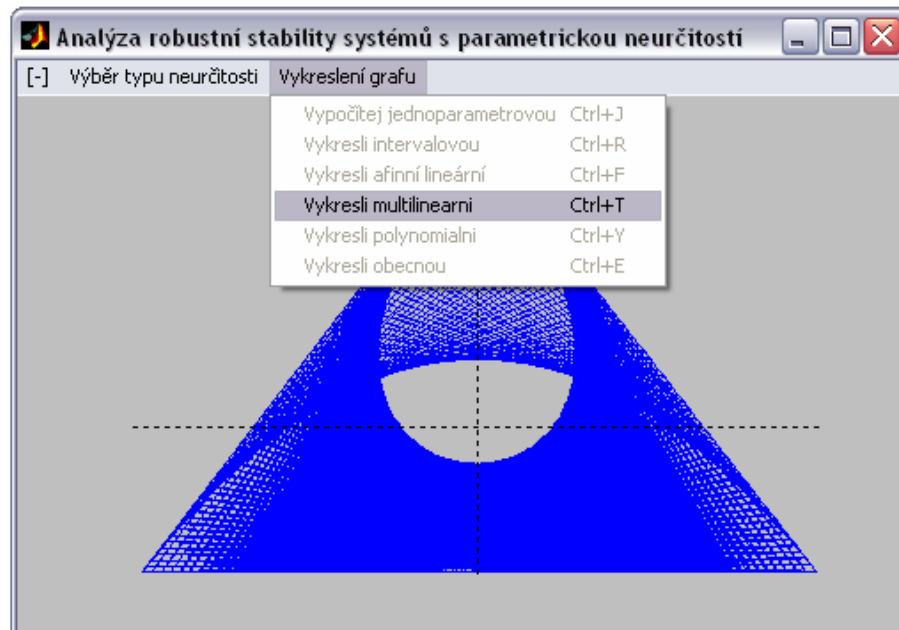
Zadání parametrů pro výpočet robustní stability systému s multilineární neurčitostí

Zadej polynom p0	[g0 g1 g2 g3 g4]
Zadej polynom p1	[h0 h1 h2 h3]
Zadej polynom p2	[i0 i1 i2 i3]
Zadej polynom p12	[j0 j1 j2]
Zadej interval pro parametr q1	[zacatek:krok:konec]
Zadej interval pro parametr q2	[zacatek:krok:konec]
Zadej interval pro frekvenci omega	[zacatek:krok:konec]
Zadej strukturu neurčitosti	$p_0 + q_1 \cdot p_1 + q_2 \cdot p_2 + q_1 \cdot q_2 \cdot p_{12}$

OK Zpět

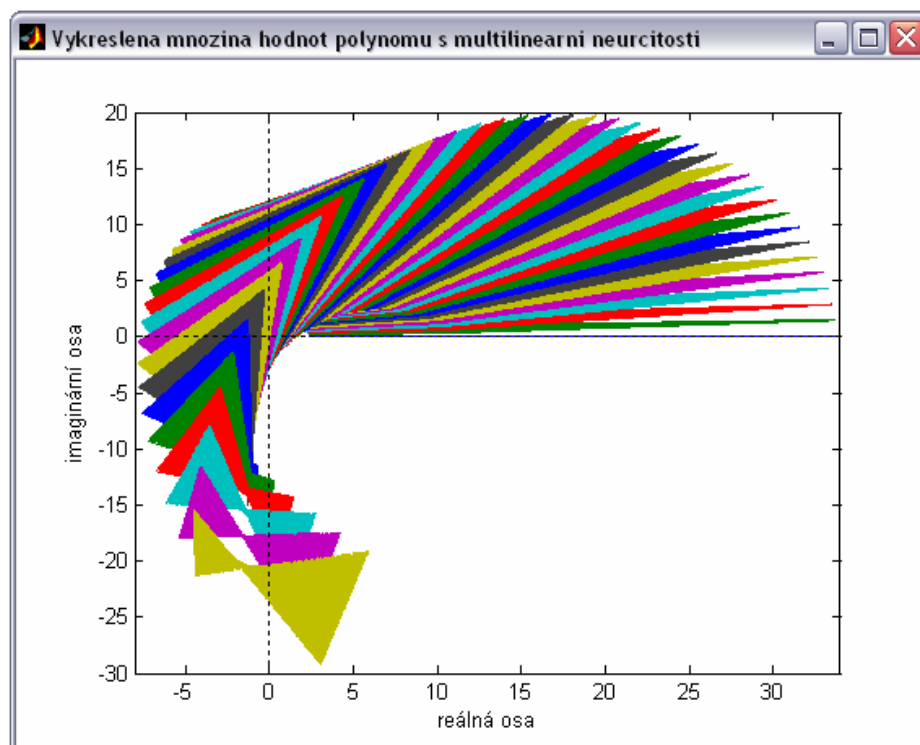
Obr. 29 - Okno pro zadání parametrů

Po zadání všech potřebných parametrů máme na výběr ze dvou tlačítek. Tlačítko *Zpět* nás vrátí zpátky do hlavního okna beze změn. Pokud si je uživatel jist svými zadanými parametry, kliknutím tlačítka *OK* je potvrdí a vrátí se do hlavního okna, kde musí kliknout na nabídku *Vykreslení grafu*.



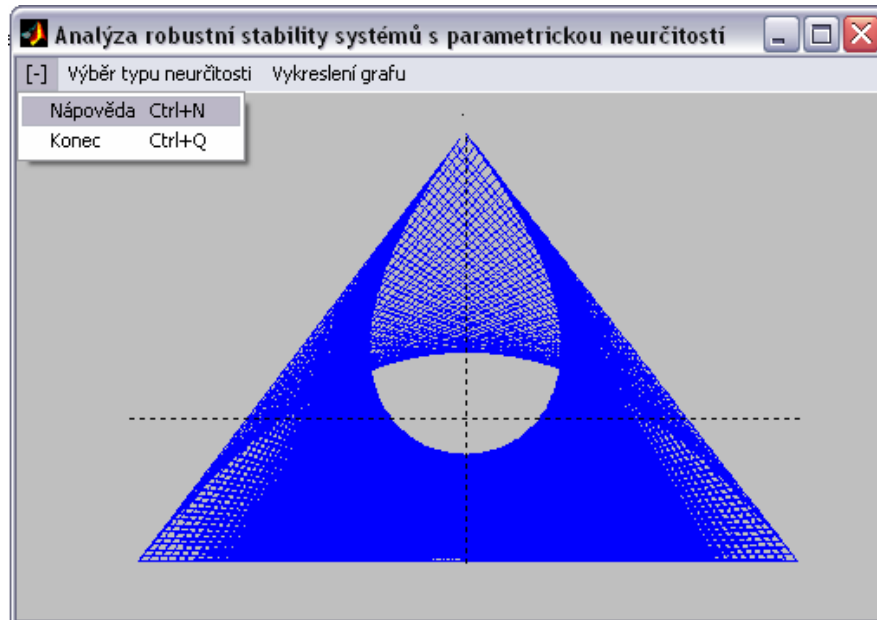
Obr. 30 - Nabídka Vykreslení grafu

Po stisknutí příslušné položky, v našem případě *Vykresli multilineární*, se nám zobrazí vykreslená příslušná množina hodnot.



Obr. 31 - Vykreslení grafu pomocí programu

V případě, že si uživatel neví rady, je zde položka [-], jejíž součástí je *Nápověda*. Pro ukončení celého programu stačí kliknout na položku *Konec* nebo klávesovou zkratkou Ctrl+Q.



Obr. 32 - Nabídka *Nápověda* a *Konec*

### Příklad 18:

Vezměme si případ neurčitosti s jedním parametrem, který se řešil v podkapitole 2.1.1.

Mějme tedy neurčitý polynom

$$p(s, q) = s^4 + (6 + q)s^3 + 12s^2 + (10 + q)s + 3 = s^4 + 6s^3 + 12s^2 + 10s + 3 + q(s^3 + s) \quad (80)$$

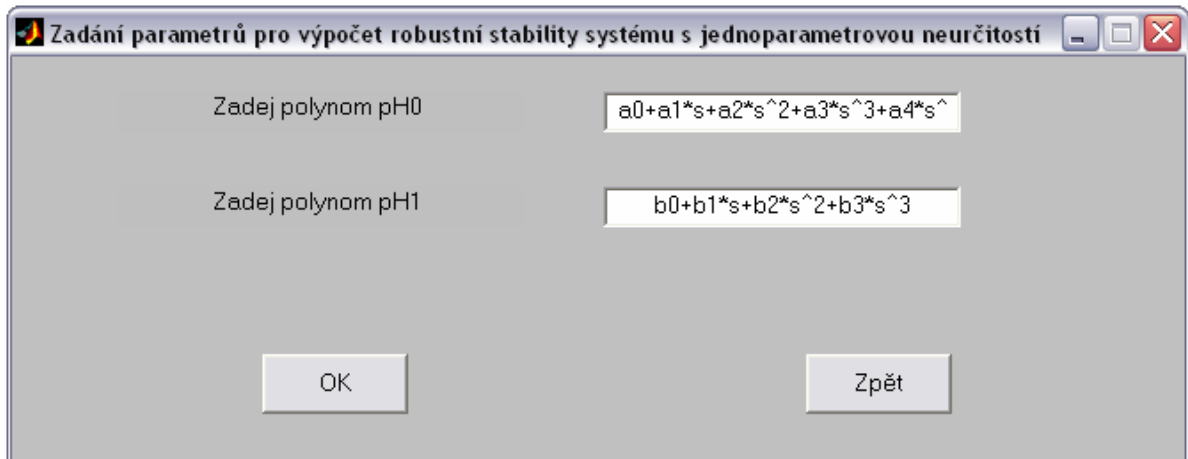
který po úpravě má tento tvar:

$$p_0 = s^4 + 6s^3 + 12s^2 + 10s + 3, \quad p_1 = q(s^3 + s) \quad (81)$$

Určete maximální interval stability  $Q_{\max} = \langle q_{\min}^-; q_{\max}^+ \rangle$ .

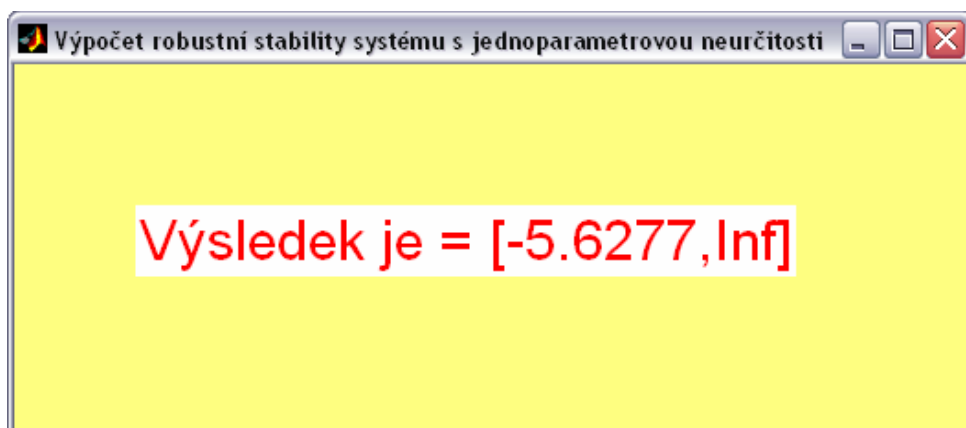
Výpočet pomocí programu:

Pomocí souboru *start.m* spustíme hlavní okna programu, ve kterém si klikneme na nabídku *Výběr typu neurčitosti*. Víme, že se jedná o neurčitost s jedním parametrem. Po stisknutí na tlačítko *S jedním parametrem* se nám zobrazí okno pro zadání parametrů.



Obr. 33 - Zadání parametrů u jednoparametrové neurčitosti

Po stisknutí tlačítka *OK* je potvrzeny zadané polynomy *pH0* a *pH1*. V druhé nabídce klikneme na položku *Vypočítej jednoparametrovou*. Po stisku se nám zobrazí výsledek.



Obr. 34 - Výsledek výpočtu

Z výsledku je jasné, že kladné reálné vlastní číslo neexistuje, proto platí, že  $q_{\max}^+ = +\infty$ . Minimální interval stability je  $q_{\min}^- = -5.6277$ .

## ZÁVĚR

Diplomová práce se zabývá problematikou, která má spojitost s řízením především jedno-rozměrných lineárních spojitých dynamických systémů s parametrickými neurčitostmi. Jelikož tato práce navazuje na mou bakalářskou práci Robustní stabilita systémů se složitější strukturou neurčitosti, je v úvodu vysvětlen rozdíl mezi pracemi spolu s literární řešením. Práce se nejprve věnuje podrobnějšímu vysvětlení základních pojmů související s robustní stabilitou a její problematikou v otázce analýzy robustní stability systémů s parametrickými neurčitostmi. Dále popisuje klasifikaci neurčitých systémů s již zmíněným typem neurčitosti spolu s nadefinovanými pojmy týkající se vyšetřování robustní stability systémů pro jednotlivé struktury neurčitosti. U každé struktury neurčitosti jsou uvedeny a na vhodně vybraném problému také představeny její typické analytické nástroje pro testování robustní stability. Pro snadnější řešení analýzy robustní stability systémů s parametrickými neurčitostmi je vytvořeno grafické uživatelské rozhraní (GUI) pomocí programu Matlab spolu s Polynomial Toolboxem, které uživateli velmi usnadňuje práci při řešení takových problémů. Popis programu je ukázán v praktické části této práce a obsahuje kromě něj i několik ilustrativních příkladů pro lepší představu o možnostech tohoto softwaru.

## CONCLUSION

Diploma thesis deals with problems, which has a direction with a control of single-input single-output linear continuous dynamic systems with parametric uncertainties. Because this thesis concures on my bachelor thesis Robust stability of systems with complicated structures of uncertainty, there is in a preface a definition of difference between the works together with a literary search. At first the thesis gives attention to more detailed explanation of basic notions, which are directived to robust stability and its problems in a question of robust stability analysis of systems with parametric uncertainties. Then thesis describes a classification of uncertain systems with foregoing type of uncertainty together with defined notions, which direct to testing of robust stability of systems for each structure of uncertainty. At every structure of uncertainty are stated and on suitable chosen problem also shown its typical analytic tools for robust stability analysis. For easier solution robust stability analysis with parametric uncertainties there is created graphical user interface (GUI) thanks to Matlab together with Polynomial Toolbox, which facilitate to a user very easy solutiior for that problems. Description of program is shown in a practical part of this thesis and it contains, except that description, several illustrated examples for better imagination about possibilities of this software.

**SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY**

- [1] Ackermann, J., *et al.*: Robust control - systems with uncertain physical parameters. Springer-Verlag London, Great Britain, 1993.
- [2] Barmish, B. R.: New Tools for Robustness of Linear Systems. Macmillan, New York, USA, 1994.
- [3] Bhattacharyya, S. P., Chapellat, H., Keel, L. H.: *Robust control: The parametric approach*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1995.
- [4] Henrion, D.: *Course on polynomial methods for robust control*. Merida, Venezuela [online]. [cit. 20. ledna 2008]. Dostupné z URL: <http://www.laas.fr/~henrion/courses/polyrobust/>.
- [5] Kučera, V.: Robustní regulátory, *Automa*, roč. 7, č. 6, 2001, str. 43-45.
- [6] Matušů, R.: Robust Kontrol of Systems with Parametric Uncertainty: An Algebraic Approach. Doctoral Thesis, Faculty of Applied Informatics, Tomas Bata University in Zlín, 2007.
- [7] Polyx: The Polynomial Toolbox [online]. [cit. 20. ledna 2008]. Dostupné z URL: <http://www.polyx.com>.
- [8] Šebek, M., Hromčík, M., Ježek, J.: Polynomial toolbox 2.5 and systems with parametric uncertainties. *Proc. 3rd IFAC Symp. Robust Control Design*, Prague, Czech Republic, 2000.
- [9] Šebek, M.: Robustní řízení [online]. PDF transparenty k předmětu „Robustní systémy“, ČVUT Praha [cit. 20. ledna 2008]. Dostupné z URL: [http://dce.felk.cvut.cz/ror/prednasky\\_sebek.html](http://dce.felk.cvut.cz/ror/prednasky_sebek.html).
- [10] Kawamura, T., Shima, M.: Robust stability of characteristic polynomials with monotonicity. *Nonlinear analysis, Theory, Methods and applications*. Vol. 30. No. 8. pp. 5109-5119, 1997.
- [11] Green, M., Limebeer, D. J. N.: Linear robust control, University of London, London, United Kingdom of Great Britain and Northern Ireland, 1995. [online], [cit. 20. ledna 2008]. Dostupné z URL: <http://www3.imperial.ac.uk/portal/pls/portal/portal/docs/1/7287085.PDF>.



- [12] Kwakernaak H.: Robust Control and Optimization Tutorial Paper. *Automatica*, roč. 29, č. 2, 1993, str. 255-273 [online]. [cit. 20. ledna 2008]. Dostupné z URL: [http://international.zcu.cz/\\_files/apls-cybernetics-p.doc](http://international.zcu.cz/_files/apls-cybernetics-p.doc).
- [13] Bokr, J., Jáneš V.: Neurčitost v popisu technologických procesů, *Automatizace*, roč. 48, č. 1, 2005, str. 20-24.

**SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK**

$A(q)$	Neurčitá matice.
$\alpha_i$	Sloupcový vektor.
$\alpha_i^T$	Transponovaná matice.
$\beta_i$	Skalární číslo.
$C$	Konvexní množina.
$\text{conv}\{C\}$	Konvexní obal konvexní množiny.
$\det$	Determinant.
GUI	Graphical User Interface. Grafické uživatelské rozhraní.
$H(p)$	Hurwitzova matice polynomu $p$ .
$\text{Im}$	Imaginární část komplexní roviny.
$K_i$	Kharitonovův polynom.
$\lambda_{\min}^-$	Minimální reálné záporné vlastní číslo.
$\lambda_{\max}^+$	Maximální reálné kladné vlastní číslo.
$P$	Rodina polynomů.
$p_0$	Polynom.
$P$	Polytop.
$q$	Vektor neurčitých parametrů.
$q_i$	Reálný neurčitý parametr.
$Q$	Množina omezujících parametry.
$\text{Re}$	Reálná část komplexní roviny.
$V(p, \omega)$	Množina hodnot intervalového polynomu.
$\omega$	Pevně daná frekvence polynomu.

## SEZNAM OBRÁZKŮ

<i>Obr. 1 - Vykreslení elipsoidu v rovině .....</i>	11
<i>Obr. 2 - Vykreslení množin <math>Q</math> .....</i>	11
<i>Obr. 3 - Geometrické místo kořenů charakteristického polynomu (13).....</i>	13
<i>Obr. 4 - Geometrické místo kořenů charakteristického polynomu (14).....</i>	14
<i>Obr. 5 - Hierarchie typů neurčitosti .....</i>	15
<i>Obr. 6 - Vykreslená množina hodnot pro <math>\omega=1</math> a <math>\omega=0.5</math>.....</i>	22
<i>Obr. 7 - Vykreslení tvaru množiny hodnot při změně frekvence <math>\omega</math> .....</i>	23
<i>Obr. 8 - Kharitonovy obdélníky polynomu (48) pro <math>\omega \in [0,1]</math>.....</i>	26
<i>Obr. 9 a) konvexní množina, b)nekonvexní množina .....</i>	27
<i>Obr. 10 - Konvexní obal .....</i>	28
<i>Obr. 11 - Příklady konvexních polygonů v <math>R^2</math> .....</i>	28
<i>Obr. 12 - Příklady nekonvexních hvězd v <math>R^2</math> .....</i>	28
<i>Obr. 13 - Platonova tělesa .....</i>	29
<i>Obr. 14 - Archimedova tělesa .....</i>	29
<i>Obr. 15 - Johnsonova tělesa .....</i>	29
<i>Obr. 16 - Příklad polytopu.....</i>	30
<i>Obr. 17 - Polytop v <math>R^3</math> .....</i>	30
<i>Obr. 18 - Příklad zobrazení hran.....</i>	31
<i>Obr. 19 - Množina hodnot polygonu.....</i>	33
<i>Obr. 20 - Příklad diskrétní stability.....</i>	37
<i>Obr. 21 - Vykreslení množiny hodnot polynomu (71) .....</i>	39
<i>Obr. 22 - Vykreslení oboru hodnot k příkladu 14.....</i>	40
<i>Obr. 23 - Vykreslení oboru hodnot spolu s konvexní obalem.....</i>	41
<i>Obr. 24 - Vykreslení množiny hodnot pro polynomy (74).....</i>	42
<i>Obr. 25 - Rodina polynomů s polynomiální neurčitostí.....</i>	44
<i>Obr. 26 - Vykreslená rodina polynomů s obecnou neurčitostí .....</i>	46
<i>Obr. 27 - Hlavní okno programu .....</i>	48
<i>Obr. 28 - Nabídka Výběr typu neurčitosti.....</i>	49
<i>Obr. 29 - Okno pro zadání parametrů .....</i>	50
<i>Obr. 30 - Nabídka Vykreslení grafu.....</i>	51
<i>Obr. 31 - Vykreslení grafu pomocí programu .....</i>	51

---

<i>Obr. 32 - Nabídka Náповěda a Konec.....</i>	<i>52</i>
<i>Obr. 33 - Zadání parametrů u jednoparametrové neurčitosti .....</i>	<i>53</i>
<i>Obr. 34 - Výsledek výpočtu .....</i>	<i>53</i>

## SEZNAM TABULEK

<i>Tab. 1 - Tabulka 1</i> .....	34
---------------------------------	----

## SEZNAM PŘÍLOH

PI: Přenosné médium CD-ROM s diplomovou prací ve formátu pdf a programem Analýza robustní stability systémů s parametrickou neurčitostí vytvořen v programu Matlab, Polynomial Toolbox a umístěn ve složce GUI.